

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/256094624>

Análisis Dinámico de Estructuras Tether Giroestabilizadas (Dynamic analysis of spin-stabilized tether structures)

Thesis · February 2006

DOI: 10.13140/RG.2.1.1425.0401

CITATIONS

0

READS

54

1 author:



Juan Valverde

Virtualmech

25 PUBLICATIONS 141 CITATIONS

SEE PROFILE

TESIS

Análisis Dinámico de Estructuras Tether Giroestabilizadas

por

JUAN S. VALVERDE GARCÍA

Ingeniero Industrial

presentada en la

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE
INGENIEROS**

de la

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

para la obtención del

Grado de Doctor Ingeniero Industrial

Sevilla, diciembre de 2005

**Análisis Dinámico de
Estructuras Tether Giroestabilizadas**

Sevilla, diciembre de 2005

Fdo.- José L. Escalona Franco
Director de Tesis

Fdo.- Jaime Domínguez Abascal
Director de Tesis

Fdo.- Juan S. Valverde García
Doctorando

a juan antonio, ana, las dos tanas, isabel e isa

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a los profesores José L. Escalona y Jaime Domínguez por su ayuda durante la realización de esta tesis, así como a los demás compañeros del Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales, en especial, Daniel García, Mercedes García, Sergio Muñoz, Carlos Navarro y Javier Martínez. No puedo olvidarme de dar las gracias a los profesores Emilio Freire y Jorge Galán del Departamento de Matemática Aplicada II, por sus valiosos consejos y por las enseñanzas que me han transmitido en el campo de los sistemas dinámicos. Además he tenido el privilegio de trabajar con los profesores Alan Champneys de la Universidad de Bristol y Gert van der Heijden del University College of London, a los que también debo agradecer su atención e inestimable ayuda.

A Jesus Mora, Gonzalo Fernández-Prada, Paco Valero, Curro Caparrós, Juanjo Medina, Pepe Pérez, Emilio Serrano, José y Juan González, Pascual Rocher, Inés Martín, Maite Tirado, Charo Mota, Paula, Ale, Samu... Gracias. La banda sonora la pusieron: los Clash, los Smiths, la Velvet, Pixies, Sonic Youth, Can, Eno, P.I.L., Ramones, Lee Perry, Dr. Alimantado, Hüsker Dü, Joy Division, New Order, Talking Heads, Television Personalities, Pata Negra y Veneno (cuanto gustan en el exilio), Kraftwerk, Plastikman, Maurizio, Stewart Walker, Monolake, Mouse on Mars, Matthew Dear, Jay Haze, Tresor, Aphex Twin, Thomas Brinkmann...

Sevilla, diciembre de 2005

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Tethers en el espacio. Antecedentes históricos | 1 |
| 1.2. Perspectiva sistemas tether | 4 |
| 1.3. Conceptos previos | 14 |
| 1.3.1. Leyes básicas | 14 |
| 1.3.2. Modificación del periodo orbital mediante tethers | 16 |
| 1.3.3. Estabilización gravitacional, el gradiente de gravedad | 19 |
| 1.3.4. Tethers electrodinámicos | 20 |
| 1.4. Short Electrodynamic Tether (SET) | 24 |
| 1.4.1. Descripción general del SET | 31 |
| 1.4.2. Estabilización por giro en la posición horizontal, giroestabilización | 32 |
| 1.4.3. Acciones externas sobre el SET, estudios previos | 41 |
| 1.4.4. Geometría y características del SET. Suposiciones previas sobre el modelo | 44 |
| 1.4.5. OEDIPUS, estudios precedentes sobre spinning tethers | 46 |
| 1.4.6. Motivación y objetivos | 48 |
| 1.4.7. El SET, un sistema dinámico completo | 52 |
| 2. Estudio de estabilidad del SET, el modelo de Jeffcott | 57 |
| 2.1. Análisis de estabilidad y continuación numérica | 57 |

| | |
|--|------------|
| 2.1.1. Análisis de bifurcación en ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes de un parámetro | 64 |
| 2.2. Modelo de Jeffcott de un rotor desequilibrado | 69 |
| 2.3. Influencia del amortiguamiento interno en un rotor desequilibrado | 72 |
| 2.4. El modelo de Jeffcott modificado geoméricamente no-lineal | 76 |
| 2.4.1. Cálculo de las fuerzas elásticas y de amortiguamiento no-lineales | 77 |
| 2.4.2. Forma final de las ecuaciones de movimiento | 87 |
| 2.4.3. Análisis de estabilidad del modelo de Jeffcott no-lineal ortótropo inicialmente recto | 91 |
| 2.4.4. Análisis de estabilidad del modelo de Jeffcott no-lineal ortótropo inicialmente desviado | 94 |
| 2.5. El modelo de Jeffcott modificado para simulación en el tiempo | 109 |
| 3. Análisis de bifurcaciones y estabilidad, modelo geoméricamente exacto | 111 |
| 3.1. Ecuaciones de Kirchhoff-Love para el SET | 114 |
| 3.1.1. Teoría de Cosserat de una curva 3D, el triedro director | 116 |
| 3.1.2. Cinemática de una barra 3D descrita por su línea media | 119 |
| 3.1.3. Ecuaciones de Kirchhoff-Love de equilibrio de fuerzas y momentos sobre la barra | 122 |
| 3.1.4. Modelado del amortiguamiento histerético | 125 |
| 3.1.5. Ecuaciones del SET en los ejes móviles | 131 |
| 3.1.6. Condiciones de contorno | 133 |
| 3.1.7. Adimensionalización de las ecuaciones | 135 |
| 3.2. Resolución de las ecuaciones de movimiento del SET | 138 |
| 3.2.1. Soluciones cuasi-estacionarias | 143 |
| 3.2.2. Estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias | 146 |
| 3.3. Resultados numéricos, diagramas de bifurcación y estabilidad | 149 |

| | |
|---|------------|
| 3.3.1. Métodos numéricos para la obtención de soluciones cuasi-estacionarias | 150 |
| 3.3.2. Métodos numéricos para determinar la estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias | 150 |
| 3.3.3. Diagramas de bifurcación para el tether inicialmente recto, $\kappa_2^i = 0$ | 155 |
| 3.3.4. Diagramas de bifurcación para el tether inicialmente desviado, $\kappa_2^i \neq 0$ | 159 |
| 3.3.5. Estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias, $\kappa_2^i = 0$ | 167 |
| 3.3.6. Estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias, $\kappa_2^i \neq 0$ | 174 |
| 3.3.7. Funcionamiento del SET en condiciones reales de operación | 178 |
| 4. Influencia de las fuerzas de Lorentz sobre el SET | 183 |
| 4.1. Ecuaciones de Kirchhoff-Love del TE en los ejes móviles | 189 |
| 4.2. Condiciones de contorno del TE | 190 |
| 4.3. Adimensionalización de las ecuaciones | 191 |
| 4.4. Resolución de las ecuaciones de movimiento | 192 |
| 5. Simulación dinámica del SET. Modelo multicuerpo | 199 |
| 5.1. Modelado del SET | 201 |
| 5.1.1. Coordenadas naturales y subestructuración | 201 |
| 5.1.2. Cinemática de una subestructura | 205 |
| 5.1.3. Expresiones de los modos estáticos y dinámicos | 209 |
| 5.1.4. Energía de deformación de una subestructura | 211 |
| 5.1.5. Energía cinética de una subestructura | 213 |
| 5.1.6. Potencia disipada en una subestructura y fuerzas de amortiguamiento | 218 |
| 5.1.7. Fuerzas externas de Lorentz sobre una subestructura. | 220 |
| 5.1.8. Ecuaciones de Lagrange de una subestructura. Aplicación de las restricciones cinemáticas | 221 |

| | |
|--|------------|
| 5.1.9. Ecuaciones de movimiento del SET. Acoplamiento de las subestructuras | 224 |
| 5.1.10. Resolución de las ecuaciones de movimiento del SET | 225 |
| 5.2. Resultados de la simulación dinámica multicuerpo | 227 |
| 6. Comparación de resultados | 235 |
| 6.1. Comparación de los diferentes diagramas de bifurcación y su estabilidad | 235 |
| 6.2. Comparación de las diferentes simulaciones dinámicas | 239 |
| 6.2.1. Caso A. Velocidad subcrítica, $\bar{\omega} = 0.8$ | 241 |
| 6.2.2. Caso B. Velocidad supercrítica, $\bar{\omega} = 0.95$ | 243 |
| 6.2.3. Caso C. Velocidad supercrítica, $\bar{\omega} = 1.1$ | 245 |
| 6.2.4. Caso D. Velocidad supercrítica, $\bar{\omega} = 1.5$ | 247 |
| 6.3. Comparación modelo geoméricamente exacto de Cosserat y modelo DSM | 248 |
| 7. Conclusiones finales y futuras líneas de investigación | 257 |
| 8. Contribuciones originales de esta tesis | 263 |
| A. (Capítulo 3) | 267 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Tethers en el espacio. Antecedentes históricos

Como en casi cualquier gran invento de nuestra era, la historia de los *tether* espaciales comienza más cerca de la ciencia ficción que de la realidad. En este caso, quizás, la carga de ciencia ficción que se encuentra detrás de la primera idea de tether sea incluso superior a la de otros inventos relevantes de los últimos siglos. Esto es así, probablemente, porque Konstantin Tsiolkovskii (1857-1935), reconocido inventor del concepto de tether espacial, era un amante de las novelas de Julio Verne. Durante gran parte de su vida Tsiolkovskii fue ignorado, y sus ideas fueron tratadas como “simple ciencia ficción”, hasta que la publicación, y posterior difusión, de un artículo en el que explicaba sus ideas, lo encumbró al Olimpo de la ciencia rusa, la *Academia de las Ciencias*. En cualquier caso, no parece que Tsiolkovskii separara ciencia ficción y ciencia, ya que publicó numerosas novelas de ficción, a la vez que trabajaba en sus ideas sobre el transporte espacial; hecho que probablemente le ayudara a lanzar pretenciosas hipótesis sobre la conquista del espacio, que pasaron de ser “simple ciencia ficción” a impulsos determinantes

en la carrera espacial.

En su obra de 1895 titulada “Un camino hacia las estrellas”, Tsiolkovskii describe el primer tether espacial a la vez que lanza algunas ideas más sobre otros posibles usos de este concepto [1, 2]. El más llamativo y conocido es el de la “Torre Espacial”, desarrollado por el autor tras quedarse impresionado con la visión de una recién construida Torre Eiffel, en un viaje a París. Con esta torre espacial especula sobre la idea de unir una masa orbital, que gira alrededor de la Tierra a la misma velocidad de rotación que ésta (órbita geoestacionaria), con un punto fijo, de forma que el conjunto de los dos sólidos, unidos por el tether, se moviera como un sólido rígido. Las fuerzas centrífugas que actúan sobre la masa orbital se encargarían de mantener el tether tenso. A la postre, esta tensión es la que impedía la construcción de dicha torre, ya que los materiales de aquella época, e incluso los actuales, no soportarían semejantes esfuerzos. Menos espectacular, pero quizás más útil en lo que a la astronáutica se refiere, es la idea de Tsiolkovskii de crear gravedad artificial en órbita por el giro alrededor de su centro de gravedad de dos satélites unidos por una gran cadena, por el efecto centrífugo de la rotación. Esta idea fue realizada y probada en órbita durante la unión del módulo Gemini-11 al cohete Agena en 1966 [3]. A lo largo de los años, se han desarrollado numerosas ideas basadas fundamentalmente en los escritos de Tsiolkovskii y otros pioneros en el uso de tethers. Para una completa descripción, en el libro de Beltsky y Levin [1] se desarrollan, por orden más o menos cronológico, dichas ideas con sus autores correspondientes.

Durante los párrafos anteriores se ha usado la palabra inglesa tether, cuya traducción al español, según el diccionario Merriam-Webster, podría ser: “objeto, como una cuerda o cadena, por el cual un animal se encuentra atado, de forma que su espacio se limita al círculo de radio la longitud de la cuerda”. En España, se han realizado varios estudios sobre este tipo de sistemas [4, 5, 6, 7, 8], de forma que se ha usado la definición *amarra espacial* para denominar a estos artilugios. También es común referirse a ellos como *cables espaciales*. Todas estas definiciones dan la

sensación de referirse a un objeto similar a una cuerda, lo que implica, en mecánica de los medios continuos e ingeniería mecánica, que dicho objeto tiene resistencia a tracción y no a flexión, compresión o torsión. Esta definición es correcta para la mayoría de los sistemas tether, en los que la resistencia a flexión y torsión es despreciable a efectos de cálculo. En el caso de esta tesis, como se verá más adelante, las resistencias a flexión y torsión son fundamentales en la dinámica del sistema bajo estudio, por lo que se decidió no usar ninguna definición que sugiriera un comportamiento mecánico tipo cuerda o cable. De esta forma, se optó por el uso de la palabra inglesa *tether*, que pasó de ser desconocida a bastante común en la jerga del grupo que trabajó en dicho sistema [9]. Dicho esto, la palabra tether se usará en adelante para referirse a este tipo de sistemas, de forma que no se hace ninguna suposición sobre la naturaleza del sólido, o por lo menos, no en nuestra lengua.

Desde el punto de vista físico, un tether se puede definir como una unión muy esbelta (cable, cuerda, barra); que puede ser modelada de forma unidimensional y que se utiliza en el espacio para unir diferentes módulos en órbita, ya sean satélites, naves u objetos de mayor envergadura, como estaciones espaciales. Incluso se han planteado sistemas tether en los que se une un módulo o satélite con un planeta [10]. Por extensión, se va a usar la palabra tether indistintamente, tanto para referirse tanto al elemento de unión física, como al conjunto resultante de dicha unión.

Numerosos estudios [1, 2] se han llevado a cabo en los últimos 40 años sobre posibles configuraciones tether, con diferentes aplicaciones (transporte espacial, producción de energía eléctrica en órbita, etc.) y por tanto, características muy dispares. La longitud y sección del tether dependerá de su uso, secciones menores en el caso exclusivamente mecánico, y más gruesas y complejas, en el caso de conducción de corriente eléctrica. Se han considerado, de forma teórica, tethers de gran longitud, alrededor de los 200 Km, pero solo han llegado a volar tethers de hasta 20 Km.

1.2. Perspectiva de los sistemas tether en el espacio

Como se ha apuntado en la introducción, un tether no es más que una unión física entre dos cuerpos. Esta idea de unión es tan comúnmente usada por el hombre y le ha sido tan útil a lo largo de su historia, que difícilmente podemos ser conscientes de su valor, ya que se ha convertido en una obviedad. Considerando que la aeronáutica y la carrera espacial tienen ya más de 100 años de edad, es sorprendente que este concepto tan sencillo, y a la vez práctico, no se haya empezado a explotar hasta mediados de los años 60. Sin embargo, desde entonces parece que este tipo de sistemas tether ha cobrado gran importancia en la carrera espacial siendo, a día de hoy, bastante importante la cantidad de éstos que orbita o ha orbitado en el espacio. Por lo tanto, se puede afirmar que este tipo de sistemas está cobrando la misma trascendencia y productividad en el espacio, que el ser humano le ha dado, durante la historia, en su vida cotidiana.

A continuación, se van a recapitular una serie de conceptos básicos y aplicaciones de los sistemas tether. Como se podrá observar, el medio en el que se va a trabajar: el espacio, condiciona bastante la dirección que se ha seguido a lo largo de los años, dentro, claro está, de las posibilidades físicas que confiere el concepto de tether. Sin embargo, también se podrá comprobar como la imaginación y la creatividad del ser humano son capaces de romper cualquier barrera, siendo la idea básica o concepto fundamental, que se esconde detrás de algunos de estos sistemas, poco más que brillante. En estas condiciones, la ciencia ficción y la realidad llegan a confundirse a veces, pero es entonces cuando el ser humano da un nuevo paso adelante en su interminable avance hacia el progreso.

El concepto de gravedad artificial es, históricamente, uno de los más interesantes y recurrentes de la carrera espacial. Por ejemplo, la falta de gravedad en largas misiones tripuladas puede ser una de las barreras más importantes a las que se enfrenta la astronáutica, de forma que este problema puede llegar a ser

el más difícil de solventar, de las complicaciones tecnológicas que puedan aparecer. Tsiolkovskii en 1895 [1] se atrevió a diseñar una estación espacial capaz de crear pseudo-gravedad por rotación. Efectivamente, si la estación se divide en dos secciones unidas por un largo tether, y el conjunto se hace rotar alrededor de su centro de gravedad, que estará en algún punto entre los dos módulos principales, la fuerza centrífuga f_c en cada una de las secciones de la estación, que dependerá de la velocidad de giro, hace las veces de gravedad. La figura 1.1 ilustra esta idea. La gravedad artificial creada por fuerzas centrífugas aparece también en la famosa película de ciencia ficción dirigida por Stanley Kubrick “2001: Una Odisea en el Espacio”. La nave con forma de doble rueda, que gira alrededor de su centro de gravedad, permite a los personajes caminar a lo largo de la circunferencia que define la rueda por la acción de la pseudo-gravedad inducida por la rotación. El guión de dicha película fue co-escrito por Arthur C. Clarke, uno de los escritores de ciencia ficción más famosos de la historia. Su formación académica en física y matemáticas debió influir decisivamente en su literatura.

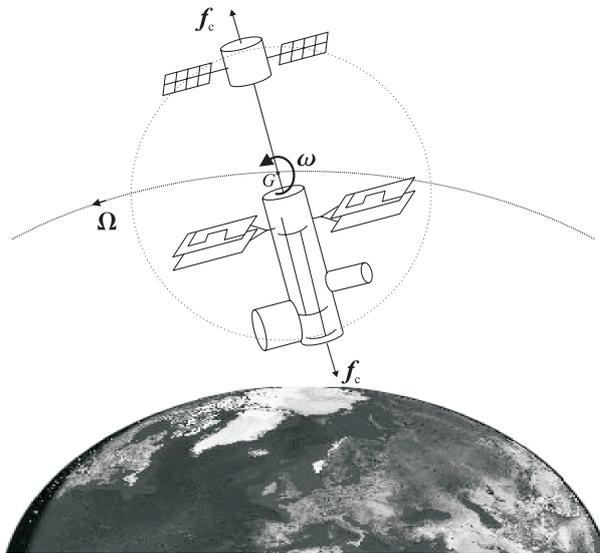


Figura 1.1: Gravedad artificial creada por rotación.

Chobotov presentó en 1963 [11] un análisis detallado del comportamiento en órbita del sistema tether mostrado en la figura 1.1. Más tarde, en 1966, se demostró el correcto funcionamiento de dicho sistema en órbita mediante la unión del módulo Gemini-11 al cohete Agena. La velocidad angular del par Gemini-Agena alcanzó $\omega = 13.5\Omega$ [3], donde Ω es la velocidad angular de giro del satélite alrededor de la Tierra. Configuraciones más complejas, formadas por varios módulos, han sido también propuestas con posterioridad [12].

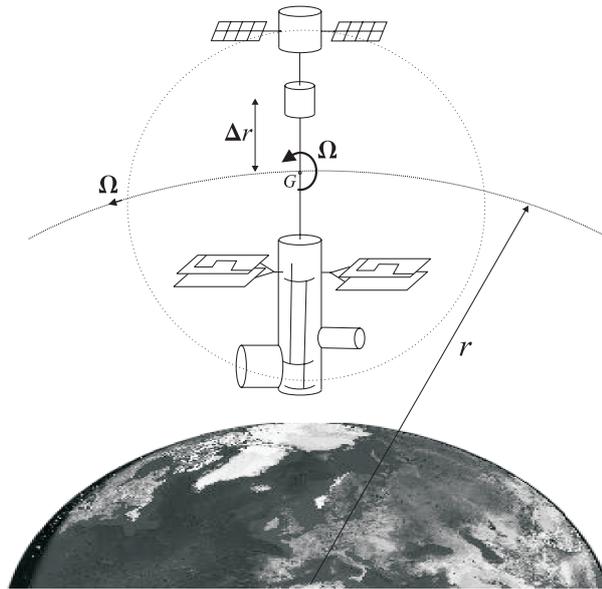


Figura 1.2: Sistema tether orientado radialmente por rotación síncrona.

La capacidad de crear microgravedad variable es otro de los efectos más buscados en el espacio. Para ello es importante que el sistema tether rote alrededor de su centro de gravedad de forma síncrona, es decir, a la misma frecuencia con la que da vueltas alrededor de la Tierra. De esta forma, el sistema tether estará orientado radialmente con respecto a la Tierra [1] (figura 1.2). Este efecto es comúnmente conocido como *estabilización gravitacional*. En estas condiciones, estando el sistema en órbita, las fuerzas centrífugas, debidas a la rotación alrededor de la Tierra,

se compensan con la fuerza de atracción gravitacional en el centro de masas G . Sin embargo, fuera del centro de masas, estas fuerzas no están compensadas, de modo que esta diferencia crea una gravedad aparente en el sistema.

Este modo de operación fue demostrado con éxito en 1966 durante el vuelo Gemini-12, en el que esta astronave se conectaba mediante un tether al cohete Agena, tal y como hiciera el Gemini-11 [1]. Siendo r el radio geocéntrico del centro de masas G del sistema, y g la gravedad artificial que existe en este punto, es fácil demostrar que el incremento de gravedad que sufre un cuerpo al desplazarse Δr , a lo largo del tether, viene dado aproximadamente por [2]

$$\Delta g = \frac{3\Delta r}{r}g. \quad (1.1)$$

La importancia de esta microgravedad en órbita es grande, mejorando las condiciones de vida a bordo (objetos flotantes, uso natural del agua, etc.) y siendo determinante en algunos procesos biológicos y tecnológicos de última generación [1, 2]. Además, la microgravedad facilita la transferencia de líquidos en órbita, de forma que puede ser utilizada para conducir combustible desde un recipiente externo hasta la nave en cuestión, para que el combustible se mantenga lejos del módulo principal del sistema tether. En el caso de la figura 1.2, el módulo intermedio con microgravedad Δg contendría el combustible, de forma que la apertura de una simple válvula permitiría el flujo en la dirección correcta. Los sistemas tether estabilizados gravitacionalmente han sido objeto de multitud de posibles aplicaciones, además de las anteriormente descritas: muelles de descarga separados de la nave principal por un tether, para disminuir el peligro de colisión; interferómetros para observar el Sol y los planetas; colectores solares regularmente dispuestos a lo largo de un tether; etc. Puede encontrarse más información acerca de estos y otros sistemas tether en el trabajo de Cosmo et al. [2] y en el de Beletsky et al. [1].

La exploración de las capas más altas de la atmósfera es una de las cuentas pendientes de la ciencia. Alrededor de los 100 km de altitud, la atmósfera está demasiado enrarecida para ser transitada con una aeronave común, pero al mismo tiempo, es demasiado densa para sistemas que normalmente operan en el espa-

cio exterior. Nuevamente, un sistema tether puede ser la solución. La figura 1.3 muestra un esquema de como un objeto de medida y adquisición de datos puede ser suspendido mediante un tether desde una astronave que orbita en el espacio. Además de la función de medición, el objeto suspendido puede hacer las veces de prototipo para estudiar la aerodinámica a estas alturas de la atmósfera, convirtiendo el vuelo en una prueba equivalente a un túnel de viento [1, 2].

Otra de las aplicaciones más ambiciosa y a la vez más lejana en cuanto a su ejecución tecnológica, es el transporte espacial mediante sistemas tether. Aludiendo a la transferencia de energía y cantidad de movimiento que es posible establecer entre dos satélites unidos por un tether, se han lanzado ideas más o menos abordables desde el punto de vista tecnológico, y de lo más imaginativas. La clave de estos sistemas es el ahorro energético que conlleva el uso de tether en lugar de los comunes propulsores alimentados por combustible [13]. El esquema de la figura 1.4 muestra las distintas fases del lanzamiento de un módulo desde una nave en órbita. En el momento en que el tether deja de actuar (se corta), el módulo lanzado está en el apogeo de su órbita, mientras que la lanzadera queda en el perigeo de la suya.

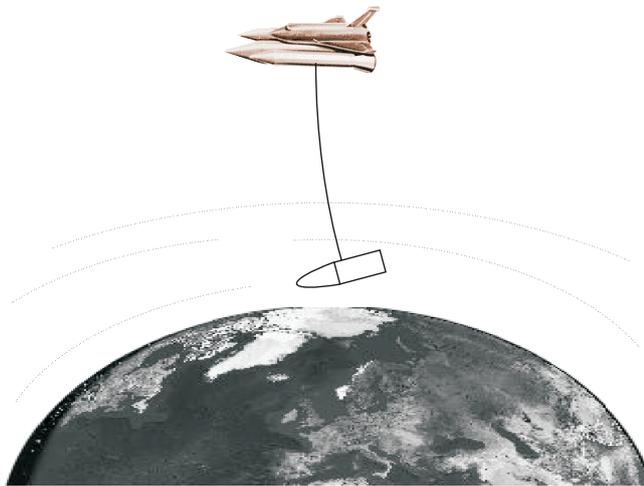


Figura 1.3: Cápsula experimental en capas altas de la atmósfera.

Este hecho puede ser aprovechado para posicionar la lanzadera en condiciones de reentrada en la atmósfera (pierde cantidad de movimiento). Como se observa en la figura, el tether se despliega y el conjunto entra en un movimiento de libración (vibración pendular en el plano que contiene el sistema), de forma que el módulo es lanzado cuando adquiere la mayor de cantidad de movimiento a lo largo de la libración.

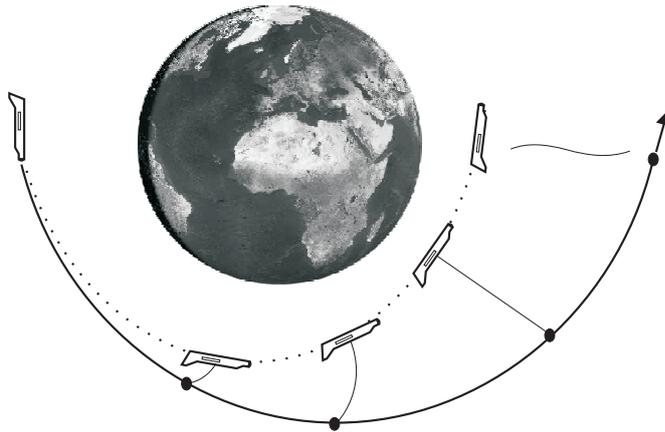


Figura 1.4: Lanzamiento en órbita de un satélite.

La misma idea puede ser aplicada para relanzar y aumentar el radio orbital de una lanzadera, cuando ésta se desprende del tanque de combustible vacío que ha alimentado su despegue. En este caso, usando la figura 1.4, el objeto que pierde órbita sería el tanque de combustible y el que la gana, la propia lanzadera. Normalmente, el tanque vacío es eliminado en órbita, de manera que su cantidad de movimiento es desaprovechada.

Otra posible aplicación de la misma idea es la captura de astronaves en órbita, mediante un tether, desde un puerto o estación espacial. Como se ve en la figura 1.5, la estación despliega el tether que toma contacto con la astronave en el apogeo de su órbita. A partir de este momento, el tether es replegado, atrayendo a la nave recibida hacia el puerto. En esta maniobra la estación, o puerto, pierde cantidad

de movimiento y por lo tanto órbita, que será recuperada cuando la nave visitante sea lanzada del modo representado en la figura 1.4.

Algunas de las ideas propuestas dentro del campo del transporte rozan la cien-

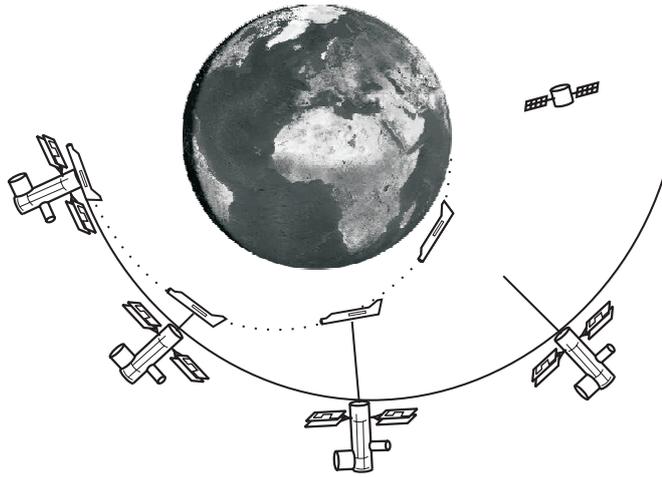


Figura 1.5: Estación-puerto, recepción mediante tether.

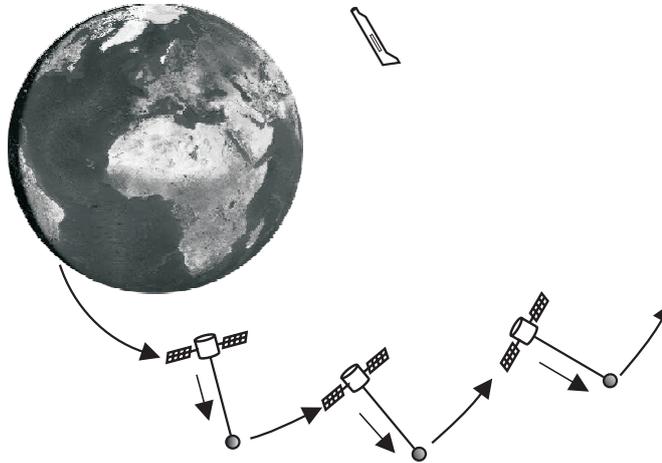


Figura 1.6: Transporte de carga mediante el "escalador espacial".

cia ficción, aunque nunca se pueda descartar su ejecución a largo plazo. El “escalador espacial” tiene por misión el transporte de cargas en el espacio. Estaría formado por varias fases; cada una de ellas son dos módulos unidos por un tether como se ve en la figura 1.6. Una vez que la carga alcanza el primer sistema tether, su órbita va siendo aumentada con un gasto mínimo de energía [2, 13]. La energía consumida en elevar la carga a lo largo del tether proviene de la energía orbital del sistema. Por lo tanto, una vez la carga es elevada una fase, ese sistema tether pierde órbita. Una de las posibles aplicaciones de los tether electrodinámicos [1, 2], que se estudian en esta tesis, es el relanzamiento de las fases para que vuelvan a su órbita inicial.

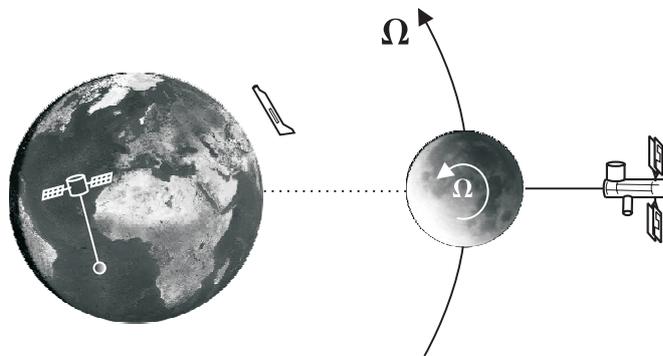


Figura 1.7: “Escalador espacial lunar”.

Un elevador espacial un tanto especial sería el “elevador espacial lunar” [10], en el que uno de los módulos del par es la Luna (figura 1.7). En este caso se aprovecha que la Luna orbita de manera síncrona alrededor de la Tierra. Por lo tanto, si se ancla el tether a un punto fijo de la Luna, y el otro módulo del par se sitúa en una órbita geosíncrona de la Luna, el conjunto es equivalente al sistema tether radialmente orientado que se presentaba en la figura 1.2. El concepto es análogo a la “torre celestial” de Tsiolkovskii, en la que un módulo en órbita geosíncrona de la Tierra (42166 km de radio orbital) se conecta con ésta mediante un gran tether

de sección variable [1, 2]. La longitud de este sistema hace imposible su ejecución con los materiales existentes en la época de Tsiolkovskii, y aún en la actual. Sin embargo, se ha comprobado que el tether necesario para llevar a cabo el elevador lunar está dentro de lo que se considera “tecnológicamente posible”.

Se podría seguir la larga lista de ideas con el “skyhook” [13], sistema tether que rota asíncronamente con la Tierra y se aproxima a esta con velocidad nula, para recoger objetos; el “elevador marciano” [14], que uniría sistemas tether a los satélites de Marte, Deimos y Phobos; etc. También han sido objeto de estudio en los últimos años las llamadas constelaciones tether, en las que varios módulos (tres o más) se unen en formas poligonales (anillos, pentágonos, etc.), o en formas que permitan la estabilidad orbital de dichos sistemas [15].

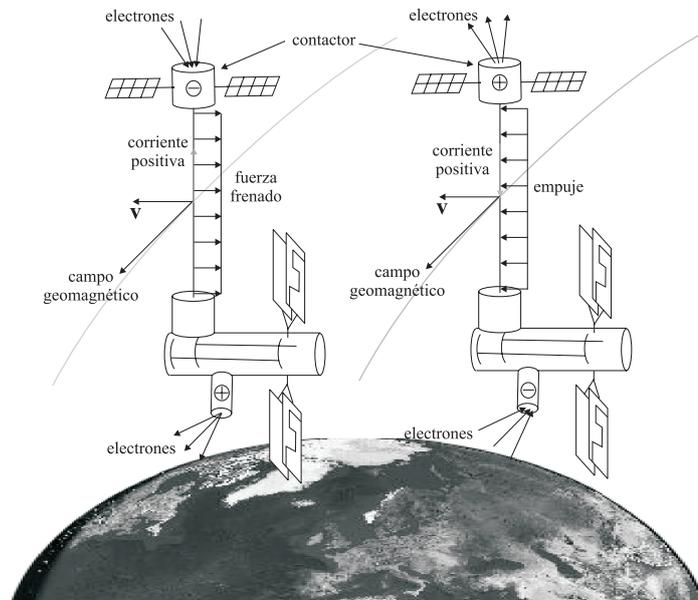


Figura 1.8: Tether electrodinámico.

De especial interés en los últimos 20 años han sido los tether electrodinámicos. Estos tethers, al ser conductores de electricidad, interactúan con el campo geo-

magnético, permitiendo que una corriente eléctrica fluya a lo largo de su longitud. El sistema tether viaja en el seno del campo geomagnético a su velocidad de órbita v_c , de forma que se induce una diferencia de potencial o fuerza electromotriz entre sus extremos (ley de Faraday). El circuito se cierra a través del plasma de la Ionosfera mediante unos dispositivos llamados contactores que facilitan el contacto tether-plasma captando electrones de este último [14, 16, 2, 1]. En la figura 1.8 se muestra un tether lanzado desde una estación espacial, quedando el conjunto estabilizado gravitacionalmente en la posición radial. Existen dos posibilidades, mostradas en la figura, dependiendo del sentido en el que se induzca la corriente a lo largo del tether. En el caso de la izquierda, la corriente fluye en el sentido positivo de la fuerza electromotriz. De esta forma, la energía producida puede ser aprovechada a bordo. En estas condiciones, aparece una fuerza de Lorentz que se opone al movimiento del sistema; fuerza de frenado. Por lo tanto, se está transformando energía orbital en energía eléctrica. En el esquema derecho de la figura 1.8, la corriente se induce en sentido opuesto a la fuerza electromotriz, por lo que se está consumiendo energía eléctrica dentro del sistema. Por su parte, la fuerza de Lorentz, que aparece en estas condiciones, impulsa al sistema aumentando su velocidad (empuje). Así, se está transformando energía eléctrica en energía de órbita. Por lo tanto, el sistema tether electrodinámico se puede comportar como un generador reversible, que varía según las necesidades del sistema en cada caso. Los sistemas tether electrodinámicos operan en las órbitas denominadas LEO (Low Earth Orbit), es decir, con radios de órbita de entre 100 y 2000 km. La razón es obvia, necesitan el plasma de la Ionosfera para cerrar el circuito eléctrico. A partir de esta idea se han propuesto numerosas configuraciones diferentes de sistemas tether electrodinámicos. A una altitud de 400 km (LEO), la diferencia de potencial inducida ronda los 2 kV/km, por lo tanto, en un tether de 10–20 km de longitud, la fuerza electromotriz ronda los 2–4 kV, que con una corriente de varios amperios genera potencias del orden de decenas de kW. También se ha desarrollado un sistema tether electrodinámico reversible, que funciona como generador de

energía eléctrica u orbital, según sea necesario. En las zonas en las que el satélite está expuesto al Sol, almacena energía mediante paneles solares. Cuando éste se encuentre en la zona de sombra de la Tierra, se usa el tether para seguir generando energía [1]. Además, los tether electrodinámicos pueden ser usados como generadores y receptores de ondas de radio, funcionando como antenas [2].

El SET, objeto de estudio en esta tesis, es un sistema tether electrodinámico como los descritos anteriormente, pero con ciertas particularidades que lo hacen diferente de los “normales”, estabilizados gravitacionalmente en la posición radial. Pero antes de presentar el SET, se van a exponer una serie de conceptos que servirán, sin duda, para aclarar algunos puntos esenciales en el funcionamiento de éste.

1.3. Conceptos previos

En este apartado, se van a aclarar ciertos conceptos básicos sobre dinámica orbital y más específicamente sobre dinámica de tethers. Algunos de ellos pueden resultar obvios, sin embargo, su importancia a la hora de comprender el funcionamiento básico de estos sistemas obliga, por lo menos, a realizar una breve introducción.

1.3.1. Leyes básicas

La ley de la Gravitación Universal fue enunciada por Newton de la siguiente manera: “todos los objetos se atraen unos a otros con una fuerza cuya dirección viene dada por la línea de unión entre los centros de masas de los sólidos y cuyo módulo es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros”. La dependencia de esta fuerza con la inversa del cuadrado de la distancia, se deduce directamente de las Leyes de Kepler sobre el movimiento planetario, la Leyes de Newton, y, la dinámica del movimiento circular uniforme. De esta forma, el módulo de la fuerza gravitatoria

que actúa sobre un cuerpo que orbita en el espacio viene dada por

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} = \frac{\mu m}{r^2}, \quad (1.2)$$

donde r es el radio orbital, es decir, la distancia entre el centro de gravedad del cuerpo y el centro de la Tierra, m es la masa del cuerpo orbital, M es la masa de la Tierra y G , es la constante de la Gravitación Universal. El producto $G \cdot M$ se suele renombrar como μ , según se indica en la expresión (1.2).

Si se considera un cuerpo que sigue una trayectoria circular alrededor del centro de la Tierra, teniendo en cuenta que las únicas fuerzas significativas que actúan sobre él son la fuerza de la gravedad, F_g , y la fuerza centrífuga, F_c , se cumple la siguiente igualdad

$$F_g = F_c \Rightarrow \frac{\mu m}{r^2} = m\Omega^2 r = m \frac{v_c^2}{r}, \quad (1.3)$$

donde $\Omega = v_c r^{-1}$ es la velocidad angular de rotación o frecuencia orbital y v_c , la velocidad orbital o circular. Del equilibrio de fuerzas (1.3) se obtiene que la velocidad orbital

$$v_c^2 = \frac{\mu}{r}, \quad (1.4)$$

es independiente de la masa del cuerpo. De esta forma, la frecuencia orbital tendrá la siguiente expresión

$$\Omega^2 = \frac{\mu}{r^3}, \quad (1.5)$$

siendo el periodo orbital

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}}. \quad (1.6)$$

Teniendo en cuenta que en la superficie terrestre $F_g = mg$, al sustituirlo en la ecuación (1.2) se comprueba fácilmente que la constante μ se puede expresar en función de g y el radio de la Tierra, R_T , de modo que $\mu = gR_T^2$, donde el radio de la Tierra es aproximadamente $R_T = 6378$ Km.

Se dice que un cuerpo está en una órbita *geosíncrona* de la Tierra cuando su frecuencia orbital $\Omega = \Omega_T = 7.2921158 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, donde Ω_T es la velocidad de giro

de la Tierra sobre sí misma. El radio de dicha órbita se obtiene de la ecuación (1.3)

$$r_g = (gR_T^2\Omega_T^{-2})^{\frac{1}{3}} \simeq 42166 \text{ km.} \quad (1.7)$$

Si el cuerpo orbital en cuestión, que se encuentra en la órbita geosíncrona, además se sitúa sobre el plano ecuatorial de la Tierra, se encuentra en reposo con respecto a ésta. En estas condiciones, se dice que el cuerpo está en una órbita *geoestacionaria* (GSO). Por debajo de la órbita geosíncrona, las órbitas se dividen entre LEO, entre los 100-2000 Km de radio; y MEO (del inglés medium-earth-orbit), con radios de órbita intermedios entre LEO y GSO, es decir, alrededor de los 10.000 Km.

1.3.2. Modificación del periodo orbital mediante tethers

Una de las aplicaciones que mejor ilustra la utilidad de los tethers es la de modificación del periodo orbital, mediante la que se rompe la tercera ley de Kepler, permitiendo órbitas de periodo distinto a $2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$.

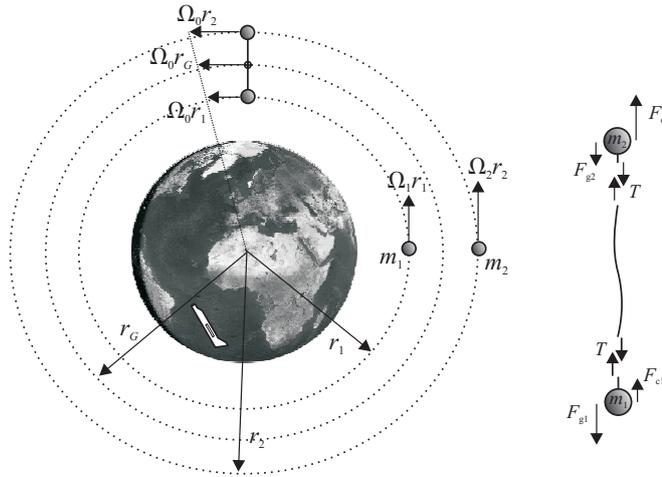


Figura 1.9: Modificación del periodo orbital.

Mediante la unión con un tether, se puede conseguir que dos cuerpos que orbitan a distintas alturas, y que si estuvieran libres tendrían diferente periodo orbital,

describan sus respectivas órbitas con la misma frecuencia orbital [8]. Se consideran dos cuerpos de masa m_1 y m_2 que orbitan en el mismo plano con órbitas r_1 y r_2 ($r_1 \leq r_2$), respectivamente (figura 1.9). Dichos cuerpos se unen mediante un tether de longitud $l = r_2 - r_1$, de forma que quedan alineados según el radio vector que los une con el centro de la Tierra. En esta posición se dice que el sistema masa-tether-masa (MTM) está estabilizado gravitacionalmente. La acción del tether sobre las masas hace que ambas orbiten con la misma frecuencia orbital, y distinta velocidad orbital.

Para demostrar lo anterior, supóngase que el cuerpo m_1 está libre sin la acción del tether. En este caso, su frecuencia orbital sería $\Omega_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_1^3}}$. Si el tether entra en acción, el equilibrio de fuerzas (figura 1.9) se modifica de la siguiente forma

$$\frac{\mu m_1}{r_1^2} - T = m_1 \Omega_0^2 r_1, \quad (1.8)$$

donde T es la tensión en el tether y Ω_0 es la frecuencia orbital del sistema MTM completo. De la misma forma, se tiene que el cuerpo m_2 orbitaría con frecuencia $\Omega_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2^3}}$, si estuviera libre. Bajo la acción del tether la frecuencia orbital es Ω_0 , de forma que el equilibrio de fuerzas en este segundo caso sería

$$\frac{\mu m_2}{r_2^2} + T = m_2 \Omega_0^2 r_2. \quad (1.9)$$

Resolviendo las ecuaciones (1.8) y (1.9), se obtienen las dos incógnitas, T y Ω_0 . Por ejemplo, eliminando la tensión T de ambas ecuaciones se tiene

$$\Omega_0^2 = \frac{\mu}{r_1^2 r_2^2} \cdot \frac{m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}, \quad (1.10)$$

estando esta frecuencia comprendida entre las de los cuerpos aislados ($\Omega_2 \leq \Omega_0 \leq \Omega_1$). De esta forma, sólo un punto del sistema MTM, el que se encuentre a la altura $r_0^3 = \frac{\mu}{\Omega_0^2}$, orbita a la velocidad orbital correspondiente a la frecuencia orbital del conjunto Ω_0 . Sustituyendo la ecuación (1.10) en la expresión anterior es fácil obtener el valor de r_0 :

$$r_0^3 = r_1^2 r_2^2 \cdot \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2}. \quad (1.11)$$

El punto r_0 no coincide con el centro de masas del sistema MTM, que viene dado, considerando la masa del tether despreciable, por

$$r_G = \bar{m}_1 r_1 + \bar{m}_2 r_2, \quad \bar{m}_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2} \quad i = 1, 2. \quad (1.12)$$

Para obtener la relación entre r_0 y r_G , se introduce el siguiente parámetro adimensional, $\nu = \frac{l}{r_G}$, que relaciona la longitud del tether y la posición del centro de gravedad del sistema MTM. De esta forma, teniendo en cuenta que $l = r_2 - r_1$, de la ecuación (1.12) pueden obtenerse las expresiones de r_1 y r_2 :

$$r_1 = r_G(1 - \bar{m}_2 \nu), \quad r_2 = r_G(1 + \bar{m}_1 \nu). \quad (1.13)$$

La expresión de la frecuencia orbital (1.10) se transforma en

$$\Omega_0^2 = \frac{\mu}{r_g^3} \left(1 + 3\bar{m}_1 \bar{m}_2 \nu^2 \left(1 + \frac{4}{3}(\bar{m}_2 - \bar{m}_1)\nu \right) + O(\nu^3) \right), \quad (1.14)$$

donde $O(\nu^3)$ representa términos del orden de ν^3 . De igual forma, la expresión de la altura dada por (1.11) se transforma en

$$r_0^3 = r_G \left(1 - \bar{m}_1 \bar{m}_2 \nu^2 + \frac{4}{3} \bar{m}_1 \bar{m}_2 (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) \nu^3 + O(\nu^3) \right). \quad (1.15)$$

En el desarrollo anterior, se ha supuesto que el parámetro $\nu \ll 1$. Para un tether de 10 Km en una órbita LEO, $\nu \sim 0.01$. El término entre paréntesis de la expresión (1.15) es claramente menor que la unidad, lo que permite comprobar que $r_G > r_0$. La desviación de r_0 con respecto a r_G se puede escribir a partir de (1.15) como

$$\frac{\Delta}{l} = \frac{r_G - r_0}{l} = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{l}{r_G} + O(\nu), \quad (1.16)$$

donde también se muestra que el centro de masas se sitúa por encima de r_0 . Además, de la expresión (1.16) se deduce que la diferencia entre r_0 y r_G es menor cuanto menor es el cociente $\frac{l}{r_G}$.

La expresión de la tensión en el tether, T , se obtiene sin más que sustituir la expresión de Ω_0 , dada en (1.10), en cualquiera de las ecuaciones (1.8)-(1.9). De esta forma se tiene

$$T = \frac{\mu m_1 m_2}{r_1^2 r_2^2} \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{m_1 r_1 + m_2 r_2}, \quad (1.17)$$

que en términos de ν , se puede escribir como

$$T = \frac{\mu m \bar{m}_1 \bar{m}_2}{r_G^2} (3\nu + 3(\bar{m}_2 - \bar{m}_1)\nu^2 + O(\nu^3)), \quad (1.18)$$

donde $m = m_1 + m_2$.

Resulta interesante comparar la tensión, T , en el cable con el peso total de los dos cuerpos. De la expresión (1.18), reteniendo únicamente el término dominante, se tiene que

$$T = mg\kappa\nu, \quad \kappa = 3\bar{m}_1\bar{m}_2\left(\frac{R_T}{r_G}\right)^2. \quad (1.19)$$

El factor κ es siempre menor que la unidad, lo que unido al hecho de que $\nu \ll 1$, implica que la tensión en el tether es reducida con respecto al peso total del sistema MTM. Esto explica que la sección transversal de los tether más comunes sea muy pequeña, lo que a su vez implica que la masa del tether es pequeña en comparación con el resto del sistema, como se supuso al inicio de los cálculos de esta sección.

Como se ha visto, la introducción de tethers uniendo diferentes masas permite manipular la velocidad de los cuerpos orbitales con cierta facilidad. Un ejemplo de posible utilización de este fenómeno sería la variación de la velocidad de un cuerpo que orbita por debajo de GSO, para que alcance la velocidad propia de un cuerpo que orbita en GSO. Para ello, se lanzaría una masa unida mediante un tether al cuerpo principal, de forma que la velocidad de éste fuera la correspondiente a GSO, aún orbitando a menor altura [1].

1.3.3. Estabilización gravitacional, el gradiente de gravedad

Se llama gradiente gravitacional a la diferencia entre las fuerzas centrífugas y gravitatorias que se produce a lo largo del tether, y en los cuerpos que éste une, $F_{gg} = F_c - F_g$. En los cuerpos finales del sistema MTM el gradiente gravitacional es máximo, y alcanza el valor nulo justo en r_0 , donde las fuerzas gravitatorias y centrífugas se cancelan. Principalmente, la estabilización gravitacional es una consecuencia directa de este gradiente que se produce a lo largo del sistema MTM.

Efectivamente, como se puede observar en la figura 1.10, para un sistema MTM en movimiento de libración ligeramente desviado de la dirección radial local (dirección que une el centro de masas del objeto que orbita con el centro de la Tierra), la componente según la dirección del tether del gradiente gravitacional, F_{gg} , se cancela con la tensión del tether. Por su lado, la componente perpendicular al tether da lugar a un par que lo impulsa de nuevo hacia la dirección radial local, que será la dirección estable para todo el recorrido del sistema.

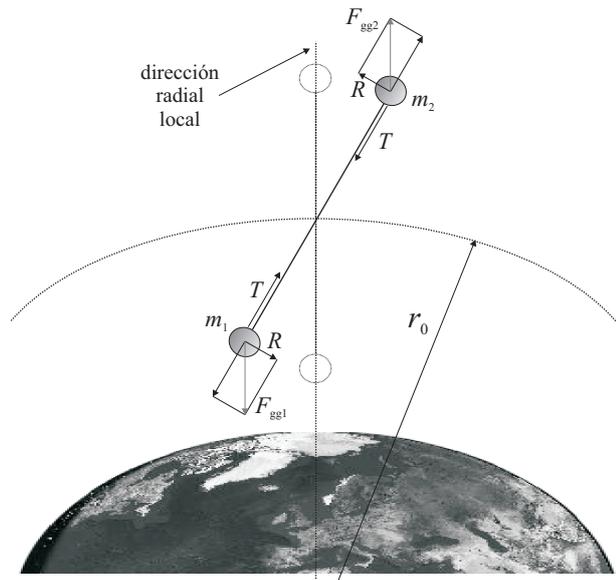


Figura 1.10: Estabilización gravitacional de un sistema tether en la posición radial.

1.3.4. Tethers electrodinámicos

En cualquier misión espacial, la energía requerida para que ésta pueda ser llevada a cabo ha de ser suministrada en forma de combustibles químicos, reactores nucleares o incluso paneles solares. Por ejemplo, para la Estación Espacial Internacional (EEI), se ha estimado que el coste de mantenerla en su órbita, y que no caiga por efecto de acciones como pueden ser las fuerzas aerodinámicas, puede alcanzar

los 1.2 billones de dólares en aproximadamente 10 años [2]. Además, la operación de suministrar combustible desde la Tierra hacia la susodicha estación, a 300 km de altitud, tiene un coste adicional de transporte muy elevado [17]. Los tethers electrodinámicos se presentan como una posible alternativa ante estos problemas tecnológicos y económicos.

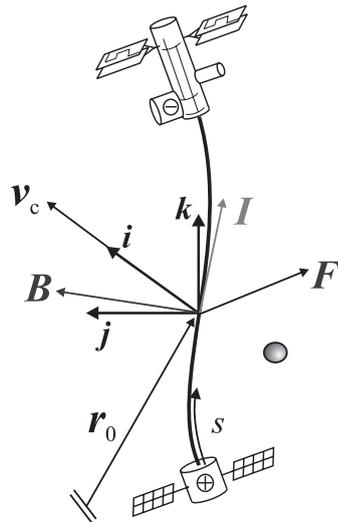


Figura 1.11: Interacción de un TE con el campo geomagnético.

Un tether electrodinámico (TE) no es más que un sistema MTM en el que el tether es además, conductor eléctrico. Por la acción del campo geomagnético, existe una transferencia de energía orbital a energía eléctrica o viceversa, de forma que ésta puede ser aprovechada para relanzar o frenar satélites, etc.

Supóngase un sistema MTM estabilizado gravitacionalmente como el de la figura 1.8. En estas condiciones se tiene, prácticamente, un elemento unidimensional con una velocidad v_c , perpendicular a él, en el seno de un campo magnético. Como es bien conocido por la ley de Faraday, en estas condiciones el elemento unidimensional se carga eléctricamente y aparece una diferencia de potencial entre

sus extremos, que obedece a la siguiente ley:

$$E = \int_l \mathbf{v}_c \times \mathbf{B} dl, \quad (1.20)$$

donde \mathbf{B} es el campo geomagnético y, dl es un diferencial de longitud a lo largo del tether. Supóngase, por facilitar los cálculos, que el sistema de referencia orbital $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, que se mueve solidario con el TE, es inercial. De esta forma, se suprime la influencia del movimiento del TE como sólido rígido alrededor de la Tierra y se centra el estudio en el efecto electrodinámico que se produce entre el sistema MTM y el campo geomagnético (figura 1.11). Suponiendo que el TE se mueve con velocidad \mathbf{v}_c , dirigida según el eje \mathbf{i} , la fuerza electromotriz E sería máxima cuando la dirección del campo geomagnético, \mathbf{B} , estuviera contenida en el plano perpendicular a \mathbf{i} , $\{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Mediante la acción de los contactores [2], que emiten o absorben electrones del plasma espacial, es posible cerrar el circuito eléctrico, de forma que una corriente \mathbf{I} fluya a lo largo del tether. Esta corriente puede ser inducida en la misma dirección que la fuerza electromotriz, generación de energía eléctrica (figura 1.8-izquierda); o en dirección contraria venciendo la oposición de la fuerza electromotriz, consumo de energía eléctrica (figura 1.8-derecha). Además esta corriente da lugar a una fuerza de Lorentz según la siguiente ley:

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{I} \times \mathbf{B}. \quad (1.21)$$

La fuerza generada sobre el tether puede ser usada para frenar el sistema sin gasto de combustible, como se ve en la figura 1.8-izquierda; o alternativamente, si la corriente se induce en contra de la fuerza electromotriz, para impulsar el sistema hacia órbitas más altas (figura 1.8-derecha). De esta forma, se puede tener alternativamente un generador de potencia eléctrica o un propulsor. Por ejemplo, cuando el sistema en cuestión esté en la mitad de su órbita en la que no se encuentra expuesto al Sol, se puede generar energía para consumo en el interior de la nave transformando energía orbital en eléctrica. En la otra mitad de su órbita, mediante paneles solares, se puede obtener energía que se transformará de eléctrica en orbital con el TE funcionando como propulsor.

A continuación, se va a analizar con mayor detalle la fuerza de Lorentz \mathbf{F} . Para ello, se denotan como (X, Y, Z) las coordenadas de la línea media del tether en los ejes $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Así, el vector corriente \mathbf{I} , que tiene dirección tangente al tether, se puede expresar como

$$d\mathbf{I} = I d\mathbf{l} = I \left[\frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial Y}{\partial s}, \frac{\partial Z}{\partial s} \right]^T ds. \quad (1.22)$$

La máxima fuerza se produce cuando \mathbf{I} y \mathbf{B} son perpendiculares. En las condiciones reales de operación del TE ambos vectores no son perpendiculares, en general, debido a que el tether no es perfectamente recto, y además las líneas de campo geomagnético no serán perpendiculares al tether en toda su longitud. Así se va a representar el vector geomagnético de la siguiente forma

$$\mathbf{B} = [0, B_1, B_2]^T. \quad (1.23)$$

donde $B_1 \gg B_2$, representando la componente B_2 esta imperfección. Introduciendo (1.22) y (1.23) en (1.21), el diferencial de fuerza de Lorentz resulta

$$d\mathbf{F} = I \left[\frac{\partial Y}{\partial s} B_2 - \frac{\partial Z}{\partial s} B_1, -\frac{\partial X}{\partial s} B_2, \frac{\partial X}{\partial s} B_1 \right]^T ds. \quad (1.24)$$

Si el tether fuera perfectamente recto, se tendría que

$$\left[\frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial Y}{\partial s}, \frac{\partial Z}{\partial s} \right]^T = [0, 0, 1]^T, \quad (1.25)$$

y por tanto el vector de fuerzas se reduciría a

$$d\mathbf{F} = I [-B_1, 0, 0]^T ds. \quad (1.26)$$

La componente negativa según \mathbf{i} frena el sistema como se pretendía. En el caso en el que la corriente se indujera en contra de la fuerza electromotriz E , esta componente sería positiva, comportándose el tether como un propulsor, a favor de la velocidad \mathbf{v}_c . En la realidad el tether no está perfectamente recto, por lo que actúa además la imperfección B_2 . En este caso, los términos cruzados en las direcciones \mathbf{i} y \mathbf{j} , $(I \frac{\partial Y}{\partial s} B_2 ds, -I \frac{\partial X}{\partial s} B_2 ds)$, tienden a enrollar el tether en una configuración

helicoidal, que ha sido observada en vuelo para varias configuraciones TE [1, 2]. Este efecto es no deseado, ya que aumenta la superficie de fricción aerodinámica del tether y además, perjudica la interacción del tether con el campo geomagnético. En cualquier caso, si las condiciones son propicias, el efecto de propulsión o frenado mediante el tether electrodinámico es posible, como se demostró en las misiones TSS-1, PMG y otras [2].

1.4. Short Electrodinamic Tether (SET)

Es bien conocido que la Tierra tiene dos polos magnéticos, uno positivo y otro negativo, de forma que, grosso modo, actúa como un imán creando un campo magnético a su alrededor. Las líneas de campo nacen en el Polo Sur y mueren en el Polo Norte, como se ve en la figura 1.12.

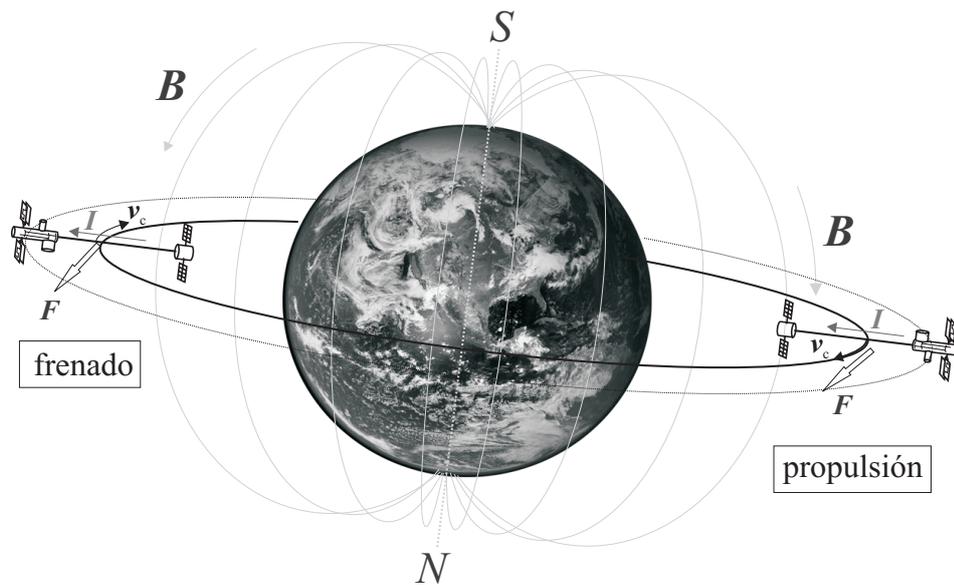


Figura 1.12: Campo geomagnético. Esquema de frenado y propulsión en tether radial.

Un TE gravitacionalmente estabilizado, como el que se muestra en la figura 1.12, corta de forma óptima las líneas de campo magnético, es decir, formando un ángulo recto cuando orbita en el plano ecuatorial, con 0° de inclinación. La mayoría de los TE que han orbitado hasta la fecha: Gemini 11, Charge-1, OEDIPUS-A, TSS-1, PMG, OEDIPUS-C y TiPS, lo han hecho de forma análoga a como se muestra en la figura. En el caso de que se busque frenar el satélite, figura 1.12-izquierda, la corriente fluye en la dirección natural, es decir, a favor de la diferencia de potencial creada en el tether. De esta manera, se convierte energía orbital en energía eléctrica de consumo a bordo. Por otro lado, invirtiendo el sentido de la corriente, como se muestra en la figura 1.12-derecha, se crea una fuerza de propulsión (energía orbital) mientras se consume energía eléctrica. La longitud de los tethers, en estos casos, puede alcanzar el orden de kilómetros, ya que la tensión creada por el gradiente gravitacional mantiene el tether tenso y estable desde un punto de vista estructural. Induciendo corrientes de varios amperios se pueden lograr potencias del orden de decenas de kilovatios [2].

Cuando el ángulo de inclinación de la órbita va aumentando ($0^\circ \Rightarrow$ plano ecuatorial, $90^\circ \Rightarrow$ plano que contiene a los polos), el ángulo formado por el tether y las líneas de campo, pasa de su óptimo 90° , a 0° , donde el tether no interactúa con el campo geomagnético. En un rango de órbitas cercanas al plano polar, sería necesario orientar el tether de forma que volviera a formar el ángulo recto óptimo de interacción con las líneas de campo. Para ello es necesario orientar el tether de manera un tanto especial, esto es con su eje longitudinal (eje de menor momento de inercia) perpendicular al plano de órbita. En esta posición, el tether corta, formando un ángulo recto, las líneas de campo en las proximidades de los polos. Además, como la Tierra no es un dipolo perfecto, las líneas de campo nacen en un entorno más o menos circular del polo, de forma que la interacción óptima se da durante una buena parte de la órbita del tether (figura 1.13). También es necesario tener en cuenta que la densidad de líneas de campo en los polos es mucho mayor que en el ecuador. Así, aunque en los tether radiales la interacción se

produce durante toda la órbita, en los que orbitan en el plano polar se produce con, aproximadamente, el doble de intensidad tanto en el Polo Sur, como en el Norte [17]; siendo la interacción neta en ambos casos equivalente (figura 1.13). Estos últimos son los llamados tethers electrodinámicos horizontales, siendo el Short Electrodynamic Tether (SET) uno de ellos.

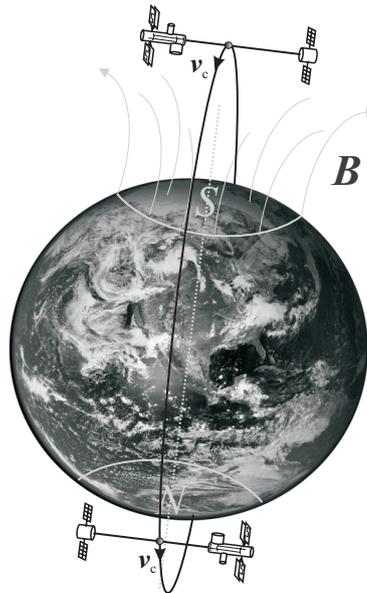


Figura 1.13: Campo geomagnético en los polos. Posición de un TE horizontal.

Frente a los tether radiales gravitacionalmente estabilizados, los tether horizontales presentan una serie de desventajas importantes. En primer lugar, la posición perpendicular al plano de órbita es inestable. Esto significa que considerando el sistema MTM como un sólido rígido, éste tendería a alejarse de la posición horizontal perpendicular al plano de órbita para trasladarse, por efecto del gradiente gravitacional, hacia la posición radial estable. Por lo tanto, para mantener al sistema en la posición horizontal inestable es necesaria una modificación de la dinámica del sistema, de forma que esta posición se volviera estable bajo ciertas circunstan-

cias. La aplicación al sistema de un giro a velocidad constante alrededor de su eje longitudinal proporciona lo que se conoce como estabilización giroscópica o giroestabilización. Los pares giroscópicos creados por dicha rotación hacen la posición horizontal estable para cierto rango de velocidad, que depende de la geometría del sistema. La demostración teórica de este hecho será formulada en las siguientes secciones. En cualquier caso, el tether debe ser diseñado de forma que proporcione cierta rigidez a torsión, ya que la rotación debe propagarse a lo largo de éste. En los tether radiales, la rigidez a torsión es despreciable y no se considera en ningún caso a efectos de cálculo [1, 2]. Este tipo de sistemas tether sometidos a rotación alrededor de su eje longitudinal se conocen en la literatura como *spinning tethers*.

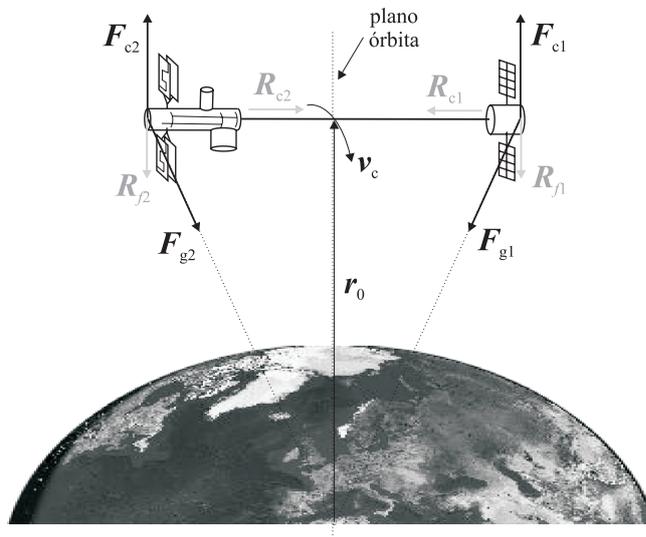


Figura 1.14: Fuerzas resultantes sobre el tether en un TE horizontal.

Por otro lado, está el problema de la estabilidad estructural del tether. En los tether radiales, la tensión mantiene la estructura más o menos recta y tensa, gracias a la acción del gradiente gravitacional. En el tether horizontal, como se puede ver en la figura 1.14, la fuerza centrífuga, F_c , tiene la misma dirección a

lo largo de todo el sistema. Sin embargo, la dirección de la fuerza de atracción de la Tierra, \mathbf{F}_g , varía, ya que apunta al centro de la Tierra desde cualquier punto del TE. Así, aparece una resultante de compresión sobre el tether, \mathbf{R}_c , donde $\mathbf{R} = \mathbf{F}_g - \mathbf{F}_c$. Esto hace que la estructura no sea estable ya que podría pandear y plegarse sobre sí misma [9]. Para contrarrestar este efecto, es necesario que el tether presente cierta rigidez a compresión. En el caso de tethers radiales estas fuerzas de compresión no aparecen, de forma que pueden ser tratados como un cable. Por otro lado, también aparece una resultante que tiende a flectar el sistema, \mathbf{R}_f , haciendo necesaria cierta resistencia a flexión del tether. Por lo tanto, el tether horizontal no puede ser tratado como un cable, ya que va a ser torsionado, flectado y sometido a tracción-compresión. Ante estas sollicitaciones sobre la estructura, es imposible pensar en las grandes longitudes, del orden de kilómetros, de los tether radiales. Por ello, se recurre a diseñar los tethers mucho más cortos y resistentes. En principio, esta reducción de la longitud tan drástica hace desechar la idea de tethers horizontales ya que la potencia eléctrica producida, o en el caso opuesto, la energía orbital transferida es insignificante.

El concepto de *tether desnudo*, presentado por Sanmartín et al. [4] en 1993, proporciona una solución factible para los TE horizontales, ya que aumenta la eficiencia con la que el sistema captura electrones del plasma, siendo la longitud total de tether necesaria mucho menor que con la tecnología usada anteriormente en misiones como TSS-1 y PMG. De esta forma, se hace factible el diseño de tethers horizontales para órbitas de alta inclinación (por encima de 70°).

El Short Electrodynamic Tether nace como propuesta de TE horizontal giroestabilizado en 1999, dentro del Programa de Estudios Generales de la Agencia Aeroespacial Europea (ESA) bajo el código de contrato: Ref. Contract 13395/98/NL/MV, que involucra al Departamento de Física de la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid, y al Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales de la Escuela de Ingenieros de la Universidad de Sevilla, bajo la supervisión del profesor J.R. Sanmartín [18]. La propuesta está basada

en el uso de tethers electrodinámicos desnudos para reducir la órbita de satélites, hasta su reentrada en la atmósfera, que se encuentren al final de su vida operativa. De esta forma se previene el aumento de la basura espacial, que comienza a ser un problema en órbitas LEO donde la densidad de satélites muertos y demás basura espacial es bastante alta. Para satélites que orbitan en el plano ecuatorial o cercanías, las técnicas de TE radial son suficientes. Esta propuesta está destinada a satélites con órbitas de alta inclinación, por encima de los 70° , en los que el uso de tethers radiales sería ineficaz, de modo que se recurre a tethers horizontales. Según se indica en el resumen de la propuesta, el estudio se restringe a satélites de masa baja, alrededor de los 1000 kg, y órbitas LEO entre 600 y 1600 km. Debido a que el tiempo de reentrada no es crítico, ya que el satélite se dirige a ser destruido, las técnicas de TE resultan competitivas frente a los propulsores comúnmente usados, que rinden un orden de magnitud por encima, en cuanto a impulso específico, esto es impulso total frente a la masa del sistema.

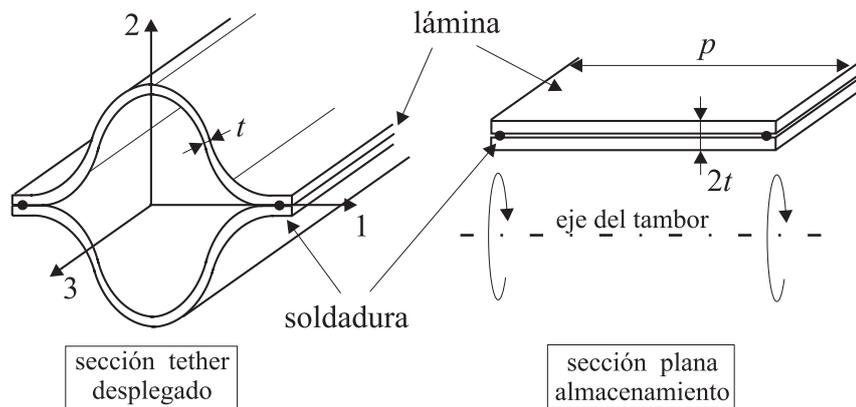


Figura 1.15: Sección del tether de la familia CTM de SENER S.A., almacenado y desplegado.

En cuanto a la naturaleza estructural del tether, la ESA propone el uso de tethers de la familia CTM de la empresa española SENER S.A. [19]. Estos tethers

son, grosso modo, tubos fabricados con una aleación de Cobre-Berilio (CUBE) que pueden ser almacenados en un tambor, de forma que quedan enrollados alrededor de éste y son desplegados en órbita, cuando la misión lo requiera. Como se puede ver en la figura 1.15, el tether está formado por dos láminas delgadas soldadas en sus extremos de forma longitudinal. Cuando el sistema está almacenado ambas láminas se encuentran unidas y planas, de forma óptima para ser enrolladas en el tambor de almacenamiento, dentro del mecanismo de almacenamiento y despliegue. Cuando la estructura es desplegada, las láminas adoptan su forma original, resultando la sección que se muestra en la figura 1.15. La tabla 1.1 proporciona las características de una de las secciones estándar.

| E ($\frac{N}{m^2}$) | ρ ($\frac{Kg}{m^3}$) | t (mm) | p (mm) | A_s (m ²) | EI_1 (Nm ²) | EI_2 (Nm ²) |
|-------------------------|-----------------------------|----------|----------|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1.32×10^{11} | 8245 | 0.05 | 41.6 | 4.16×10^{-6} | 38 | 21 |

Tabla 1.1: Características de la sección y material del tether.

La sección presenta rigidez a torsión, flexión y tracción-compresión, pero no se puede considerar un apéndice rígido, como sería de desear cuando la estructura estuviera desplegada. Las necesidades de almacenamiento no permiten una estructura desplegable que sea totalmente rígida, por lo que habrá que tener en cuenta la estabilidad estructural del tether ante las sollicitaciones externas a las que está sometido: movimiento de giro (spinning tether), fuerzas de compresión por el gradiente gravitacional (pandeo), fuerzas de Lorentz por la interacción electrodinámica, etc.

Tanto el estudio estructural (pandeo) como dinámico del tether se llevó a cabo en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales de la Universidad de Sevilla. Los resultados de dicha investigación se pueden encontrar en el informe final emitido, WP200 [9].

1.4.1. Descripción general del SET

Como se ha mencionado anteriormente, el SET es un mecanismo destinado a reducir la órbita de satélites en el final de su vida operacional, por lo que será un sistema que se encuentre almacenado en el satélite durante la mayoría de su vida útil. De esta forma, se tiene un satélite o módulo central en órbita, girando a velocidad Ω , desde el que se accionará el mecanismo SET. Justo en el momento de inicio de la maniobra de reentrada del satélite, dos tethers perpendiculares al plano de órbita se despliegan desde el módulo central (figura 1.16).

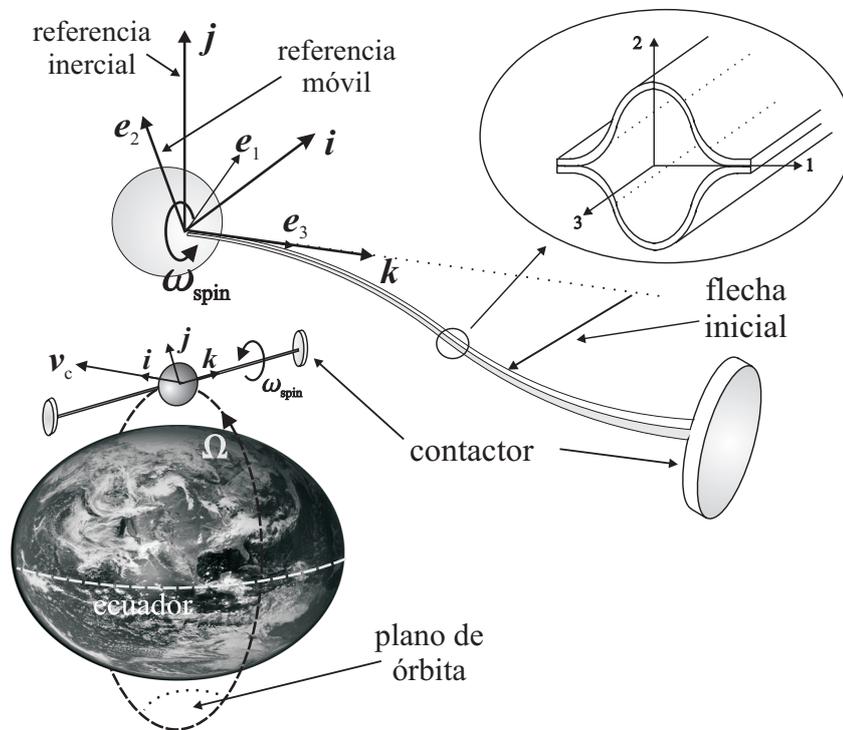


Figura 1.16: Esquema de operación del SET.

En el extremo de cada uno de los tethers se encuentra un contactor, que como se apuntó anteriormente, tiene la misión de cerrar el circuito creado por el tether con

el plasma espacial, mediante captación y emisión de electrones. Estos contactores se han modelado como discos, cuyo eje de simetría axial coincide con la tangente a la línea media en el extremo del tether. Una vez desplegados ambos tethers, el sistema completo es simétrico con respecto al plano de órbita, de forma que se consigue la configuración óptima para que el sistema interactúe con el campo geomagnético.

Tras el despliegue, se hace girar el sistema alrededor de su eje longitudinal a la velocidad ω_{spin} requerida para conseguir la estabilidad en la posición horizontal. Debido al almacenamiento y posterior proceso de despliegue, aparecen deformaciones permanentes en los tethers. Así, una vez desplegados, no serán perfectamente rectos, sino que tendrán cierta desviación con respecto a la dirección horizontal local. Esta flecha inicial de los tethers entorpece su misión, pero si se encuentra dentro de un rango permitido, las pérdidas de fuerza de frenado debidas a este efecto resultan poco importantes. Sin embargo, el giro al que se somete la estructura actuará sobre esta flecha, aumentando su dimensión en la misma forma que un rotor desequilibrado se deforma (vibración) por la acción del giro de su eje. En comparación con el resto de acciones a las que está sometido el sistema, esta sollicitación es la más peligrosa para la integridad estructural del sistema [9].

1.4.2. Estabilización por giro en la posición horizontal, giroestabilización

Como se ha dicho, la posición horizontal en órbita es inestable, de forma que es necesario aplicar la velocidad angular, que se referirá como velocidad de spin, alrededor del eje longitudinal para estabilizar el sistema en dicha posición. Esto se conoce como giroestabilización de Thompson [20]. En lo que sigue, se va a mostrar de forma teórica las condiciones que debe cumplir el sistema, que se va a considerar como un sólido rígido a efectos de cálculo, para que la giroestabilización sea efectiva.

La figura 1.17 muestra un esquema del SET en la posición estabilizada por

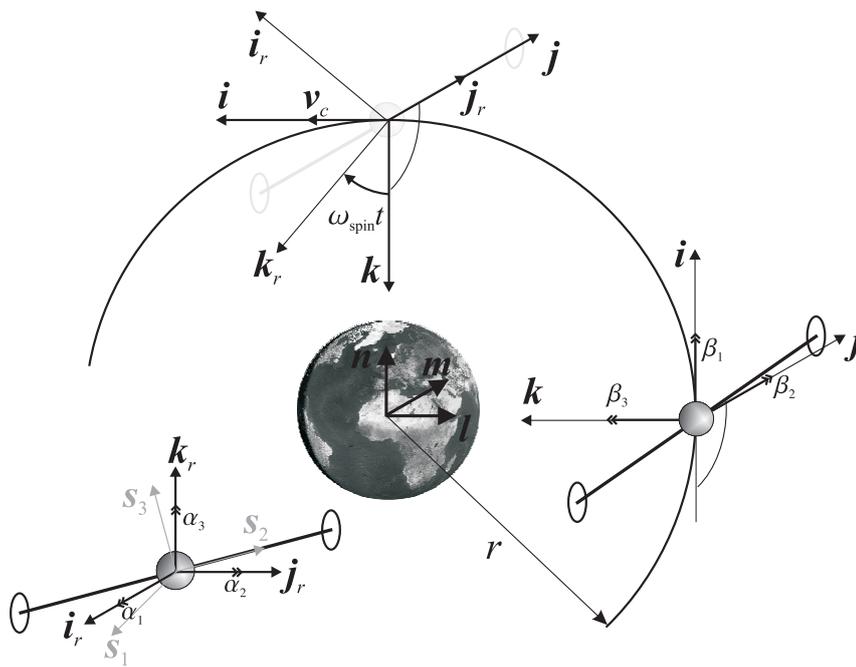


Figura 1.17: Esquema del SET en la posición estable por spin y sistemas coordenados usados.

spin. Se va a suponer que los ejes $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$ son principales de inercia del sólido, que se considera indeformable, siendo $I_1 = I_3 = I_t$ la inercia transversal e $I_2 = I_a$ la inercia en la dirección axial, por lo que el sistema es axisimétrico con respecto a \mathbf{s}_2 .

En primer lugar, se van a definir los distintos sistemas de referencia que se van a usar y que se muestran en la figura 1.17. Se hará referencia a cada uno de ellos mediante el símbolo \mathcal{F} y un subíndice. De esta forma, se tiene el sistema de referencia inercial fijo en la Tierra $\mathcal{F}_i = \{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$, el sistema orbital $\mathcal{F}_o = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, siendo el eje \mathbf{i} tangente a la trayectoria del satélite y \mathbf{k} dirigido según la vertical local, y el sistema de referencia ligado al sólido $\mathcal{F}_s = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$. Usando la notación más común en aeronáutica [20, 21], la orientación de \mathcal{F}_s con respecto a \mathcal{F}_o se define en términos de los ángulos de “roll”, “pitch” y “yaw”, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ en la figura. De esta forma, la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas, renombrando $s_i = \text{sen}(\beta_i)$ y $c_i = \text{cos}(\beta_i)$, será

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{so} &= \begin{pmatrix} c_2 c_3 & c_2 s_3 & -s_2 \\ s_1 s_2 c_3 - c_1 s_3 & s_1 s_2 s_3 + c_1 c_3 & s_1 c_2 \\ c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3 & c_1 s_2 s_3 - s_1 c_3 & c_1 c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{so}^{11} & A_{so}^{12} & A_{so}^{13} \\ A_{so}^{21} & A_{so}^{22} & A_{so}^{23} \\ A_{so}^{31} & A_{so}^{32} & A_{so}^{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Las ecuaciones de movimiento del sistema se plantean en la referencia \mathcal{F}_s . Estando el sistema sujeto a rotación pura, la ecuación de conservación del momento cinético, siendo las gravitatorias las únicas fuerzas consideradas, es

$$\frac{d\mathbf{H}_G}{dt} = \mathbf{M}_g, \quad (1.28)$$

donde $\mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}_S$ es el momento cinético del sistema en su centro de gravedad G , y \mathbf{M}_g es el momento que introducen las fuerzas gravitatorias. En este caso, \mathbf{I}_G representa el tensor de inercia del SET rígido en su centro de gravedad, y $\boldsymbol{\omega}_S$ es la velocidad angular total del sistema. Estando el equilibrio planteado en los

ejes del sólido \mathcal{F}_s , las componentes de todos los vectores y tensores están también referidas a dichos ejes. De esta forma, el tensor de inercia viene dado por

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} I_t & 0 & 0 \\ 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & I_t \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Por otro lado, la velocidad angular del sistema en la referencia \mathcal{F}_s se puede descomponer en

$$\boldsymbol{\omega}_S = \boldsymbol{\omega}_{so} + \boldsymbol{\omega}_{oi}, \quad (1.30)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_{so}$ es la velocidad angular del sólido con respecto al sistema de referencia orbital \mathcal{F}_o , y $\boldsymbol{\omega}_{oi}$ es la velocidad angular del sistema de referencia orbital con respecto al sistema inercial, que no es más que la velocidad orbital del SET, por tanto,

$$\boldsymbol{\omega}_{oi} = (0, -\Omega, 0)^T, \quad (1.31)$$

donde $\Omega = \sqrt{\mu/r^3}$, ver expresión (1.5). Introduciendo (1.29) y (1.30) en la ecuación de balance (1.28) se tiene

$$\mathbf{I}_G \dot{\boldsymbol{\omega}}_S + \boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}_S = \mathbf{M}_g, \quad (1.32)$$

donde el equilibrio de momentos está expresado en la referencia \mathcal{F}_s . El momento introducido por las fuerzas gravitatorias expresado en dicha referencia tiene la siguiente expresión [20]

$$\mathbf{M}_g = 3\Omega^2 \begin{pmatrix} (I_3 - I_2)A_{so}^{23}A_{so}^{33} \\ (I_1 - I_3)A_{so}^{33}A_{so}^{13} \\ (I_2 - I_1)A_{so}^{13}A_{so}^{23} \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

de forma que las ecuaciones de movimiento del sistema en términos de los ángulos $\boldsymbol{\beta}$ (roll, pitch y yaw) están determinadas.

En la posición de equilibrio representada en la parte superior de la figura 1.17, en la que el eje \mathbf{s}_2 es perpendicular al plano de órbita, los ángulos de roll, β_1 , y yaw, β_3 , son cero; mientras que el ángulo de pitch tendrá un valor $\beta_2 = \omega_{spin}t$,

donde ω_{spin} es la velocidad angular de spin constante que se aplica al sistema alrededor del eje \mathbf{s}_2 . Siendo $(\beta_1, \beta_3)^T = (0, 0)^T$, la componente de la matriz de transformación $A_{s_o}^{23} = 0$, por lo que las componentes de roll y yaw del momento de las fuerzas gravitatorias son también cero, ver (1.33). Además, el sólido bajo estudio es axisimétrico, por lo que $I_1 = I_3 = I_t$ y la componente de pitch de \mathbf{M}_g es también cero. La ausencia total de momentos externos sobre el sistema en la “posición de referencia”, $\beta^* = (0, \omega_{spin}t, 0)$, demuestra que dicha posición es de equilibrio, quedando pendiente su estabilidad, que se estudia a continuación.

Antes de comenzar, se va a definir un nuevo sistema de coordenadas, que no es más que el representado por la posición de referencia de rotación de spin uniforme β^* y que será referido como $\mathcal{F}_r = \{\mathbf{i}_r, \mathbf{j}_r, \mathbf{k}_r\}$ (ver figura 1.17). De esta forma, la evolución del sistema de referencia \mathcal{F}_s con respecto al \mathcal{F}_r determinará la estabilidad de la posición de referencia β^* . Para ello, se define una pequeña perturbación de los ejes \mathcal{F}_s con respecto al estado de rotación de spin uniforme \mathcal{F}_r , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ (roll, pitch, yaw). El sistema intermedio \mathcal{F}_r , por tanto, contiene la rotación de spin que será generalmente grande, de forma que el ángulo α_2 representa una pequeña perturbación sobre dicha rotación de spin. De esta forma, los ángulos α son pequeños, lo que proporciona ciertas ventajas. En primer lugar, planteando las ecuaciones (1.32) en términos de α , se podrán desprestigiar las multiplicaciones entre ellos, por lo que se tendrá un sistema de ecuaciones resultante lineal en α . Por otro lado, la velocidad angular total del SET se puede expresar como

$$\omega_S = \omega_{sr} + \omega_{ro} + \omega_{oi}, \quad (1.34)$$

de forma que ω_{oi} viene dado por (1.31),

$$\omega_{sr} = (\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3)^T, \quad (1.35)$$

$$\omega_{ro} = (0, \omega_{spin}, 0)^T. \quad (1.36)$$

Finalmente, la matriz de transformación entre \mathcal{F}_s y \mathcal{F}_o se puede descomponer

como

$$\mathbf{A}_{so} = \mathbf{A}_{sr} \mathbf{A}_{ri} \mathbf{A}_{io} = \mathbf{A}_{sr} \mathbf{A}_{ri} \mathbf{A}_{oi}^T. \quad (1.37)$$

Siendo α pequeño, se tiene que

$$\mathbf{A}_{sr} = \mathbf{I} - \tilde{\alpha}, \quad (1.38)$$

donde \mathbf{I} es la matriz 3×3 identidad y

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Por otro lado, definiendo la matriz de transformación para un ángulo genérico ϕ alrededor del eje inercial \mathbf{m} como

$$\mathbf{A}_2[\phi] = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

se tiene que $\mathbf{A}_{ri} = \mathbf{A}_2[\omega_{spin}t]$ y $\mathbf{A}_{oi} = \mathbf{A}_2[-\Omega t]$, quedando definida \mathbf{A}_{so} como

$$\mathbf{A}_{so} = (\mathbf{I} - \tilde{\alpha}) \mathbf{A}_2[(\omega_{spin} + \Omega)t]. \quad (1.41)$$

La ecuación de movimiento del SET linealizada en términos de los ángulos α de perturbación, sobre la posición de referencia de rotación uniforme a velocidad de spin es [20]

$$I_a \ddot{\alpha}_2 = 0, \quad (1.42)$$

$$I_t \ddot{\alpha}_1 + (2I_t - I_a) \omega_{spin} \dot{\alpha}_3 + (I_a - I_t) \omega_{spin}^2 \alpha_1 = 3\Omega^2 (I_t - I_a) A_{so}^{23} A_{so}^{33}, \quad (1.43)$$

$$I_t \ddot{\alpha}_3 - (2I_t - I_a) \omega_{spin} \dot{\alpha}_1 + (I_a - I_t) \omega_{spin}^2 \alpha_3 = 3\Omega^2 (I_a - I_t) A_{so}^{13} A_{so}^{33}, \quad (1.44)$$

donde $(A_{so}^{13}, A_{so}^{23}, A_{so}^{33})^T$ son los cosenos directores entre \mathcal{F}_s y la vertical local \mathbf{k} que se obtienen de (1.41). Definiendo el parámetro de inercias $k_t = (I_a - I_t)/I_t$ y

nombrando $s = \text{sen}((\omega_{spin} + \Omega)t)$ y $c = \text{cos}((\omega_{spin} + \Omega)t)$, las ecuaciones (1.42)-(1.44) se transforman en

$$\ddot{\alpha}_2 = 0, \quad (1.45)$$

$$\ddot{\alpha}_1 + (1 - k_t)\omega_{spin}\dot{\alpha}_3 + k_t\omega_{spin}^2\alpha_1 + 3\Omega^2k_t(c\alpha_1 + s\alpha_3) = 0, \quad (1.46)$$

$$\ddot{\alpha}_3 - (1 - k_t)\omega_{spin}\dot{\alpha}_1 + k_t\omega_{spin}^2\alpha_3 + 3\Omega^2k_t(c\alpha_1 + s\alpha_3) = 0. \quad (1.47)$$

A primera vista, parece que se tendrá que usar la “teoría de Floquet” [22] ya que el sistema (1.45)-(1.47) es lineal de coeficientes periódicos. Esta dependencia proviene de la dependencia periódica que tienen las componentes del momento de las fuerzas gravitatorias en \mathcal{F}_s . Sin embargo, observando la expresión (1.41) y usando una transformación de Floquet-Lyapunov, se pueden construir unas nuevas variables

$$\gamma_1(t) = \alpha_1(t)\text{cos}(\omega_{spin} + \Omega)t + \alpha_3(t)\text{sen}(\omega_{spin} + \Omega)t, \quad (1.48)$$

$$\gamma_2(t) = \alpha_2(t), \quad (1.49)$$

$$\gamma_3(t) = -\alpha_1(t)\text{sen}(\omega_{spin} + \Omega)t + \alpha_3(t)\text{cos}(\omega_{spin} + \Omega)t, \quad (1.50)$$

en función de las cuales las ecuaciones (1.45)-(1.47) se transforman en el siguiente sistema de coeficientes constantes

$$\ddot{\gamma}_2 = 0, \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_1 - (\omega_{spin} + 2\Omega + k_t\omega_{spin})\dot{\gamma}_3 \\ + [k_t(3\Omega^2 - \omega_{spin}\Omega) - \Omega(\omega_{spin} + \Omega)]\gamma_1 = 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\ddot{\gamma}_3 + (\omega_{spin} + 2\Omega + k_t\omega_{spin})\dot{\gamma}_1 - [k_t\Omega\omega_{spin} + \Omega(\omega_{spin} + \Omega)]\gamma_3 = 0. \quad (1.53)$$

Claramente, γ_2 es inestable con respecto a perturbaciones en $\dot{\gamma}_2$. Esto es común en satélites estabilizados mediante spin [20, 21]. A efectos prácticos, esto no tiene importancia ya que la rotación de pitch está controlada de forma externa, por ejemplo, mediante propulsores, por el satélite que imprime la velocidad constante ω_{spin} alrededor de \mathbf{s}_2 . Se busca por tanto la estabilidad de roll y yaw. Las ecuaciones (1.52) y (1.53) en las variables $\{\gamma_1, \gamma_3\}$ se pueden escribir en forma canónica

como

$$M\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (1.54)$$

donde $\mathbf{M}^T = \mathbf{M} > 0$, $\mathbf{G}^T = -\mathbf{G}$ y $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$. Éste es un sistema lineal giroscópico sin amortiguamiento, de forma que la estabilidad asintótica no es posible [22, 23]. Sin embargo, para una combinación correcta de los parámetros k_t y $\bar{\omega} = \omega_{spin}/\Omega$, la estabilidad (no asintótica) puede ser alcanzada. La ecuación característica correspondiente a (1.52) y (1.53) es [20, 22]

$$\left(\frac{s}{\Omega}\right)^4 + b_1\left(\frac{s}{\Omega}\right)^2 + b_2 = 0, \quad (1.55)$$

donde

$$b_1 = (2 + 3k_t) + 2(1 + k_t)\bar{\omega} + (1 + k_t)^2\bar{\omega}^2, \quad (1.56)$$

$$b_2 = k_1k_3, \quad (1.57)$$

siendo k_1 y k_3 los elementos de la diagonal de \mathbf{K} divididos por Ω^2

$$k_1 = k_t(3 - \omega_{spin}) - 1 - \omega_{spin}, \quad (1.58)$$

$$k_3 = -k_t\omega_{spin} - 1 - \omega_{spin}. \quad (1.59)$$

Las condiciones que se deben cumplir para que la posición de referencia \mathcal{F}_r sea estable son

$$b_1 > 0, \quad (1.60)$$

$$b_2 > 0. \quad (1.61)$$

$$\Delta = b_1^2 - 4b_2 > 0. \quad (1.62)$$

A efectos prácticos, según el texto de la propuesta de la ESA [18] para el diseño del SET, la inercia axial del sistema será típicamente: $I_a^p = 500 \text{ Kg m}^2 < I_a < 1000 \text{ Kg m}^2 = I_l^g$. Por su parte, la inercia transversal, I_t , se puede calcular aproximadamente a partir de la axial de la siguiente forma

$$I_t = I_a + 2M_d l^2 + 2I_d, \quad (1.63)$$

donde $M_d = 3 \text{ Kg}$ es la masa del contactor, $l = 100 \text{ m}$ la longitud del tether e $I_d = 0.12 \text{ Kg m}^2$, la inercia alrededor de su eje del contactor. De esta forma, el parámetro k_t está comprendido en el siguiente rango de valores: $k_t(I_a^p) = -0.992 < k_t < k_t(I_a^g) = -0.984$. Para valores de $k_t \sim -1$ la estabilidad del sistema está regida por la condición (1.60), siendo las dos condiciones restantes menos restrictivas [20, 24]. Resolviendo la ecuación de segundo orden $b_1 = 0$ se obtienen los límites frontera del parámetro $\bar{\omega}$ en la siguiente forma

$$\bar{\omega} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1 - 3k_t}}{1 + k_t}, \quad (1.64)$$

de donde se obtendrán dos raíces, una positiva, $\bar{\omega}^+$, que representa una velocidad de spin en el sentido positivo de \mathbf{s}_2 , y una negativa, $\bar{\omega}^-$, que representa una velocidad de spin en el sentido negativo de \mathbf{s}_2 . Para $\bar{\omega} > \bar{\omega}^+$ o $\bar{\omega} < \bar{\omega}^-$, el SET es estable en la posición de referencia perpendicular al plano de órbita. Nótese que con valores $k_1 < 0$ y $k_3 < 0$ (sistema “potencial completamente inestable” [23]) la condición (1.61) se cumple directamente, de forma que para valores apropiados de los parámetros se obtendría estabilidad giroscópica si se cumplen (1.60) y (1.62). En estas condiciones es interesante apuntar que una fuente de amortiguamiento, por pequeña que fuera, desestabilizaría el sistema (“inestabilidad inducida por disipación” [23]).

| | $\omega_{spin} \text{ (rad/s)}$ | | $\frac{\omega_{spin}}{\omega_n}$ | |
|---------|---------------------------------|-------|----------------------------------|------|
| I_a^p | -0.156 | 0.045 | -28.52 | 8.22 |
| I_a^g | -0.151 | 0.022 | -27.73 | 6.02 |

Tabla 1.2: Velocidades de spin para estabilidad del SET en la posición horizontal.

La velocidad real de spin se calcula como $\omega_{spin} = \bar{\omega}\Omega$. Teniendo en cuenta que la altura característica de los satélites susceptibles de usar el sistema SET es de aproximadamente $h = 1600 \text{ km}$ [18], se tendrá que el radio de la órbita circular es $r = h + R_T(6378 \text{ km}) = 7978 \times 10^3 \text{ m}$. De esta forma, según (1.5), la frecuencia orbital característica será del orden de $\Omega = 8.86 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. La tabla 1.2

muestra los valores de la velocidad mínima de spin de estabilidad para las dos inercias axiales características del sistema, I_a^p y I_a^g . Los valores se comparan, por conveniencia, con la primera frecuencia natural a flexión de uno de los sistemas tether-contactor, cuya expresión aproximada viene dada por [25]

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3EI_1}{l^3(M_d + (33/140)\rho A_s l)}} = 5.47 \times 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (1.65)$$

Para cada una de las inercias existen dos velocidades de spin mínimas, una positiva y otra negativa, según el sentido de la rotación sea el definido cuando se construyeron los distintos sistemas de referencia o el contrario.

1.4.3. Acciones externas sobre el SET, estudios previos

Cualquier sistema tether que se encuentre orbitando alrededor de la Tierra, está sometido a una serie de acciones externas, además del gradiente gravitatorio, que generalmente constituye la acción externa fundamental que aparece sobre los sistemas tether [8]. Su influencia sobre el caso específico del SET se mostró en la figura 1.10. En el SET, las acciones principales a tener en cuenta serán pues: fuerzas gravitatorias, fuerzas electrodinámicas, y fuerzas de inercia debidas a la vibración de la estructura por acción de la velocidad de spin como un rotor desequilibrado. La influencia de otros factores, que se van a enumerar a continuación, ha sido despreciada a efectos de cálculo en las diferentes fases de diseño y simulación llevadas a cabo. Estas acciones, han sido igualmente ignoradas en el diseño de la mayoría de los TE radiales, que tienen una longitud característica del orden de 5 veces la del SET. Las acciones externas que se van a describir dependen de forma directa de la longitud del tether, de forma que si fueron despreciadas en el caso radial, se podrán ignorar también en el caso del SET.

Las acciones externas, por su magnitud pequeña (exceptuando el gradiente gravitacional), se consideran como perturbaciones sobre las fuerzas principales que actúan en el sistema, siendo comúnmente comparadas con la tensión del tether (debida al gradiente gravitacional) cuando se analiza su importancia [1, 2, 8].

Se dividen principalmente en cuatro grupos, dependiendo de su origen: fuerzas gravitatorias, fuerzas internas en el tether, fuerzas electrodinámicas y fuerzas aerodinámicas o similares. Dentro de cada grupo se tienen:

Perturbaciones relacionadas con las **fuerzas gravitatorias**:

- *Armónicos del potencial gravitatorio.* Aunque el potencial gravitatorio se suele considerar homogéneo alrededor de la Tierra, ésto es cierto sólo en primera aproximación, ya que, existe una perturbación llamada armónico J_2 que provoca una variación del potencial de punto a punto del campo.
- *Atracción lunar.* Debida a la acción del campo gravitatorio de la Luna.
- *Atracción solar.* Debida, esta vez, a la acción del campo gravitatorio del Sol.
- *Efectos relativistas.* Perturbaciones en el campo gravitatorio gobernadas por la Teoría de la Relatividad General de Einstein.
- *Atracción entre las módulos masivos* que forma el sistema tether.

Perturbaciones relacionadas con las **fuerzas internas**:

- *Esfuerzos por vibración del tether como sólido deformable.* Los esfuerzos internos debidos tanto a vibraciones longitudinales, como de flexión y torsión del tether se desprecian en los tether radiales. En el caso del SET, las deformaciones provocadas por estos esfuerzos son de vital importancia en lo que respecta a la integridad de la estructura.
- *Deformaciones permanentes por tensiones residuales.* Debidas al almacenamiento de los tether, que durante mucho tiempo se encuentran enrollados en un tambor.
- *Fuerzas debidas a fricción interna en el tether.* Provocan pérdidas de energía, principalmente, debidas a la histéresis del material. En el caso del SET, por ser éste un sistema rotatorio, la importancia de estas fuerzas es máxima.

Como es bien conocido en la literatura sobre dinámica de rotores [26, 27], el amortiguamiento histerético provoca inestabilidad para velocidades de rotación por encima de cierto valor crítico, del orden de la primera frecuencia natural de flexión del eje del rotor. Unido al estudio de la evolución dinámica del SET por la aplicación de la velocidad de spin, el estudio de este efecto de amortiguamiento será uno de los puntos más importantes de esta tesis.

Perturbaciones relacionadas con las **fuerzas electrodinámicas**:

- *Fuerzas de Lorentz*. En el caso de tethers electrodinámicos, estas fuerzas no se pueden despreciar a priori.
- *Resistencia del plasma*. Debido a su carga eléctrica, el TE experimenta una resistencia al moverse en el plasma de la ionosfera.

Perturbaciones relacionadas con las **fuerzas aerodinámicas y otras**:

- *Resistencia aerodinámica*. En órbitas LEO, la resistencia aerodinámica por la densidad de la ionosfera disminuye de forma exponencial con el radio de la órbita. Según sea ésta, dicha resistencia se podrá deprecia o no. Además, para sistemas tether radiales muy largos, la diferencia de resistencia a lo largo de éste puede provocar pares sobre la estructura.
- *Presión de radiación solar*. Al contrario que la resistencia aerodinámica, la presión de radiación solar aumenta con el radio de la órbita. También provoca efectos térmicos sobre el tether.
- *Efectos térmicos*. Tensiones de origen térmico por dilatación y contracción del tether, al pasar de la media órbita iluminada por el Sol a la media órbita, en la que la Tierra se interpone entre el Sol y el sistema tether.

Como se ha dicho anteriormente, las principales acciones sobre el tether serán las fuerzas debidas al gradiente gravitatorio, las fuerzas electrodinámicas y las fuerzas de inercia debidas a la vibración por rotación de spin. La influencia de

las fuerzas de compresión, \mathbf{R}_c (figura 1.10), sobre el SET fue estudiada durante la redacción del informe WP-200 realizado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de los Materiales de la Universidad de Sevilla [9]. En esta investigación, se realizaron pruebas numéricas sobre el pandeo, tanto local como global, del tether. Además, se estudió la dinámica del despliegue.

La fuerza de Lorentz dada en (1.26), y que será expresada como \mathbf{F} , es una acción deseada sobre el sistema. Dicha fuerza, actuará en todo momento en la dirección contraria (frenado) a la velocidad orbital del sistema, \mathbf{v}_c , salvo términos de segundo orden (figura 1.11). Suponiendo que el sistema de referencia orbital, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (figura 1.16), se mueve solidario con el módulo central y, el eje \mathbf{k} es siempre paralelo al plano ecuatorial, la fuerza de Lorentz se puede expresar en dichos ejes como

$$\mathbf{F} = [F \cos(\Omega t), F \sin(\Omega t), 0]^T. \quad (1.66)$$

Por lo tanto, la fuerza de Lorentz es siempre perpendicular a \mathbf{k} y gira alrededor de este eje con la frecuencia orbital Ω . Esta fuerza debe ser añadida como acción externa en los modelos dinámicos del tether que se lleven a cabo para estudiar el comportamiento de la estructura ante la velocidad de spin.

Por otro lado, se tiene la influencia no deseada del campo geomagnético sobre el tether (términos cruzados en (1.24)). La influencia de este campo de fuerzas será analizada en el capítulo 4 de esta tesis, demostrándose que es despreciable en las condiciones de operación del SET. Por ello, no se ha considerado en el resto de análisis sobre el SET llevados a cabo.

1.4.4. Geometría y características del SET. Suposiciones previas sobre el modelo

Se va a suponer que los tethers están empotrados al módulo central del satélite, por lo que pueden ser considerados como barras tridimensionales empotradas en un extremo a una base rígida que rota a velocidad constante, ω_{spin} , y con un disco rígidamente unido en el otro extremo. El SET está sometido a dos movimientos de

rotación. En primer lugar, el sistema gira alrededor de la Tierra con una frecuencia orbital Ω . Al mismo tiempo, está sometido a la rotación de spin alrededor de su eje longitudinal, siendo $\omega_{spin} \gg \Omega$. Esta diferencia tan grande entre las frecuencias de giro permite considerar el sistema de referencia orbital $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ inercial, de forma que es posible estudiar la evolución de los tether con respecto a la rotación de spin de forma desacoplada al movimiento orbital del sistema (figura 1.16). La única acción debida al carácter orbital del SET a tener en cuenta será la fuerza de Lorentz, que tendrá la expresión dada por (1.66).

Por otro lado, se va a suponer que el SET es simétrico con respecto al plano de la órbita (figura 1.16), afirmación que no es del todo cierta, teniendo en cuenta que tras su despliegue, los tethers no tienen por qué adoptar formas simétricas. Una vez aplicada la rotación al sistema, ambos tether se comportarán de forma similar, pero no exactamente. Sin embargo, se va a despreciar la influencia de un tether sobre el otro, ya que principalmente, su evolución vendrá regida por la rotación de la base. Así, el análisis de la integridad estructural del SET se llevará a cabo sobre uno sólo de los dos tether que componen el sistema y por tanto, se habrá asumido simetría con respecto al plano de órbita.

El modelo resultante, descrito en la figura 1.16, es similar a un rotor desequilibrado. Sin embargo, en este caso, el eje del rotor (tether) está unido al disco (contactor) en su centro de masas, por lo que el sistema estaría equilibrado. El desequilibrio viene dado por la desviación inicial del eje con respecto a la horizontal local. Este tipo de desequilibrio es también bastante común en dinámica de rotores [26, 27], y se produce por la acción que la gravedad ejerce sobre el rotor, haciendo que éste se encuentre inicialmente curvado por su propio peso. La influencia de esta excentricidad, debida a la acción de una carga distribuida constante (peso) sobre el sistema rotatorio, es equivalente a la acción del desequilibrio del disco sobre el eje a efectos de la dinámica del sistema, como es bien conocido en dinámica de maquinaria rotativa [26, 27]. En realidad, la fuerza de Lorentz no es totalmente equivalente a la acción del peso en los rotores, ya que está sometida a

una rotación alrededor del tether. Sin embargo, la velocidad de esta rotación, Ω es mucho menor que la velocidad de rotación del tether por lo que a efectos de cálculo podrá considerarse que la fuerza tiene una dirección constante.

Una vez realizadas todas estas suposiciones sobre el SET, se puede decir que el sistema que se ha estudiado en esta tesis está perfectamente definido, a falta de los detalles sobre geometría, magnitud de las fuerzas y valores de las constantes que caracterizarán la dinámica del sistema, como las velocidades de rotación, etc. Algunos de estos datos han sido proporcionados en la tabla 1.1. El resto se puede encontrar en la tabla 1.3, que se presenta a continuación, donde l es la longitud del tether y R_c , e y m_d son el radio, espesor y masa del contactor, respectivamente.

| l (m) | R_c (m) | e (m) | m_d (kg) | Ω ($\frac{\text{rad}}{\text{s}}$) | F ($\frac{\text{N}}{\text{m}}$) |
|---------|-----------|---------|------------|--|-------------------------------------|
| 100 | 0.2 | 0.01 | 3 | 8.86×10^{-4} | 4×10^{-6} |

Tabla 1.3: Valores característicos de las constantes del SET.

1.4.5. OEDIPUS, estudios precedentes sobre spinning tethers

La configuración OEDIPUS (Observation of Electrical Field Distributions in Ionospheric Plasma, a Unique Strategy) [28], desarrollada por la Agencia Espacial Canadiense (CSA), está formada por un sistema MTM radialmente estabilizado (figura 1.10) al que se le aplica una velocidad de spin alrededor de su eje de menor inercia [2]. El sistema OEDIPUS está concebido para investigar la naturaleza, distribución eléctrica y demás características del plasma de la Ionosfera. Para ello, el sistema se orienta haciendo que su eje longitudinal forme cierto ángulo, alrededor de un grado, con el campo magnético de la Tierra (vertical local). Para conseguir que el sistema mantenga este ángulo fuera de la vertical local (posición estable), se aplica una rotación de spin alrededor del eje de menor inercia: estabilización por spin [20]. En 1989, el OEDIPUS-A fue lanzado con éxito, formado por dos satélites que quedaban unidos tras el despliegue por un tether de 958 m de longitud. Una

vez desplegado el tether, los satélites extremos se hacían girar de forma que el sistema completo rota a una velocidad de spin constante alrededor de su eje de menor inercia.

Aunque los objetivos científicos fueron exitosos, se encontraron inestabilidades en el movimiento del sistema, resultando en una desviación considerable de los satélites extremos sobre la orientación original. Para el lanzamiento de OEDIPUS-C, en 1995, se realizaron modelos tanto teóricos [28, 29] como experimentales [30], para corregir la anomalía que se encontró en la dinámica de OEDIPUS-A y que obligó a acortar la duración de dicha misión. Esta anomalía se atribuyó a la interacción del tether con los módulos extremos del sistema y no fue tomada en cuenta en los modelos previos al lanzamiento de OEDIPUS-A. En los posteriores análisis [28, 29], se encontró que la influencia del tether sobre los módulos es importante, ya que el amortiguamiento interno del material desestabiliza el movimiento de rotación del tether, como es bien conocido en dinámica de rotores, para velocidades supercríticas.

En el análisis llevado a cabo sobre OEDIPUS-C [28, 29], el tether se modela como una barra geoméricamente lineal, surgiendo la no-linealidad del sistema en el acoplamiento tether-módulos y de las rotaciones de gran magnitud a las que el sistema está sometido. La linealización y posterior análisis de estabilidad del sistema determina que éste es inestable por encima de su velocidad crítica. Sin embargo, la posterior constatación experimental [30] mostró como el prototipo de laboratorio se mantenía estable por encima de la velocidad crítica estimada de forma teórica. Los posteriores análisis sobre las ecuaciones no-lineales del sistema [31, 32] arrojaron nueva información sobre su dinámica; sin embargo, durante todo el proceso de simulación ningún modelo del tether ha tenido en cuenta las posibles no-linealidades geométricas que se derivan de los movimientos de gran amplitud, que puede sufrir por la rotación a la que está sujeto.

A diferencia de los sistemas tether diseñados y lanzados con anterioridad, la configuración OEDIPUS, por su carácter rotativo, debe ser modelada como una

barra. La rotación inducida en el sistema y las vibraciones transversales provocadas por esta rotación obligan a tener en cuenta las rigideces a torsión y flexión del sistema. De esta forma, los modelos tipo cable que anteriormente se habían usado para estudiar los sistemas tether [1, 2, 3, 8, 11, 13, 33] no son válidos. Entre estos modelos tipo cable de un tether, destacan los presentados por H. Troger y su grupo de la Universidad de Viena [34, 35]. Mediante un modelado de elementos finitos del tether, este grupo de investigadores estudió el comportamiento de un tether mediante simulación dinámica [34]. Además, usando técnicas de dinámica no-lineal, estudiaron la estabilidad del sistema y las medidas de control a aplicar sobre éste [35], tanto en la fase de despliegue como de operación del tether. En cualquier caso, la configuración OEDIPUS introdujo los modelos tipo barra en el estudio de tethers, aunque en todos los casos, el modelo de las fuerzas elásticas es geoméricamente lineal.

1.4.6. Motivación y objetivos

EL SET es un spinning tether al igual que OEDIPUS, siendo la principal diferencia entre ambos que el segundo está estabilizado radialmente y el primero se encuentra en la posición horizontal. En un primer estudio sobre la dinámica del SET [9], se realizaron simulaciones dinámicas mediante un modelo similar a los usados en OEDIPUS (geoméricamente lineal), teniendo presente la posible inestabilidad que produce el amortiguamiento histerético del material. En estas simulaciones se comprobó, que para la velocidad de operación del SET (por encima de su velocidad crítica) el sistema se vuelve inestable, creciendo la flecha hasta valores inadmisibles en condiciones de operación. Sin embargo, los resultados experimentales de OEDIPUS [30], en los que el sistema resultaba estable a velocidades supercríticas, y el posterior descubrimiento de ciertos trabajos en dinámica de rotores, en los que se mostraba la importancia de las no-linealidades geométricas sobre el comportamiento de rotores con amortiguamiento interno [36, 37, 38], incitaron a continuar los estudios que ya se habían realizado sobre el SET. Dicha continuación se ha

materializado en la presente tesis en la que además, se ha tratado de realizar un estudio paramétrico del spinning tether (SET), estudio que no fue realizado para OEDIPUS.

En los trabajos presentados por Genin y Maybee [36, 37, 38] a principios de los años 70, se estudió el problema de un rotor de sección circular y equilibrado con amortiguamiento interno. Se usó el modelo de Jeffcott de rotor, que es el más sencillo y a la vez más usado en dinámica de rotores, y además se modeló el eje del rotor de forma que se tenían en cuenta términos de rigidez y amortiguamiento procedentes de las no-linealidades geométricas de forma muy simplificada. Como resultado, los autores demostraron que, en contra de lo que se afirma en la literatura para sistemas lineales [27, 26], este rotor en régimen supercrítico puede ser estable. El modelo usado por Genin y Maybee fue formulado por primera vez por Bolotin [39]. Más tarde, Shaw et al. [40] y Chang et al [41] estudiaron el comportamiento post-crítico del modelo de Jeffcott geoméricamente no-lineal de sección circular, modelando el amortiguamiento como un amortiguamiento viscoso equivalente y además incluyendo amortiguamiento externo, que tiene un efecto estabilizador [27, 26]. En el caso del SET, el sistema bajo estudio es mucho más complejo que el modelo de Jeffcott. Sin embargo, la acción que las no-linealidades geométricas tienen sobre el modelo de Jeffcott podrían aparecer también en el SET, de forma que sería posible obtener soluciones estables del sistema para velocidades comunes de operación que, como se sabe, están por encima de su velocidad crítica.

Además de su interés en lo que respecta al sistema bajo estudio, el SET, el estudio sobre la estabilidad del modelo de Jeffcott que se ha llevado a cabo en esta tesis puede ser extrapolable a otros sistema rotatorios (maquinaria rotativa, rotores, etc). Como se verá en el siguiente capítulo, se ha realizado un modelo de Jeffcott que presenta ciertas diferencias con respecto a los presentados previamente [36, 37, 38, 40, 41], para que se ajuste al máximo a las condiciones del sistema original, el SET. Estas diferencias son principalmente las siguientes:

- Ortotropía en la sección del eje, rompiéndose la simetría del modelo de Jeffcott alrededor de su eje longitudinal.
- Disco-rotor equilibrado. El desequilibrio está originado por cierto grado de deformación inicial que sufre el eje.
- Ausencia de otras fuentes de amortiguamiento, como puede ser el externo que tiene un efecto estabilizador.
- Se han caracterizado de forma explícita las no-linealidades geométricas, de forma que vienen dadas por la geometría del problema. En los estudios anteriores [36, 37, 38, 40, 41] sobre el modelo de Jeffcott no-lineal se habían tratado como parámetros.

El principal atractivo del modelo de Jeffcott reside en su sencillez (dos grados de libertad) y en la capacidad que tiene de simular un sistema rotativo aun siendo tan sencillo. Esta capacidad ha sido demostrada a lo largo de los años en el campo de la dinámica de rotores [27, 26], donde se ha usado el modelo de Jeffcott como primera aproximación en el estudio de la influencia de diferentes acciones (ortotropía del eje por aparición de grietas [42], defectos en los rodamientos [43], etc.) sobre un sistema rotor. Sin embargo, es necesario modelar el tether de una forma más exacta, ya que los resultados extraídos del modelo de Jeffcott no pueden ser determinantes a la hora de formular predicciones sobre el comportamiento dinámico del sistema. Por ello, se han incluido en esta tesis dos modelos más detallados del SET, una barra basada en la dinámica de sistemas multicuerpo (DSM) [44] para simulación en el tiempo, y el modelo de Cosserat [45, 46, 47, 48, 49], basado en las ecuaciones de Kirchhoff-Love, de una barra 3D cuya línea media se describe mediante el modelo de Cosserat de una curva en el espacio [50], para el estudio de bifurcaciones y estabilidad. En ambos modelos, como se mostrará en posteriores capítulos de esta tesis, la descripción de fuerzas elásticas y de amortiguamiento interno es geoméricamente no-lineal. De esta forma, se mejoran los modelos tipo barra usados en OEDIPUS [28, 29, 31, 32] para la descripción de sistemas tether.

En cuanto al modelo DSM, existían varias posibilidades, dependiendo de las distintas formulaciones existentes. Estas formulaciones son descritas en la introducción del capítulo que se dedica a la simulación DSM, eligiéndose una de ellas según criterios de sencillez, robustez y velocidad de integración de las ecuaciones de movimiento. De esta forma, no se realiza ninguna aportación relevante en este campo, aunque el problema requiere el uso de técnicas de modelización e integración numérica de última generación.

Para el estudio de bifurcaciones y estabilidad, se ha formulado el tether mediante el modelo de Kirchhoff-Love de una barra 3D, que da lugar a un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Dicho modelo ha sido usado con anterioridad para resolver gran cantidad de problemas tecnológicos como por ejemplo el comportamiento post-crítico de barras en condiciones de pandeo [50], la inestabilidad y transición 2D-3D por pliegue de barras sometidas a torsión pura (barras rectas [51], anillos [52], etc.), dinámica en la producción de madejas en la industria textil [53], dinámica y comportamiento mecánico de perforadoras, usadas comúnmente en la industria petrolífera [54], estructuras biológicas formadas por filamentos como ADN o fibras bacterianas [52], comportamiento y perversiones de forma (efecto que se produce en el cable helicoidal de un teléfono) de plantas trepadoras como la enredadera [55], etc. Todos los problemas anteriormente citados son estáticos, de forma que se resuelve la versión estática de las mencionadas ecuaciones, es decir, el sistema EDP se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). El problema resultante, por tanto, es un problema de contorno en la variable espacial de la barra (longitud de arco). En los contornos, se imponen condiciones sobre la barra que pueden ser geométricas (a nivel de posiciones y orientaciones de la sección) o naturales (en fuerzas y momentos), pero siempre independientes del tiempo. De esta forma, cuando se habla de estabilidad en estos análisis, se restringe a estabilidad estática [22]. En esta tesis, se ha resuelto por primera vez el sistema EDP completo, ya que el problema que aquí se trata es totalmente dinámico (rotación de spin del tether-contactador). De esta forma, se

obtienen las soluciones del problema y su estabilidad temporal, no estática, siendo ésta una de las aportaciones originales del presente trabajo.

Finalmente, habiéndose formulado el sistema tether mediante diferentes procedimientos, la comparación entre ellos es de gran interés. Por un lado, se han comparado mediante simulaciones dinámicas los modelos DSM y de Jeffcott. Así, es posible testar la validez del sencillo modelo de Jeffcott y ver sus limitaciones. Este tipo de comparaciones no se ha encontrado en la literatura sobre dinámica de rotores [27, 26]. Por otro lado, se han comparado los modelos DSM y de Cosserat (barra de Kirchhoff-Love). Estos dos modelos, en principio, ofrecen una descripción bastante exacta de la geometría del problema y del modelo elástico y de amortiguamiento interno geoméricamente no-lineal requerido. Siendo así, su comparación ofrece la posibilidad de validar ambos modelos que, generalmente al ser usados en problemas de grandes deformaciones no es posible demostrar al no existir soluciones analíticas o estandarizadas de dichos problemas complejos. Además, la contrastación de los resultados dinámicos de las ecuaciones de Kirchhoff-Love con otros modelos de grandes deformaciones no aparece en la literatura, siendo otra de las aportaciones de esta tesis.

1.4.7. El SET, un sistema dinámico completo

El modelo del SET que se va a estudiar en esta tesis tiene bastante interés desde el punto de vista de la dinámica, ya sea simulación o estudio de estabilidad. En primer lugar, siendo el tether una barra muy esbelta y distorsionada, será necesario recurrir a técnicas de simulación dinámica, como DSM (Dinámica de Sistemas Multicuerpo) que permitan describir un sistema tan complejo. La especial complejidad radica en que las no-linealidades geométricas juegan un papel importante, además de que el sólido bajo estudio puede sufrir grandes desplazamientos y rotaciones por la deformación. Además, la gran esbeltez de la barra da lugar a frecuencias de vibración muy dispares por ejemplo entre flexión y tracción-compresión, siendo las ecuaciones diferenciales a resolver altamente “rígidas” con los problemas de

integración que ello conlleva.

Por otro lado, el estudio paramétrico de la estabilidad del SET ha dado lugar a modelos cada vez más complejos; pasando de los modelos más sencillos, basados en la dinámica de rotores, a modelos llamados geoméricamente exactos, en los que se describe la posición de la línea media de la barra como una curva en el espacio. Por lo tanto, como sistema dinámico, el SET tiene un gran valor académico ya que requiere la utilización de herramientas matemáticas de última generación para su estudio.

Finalmente, hay que decir que siempre es interesante estudiar un problema real. Por un lado, las exigencias son altas, ya que la geometría, cargas, etc. vienen dadas de forma que no se pueden modificar los parámetros del sistema para facilitar su análisis (por ejemplo, la esbeltez del tether). Por otro lado, permite una interpretación de los resultados más real, de forma que éstos pueden ser analizados con mayor profundidad y se enunciarán conclusiones más interesantes.

En esencia, esta tesis analiza el comportamiento dinámico del SET, aunque, como se ha intentado resaltar a lo largo de esta introducción, las técnicas y procedimientos aquí usados se pueden extrapolar al estudio de sistemas similares, como puedan ser rotores, maquinaria rotativa en general, y por supuesto, otros sistemas tether. Los capítulos 2, 3 y 4 están dedicados, principalmente, al estudio paramétrico de bifurcaciones y estabilidad del SET. En el capítulo 2, se ha realizado una breve introducción sobre la filosofía que se encuentra tras el estudio paramétrico así como de las técnicas que en él se usan. Dicho capítulo continúa presentando el modelo de Jeffcott modificado que se ha usado para realizar el estudio de estabilidad. El modelo de Jeffcott representa un rotor desequilibrado en la forma más simple posible, por lo que este estudio podría considerarse como preliminar ante los modelos más complejos que se han usado posteriormente. En el capítulo 3, se introduce el modelo geoméricamente exacto basado en las ecuaciones de Kirchhoff-Love de una barra 3D [50] (que será referido en adelante como modelo de Cosserat), y se lleva a cabo un estudio paramétrico completo sobre dicho

modelo. Tanto en éste como en el capítulo anterior, se analiza principalmente la evolución del SET ante la sollicitación más importante a la que está sometido, el movimiento de rotación de la base a la velocidad de spin ω_{spin} . El efecto de la fuerza de Lorentz no se ha incluido en ambos modelos ya que la interpretación de los diagramas de bifurcación generados en caso de incluir las dos acciones (ω_{spin} y fuerza de Lorentz) sería complejo. El efecto combinado de ambas acciones no permite analizar con claridad la influencia de cada una de ellas. Además, la magnitud de la fuerza de Lorentz es muy pequeña, de forma que su influencia, como se verá en el capítulo 5, es prácticamente despreciable. Por lo tanto, se ha considerado prioritario el estudio paramétrico del SET bajo la acción de la velocidad de spin.

El análisis de la dinámica del sistema bajo la influencia de las componentes no deseadas de las fuerzas de Lorentz se ha realizado de forma separada, en el capítulo 4 de esta tesis. En dicho capítulo, además de analizar la influencia de las fuerzas de Lorentz sobre el sistema, se intenta justificar el hecho de haber separado el estudio dinámico en dos partes: una dedicada a la dinámica resultante del movimiento de spin de la base, y otra, dedicada al efecto de la fuerza externa de Lorentz. Este último se lleva a cabo mediante un modelo bastante similar al usado en el capítulo 3. Siendo el sistema bajo estudio no-lineal, el teorema de superposición no es válido en este entorno, sin embargo, debido a la pequeña magnitud de las fuerza de Lorentz frente a las fuerzas que aparecen en el sistema por la rotación de spin, la separación del análisis en dos partes es razonable. Efectivamente, la fuerza distribuida máxima debida al campo geomagnético será del orden de $IB_g = 1 \times 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Por su parte, una estimación de las fuerzas centrífugas sobre una sección del tether, que se encuentra sujeta a la rotación $\omega_{spin} \sim 0.156 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y a una distancia $r \sim 7$ m (distancia media por deformación inicial del tether) de la horizontal local, vendría dada por

$$F_c = \rho A_s \omega_{spin}^2 r = 1.2 \times 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (1.67)$$

es decir, mil veces mayor que la fuerza magnética distribuida.

Una vez finalizado el estudio paramétrico del SET, el capítulo 5 propone un

modelo basado en las técnicas DSM [56], destinado a estudiar la evolución dinámica en el tiempo del sistema bajo estudio. Se propone un modelado del sistema basado en la subestructuración [57] para captar la no linealidad del tether y el uso de las coordenadas naturales [58], en el marco de las formulaciones basadas en la descripción de los sólidos mediante referencias flotantes. Este modelo contiene todas las solicitaciones a las que está sometido el SET, rotación de la base y fuerza de Lorentz (componente de frenado), de forma que el conjunto de ecuaciones diferenciales resultante se integra numéricamente, a lo largo del tiempo. En dicho capítulo se demuestra que la influencia de la componente de frenado deseada de la fuerza de Lorentz, por su pequeña magnitud, es despreciable frente a la influencia de la rotación de spin, lo que justifica su no inclusión en los modelos paramétricos de los capítulos 2, 3 y 4.

El capítulo 6 muestra la comparación entre los resultados obtenidos con los diferentes modelos y técnicas usados a lo largo de esta tesis. Primero, se muestran comparaciones en términos de diagramas de bifurcación y estabilidad entre los modelos de Jeffcott y Cosserat. En segundo lugar, se comparan las simulaciones dinámicas obtenidas con el modelo DSM y el modelo de Jeffcott. Para terminar, se comparan los dos modelos más completos de esta tesis, DSM y Cosserat, cuyas formulaciones son totalmente diferentes desde el punto de vista de modelado y obtención de las ecuaciones de movimiento. De esta forma, el acuerdo entre los resultados de los modelos daría validez a ambos, ya que se estaría prediciendo el mismo comportamiento dinámico por dos caminos o formulaciones diferentes.

Finalmente, el capítulo 7 presenta un resumen de este trabajo, esbozando una serie de conclusiones y proponiendo futuras líneas de investigación que completen los estudios aquí realizados.

Capítulo 2

Estudio de estabilidad del SET, el modelo de Jeffcott

2.1. Análisis de estabilidad y continuación numérica

El estudio de estabilidad y bifurcaciones en *sistemas dinámicos* (SD) ha sido un campo de la Física-Matemática que ha crecido y tomado gran importancia en el pasado siglo. Una definición de SD podría ser la siguiente: “ proceso determinista, en el cual la variable de estado cambia de acuerdo a una regla, definida en términos de su valor actual”. La definición puede ser más o menos rigurosa y por supuesto se podrán encontrar diferentes definiciones, dependiendo generalmente del campo de la física o de las matemáticas en el que haya surgido uno de estos sistemas. En cualquier caso, existe una idea clara que subyace detrás de cualquier definición y es que la dinámica estudia cómo cambian los sistemas que evolucionan con el tiempo. Por ejemplo, la dinámica se pregunta si el sistema evoluciona hacia un punto en el que permanecerá para siempre, independientemente del tiempo (equilibrio), o

bien si dicho sistema evoluciona de forma cíclica repitiendo un comportamiento o, simplemente, si su evolución es tan compleja que en principio, no obedece a ningún patrón.

De partida, es interesante clasificar los SD según dos criterios. En primer lugar, el SD puede ser discreto o continuo, dependiendo de si el tiempo se mide de forma discreta, dando lugar a relaciones recursivas, o de forma continua, dando lugar a ecuaciones diferenciales. En mecánica, se estudia el movimiento de los cuerpos y la evolución de esos movimientos con el tiempo. Las leyes de la mecánica, como las ecuaciones de Newton-Euler, dan lugar a ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de los cuerpos. Por lo tanto, en mecánica en general, y en esta tesis en particular, se trabajará con SD continuos.

El segundo criterio, y no por ello menos importante, divide a los SD en lineales y no-lineales. La gran diferencia entre ambos es que en sistemas lineales se puede usar el *principio de superposición*, mientras que en los sistemas no-lineales este principio no es válido [22, 59]. El principio de superposición permite dividir los problemas en partes más sencillas, de forma que una vez resueltas éstas, el resultado final es la suma de los efectos de todas las partes. Sin embargo, en sistemas no-lineales esto no es cierto en general ya que la suma de las partes no da el mismo resultado que el sistema completo. Esto implica que los SD no-lineales son mucho más difíciles de resolver, pero también son mucho más interesantes y reales que los lineales. La naturaleza, en general, está regida por leyes no-lineales, de forma que, en cualquier entorno es fácil encontrar muestras de ello. Por ejemplo, es evidente que el volumen de un coro de 100 personas no es 100 veces el volumen de una sola persona cantando. Esto se conoce como *Sinergia*, y se podría decir que es un concepto reciente y que ha aparecido a raíz de la creciente importancia que los procesos no-lineales han tomado en la descripción de la naturaleza. Como éste, existen multitud de ejemplos (“oír mis dos canciones favoritas a la vez no proporciona el doble de placer” [22]) que justifican el carácter no-lineal de la naturaleza. En este capítulo se verá, por ejemplo, cómo las soluciones de un sistema mecánico

bastante común, un rotor desequilibrado, cambian totalmente según éste se modele como lineal o como no-lineal.

De forma matemática, los SD continuos se pueden caracterizar mediante relaciones del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde el punto sobre las variables implica $\frac{d}{dt}$, y en general, las funciones f_i relacionan las variables de forma no-lineal. Éste es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo de orden n y en general, todas sus variables x_i dependen del tiempo.

En general, para sistemas no-lineales, las ecuaciones (2.1) no se pueden resolver de forma analítica, es necesaria una herramienta que permita extraer la mayor cantidad posible de información en ausencia de la solución explícita. Esta cuestión se la planteó Poincaré [22, 23] a finales del siglo XIX, cuando trataba de resolver el problema de los tres cuerpos, uno de los problemas más interesantes en mecánica celeste, y que plantea la interacción entre tres cuerpos, por ejemplo, la Tierra, el Sol y la Luna. Newton resolvió el problema de los dos cuerpos en el siglo XVII para explicar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, sin embargo, la incorporación de un nuevo cuerpo al problema lo hace imposible de resolver analíticamente. En lugar de plantearse la resolución analítica, Poincaré desarrolló un enfoque *geométrico* en el que se planteaba, en lugar de la evolución exacta de los cuerpos, preguntas del tipo: “¿Es el sistema de tres cuerpos estable para siempre, o quizás, alguno de los cuerpos escapará de la influencia de los demás? y en tal caso, ¿cuál es la razón o condiciones que provocan esto?” Estas preguntas tan generales, desde un punto de vista matemático, desembocan en la búsqueda de equilibrios,

soluciones periódicas, e incluso caóticas en el sistema diferencial representado por (2.1). Grosso modo, el enfoque geométrico consiste en representar la solución en el espacio de las variables de forma que, para un sistema de orden $n = 2$, por ejemplo, conocidas las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se podría trazar la *trayectoria* en el *espacio de fases* (ver figura 2.1).

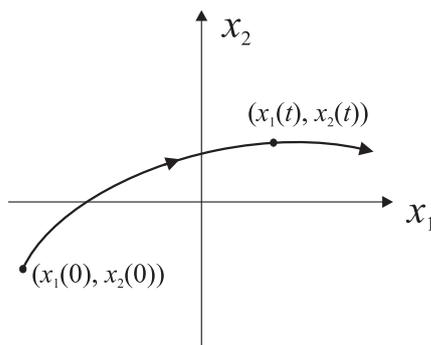


Figura 2.1: Plano de fases y trayectoria.

De esta forma, para cada condición inicial $(x_1(0), x_2(0))$, se tiene una trayectoria $(x_1(t), x_2(t))$ que se corresponde con un punto que se mueve a lo largo de ella, parametrizado por la variable t . En cierto sentido, el tiempo pierde protagonismo en esta representación. Dicho esto, lo que se pretende es dado el sistema en cuestión, dibujar las posibles trayectorias y por lo tanto, extraer información sobre las soluciones. Mediante diferentes técnicas, el analista es capaz de dibujar un plano de fases global para el problema, de forma que es posible entender su dinámica sin las expresiones explícitas de las soluciones. Una de estas técnicas es hallar los equilibrios, soluciones periódicas, etc., del sistema y su estabilidad, representando éstos en el plano de fases y dibujando el posible comportamiento del sistema, según si la condición inicial esté localizada en un lugar u otro del plano de fases.

Los puntos de bifurcación de un sistema dinámico son aquellos en los que al variar los parámetros, el carácter hiperbólico de los equilibrios se modifica (cambios de estabilidad, etc.). Estos puntos de bifurcación tienen gran importancia en el

marco de los sistemas dinámicos que dependen de parámetros y que se pueden expresar, usando la ecuación (2.1) en forma compacta vectorial como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n]^T$ es el vector de estado y $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, \dots, p_m]^T$ es el vector cuyas componentes son los m parámetros que gobiernan, por ejemplo, la geometría del sistema, la amplitud de las cargas aplicadas, etc. El problema del pandeo de la viga de Euler es un claro ejemplo de sistema dinámico con parámetros que gobiernan la aparición de bifurcaciones. La figura 2.2 muestra un esquema de dicho problema en la que aparece la viga antes y después del pandeo. En este problema, el parámetro p de la ecuación (2.2) es la carga P , mientras que la variable x será la flecha de la viga, δ . Mientras $P < P^*$, existe una sola solución que es la trivial, viga recta. Para valores $P > P^*$ la viga patea, lo que significa que existen varias posibles soluciones, la trivial y la de la viga flectada. En $P = P^*$ se produce una bifurcación ya que coexisten varias ramas de soluciones. Además, se sabe que en el caso de la figura 2.2, la solución trivial pasa a ser inestable en el momento de la bifurcación, transfiriéndose la estabilidad a la solución pateaada. Si se trata de representar este resultado de una forma clara y representativa, lo más acertado es recurrir a un *diagrama de bifurcación*, que no es más que la representación de la respuesta del sistema frente al valor del parámetro cuya variación se está estudiando. En este caso, la figura 2.2 muestra la flecha del centro de la viga frente a la magnitud de la carga aplicada. Es fácil observar cómo para valores $P > P^*$ de

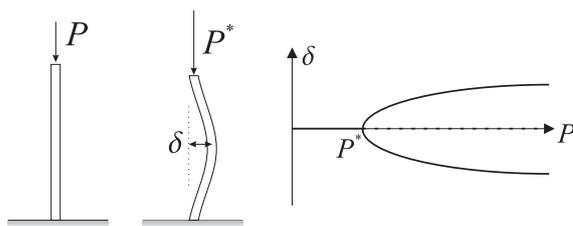


Figura 2.2: Pandeo en la viga de Euler.

la carga coexisten tres soluciones.

Como se ha visto, es conveniente resolver problemas del tipo (2.2), ya que se extrae gran cantidad de información del sistema. Sin embargo, hay que tener en cuenta que estas ecuaciones diferenciales con parámetros, son más complicadas de resolver que las ecuaciones diferenciales sin parámetros. En este sentido, la *continuación numérica*, que es una técnica relativamente reciente [60, 61], permite de una forma numérica evaluar las soluciones en forma de diagramas de bifurcación. En esencia, la continuación numérica permite resolver la ecuación (2.2) de forma continua para distintos valores de p , o lo que es lo mismo, permite trazar caminos que representan diferentes soluciones de la ecuación y que se llaman comúnmente *ramas*. Esta operación es conocida como *análisis de bifurcación*.

En los sistemas dinámicos, las bifurcaciones que aparecen más comúnmente son los llamados pliegues (o bifurcación silla-nodo), las bifurcaciones de tridente, transcritical y de Hopf.

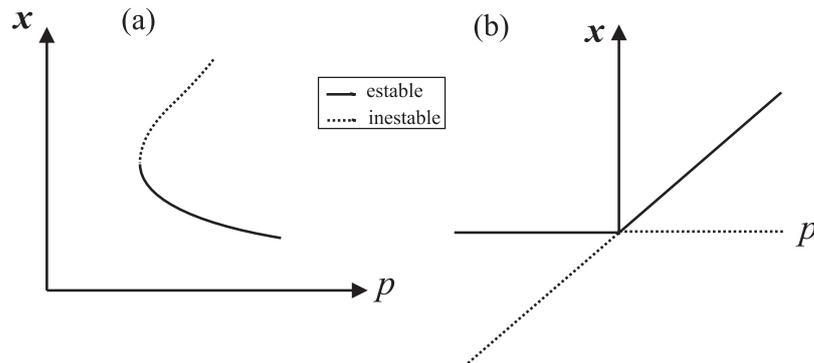


Figura 2.3: Esquema bifurcaciones, (a) pliegue, (b) transcritical.

En la figura 2.3-(a) se representa el diagrama de bifurcación característico en el caso silla-nodo. En la bifurcación, la rama de soluciones alcanza una pendiente infinita, de forma que dicho punto de la solución es no-regular, y además se produce un cambio de estabilidad. La ecuación característica de este tipo de bifurcación

sería

$$\dot{x} = p - x^2. \quad (2.3)$$

Por otro lado, está la bifurcación transcítica, en la que dos ramas que coexisten intercambian su estabilidad en el punto de bifurcación (ver figura 2.3). La ecuación característica para este caso sería

$$\dot{x} = px - x^2. \quad (2.4)$$

La bifurcación de tridente, como la que aparece en el problema del pandeo de la viga de Euler, (ver figura 2.2) tiene dos variantes, la subcrítica (a) y la supercrítica (b) (ver figura 2.4).

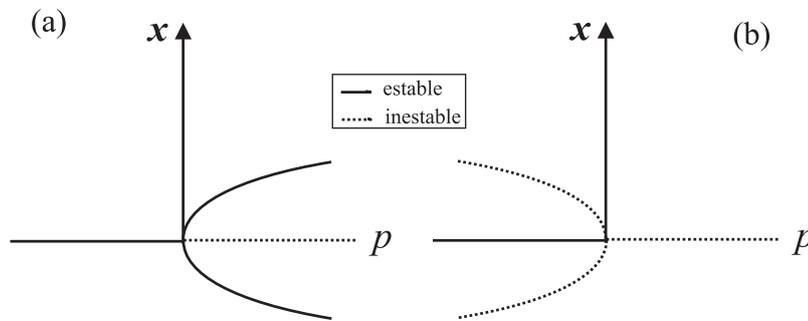


Figura 2.4: Esquema bifurcación de tridente, (a) supercrítica, (b) subcrítica.

La ecuación característica de la supercrítica viene dada por

$$\dot{x} = px - x^3, \quad (2.5)$$

mientras que la subcrítica tiene, por su parte, la siguiente expresión

$$\dot{x} = px + x^3. \quad (2.6)$$

En una bifurcación de Hopf, un par de autovalores conjugados de la linealización en el equilibrio cruza el eje imaginario. De la solución estacionaria nace una nueva solución, esta vez periódica, estando la frecuencia de la oscilación controlada por la parte imaginaria de los autovalores.

2.1.1. Análisis de bifurcación en ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes de un parámetro

Las ideas básicas sobre continuación fueron formuladas en los años sesenta por Haselgrove, Klopfenstein, Deist y Sefor [62]. A finales de esa década y principios de la siguiente, estas técnicas fueron introducidas en aplicaciones científicas y de ingeniería. Hoy día, su utilización está ampliamente extendida, existiendo incluso software especializado como AUTO [63] o MATCONT [64].

Se considera el siguiente sistema continuo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, p), \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^1$ y \mathbf{f} es una función continuamente derivable de (\mathbf{x}, p) . El análisis de bifurcación del sistema (2.7) no es más que la reconstrucción de su diagrama de bifurcación en función del parámetro p (ver figura 2.2), en particular, el estudio de la dependencia de los equilibrios con el parámetro, y la localización de los puntos de bifurcación.

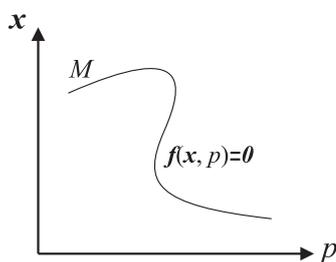


Figura 2.5: Curva de equilibrios, M .

Los puntos de equilibrio de (2.7) satisfacen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, p) = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

esto es, un sistema no-lineal de n ecuaciones escalares dependiente de n variables y un parámetro. En general, las ecuaciones (2.8) definen una curva M en \mathbb{R}^{n+1} .

Computando esa *curva de equilibrios* se obtiene la dependencia de los equilibrios de (2.7) con respecto al parámetro p (ver figura 2.5).

El problema de computar la curva M es un problema de continuación finito-dimensional, lo cual significa encontrar una curva en \mathbb{R}^{n+1} definida por n ecuaciones del tipo

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{y} = [x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n, p]^T$. Supongamos que se tiene un punto $\mathbf{y}^{(j)} \in \mathbb{R}^{n+1}$, para un cierto j entero no negativo, que verifica las siguientes condiciones:

- **C.1** Pertenencia a la curva, esto es, satisface $\mathbf{F}(\mathbf{y}^{(j)}) = \mathbf{0}$,
- **C.2** No degeneración $\Rightarrow \text{rango}(F_y(\mathbf{y}^{(j)})) = n$.

El símbolo F_y usado en **C.2** denota el jacobiano, $n \times (n + 1)$, de \mathbf{F} . En estas condiciones, el *Teorema de la Función Implícita* garantiza la existencia, en un entorno del punto $\mathbf{y}^{(j)}$, de una única curva solución del sistema (2.9), que pasa por dicho punto. La continuación numérica no es más que la obtención del siguiente punto sobre la curva $\mathbf{y}^{(j+1)}$, partiendo de los datos conocidos en $\mathbf{y}^{(j)}$. De esta forma, se genera la curva M con la exactitud deseada.

El método de continuación se puede dividir en tres pasos principalmente: (1) elección del paso de continuación, $h^{(j)}$, (2) predicción del nuevo punto, $\tilde{\mathbf{y}}^{(j+1)}$, tomando un vector tangente a la curva, y (3) corrección mediante el método de Newton-Raphson. Como se puede observar, este método tiene la típica estructura *predictor-corrector*. El primer punto $\mathbf{y}^{(0)}$ debe ser conocido y normalmente se corresponde con un equilibrio $\mathbf{x}^{(0)}$ y parámetro $p^{(0)}$ fáciles de obtener, por ejemplo, la solución trivial del sistema. A continuación se van a estudiar cada una de las tres etapas descritas anteriormente con más detalle.

Elección del paso de continuación

Existen varias posibilidades en cuanto a la elección del paso de continuación en cada iteración del algoritmo. Lo más fácil sería fijar a priori un paso $h^{(0)}$ y mante-

nerlo constante a lo largo de todo el proceso, es decir, $h^{(j)} = h^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, \dots$. Sin embargo, es más acertado permitir que el paso sea variable, determinándose su magnitud en función de la velocidad de convergencia del método de Newton que se usa en el corrector. De esta forma, una convergencia lenta anima a reducir el paso, mientras que si ésta es buena se aumentaría.

Predictor

En esta fase del algoritmo se calcula el punto $\tilde{\mathbf{y}}^{(j+1)}$ a partir del punto conocido $\mathbf{y}^{(j)}$ y del vector $\mathbf{v}^{(j)}$, que debe ser tangente a la curva en dicho punto y cumplir $\|\mathbf{v}^{(j)}\| = 1$. De esta forma se tiene

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(j+1)} = \mathbf{y}^{(j)} + h^{(j)}\mathbf{v}^{(j)}, \quad (2.10)$$

comúnmente llamada *predicción de tangente*. Para calcular el vector tangente $\mathbf{v}^{(j)}$, se va a suponer que la curva está parametrizada en la forma $\mathbf{y}(s)$, donde s es el parámetro. Además, se sabe que la función $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ definida en (2.9) se anula sobre la curva, $\mathbf{F}(\mathbf{y}(s)) = 0$. Derivando esta última expresión con respecto al parámetro, que se denota por $\dot{}$, se tiene que $\mathbf{F}_y(\mathbf{y}(s))\dot{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{0}$, donde $\dot{\mathbf{y}}(s)$ es el vector tangente a la curva en $\mathbf{y}(s)$. Si se elige $s^{(j)}$ tal que $\mathbf{y}(s^{(j)}) = \mathbf{y}^{(j)}$, se puede escribir

$$\mathbf{F}_y(\mathbf{y}^{(j)})\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

que es equivalente a un sistema de n ecuaciones con $(n + 1)$ incógnitas. De alguna forma, es necesario imponer el sentido en el que se está realizando la continuación, ya que de otra forma, el proceso podría avanzar y retroceder indistintamente por la curva. Para ello, y conociendo el vector tangente en el paso anterior, se impone la siguiente condición

$$(\mathbf{v}^{(j-1)})^T \cdot \mathbf{v}^{(j)} = C < 1, \quad (2.12)$$

que garantiza que las dos tangentes apuntan en el mismo sentido de la curva. Añadiendo esta condición al sistema de n ecuaciones, definido por (2.11), se tiene un sistema cerrado que proporciona el vector tangente $\mathbf{v}^{(j)}$. Este sistema tiene

solución siempre que se cumpla la condición **C.2** y el paso de continuación no sea demasiado grande, provocando la no convergencia del método. Para finalizar es conveniente normalizar el vector $\mathbf{v}^{(j)}$.

Corrector

Una vez obtenida la predicción, $\tilde{\mathbf{y}}^{(j+1)}$, se corrige mediante el método de Newton-Raphson, obteniéndose $\mathbf{y}^{(j+1)}$.

El método de Newton-Raphson para la resolución de sistemas algebraicos no lineales del tipo $\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, consiste en, a partir de una primera aproximación $\mathbf{z}^{(0)}$, obtener la sucesión $\mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots$, tal que el término $(k+1)$ se obtiene del (k) -ésimo resolviendo el sistema linealizado alrededor de $\mathbf{z}^{(k)}$,

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}^{(k)}) + \mathbf{G}_z(\mathbf{z}^{(k)})(\mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)}) = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

donde \mathbf{G}_z denota el jacobiano del vector. En nuestro caso, el problema a resolver viene dado por (2.9) con la aproximación, $\tilde{\mathbf{y}}^{(j+1)}$, calculada mediante el predictor. El problema es que este sistema tiene más incógnitas que ecuaciones. Por lo tanto, es necesario añadir una ecuación al sistema (2.9). La condición de *pseudo longitud de arco* es la elección más común, siendo utilizada por ejemplo, tanto en AUTO2000 [63], como en MATCONT [64]. Esta condición se expresa matemáticamente como

$$g^{(j)}(\mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(j)})^T \cdot \mathbf{v}^{(j)} - h^{(j)} = 0. \quad (2.14)$$

La figura 2.6 muestra la interpretación geométrica de esta regla, que consiste en que la longitud del paso de continuación, $h^{(j)}$, se toma igual a la proyección ortogonal del vector $(\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(j)})$ sobre $\mathbf{v}^{(j)}$. Dicho esto, el sistema de ecuaciones a resolver mediante el método de Newton-Raphson, anteriormente descrito, es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{y}) \\ g^{(j)}(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

a partir de la semilla $\tilde{\mathbf{y}}^{(j+1)}$.

Por otro lado, en las bifurcaciones de las ramas (varias soluciones sobre el mismo punto, y puntos donde en general falla el teorema de la función implícita) la continuación puede hacerse en varias direcciones. Es necesario por tanto, añadir algunas condiciones adicionales para realizar la continuación [62].

Grosso modo, estos serán los métodos que se van a utilizar en el estudio de estabilidad del SET. Primero se aplicarán al estudio de un modelo simplificado de rotor desequilibrado, el modelo de Jeffcott. Después de esto, se estudiará un modelo del SET geoméricamente exacto basado en las ecuaciones de Kirchhoff-Love de una barra 3D.

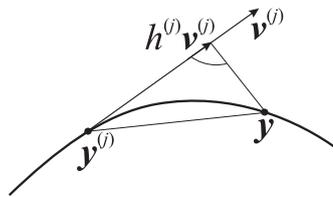


Figura 2.6: Pseudo longitud de arco.

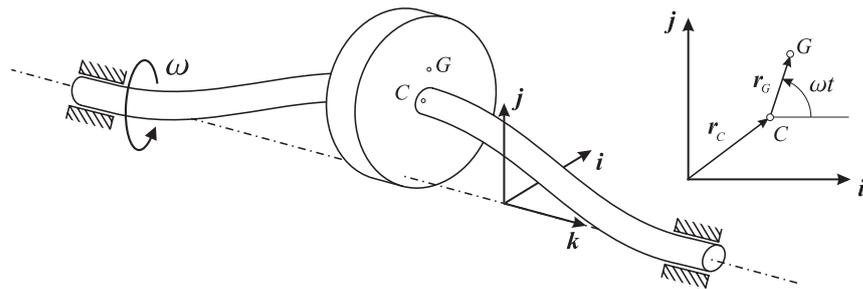


Figura 2.7: Modelo de Jeffcott original.

2.2. Modelo de Jeffcott de un rotor desequilibrado

El modelo de Jeffcott (1919) [26, 27] de un rotor desequilibrado, es la descripción más sencilla para representar la dinámica de rotores. Además, ha sido usado en la literatura sobre dinámica de rotores para estudiar la influencia de distintos fenómenos, tales como el amortiguamiento introducido en el sistema por la fricción en los ajustes de los apoyos, o la resistencia de un fluido (comúnmente designados como amortiguamiento externo), ortotropía de los apoyos, e incluso, del propio eje del rotor, amortiguamiento interno que proviene de la histéresis del material al estar sometido a tensiones alternativas, cargas constantes sobre el sistema rotor como pueden ser la acción del peso, eje del rotor inicialmente desalineado de la horizontal, etc. El modelo de Jeffcott (ver figura 2.7), está formado por un disco delgado rígidamente unido a un eje flexible, el cual reposa sobre apoyos sin rozamiento. El disco está unido al eje en su centro geométrico C , que como se puede ver en la figura 2.7, no coincide con su centro de masa G . El eje, que se considera rígido a torsión, está sujeto a una rotación de velocidad angular constante ω , por lo que el disco gira igualmente a esta velocidad, como se indica en la figura. El sistema coordenado $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es inercial. Este modelo tiene únicamente tres grados de libertad, los desplazamientos del centro del disco, \mathbf{r}_C , y el ángulo girado por éste, que en el caso de velocidad angular constante viene dado por ωt .

Con objeto de poder comparar los resultados del modelo de Jeffcott con otros resultados obtenidos para modelados más elaborados del SET, se ha adoptado una configuración en la que las condiciones de contorno sean iguales a las del problema real del SET. Por lo tanto, se va a sustituir el modelo de la figura 2.7 con condiciones de contorno para el eje de barra biapoyada, por el modelo de la figura 2.8, en el que el disco está rígidamente unido a un extremo del eje mientras que, el otro extremo está empotrado a una base que rota alrededor del eje inercial \mathbf{k} a una velocidad ω . Este sistema será denominado, a partir de este momento,

modelo de Jeffcott modificado.

Para el análisis que se va a llevar a cabo, se han definido dos sistemas coordenados auxiliares. El sistema coordenado $\{e_1, e_2, e_3\}$, que gira solidario con el eje alrededor de k , será denominado sistema coordenado móvil. Es conveniente introducir este sistema de ejes intermedios, para el análisis de la deformación y cualquier parámetro asociado a ella [26]. Además, las soluciones esperadas serán como mínimo periódicas de frecuencia ω en ejes inerciales. Ahora bien, si las ecuaciones dinámicas del sistema son proyectadas en ejes móviles, estas soluciones periódicas serán puntos fijos o de equilibrio, cuya estabilidad es más sencilla de analizar. Finalmente, se ha introducido el sistema coordenado $\{i_a, i_b, i_c\}$ asociado a cada sección, con i_c dirigido según la tangente al eje e $\{i_a, i_b\}$ contenidos en dicha sección (ver figura 2.9, donde el sistema coordenado se ha representado en la última sección del eje, coincidente con el disco).

Además, se ha supuesto que el centro de masa del disco G coincide con el punto de unión con el eje C , de forma que el sistema estaría equilibrado. Pero, como se dijo en la introducción de esta tesis, el sistema SET está desequilibrado inicialmente debido a que los tether, una vez desplegados, no son perfectamente rectos. Por lo tanto, para que el modelo de Jeffcott modificado sea lo más parecido posible al SET, se va a suponer que el eje está inicialmente deformado. De esta forma, se

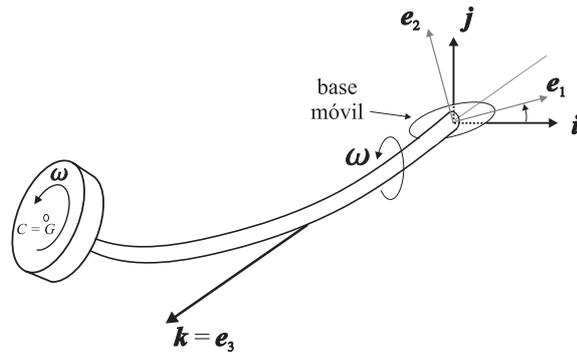


Figura 2.8: Modelo de Jeffcott modificado.

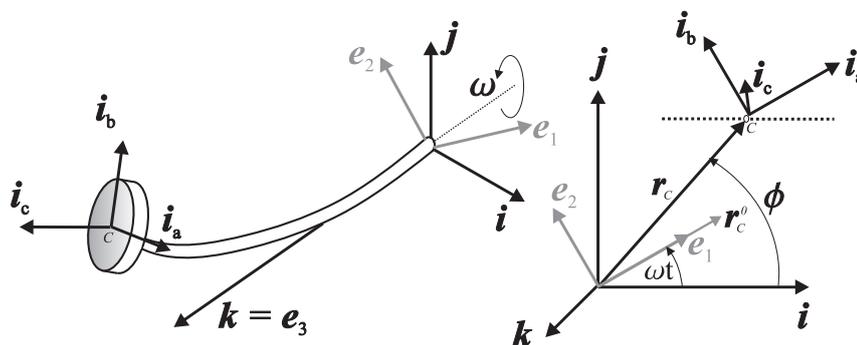


Figura 2.9: Modelo de Jeffcott modificado, proyección $\{i, j\}$.

introduce un desequilibrio en el sistema, equivalente al del disco desequilibrado a efectos dinámicos [26], y que se ajusta más al problema real que se está estudiando. Esta deformación inicial se expresa introduciendo un desplazamiento inicial del punto C , r_C^0 (ver figura 2.9). El modelo de la figura 2.8 ha perdido la simetría con respecto al plano del disco que tenía el modelo de la figura 2.7, por lo que se pueden esperar desplazamientos longitudinales según k , del disco. Además, el extremo de la barra unido al disco puede girar por deformación, haciendo que el disco tenga dos grados de libertad de giro, además del mencionado anteriormente asociado a su eje perpendicular. Por lo tanto, el modelo de Jeffcott modificado tendría 6 grados de libertad, los tres desplazamientos de su centro de masa G , más los tres ángulos de giro. En primer lugar, se va a suponer que las fuerzas de inercia asociadas a los giros por deformación de la barra son despreciables, frente a la inercia del disco alrededor de su eje perpendicular. En segundo lugar, se asume que la inercia asociada al desplazamiento longitudinal del disco será mucho menor que aquella asociada a los desplazamientos transversales, según i y j . De esta forma, el sistema se reduce a 3 grados de libertad como en el modelo de Jeffcott original.

El modelo de Jeffcott también se ha usado para estudiar la influencia del amortiguamiento histerético en primera aproximación [26, 27] y también en el

caso en el que las no linealidades geométricas pueden jugar un papel importante [36, 37, 38, 39, 40, 41]. Éste es el caso del SET, como se verá a continuación.

2.3. Influencia del amortiguamiento interno en un rotor desequilibrado

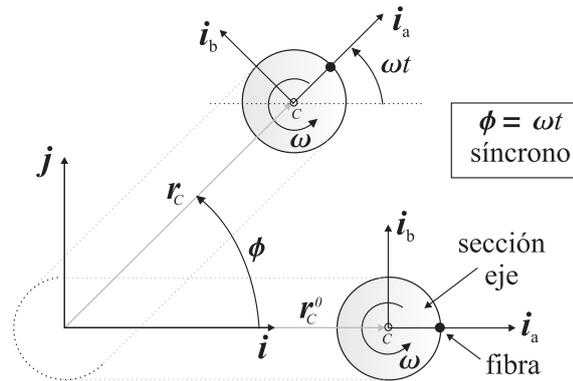


Figura 2.10: Rotación sincrónica del sistema

Es bien conocido que ciertos materiales sometidos a tensiones o cargas alternativas desarrollan ciclos de histéresis. En el caso del modelo de la figura 2.9, las tensiones alternativas aparecerán cuando el movimiento de giro del eje alrededor de su línea media, que viene dado por el ángulo ωt , no coincida con el giro ϕ alrededor de \mathbf{k} (precesión) del eje en el punto C , \mathbf{r}_C . En este caso, se dice que el movimiento de giro del sistema es asíncrono. La flecha del punto C puede expresarse en ejes inerciales y móviles según sus componentes respectivas como

$$\mathbf{r}_C = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2, \quad (2.16)$$

En el caso sincrónico, $\phi = \omega t$ en todo instante, por lo que cualquier fibra del eje estaría sometida a la misma tensión, independientemente del instante de tiempo considerado (ver figura 2.10). Esto significa que el eje se mantiene con deformación

constante moviéndose como un sólido rígido. Por otro lado, en el caso asíncrono, $\phi \neq \omega t$, por lo que la misma fibra estaría sometida a distintas tensiones según el instante de tiempo (ver figura 2.11), apareciendo en este caso amortiguamiento histerético en el material.

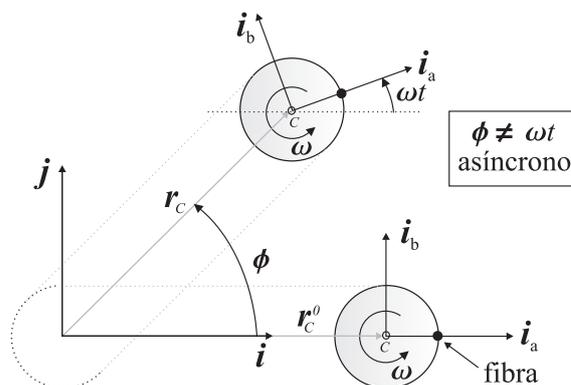


Figura 2.11: Rotación asíncrona del sistema.

Aun cuando el amortiguamiento histerético aparece en la mayoría de los sólidos sujetos a tensiones alternativas (piezas de maquinaria rotativa, motores, mecanismos en general, etc.), no se suele tener en cuenta a la hora de la simulación dinámica. Esto es debido a que su efecto, comparado con el que introducen en el sistema otros tipos de amortiguamiento, es despreciable. Por ejemplo, el amortiguamiento introducido en un mecanismo por la lubricación de los pares, el generado al operar en el seno de un fluido (gas, líquido), u otras fuentes de amortiguamiento bien conocidas [65], son mucho mayores en magnitud e influencia que el amortiguamiento histerético. Sin embargo, en el problema que se está estudiando, la única fuente de amortiguamiento presente es el histerético, ya que el SET orbita en el espacio (vacío) y está formado por un medio continuo (tether), rígidamente unido a una base rotativa (sin amortiguamiento en el par cinemático). En este caso, la histéresis tiene que ser tenida en cuenta y, como se verá a continuación, juega un papel determinante en la estabilidad del SET.

Por otro lado, es lógico suponer que las fibras del tether estarán sometidas a tensiones alternativas. Efectivamente, teniendo en cuenta que el tether se deforma por torsión y que es altamente flexible, se espera que evolucione con una rotación asíncrona. Por lo tanto, y salvando las diferencias que puedan existir entre un modelo tan sencillo como el de Jeffcott y el SET, se puede afirmar que el amortiguamiento histerético en el seno del tether será una fuente de inestabilidad [27, 26], que habrá que tener en cuenta en el problema bajo estudio.

A continuación se van a derivar las ecuaciones de movimiento del modelo de Jeffcott, para ver la influencia del amortiguamiento histerético sobre el sistema rotor. En régimen permanente ($\omega = \text{constante}$) y para el sistema inicialmente recto y equilibrado, las ecuaciones de movimiento vienen dadas por [26]

$$m \begin{bmatrix} \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \end{bmatrix} + c_i \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -\omega c_i \\ -\omega c_i & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

donde m es la masa del disco, k es la rigidez a flexión del eje y c_i , es la constante de amortiguamiento interno del material del eje. La fuerza generalizada de amortiguamiento se puede expresar en ejes móviles $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ como

$$\mathbf{F}_a = -c_i(\dot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{r}_2 \mathbf{e}_2), \quad (2.18)$$

donde puede observarse que esta fuerza es nula cuando el movimiento del sistema es síncrono. Los elementos cruzados de signo contrario en el término potencial de rigidez son indicativos de inestabilidad [26]. De hecho, un sencillo análisis indica que el sistema se vuelve inestable para velocidades de giro superiores a la frecuencia natural de flexión. Esta velocidad límite de estabilidad se denomina comúnmente “velocidad crítica”. Por lo tanto el sistema es inestable para

$$\omega > \omega_{crit} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.19)$$

Normalmente, este resultado, que fue desarrollado por Ziegler en los años cincuenta [66], es aceptado desde el punto de vista del diseño de rotores [67, 68], es decir, la velocidad de operación del sistema rotor debe estar por debajo de esta

velocidad crítica. Además, otros efectos, como el amortiguamiento externo o la ortotropía de los apoyos, incrementan el valor teórico de la velocidad crítica de forma que el rango de operación de la máquina es mayor [26]. Por lo tanto, es complicado encontrar un sistema real en el que el amortiguamiento interno actúe como único efecto desestabilizador sobre el sistema rotativo, pudiéndose, en principio, eludir la inestabilidad aumentando el rango de operación, mediante mecanismos físicos como los mencionados anteriormente. Esta es probablemente la causa por la que históricamente, no se ha estudiado la influencia del amortiguamiento interno en los rotores tanto como otros fenómenos, tales como la influencia de los apoyos, la del fluido en el seno del cual se encuentra el sistema rotor, la posible ortotropía del eje cuando su simetría es rota por la aparición de grietas por fatiga, etc. [26].

Como se apuntó en la introducción, previamente a esta tesis se realizaron una serie de trabajos sobre el SET [9], entre los que se puede encontrar el análisis dinámico del sistema mediante técnicas de Dinámica de Sistemas Multicuerpo (DSM). Usando una referencia flotante que gira solidaria con el módulo central del SET, se describe el tether. Igualmente, se discretiza usando elementos finitos, y posteriormente, mediante síntesis modal de componentes, se reducen los grados de libertad empleando una combinación lineal de modos de deformación. El amortiguamiento histerético se introduce como amortiguamiento modal. Siendo este modelo (aprox. 50 grados de libertad) mucho más complejo que el representado por las ecuaciones (2.17), los resultados del análisis dinámico muestran también cómo, por encima de la velocidad crítica, el sistema se vuelve inestable, creciendo la flecha del tether sin límite. Por lo tanto, y a la vista de estos resultados así como del análisis de estabilidad del modelo de Jeffcott, todos los indicios apuntan a que el SET no es estructuralmente estable para sus condiciones de operación, es decir, para velocidad “supercrítica”.

A finales de los años sesenta aparecen algunos estudios como el llevado a cabo por Bolotin [39], en el que da un paso adelante al considerar las no-linealidades geométricas del eje del rotor. De esta forma, se formula un modelo de Jeffcott

en el que las fuerzas elásticas y de amortiguamiento interno retienen términos no-lineales. A partir de este modelo, Genin y Maybee [36, 37, 38] desarrollaron nuevos teoremas de estabilidad para el modelo de Jeffcott geoméricamente no-lineal con amortiguamiento interno. En su caso, encontraron soluciones estables para velocidades supercríticas cuando analizaron la solución trivial del rotor inicialmente recto y equilibrado de sección circular con amortiguamiento externo. Más tarde, Shaw y Shaw [40] aplicaron técnicas más complejas de dinámica no-lineal y bifurcaciones para estudiar el mismo problema, haciendo hincapié en el comportamiento post-crítico del sistema, así como, catalogando las bifurcaciones que en este aparecen. De la misma forma, Chang y Cheng [41] analizaron el mismo sistema obteniendo expresiones analíticas para el radio de giro de la precesión del eje en zona supercrítica. Como se apuntaba anteriormente, el modelo de Jeffcott sujeto a la acción única de amortiguamiento interno, de sección no circular e inicialmente desviado de la horizontal (por lo que la solución trivial no es la de eje recto), no ha sido estudiado en detalle. En esta tesis se va a analizar dicho problema, de forma que se proporcionarán diagramas de bifurcación de las soluciones tanto para velocidades supercríticas como subcríticas, además de proporcionarse expresiones analíticas para el radio de la precesión del eje.

2.4. El modelo de Jeffcott modificado geoméricamente no-lineal

Como se ha apuntado anteriormente, se va a estudiar el modelo de la figura 2.9, que se ajusta a las condiciones de contorno del problema. De esta forma, la posición del centro de masa del disco C viene dada por la ecuación (2.16), y la flecha inicial del eje, que representa la desviación inicial del tether, se supone

$$\mathbf{r}_C^0 = r_x^0 \mathbf{i} + r_y^0 \mathbf{j} = r_1^0 \mathbf{e}_1. \quad (2.20)$$

La constante r_1^0 caracteriza la desviación inicial del sistema respecto al eje \mathbf{k} y

será usada como parámetro en el análisis de estabilidad que se va a llevar a cabo en la sección siguiente.

Como se ha dicho en la sección anterior, se van a estudiar las ecuaciones del sistema en ejes móviles $\{e_1, e_2, e_3\}$ para facilitar el análisis de estabilidad, de forma que éstas vienen dadas por

$$M\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{Q}_1\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{Q}_2\mathbf{r} - \mathbf{F}_a - \mathbf{F}_e = \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

donde $\mathbf{r} = [r_1, r_2]^T$ representa las componentes del vector \mathbf{r}_C en ejes móviles, dadas en la ecuación (2.16), y

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2m\omega \\ 2m\omega & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_2 = - \begin{bmatrix} m\omega^2 & 0 \\ 0 & m\omega^2 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

La constante m representa la masa del disco, más la masa generalizada asociada al eje. Los términos $\mathbf{Q}_1\dot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{Q}_2\mathbf{r}$ representan las fuerzas de Coriolis y centrífugas generalizadas, respectivamente, debido a que las ecuaciones están expresadas en ejes móviles. Por otro lado, \mathbf{F}_a y \mathbf{F}_e representan las fuerzas de amortiguamiento y elásticas generalizadas que el eje ejerce sobre el disco, respectivamente, y que se obtienen considerando las no-linealidades geométricas. Las ecuaciones (2.21) representan el equilibrio de fuerzas aplicadas sobre el disco cuando ω es constante, la primera de las cuales según e_1 y la segunda, según e_2 .

2.4.1. Cálculo de las fuerzas elásticas y de amortiguamiento no-lineales

Discretización del campo de desplazamientos

Para cerrar las ecuaciones de movimiento del sistema es necesario caracterizar los términos \mathbf{F}_a y \mathbf{F}_e , para lo cual se van a discretizar los desplazamientos del eje. El eje del rotor gira a la misma velocidad, ω , que el sistema móvil alrededor de \mathbf{k} , por lo que, en este sistema de referencia, el eje sólo sufre desplazamientos y puede tratarse cinemáticamente como una barra sin rotación para discretizar el

campo de desplazamientos. La figura 2.12, muestra la posición de la sección del eje del rotor para un x_3 dado (siendo $[x_1, x_2, x_3]^T$ las coordenadas de un punto de la sección en ejes móviles), de forma que la coordenada x_3 estará contenida en el intervalo $[0, l]$, donde l es la longitud total del eje; y además se cumplirá que

$$u(l, t) = r_1, \quad v(l, t) = r_2, \quad (2.23)$$

donde los desplazamientos $u(x_3, t)$ y $v(x_3, t)$ se muestran en la figura 2.12. También se asume que las únicas deformaciones importantes en el eje serán las normales a la sección (según \mathbf{i}_c), y que estas deformaciones serán la superposición de las producidas por los desplazamientos en los planos $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, respectivamente [69]. Por lo tanto, la deformación total normal al eje es

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^1 + \varepsilon_{33}^2, \quad (2.24)$$

donde los superíndices 1 y 2 representan deformaciones debidas a desplazamientos según \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , respectivamente. Teniendo en cuenta que las no-linealidades geométricas del eje aparecen en \mathbf{F}_e y \mathbf{F}_a , se va a usar una relación deformación-desplazamientos no-lineal. Para un sólido unidimensional que se deforma en un plano, como es el caso del eje del rotor considerando separadamente los planos

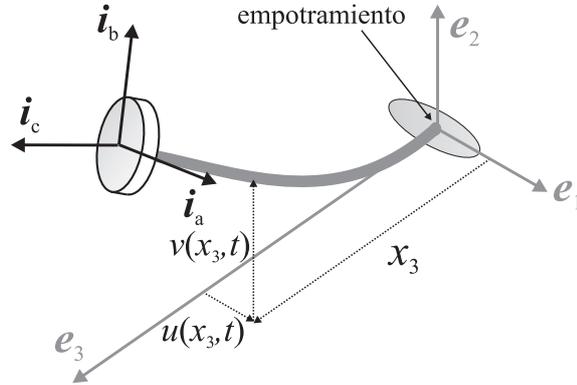


Figura 2.12: Desplazamientos del eje en $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, la deformación normal debida, por ejemplo, a los desplazamientos contenidos en el plano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ es [69]

$$\varepsilon_{33}^1 = \tilde{\varepsilon}_{33}^1 + x_a \chi_{33}, \quad (2.25)$$

donde x_a es la coordenada según \mathbf{i}_a en el triedro $\{\mathbf{i}_a, \mathbf{i}_b, \mathbf{i}_c\}$ de la sección. Los términos $\tilde{\varepsilon}_{33}^1$ y χ_{33} representan la deformación y curvatura de la línea media de la barra, respectivamente, y vienen dados por

$$\tilde{\varepsilon}_{33}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x_3, t)}{\partial x_3} \right)^2, \quad (2.26)$$

y

$$\chi_{33} = - \frac{\frac{\partial^2 u(x_3, t)}{\partial x_3^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial u(x_3, t)}{\partial x_3} \right)^2}}. \quad (2.27)$$

Este modelo elástico, denominado por Novozhilov [69] de flexión fuerte, solo desprecia elongaciones según x_3 de la barra (alargamiento) y deformaciones por cortante frente a la unidad, de forma que los giros sufridos por cada una de las secciones con respecto a las secciones de su entorno pueden ser considerablemente grandes. Teniendo en cuenta que lo que se pretende es capturar el carácter no-lineal de la deformada del eje en primera aproximación, para que las ecuaciones sean sencillas y se pueda realizar un estudio de estabilidad analítico, se van a despreciar los giros de la sección con respecto a la unidad, aunque no con respecto a las elongaciones y deformaciones por cortante. De esta forma, se cumple que

$$1 - \left(\frac{\partial u(x_3, t)}{\partial x_3} \right)^2 \approx 1. \quad (2.28)$$

Introduciendo esta aproximación en (2.27), la expresión final de la curvatura de la línea media del eje será

$$\chi_{33} = - \frac{\partial^2 u(x_3, t)}{\partial x_3^2}. \quad (2.29)$$

Las mismas consideraciones pueden ser aplicadas sobre las deformaciones debidas a los desplazamientos en el plano $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, de forma que

$$\varepsilon_{33}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x_3, t)}{\partial x_3} \right)^2 + x_b \frac{\partial^2 v(x_3, t)}{\partial x_3^2}. \quad (2.30)$$

De esta forma, la deformación normal total de las secciones se expresa en función de los desplazamientos como

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x_3, t)}{\partial x_3} \right)^2 - x_a \frac{\partial^2 u(x_3, t)}{\partial x_3^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x_3, t)}{\partial x_3} \right)^2 + x_b \frac{\partial^2 v(x_3, t)}{\partial x_3^2}. \quad (2.31)$$

El siguiente paso es discretizar el campo de desplazamientos $(u(x_3, t), v(x_3, t))$, para lo que se va a usar el método de Rayleigh-Ritz [25]. Los desplazamientos, por tanto, se expresan como combinación lineal de funciones de forma, que sólo dependen de x_3 :

$$\begin{aligned} u(x_3, t) &= \sum_i \phi_i^u(x_3) q_i^u(t), \\ v(x_3, t) &= \sum_j \phi_j^v(x_3) q_j^v(t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde $q_i^u(t)$ y $q_j^v(t)$ son los coeficientes de las funciones de forma, que dependen exclusivamente de t . Las funciones de forma se suelen tomar como los modos de vibración del sólido bajo estudio con sus correspondientes condiciones de contorno. Las coordenadas generalizadas del modelo de Jeffcott son (r_1, r_2) , que cumplen las relaciones (2.23). Se va a tomar una sola función de forma para cada desplazamiento. Esta función de forma debe cumplir $\phi^u(l) = \phi^v(l) = 1$ y la condición de contorno en el empotramiento del eje del rotor $\phi^u(0) = \phi^v(0) = 0$. Teniendo en cuenta que el eje se deformará de igual manera en los dos planos, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, y usando un polinomio de Hermite, de orden cúbico, para describir el modo de vibración de la barra, la expresión de la única función de forma que en adelante se va a usar es

$$\phi(x_3) = \frac{3}{2} \left(\frac{x_3}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_3}{l} \right)^3. \quad (2.33)$$

En este punto, es importante señalar que el modelo de Jeffcott que se va a usar en este capítulo es únicamente válido para un rango limitado de velocidades de giro. Quedando el sistema descrito cinemáticamente mediante dos únicos grados de libertad, los resultados que se obtengan sólo se podrán considerar válidos para velocidades de rotación ligeramente superiores a la segunda frecuencia natural del

sistema. Por lo tanto, el eje del rotor vibrará según su primer modo de vibración en cada plano, que es precisamente el que se ha usado para discretizar el campo de desplazamientos. De esta forma, para el régimen de velocidades que se va a considerar, la discretización de los desplazamientos mediante una sola función de forma puede considerarse suficiente.

Teniendo en cuenta que las ecuaciones (2.32) relacionan los desplazamientos con las coordenadas generalizadas mediante una combinación lineal de funciones de forma, la deformación inicial del eje se puede introducir sin más que añadir la constante r_1^0 de la siguiente forma

$$u(x_3, t) = \phi(x_3)(r_1(t) - r_1^0), \quad (2.34)$$

$$v(x_3, t) = \phi(x_3)r_2(t). \quad (2.35)$$

El amortiguamiento interno del eje del rotor juega un papel esencial en la estabilidad del sistema, como se mostró en la sección anterior. En lo que sigue, se va a derivar una relación tensión, deformación y velocidad de deformación que tenga en cuenta el amortiguamiento interno.

Modelado del amortiguamiento interno

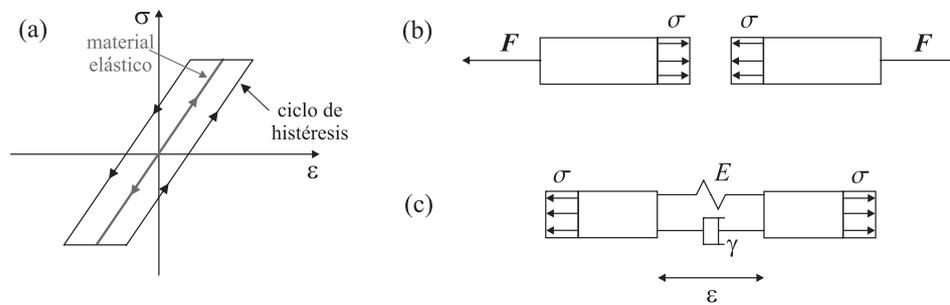


Figura 2.13: Modelado del amortiguamiento interno. (a) Ciclo de histéresis. (b) Problema unidimensional. (c) Modelo de amortiguamiento viscoso equivalente.

Supóngase un problema unidimensional como el de la barra sometida a tracción

pura de la figura 2.13-(b). Las únicas tensiones que aparecerán en este problema son normales a la sección, como se representa en dicha figura. El fenómeno de la histéresis se modela en ingeniería mediante los llamados “ciclos de histéresis” (ver figura 2.13-(a)). De esta forma se intenta modelar de un modo aproximado el desfase que provoca la histéresis en la relación tensión-deformación del material. En primera aproximación, y para el problema unidimensional que se está tratando, este desfase se modela añadiendo una parte imaginaria a la constante que relaciona tensiones y deformaciones, en este caso el módulo de Young. De esta forma, dicha relación viene dada por

$$\sigma = (E + i\delta)\varepsilon, \quad (2.36)$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y δ es la constante de amortiguamiento hysterético del material en cuestión. Sin embargo, este tipo de modelización no es conveniente si se quiere hacer un análisis en el dominio del tiempo y no, en el de la frecuencia del problema. Así, en ingeniería mecánica se suele usar una aproximación adicional, que consiste en suponer un amortiguamiento viscoso equivalente (Ley de Kelvin-Voigt [65]) en lugar de hysterético (ver figura 2.13-(c)). Así, la ley tensión-deformación se transformaría en

$$\sigma = E(\varepsilon + \gamma\dot{\varepsilon}), \quad (2.37)$$

donde γ es la constante de amortiguamiento viscoso, que viene representada por el amortiguador equivalente de la figura 2.13-(c), y $(\dot{})$ representa derivada con respecto al tiempo. Llegados a este punto, es necesario hacer una serie de consideraciones sobre el rango de validez de esta última aproximación. En primer lugar, hay que tener en cuenta que la constante de amortiguamiento hysterético, δ , se considera una propiedad del material. Sin embargo, la constante de amortiguamiento viscoso depende de la frecuencia de aplicación de las cargas sobre el sistema de una forma aproximadamente lineal, por lo tanto no se puede considerar una propiedad intrínseca del material [65]. De esta forma, si dichas constantes se obtienen mediante experimentación para el material en cuestión, el valor de δ no dependerá de la frecuencia de aplicación de las cargas en el experimento, pero, el valor de γ

sí tendrá una dependencia aproximadamente lineal, en el entorno de la frecuencia del experimento. Por lo tanto, la constante de amortiguamiento viscoso sólo es válida en un entorno de la frecuencia a la que se ha calculado, ya sea mediante experimentación o analíticamente, como se va a ver en la siguiente sección [70]. En cualquier caso, y teniendo en cuenta lo anterior, la ley tensión-deformación en el eje del rotor (normales a la sección) se puede expresar como

$$\sigma_{33} = E(\varepsilon_{33} + \gamma\dot{\varepsilon}_{33}), \quad (2.38)$$

donde σ_{33} es la tensión normal a la sección del eje del rotor. Para obtener la ley de tensión-deformación viscoelástica de la expresión (2.38), se ha supuesto que la barra bajo estudio es una viga de Euler, por lo que tensiones octaédricas y desviadoras están desacopladas, y las deformaciones por flexión/tracción y torsión pueden estudiarse separadamente [70]. En caso contrario, se tendría una ley tensión-deformación tridimensional totalmente acoplada que incluye dos constantes de amortiguamiento viscoso asociadas a deformaciones octaédricas y desviadoras, respectivamente.

Cálculo de la constante de amortiguamiento viscoso equivalente

Es posible encontrar valores tabulados, o expresiones empíricas, para la constante de amortiguamiento viscoso equivalente de materiales comúnmente utilizados en ingeniería [65, 71]. Estos valores o expresiones dependerán generalmente de las condiciones experimentales en que se calcularon, especialmente de la frecuencia de aplicación de las cargas. También existen procedimientos experimentales que permiten el cálculo sistemático de dicho coeficientes. En el caso del SET, el tether está fabricado de una aleación cobre-berilio poco común, por lo tanto, los valores de las constantes de amortiguamiento no se encuentran en la literatura. Para esta tesis, se ha optado por un cálculo aproximado analítico de estas constantes de amortiguamiento, ya que no se disponía de los medios necesarios para su cálculo experimental.

Es bien sabido [25] que el amortiguamiento crítico de un sistema masa-muelle, como el que se muestra en el modelo equivalente de la figura 2.13-(c), es igual a dos veces la inversa de la frecuencia natural de dicho sistema,

$$\gamma_{crit} = \frac{2}{\omega_n}. \quad (2.39)$$

En ingeniería mecánica, se suele usar un valor porcentual, ξ , del amortiguamiento crítico para caracterizar la constante de amortiguamiento viscoso. De esta forma, la constante de amortiguamiento del modelo masa-muelle equivalente sería

$$\gamma = \frac{2\xi}{\omega_n}. \quad (2.40)$$

Teniendo en cuenta que para el eje del rotor sólo se han considerado deformaciones normales, en este caso debidas a la flexión en lugar de a tracción pura, como en el ejemplo de la figura 2.13-(b), la constante de amortiguamiento equivalente para el modelo de Jeffcott se puede calcular de forma análoga a la descrita anteriormente. De esta forma, y considerando la ortotropía de la sección del eje, cabe elegir entre dos opciones, según la constante se calcule con uno, u otro de los momentos de inercia de la sección del rotor. Finalmente, se ha optado por usar el mayor de ellos, por lo que el eje disipará energía por deformación en la cantidad establecida, según la dirección de mayor momento de inercia de la sección, y en una cantidad superior a la que le correspondería, en cierto sentido del lado de la seguridad, en la otra dirección. Evidentemente, la frecuencia natural se calculará teniendo en cuenta las condiciones de contorno del problema original, por lo que se usará la frecuencia natural de una barra empotrada en un extremo y con una masa puntual, suficientemente grande como para despreciar la masa de la barra, en el otro extremo. Esta frecuencia natural tiene la siguiente expresión

$$\omega_n^a = \sqrt{\frac{3EI_a}{ml^3}}, \quad (2.41)$$

donde $I_a > I_b$ son los momentos de inercia de la sección del eje alrededor de i_a e i_b , respectivamente (ver figura 2.9). De esta forma, y asumiendo un valor apropiado de ξ [65], la constante γ queda definida.

Llegando a este punto, es importante tener en cuenta que el modelo que se está describiendo va a ser usado para realizar un estudio paramétrico de estabilidad. Esto quiere decir que se van a generar diagramas de bifurcación y estabilidad en función de ciertos parámetros o números adimensionales, entre los cuales estará el amortiguamiento adimensional. Por lo tanto, aunque el cálculo del amortiguamiento propuesto es aproximado, éste se podrá variar libremente para observar qué influencia tiene sobre la dinámica del sistema.

Finalmente, es necesario apuntar que bajo el rango de validez del modelo que se está formulando (frecuencias de giro ligeramente superiores a la segunda frecuencia natural del sistema), la constante de amortiguamiento viscoso, calculada usando la segunda frecuencia natural del sistema (con la mayor de las inercias de la sección, I_a), se puede considerar prácticamente independiente de la frecuencia de giro. A partir de este momento, por tanto, se asume que la constante γ , calculada anteriormente, es válida en todo el rango de velocidades que se va a estudiar.

Expresión final de F_e

Una vez definida la relación tensión-deformación, ecuaciones (2.31), (2.38), (2.40) y (2.41), la energía de deformación asociada al sistema es

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{33} \varepsilon_{33}) dV = \frac{1}{2} \int_V (E \varepsilon_{33}^2) dV, \quad (2.42)$$

donde $V = A_s l$ representa el volumen total del eje, siendo A_s el área de la sección transversal. Introduciendo las expresiones (2.33), (2.34) y (2.35) en (2.31), sustituyendo el resultado en (2.42) y teniendo en cuenta que la sección es simétrica con respecto a los ejes i_a e i_b , la expresión final de la energía de deformación es

$$U = \frac{EA_s P_1}{8} ((r_1(t) - r_1^0)^4 + r_2^4(t)) + \frac{EA_s P_1}{4} (r_1(t) - r_1^0)^2 r_2^2(t) + \frac{EI_b P_2}{2} (r_1(t) - r_1^0)^2 + \frac{EI_a P_2}{2} r_2^2(t), \quad (2.43)$$

donde

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_l \phi'^4(x_3) dx_3 = \frac{72}{35l^3}, \quad P_2 = \int_l \phi''^2(x_3) dx_3 = \frac{3}{l^3}, \\ I_a &= \int_{A_s} x_b^2 dA_s, \quad I_b = \int_{A_s} x_a^2 dA_s, \end{aligned} \quad (2.44)$$

y $()'$ denota derivada con respecto a x_3 .

Las fuerzas elásticas se obtienen derivando la energía potencial con respecto a las coordenadas generalizadas, como sigue

$$\begin{aligned} F_e^1 &= -\frac{\partial U}{\partial r_1} = -EI_b P_2 (r_1 - r_1^0) - \frac{EA_s P_1}{2} (r_1 - r_1^0) ((r_1 - r_1^0)^2 + r_2^2), \\ F_e^2 &= -\frac{\partial U}{\partial r_2} = -EI_a P_2 r_2 - \frac{EA_s P_1}{2} r_2 ((r_1 - r_1^0)^2 + r_2^2), \end{aligned} \quad (2.45)$$

donde el segundo término de la parte derecha de las dos igualdades representa la no-linealidad geométrica introducida en el modelo, siendo ésta de orden cúbico en los desplazamientos generalizados de la barra. Usando la notación de Bolotin [39] para agrupar y nombrar los términos de la ecuación, se tienen los siguientes coeficientes elásticos

$$\begin{aligned} k_1 &= EI_b P_2, \quad k_2 = EI_a P_2, \\ \alpha_1 &= \frac{A_s P_1}{2I_b P_2}, \quad \alpha_2 = \frac{A_s P_1}{2I_a P_2}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

de forma que la expresión final de las fuerzas elásticas es

$$\begin{aligned} F_e^1 &= -k_1 (r_1 - r_1^0) - k_1 \alpha_1 (r_1 - r_1^0) ((r_1 - r_1^0)^2 + r_2^2) \\ F_e^2 &= -k_2 r_2 - k_2 \alpha_2 r_2 ((r_1 - r_1^0)^2 + r_2^2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Expresión final de F_a . Función de disipación de Rayleigh y potencia disipada

La potencia disipada en el eje debida a la acción del amortiguamiento interno es [72]

$$P_{dis} = \int_V (E\gamma \dot{\varepsilon}_{33}^2) dV. \quad (2.48)$$

Teniendo en cuenta de nuevo las ecuaciones (2.33)-(2.35) y (2.31), la potencia disipada resulta

$$P_{dis} = \gamma EA_s P_1 ((r_1 - r_1^0)^2 \dot{r}_1^2 + 2(r_1 - r_1^0) r_2 \dot{r}_1 \dot{r}_2 + r_2^2 \dot{r}_2^2) + \gamma EI_b P_2 \dot{r}_1^2 + \gamma EI_a P_2 \dot{r}_2^2, \quad (2.49)$$

donde se ha suprimido la dependencia de las variables por simplicidad. Considerando la potencia disipada como una función de disipación de Rayleigh [70, 72], $F_d = 0.5 P_{dis}$, las fuerzas de amortiguamiento se obtienen de la siguiente forma

$$F_a^1 = - \frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_1} = -2\gamma EI_b P_2 \dot{r}_1 - 2\gamma EA_s P_1 (r_1 - r_1^0) ((r_1 - r_1^0) \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2) \\ F_a^2 = - \frac{\partial F_d}{\partial \dot{r}_2} = -2\gamma EI_a P_2 \dot{r}_2 - 2\gamma EA_s P_1 r_2 ((r_1 - r_1^0) \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2). \quad (2.50)$$

Usando de nuevo la notación de Bolotin [39], las fuerzas de amortiguamiento se escriben de la siguiente manera

$$F_a^1 = -c_{i1} \dot{r}_1 - c_{i1} \alpha_1 (r_1 - r_1^0) ((r_1 - r_1^0) \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2) \\ F_a^2 = -c_{i2} \dot{r}_2 - c_{i2} \alpha_2 r_2 ((r_1 - r_1^0) \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2), \quad (2.51)$$

donde

$$c_{i1} = 2\gamma EI_b P_2, \quad c_{i2} = 2\gamma EI_a P_2. \quad (2.52)$$

2.4.2. Forma final de las ecuaciones de movimiento

Una vez definidas las fuerzas elásticas y de amortiguamiento no-lineales, las ecuaciones de movimiento del modelo de Jeffcott modificado (2.21) se pueden escribir de la siguiente manera

$$M\ddot{\mathbf{r}} + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{C}_l + \mathbf{C}_{nl})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{Q}_2\mathbf{r} + (\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl})(\mathbf{r} - [r_1^0 \ 0]^T) = \mathbf{0}, \quad (2.53)$$

donde M , \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 están definidas en (2.22) y

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{nl} = ((r_1 - r_1^0)^2 + r_2^2) \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 k_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} c_{i1} & 0 \\ 0 & c_{i2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{nl} = 2 \begin{bmatrix} \alpha_1 c_{i1} (r_1 - r_1^0)^2 & \alpha_1 c_{i1} (r_1 - r_1^0) r_2 \\ \alpha_2 c_{i2} (r_1 - r_1^0) r_2 & \alpha_2 c_{i2} r_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Adimensionalización de las ecuaciones de movimiento

Cuando se lleva a cabo el análisis de estabilidad de un sistema dinámico, es importante adimensionalizar sus ecuaciones ya que así, el número de constantes que define el sistema se reduce a un número mínimo de parámetros adimensionales. Una vez seleccionados, los parámetros adimensionales caracterizan por completo la geometría, características del material, etc. del sistema bajo estudio. Además, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de segundo orden (2.53) se va a transformar en un sistema de primer orden de dimensión doble usando las siguientes variables adimensionales

$$q_1 = \frac{\dot{r}_1 \sqrt{\alpha_2}}{\omega_{n2}}, \quad q_2 = \frac{\dot{r}_2 \sqrt{\alpha_2}}{\omega_{n2}}, \quad q_3 = r_1 \sqrt{\alpha_2}, \quad q_4 = r_2 \sqrt{\alpha_2}, \quad \tau = t\omega_{n2}, \quad (2.55)$$

donde

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad (2.56)$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad (2.57)$$

son la primera y segunda frecuencia natural del sistema barra-disco, respectivamente. A partir de ellas, se va a definir el parámetro de ortotropía del eje, que medirá cuanto se separa la sección del carácter circular isótropo, de la siguiente forma

$$R = \frac{\omega_{n1}}{\omega_{n2}} = \sqrt{\frac{I_b}{I_a}} \in (0, 1], \quad I_b < I_a. \quad (2.58)$$

Cuando $R = 1$, el eje es isótropo. De esta forma, variando el parámetro R , se puede estudiar este caso con interés práctico en el campo de la dinámica de rotores.

Teniendo en cuenta las expresiones (2.55), las ecuaciones (2.53) se transforman

en

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= 2\bar{\omega}q_2 + \omega^2q_3 - (q_3 - q_{30})(R^2 + (q_3 - q_{30})^2 + q_4^2 + 4\bar{\gamma}((q_3 - q_{30})q_1 + q_2q_4) \\
&\quad - 2\bar{\gamma}R^2q_1 \\
\dot{q}_2 &= -2\bar{\omega}q_1 + (\omega^2 - 1)q_4 - q_4((q_3 - q_{30})^2 + q_4^2 + 4\bar{\gamma}((q_3 - q_{30})q_1 + q_2q_4) \\
&\quad - 2\bar{\gamma}q_2 \\
\dot{q}_3 &= q_1 \\
\dot{q}_4 &= q_2
\end{aligned} \tag{2.59}$$

donde $(\dot{})$ representa, en lo que sigue, derivada con respecto al tiempo adimensional τ , $\bar{\gamma} = \gamma\omega_{n2}$ es la constante de amortiguamiento adimensional, $q_{30} = r_1^0\sqrt{\alpha_2}$ es la desviación inicial adimensional y, $\bar{\omega}$ es la velocidad angular de giro adimensional. Por tanto, es necesario proporcionar cuatro parámetros adimensionales para definir el sistema representado por las ecuaciones (2.59): $\bar{\omega}$, $\bar{\gamma}$, R y q_{30} .

Algunas consideraciones previas sobre el análisis de estabilidad

Para obtener los equilibrios o puntos fijos del sistema, representados a partir de este momento por el vector $\bar{q} = [\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4]^T$, el vector velocidad $\dot{\bar{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4]^T$ debe anularse [22], en cuyo caso, las velocidades del problema original de segundo orden, \dot{r}_1 y \dot{r}_2 , son lógicamente nulas en los equilibrios.

A la hora de determinar la estabilidad de los diferentes equilibrios, es necesario tener información sobre el sistema linealizado alrededor del equilibrio en cuestión. Dicha linealización viene dada por (versión de la ecuación (2.59) como EDO de segundo orden)

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} + (\bar{\omega} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\bar{\gamma}R^2 + 4\bar{\gamma}(q_3 - q_{30})^2 & 4\bar{\gamma}(q_3 - q_{30})q_4 \\ 4\bar{\gamma}(q_3 - q_{30})q_4 & 2\bar{\gamma} + 4\bar{\gamma}q_4^2 \end{bmatrix}) \dot{\mathbf{p}} \\
&+ \begin{bmatrix} 3(q_3 - q_{30})^2 + q_4^2 + (R^2 - \bar{\omega}^2) & 2(q_3 - q_{30})q_4 \\ 2(q_3 - q_{30})q_4 & (q_3 - q_{30})^2 + 3q_4^2 + (1 - \bar{\omega}^2) \end{bmatrix} \mathbf{p} = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{2.60}$$

donde

$$\mathbf{p} = [q_3, q_4]^T - [\bar{q}_3, \bar{q}_4]^T, \quad (2.61)$$

siendo \bar{q}_3 y \bar{q}_4 los valores de las variables en el equilibrio que esté siendo analizado. Siguiendo la notación usada por Roseau [73], el sistema (2.60) tiene la siguiente estructura

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{p}} + (\zeta\mathbf{\Gamma} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{K} + \mathbf{E})\mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (2.62)$$

donde \mathbf{A} representa la matriz de inercia, $\mathbf{\Gamma}$ es la matriz de los pares giroscópicos, ζ es la velocidad de rotación, \mathbf{D} es la matriz de disipación o amortiguamiento y \mathbf{K} y \mathbf{E} representan la matriz de rigidez del sistema. En este caso, \mathbf{K} es una matriz simétrica que reproduce las fuerzas elásticas y la matriz \mathbf{E} es antisimétrica. Identificando (2.60) con (2.62) se obtienen expresiones para las matrices en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \zeta\mathbf{\Gamma} = \bar{\omega} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 2\bar{\gamma}R^2 + 4\bar{\gamma}(q_3 - q_{30})^2 & 4\bar{\gamma}(q_3 - q_{30})q_4 \\ 4\bar{\gamma}(q_3 - q_{30})q_4 & 2\bar{\gamma} + 4\bar{\gamma}q_4^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 3(q_3 - q_{30})^2 + q_4^2 + (R^2 - \bar{\omega}^2) & 2(q_3 - q_{30})q_4 \\ 2(q_3 - q_{30})q_4 & (q_3 - q_{30})^2 + 3q_4^2 + (1 - \bar{\omega}^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

El análisis de estabilidad del sistema (2.62) se puede realizar de forma sencilla analizando el carácter de las formas cuadráticas asociadas a las matrices definidas en (2.63). En el caso bajo estudio, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, se usarán los siguientes teoremas enunciados por Roseau [73]:

- Teorema 1. Sea \mathbf{D} una matriz definida positiva; si uno de los autovalores de \mathbf{K} es negativo y su determinante es distinto de cero, entonces el equilibrio $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ es inestable para todo ζ .
- Teorema 2. Sea \mathbf{D} una matriz definida positiva; si \mathbf{K} es definida positiva el equilibrio $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ es asintóticamente estable. Si \mathbf{K} es definida negativa, el equilibrio es inestable para todo ζ .

Usando estos teoremas, se va a estudiar la estabilidad de los diferentes equilibrios del sistema (2.59). Alcanzado este punto, es interesante apuntar que las ecuaciones (2.59) también son válidas para describir configuraciones del sistema rotor más sencillas de la que finalmente se quiere analizar (rotor no-lineal con el eje inicialmente desviado de la horizontal). Efectivamente, sin más que hacer $q_{30} = 0$, las ecuaciones representarían el modelo de Jeffcott no-lineal inicialmente recto. Si además se anulan los coeficientes α_1 y α_2 , se tiene el modelo de Jeffcott geoméricamente lineal. Finalmente, haciendo el parámetro $R = 1$ se consigue que la sección del eje sea isótropa. En primer lugar, se va a estudiar el caso geoméricamente no-lineal con el eje inicialmente recto. Una vez que la dinámica de este sistema esté determinada, se introducirá la desviación inicial $q_{30} \neq 0$ y se verá qué efecto tiene sobre la dinámica global del sistema rotor. En algunos casos, para una mejor comprensión de los fenómenos que irán apareciendo, se harán comparaciones con el sistema lineal isótropo y otros sistemas simplificados (comportamiento conocido y establecido en la literatura y diseño de rotores), que como se ha dicho anteriormente, están de alguna forma incluidos en las ecuaciones que se van a analizar.

2.4.3. Análisis de estabilidad del modelo de Jeffcott no-lineal ortótropo inicialmente recto,

$$\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, R < 1, q_{30} = 0$$

El sistema inicialmente recto tiene dos planos de simetría, $\{e_1, e_3\}$ y $\{e_2, e_3\}$. En el caso de sección isótropa $R = 1$, el eje e_3 es un eje de simetría de revolución. Este tipo de simetrías son muy importantes ya que definen en cierto modo la topología del sistema [22], que se verá reflejada en la forma y configuración de las ramas de equilibrios. El parámetro q_{30} rompe estas simetrías del sistema físico, por lo tanto, se esperan pérdidas de simetría de las soluciones cuando este parámetro sea distinto de cero. De esta forma, conociendo el comportamiento del problema simétrico, se puede prever en cierto modo como va a comportarse el sistema sin simetrías [22].

Las ecuaciones de movimiento adimensionales que serán analizadas en este caso son

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= 2\bar{\omega}q_2 + \omega^2q_3 - q_3(R^2 + q_3^2 + q_4^2 + 4\bar{\gamma}(q_1q_3 + q_2q_4)) - 2\bar{\gamma}R^2q_1 \\
\dot{q}_2 &= -2\bar{\omega}q_1 + (\omega^2 - 1)q_4 - q_4(q_3^2 + q_4^2 + 4\bar{\gamma}(q_1q_3 + q_2q_4)) - 2\bar{\gamma}q_2 \\
\dot{q}_3 &= q_1 \\
\dot{q}_4 &= q_2
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Anulando el vector $\dot{\mathbf{q}}$ se obtiene un sistema no-lineal con $q_1 = q_2 = 0$. La resolución de dicho sistema da lugar a tres ramas de equilibrios diferenciadas que vienen dadas por

$$1. \quad q_3 = q_4 = 0, \tag{2.65}$$

$$2. \quad q_4 = 0; \quad q_3 = \pm\sqrt{\bar{\omega}^2 - R^2} \quad \text{si } \bar{\omega} > R, \tag{2.66}$$

$$3. \quad q_3 = 0; \quad q_4 = \pm\sqrt{\bar{\omega}^2 - 1} \quad \text{si } \bar{\omega} > 1. \tag{2.67}$$

La expresión (2.65) representa la solución trivial del sistema, que es solución para cualquier conjunto de parámetros, rama 1. Para analizar su estabilidad, se sustituyen los valores del equilibrio en las expresiones (2.63), obteniéndose

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\bar{\gamma}R^2 & 0 \\ 0 & 2\bar{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} R^2 - \bar{\omega}^2 & 0 \\ 0 & 1 - \bar{\omega}^2 \end{bmatrix}. \tag{2.68}$$

La matriz \mathbf{D} es definida positiva en cualquier caso. Para $\bar{\omega} < R$, ambos autovalores son positivos, por tanto, \mathbf{K} es definida positiva y en virtud del teorema 2, el equilibrio es asintóticamente estable. En $\bar{\omega} = R$, la solución trivial coexiste con la solución (2.66), es un punto de bifurcación BP1 (ver figura 2.14). A partir de este punto, la solución trivial se hace inestable ya que uno de sus autovalores se hace negativo. En el punto $\bar{\omega} = 1$, aparece una segunda bifurcación BP2 de la cual nace la rama de soluciones (2.67) (ver figura 2.14). La solución trivial es estable sólo para velocidades $\bar{\omega} < R$, subcríticas. Este resultado coincide con la teoría lineal de rotores [27, 26], sin embargo, esta teoría no es capaz de describir las soluciones (2.66) y (2.67).

La rama 2 de soluciones (2.66) (ver figura 2.14), nace en el punto BP1 (bifurcación de tridente supercrítica [22]) y existe para todo $\bar{\omega} > R$. En este caso, las matrices \mathbf{D} y \mathbf{K} tienen las siguientes expresiones

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\bar{\gamma}R^2 + 4\bar{\gamma}q_3^2 & 0 \\ 0 & 2\bar{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2(\bar{\omega}^2 - R^2) & 0 \\ 0 & 1 - R^2 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

La matriz \mathbf{D} es definida positiva y los autovalores de \mathbf{K} , $\gamma_1 = 2(\bar{\omega}^2 - R^2)$ y $\gamma_2 = 1 - R^2$, son ambos positivos por lo que en virtud del teorema 2, la rama 2 es asintóticamente estable, como se indica en la figura 2.14.

La rama 3 (2.67), nace en la segunda bifurcación de tridente BP2. Las matrices \mathbf{D} y \mathbf{K} son en este caso

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2\bar{\gamma}R^2 & 0 \\ 0 & 2\bar{\gamma} + 4\bar{\gamma}q_4^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} (R^2 - 1) & 0 \\ 0 & 2(\bar{\omega}^2 - 1) \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

De nuevo, \mathbf{D} es definida positiva, sin embargo, el autovalor $\gamma_1 = R^2 - 1$ es negativo ya que $R < 1$ por definición. Por otro lado, el autovalor $\gamma_2 = 2(\bar{\omega}^2 - 1)$ es siempre positivo en condiciones de existencia de la rama 3, ver(2.67). Haciendo uso del teorema 1, se puede afirmar que la rama 3 es inestable, como se indica en la figura 2.14.

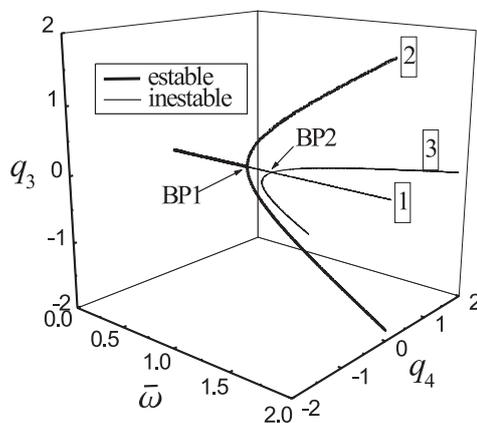


Figura 2.14: Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente recto.

Haciendo tender el parámetro R a la unidad se obtienen resultados para el rotor no-lineal recto isótropo. En la figura 2.15, se muestra tanto las ramas como su estabilidad en este caso. Se puede observar cómo la degeneración del problema por tener un eje de simetría de revolución se refleja en una mayor degeneración de las ramas de soluciones. Las dos bifurcaciones de tridente, que aparecían en el caso ortótropo, se funden en una bifurcación doblemente degenerada de la que surge toda una superficie de posibles soluciones, en la que la dirección que tomará la flecha del eje es totalmente arbitraria.

2.4.4. Análisis de estabilidad del modelo de Jeffcott no-lineal ortótropo inicialmente desviado,

$$\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, R < 1, q_{30} \neq 0$$

Se van a analizar en este caso las ecuaciones (2.59). Al igual que en la teoría lineal de rotores [26], el estudio se dividirá en dos regiones, principalmente: velo-

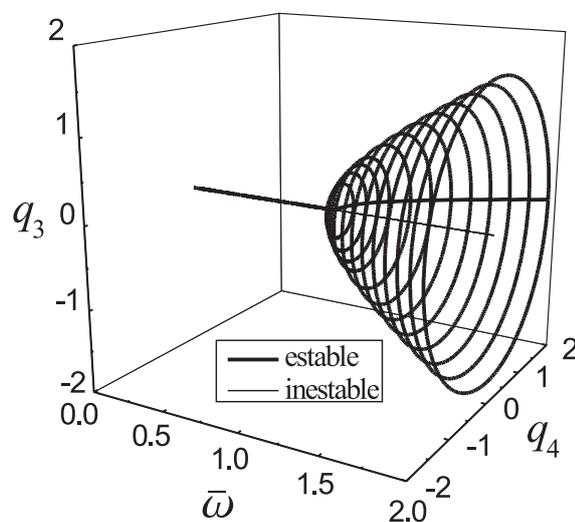


Figura 2.15: Ramas de equilibrios, rotor no-lineal recto isótropo.

cidad subcrítica ($\bar{\omega} < R$) y velocidad supercrítica ($\bar{\omega} > R$), con dos regiones de comportamiento diferenciado en este último caso, ($1 > \bar{\omega} > R$) y ($\bar{\omega} > 1$).

Las matrices \mathbf{D} y \mathbf{K} vienen dadas por la expresión (2.63). Anulando el vector $\dot{\mathbf{q}}$ en las ecuaciones (2.59), las ramas de equilibrios se obtendrán resolviendo las siguientes ecuaciones

$$y^3 + ((R^2 - \bar{\omega}^2) + q_4^2)y = \bar{\omega}^2 q_{30}, \quad (2.71)$$

$$q_4((\bar{\omega}^2 - 1) - y^2 - q_4^2) = 0, \quad (2.72)$$

donde se ha introducido la nueva variable $y = (q_3 - q_{30})\sqrt{\alpha_2}$, que facilita la resolución de las ecuaciones. Observando la ecuación (2.72), la primera conclusión que se puede sacar es que existirán dos tipos de soluciones bien diferenciadas; soluciones contenidas en el plano de desviación inicial $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ cuya componente q_4 es igual a cero, llamadas a partir de ahora “plana”; y soluciones cuya componente q_4 es distinta de cero, que serán referidas como soluciones “espaciales” y estarán caracterizadas, según la ecuación (2.72), por la siguiente relación entre sus coordenadas

$$q_4^2 = (\bar{\omega}^2 - 1) - y^2. \quad (2.73)$$

Se va a comenzar el análisis por las soluciones planas, sin embargo, en cierto punto, será necesario tener en cuenta las soluciones espaciales, por lo que finalmente se estudiará la estabilidad de ambas soluciones de forma simultánea.

Siendo $q_4 = 0$, la ecuación (2.71) se transforma en

$$y^3 + ((R^2 - \bar{\omega}^2))y = \bar{\omega}^2 q_{30}, \quad (2.74)$$

donde el primer miembro de la igualdad se va a renombrar como $f(\bar{\omega}, R, y)$ y el segundo como $\lambda(\bar{\omega}, q_{30})$. Observando las expresiones (2.63) y teniendo en cuenta que $q_4 = 0$ en las soluciones planas, se puede afirmar que \mathbf{D} es definida positiva para cualquier elección de parámetros característicos del sistema. Además, se

pueden identificar los autovalores de la matriz \mathbf{K} como

$$\gamma_1 = 3y^2 + (R^2 - \bar{\omega}^2), \quad (2.75)$$

$$\gamma_2 = y^2 + (1 - \bar{\omega}^2). \quad (2.76)$$

A partir de este punto, se va a separar el análisis en cuatro casos diferentes:

Caso A, $\bar{\omega} < R$; *Caso B*, $\bar{\omega} = R$; *Caso C*, $1 > \bar{\omega} > R$; *Caso D*, $\bar{\omega} > 1$.

Caso A. Velocidad subcrítica, $\bar{\omega} < R$.

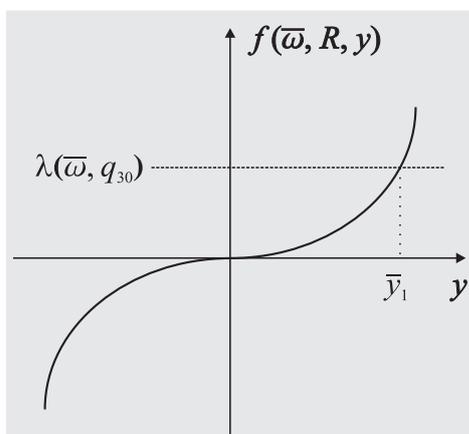


Figura 2.16: Equilibrios para $\bar{\omega} < R$.

La ecuación (2.74) tiene una sola raíz en este rango de $\bar{\omega}$ (ver figura 2.16): \bar{y}_1 . Los dos autovalores de \mathbf{K} son positivos por lo que esta matriz es definida positiva y en virtud del teorema 2, se puede afirmar que los equilibrios \bar{y}_1 son asintóticamente estables.

Caso B. Velocidad crítica, $\bar{\omega} = R$.

La expresión para este equilibrio se obtiene fácilmente de la ecuación (2.74), siendo

$$\bar{y}_1(\bar{\omega} = R) = \sqrt[3]{\bar{\omega}^2 q_{30}}. \quad (2.77)$$

Este equilibrio es estable por la misma razón que el caso anterior. En este punto, donde el sistema geoméricamente lineal presenta un equilibrio inestable, el modelo no-lineal muestra un resultado totalmente distinto, un equilibrio asintóticamente estable.

Caso C. Velocidad supercrítica, $1 > \bar{\omega} > R$.

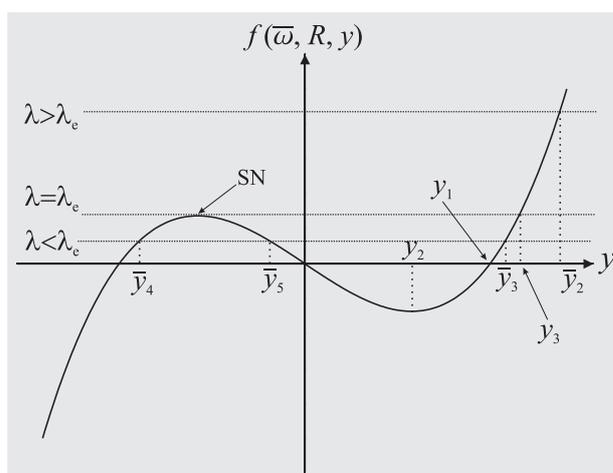


Figura 2.17: Equilibrios para $1 > \bar{\omega} > R$.

En este caso, se va a usar la figura 2.17 que muestra la función cúbica $f(\bar{\omega}, R, y)$ frente a la coordenada y (nótese que la función $f(\bar{\omega}, R, y)$ es simétrica con respecto a $y = 0$). Cortando dicha cúbica con distintos valores de la función $\lambda(\bar{\omega}, q_{30})$ se obtienen los equilibrios del sistema. Los valores de los siguientes puntos y_j serán útiles en el desarrollo que se muestra a continuación,

$$y_1 = \pm\sqrt{\bar{\omega}^2 - R^2}, \quad y_2 = \pm\sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}}, \quad y_3 = \pm 2\sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}}. \quad (2.78)$$

Observando la figura 2.17, es lógico dividir el estudio en dos casos distintos,

dependiendo del valor relativo entre λ y λ_e , que viene dado por

$$\lambda_e = 2 \left(\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.79)$$

Caso C.1. Una raíz real, $1 > \bar{\omega} > R$, $\lambda > \lambda_e$.

Como se muestra en la figura 2.17, sólo existe un equilibrio en esta región, $\bar{y}_2 > y_3$. El autovalor γ_2 , dado por (2.76), es siempre positivo dentro de este rango de velocidad angular. La siguiente desigualdad demuestra que el autovalor γ_1 es también positivo:

$$\bar{y}_2 > y_3 = 2\sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}} > \sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}} \Rightarrow \gamma_1 > 0. \quad (2.80)$$

Así, \bar{y}_2 es asintóticamente estable en el rango de velocidad supercrítica bajo estudio, en contra de lo que predice la teoría lineal de rotores [26].

Caso C.2. Tres raíces reales, $1 > \bar{\omega} > R$, $\lambda < \lambda_e$.

Como se ve en la figura 2.17, tres soluciones reales coexisten al mismo tiempo. Se van a estudiar separadamente:

Equilibrio \bar{y}_3 .

Este equilibrio cumple la siguiente desigualdad $y_1 < \bar{y}_3 < y_3$ (ver figura 2.17). Al igual que el caso anterior, $\gamma_2 > 0$. La siguiente desigualdad

$$\bar{y}_3 > \sqrt{\bar{\omega}^2 - R^2} > \sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}} \Rightarrow \gamma_1 > 0, \quad (2.81)$$

demuestra que el equilibrio \bar{y}_3 es asintóticamente estable.

Equilibrio \bar{y}_4 .

Este equilibrio cumple la siguiente desigualdad $y_2 < |\bar{y}_4| < y_1$ (nótese que la función $f(\bar{\omega}, R, y)$ es simétrica con respecto al origen $y = 0$, figura 2.17). Como en los casos anteriores $\gamma_2 > 0$, y además se cumple la desigualdad siguiente

$$\bar{y}_4 > y_2 = \sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}} \Rightarrow \gamma_1 > 0, \quad (2.82)$$

por lo que \bar{y}_4 es asintóticamente estable.

Equilibrio \bar{y}_5 .

La figura 2.17 muestra como $\bar{y}_5 < y_2$. Usando de nuevo la ecuación (2.82), se puede ver fácilmente como $\gamma_1 < 0$ en este caso, siendo $\gamma_2 > 0$ como en los demás equilibrios de esta región. De esta forma, según el teorema 1, el equilibrio \bar{y}_5 es inestable.

En el caso en que $\lambda = \lambda_e$, los equilibrios \bar{y}_4 y \bar{y}_5 colisionan y desaparecen, bifurcación de silla-nodo (SN). Igualando las expresiones de λ y λ_e , se obtiene una relación entre los parámetros del sistema para la que la bifurcación SN aparece,

$$\bar{\omega}^2 - 3 \left(\frac{q_{30}}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \bar{\omega}^{\frac{4}{3}} - R^2 = 0. \quad (2.83)$$

Fijando, por ejemplo, los parámetros q_{30} y R , la ecuación (2.83) proporciona, si para esos valores existe solución, el valor exacto de la velocidad donde aparece la bifurcación SN, $\bar{\omega}^{SN}$. Observando la figura 2.14, se puede interpretar que la bifurcación SN es la extensión de la bifurcación de tridente BP1 cuando se rompe la simetría del problema en el plano $\{e_1, e_3\}$, $q_{30} \neq 0$.

Caso D. Velocidad supercrítica, $\bar{\omega} > 1$.

En este caso, se vuelve a usar la figura 2.17, ya que los equilibrios siguen respondiendo a la misma expresión cúbica que en el caso anterior (2.74). Se usa la misma nomenclatura para nombrar los equilibrios y puntos importantes del diagrama ya que en realidad, aunque se estén estudiando por separado, se corresponden con equilibrios de la misma rama, aunque en condiciones diferentes, ya que los valores de los parámetros son otros.

Los autovalores a analizar son de nuevo (2.75) y (2.76), que deben cumplir las siguientes desigualdades para ser positivos,

$$\gamma_1 > 0 \Rightarrow y > \sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}}, \quad (2.84)$$

$$\gamma_2 > 0 \Rightarrow y > \sqrt{\bar{\omega}^2 - 1}. \quad (2.85)$$

Caso D.1. Una raíz real, $\bar{\omega} > 1$, $\lambda > \lambda_e$.

Como muestra la figura 2.17, $\bar{y}_2 > y_3$, por lo que se cumple la siguiente secuencia de desigualdades,

$$\bar{y}_2 > y_3 = 2\sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}} > \sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}}. \quad (2.86)$$

Así, la condición (2.84) es satisfecha y $\gamma_1 > 0$. Por otro lado, usando de nuevo la misma propiedad, $\bar{y}_2 > y_3$, se puede escribir

$$\bar{y}_2 > y_3 = 2\sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}} > 2\sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - 1}{3}} > \sqrt{\bar{\omega}^2 - 1}, \quad (2.87)$$

por lo que la condición (2.85) es satisfecha, siendo el equilibrio asintóticamente estable.

Caso D.2. Tres raíces reales, $\bar{\omega} > 1$, $\lambda < \lambda_e$.

Al igual que en C.2, se van a estudiar los tres equilibrios por separado.

Equilibrio \bar{y}_3 .

De la figura 2.17 se tiene que $y_1 < \bar{y}_3 < y_3$. La siguiente desigualdad,

$$\bar{y}_3 > \sqrt{\bar{\omega}^2 - R^2} > \sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - 1}{3}} \Rightarrow \gamma_1 > 0, \quad (2.88)$$

muestra como se cumple la condición (2.84). Además,

$$\bar{y}_3 > \sqrt{\bar{\omega}^2 - R^2} > \sqrt{\bar{\omega}^2 - 1} \Rightarrow \gamma_2 > 0, \quad (2.89)$$

por lo que (2.85) es satisfecha y el equilibrio \bar{y}_3 es asintóticamente estable. Con este resultado se ha comprobado que la rama de soluciones formada por $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3$ es estable en todo el rango de $\bar{\omega}$, independientemente de los valores de R y q_{30} .

Equilibrios \bar{y}_4 e \bar{y}_5 .

Observando la figura 2.17, se tiene que $\bar{y}_5 < y_2$, por lo que se cumple que

$$\bar{y}_5 < y_2 = \sqrt{\frac{\bar{\omega}^2 - R^2}{3}}. \quad (2.90)$$

En tal caso, y teniendo en cuenta la condición (2.84), se tiene que \bar{y}_5 es inestable, ya que al menos uno de los autovalores de \mathbf{K} es negativo, $\gamma_1 < 0$ (teorema 1). Por otro lado, siendo $\bar{y}_4 > y_2$, $\gamma_1 > 0$ en este caso. De esta forma, el cambio de signo en γ_1 se corresponde con el cambio de estabilidad que se espera en la bifurcación de silla-nodo SN [22]. Por lo tanto, se sabe que en este regimen de velocidades, $\bar{\omega} > 1$, el equilibrio que queda a la derecha de SN, \bar{y}_5 , es siempre inestable sea cual sea el signo de γ_2 , como en el *Caso C.2*. Sin embargo, la estabilidad de \bar{y}_4 dependerá del signo de γ_2 .

El cálculo analítico de la estabilidad que se ha llevado a cabo hasta el momento se vuelve más complejo en este caso, y deja de ser eficiente en el análisis de los equilibrios \bar{y}_4 e \bar{y}_5 . Por ello, se van a realizar algunas consideraciones adicionales que se exponen a continuación.

En principio, se va a determinar la condición de cambio de signo en γ_2 , de la siguiente forma

$$\gamma_2 = 0 \Rightarrow y = y_N = \sqrt{\bar{\omega}^2 - 1}. \quad (2.91)$$

Este valor de y_N explica la razón por la cual el autovalor γ_2 es siempre positivo en el *Caso C*, donde $1 > \bar{\omega} > R$. Por otro lado, usando la expresión de los equilibrios espaciales dada por (2.73), y haciendo $q_4 = 0$ para particularizar en el punto de bifurcación BP2 se obtiene

$$y = \sqrt{\bar{\omega}^2 - 1}. \quad (2.92)$$

Considerando las ecuaciones (2.91) y (2.92), es claro que el cambio de signo en γ_2 se corresponde con la bifurcación que da lugar a las soluciones espaciales ($q_4 \neq 0$) desde la rama plana, BP2. Este fenómeno se comprende con mayor claridad observando la figura 2.14 y rompiendo mentalmente la estructura de las ramas por la introducción de $q_{30} \neq 0$. De esta forma, por continuidad, se tiene que las ramas de soluciones siguen siendo simétricas con respecto al plano $\{e_1, e_3\}$, BP1 se convierte en SN y BP2 se convierte en el punto donde aparecen las soluciones espaciales. Por lo tanto, una vez localizada la rama de soluciones espaciales, se conoce el punto exacto de cambio de signo de γ_2 .

Teniendo en cuenta lo anterior, se va a estudiar la estabilidad de las ramas de equilibrios usando un procedimiento más intuitivo en lugar del procedimiento analítico; que en este caso resulta ser bastante complejo, ya que la estabilidad depende de los tres parámetros ($\bar{\omega}$, q_{30} y R) simultáneamente. El nuevo procedimiento está basado en la observación de las formas de las ramas de soluciones y de las bifurcaciones que aparecen (tridente supercrítica, tridente subcrítica, silla-nodo, etc.).

Como se ha dicho anteriormente, es importante localizar la rama de soluciones espaciales. Para ello, se resuelve la ecuación (2.72) con $q_4 \neq 0$, obteniéndose

$$y = -\frac{\bar{\omega}^2 q_{30}}{1 - R^2}, \quad (2.93)$$

$$q_4 = \frac{((\bar{\omega}^2 - 1)(1 - R^2) - (\bar{\omega}^2 q_{30})^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - R^2}. \quad (2.94)$$

Esta solución espacial únicamente existe en el caso en el que la expresión dentro de la raíz cuadrada sea positiva. Haciendo nulo el radicando se obtiene la relación que se da entre los distintos parámetros en el punto BP2:

$$(\bar{\omega}^2 - 1)(1 - R^2) = (\bar{\omega}^2 q_{30})^2. \quad (2.95)$$

En la figura 2.18 se representan de forma simultánea la posición de la bifurcación de silla-nodo SN, dada por (2.83), y la bifurcación de tridente BP2, dada por (2.95), para un R fijo en el espacio de los parámetros $\bar{\omega} - q_{30}$. De esta forma, dado el valor de los parámetros, es posible conocer la posición relativa entre estos puntos tan determinantes para la dinámica del sistema.

Como se puede apreciar en la figura 2.18, las soluciones espaciales sólo aparecen para valores $\bar{\omega} > 1$. Esto explica la causa por la cual en el *Caso C* ($1 > \bar{\omega} > R$), el equilibrio \bar{y}_4 es siempre estable.

El punto de tangencia entre ambas curvas, designado en la figura 2.18 como q_{30}^* , marca el momento exacto en el que SN y BP2 coinciden. Este valor puede ser calculado usando las ecuaciones (2.83) y (2.95). Para un valor de $\bar{\omega}$ dado, se pueden identificar dos situaciones bien diferenciadas, dependiendo de si el valor de q_{30} está por encima, o por debajo de q_{30}^* .

Caso D.2.1. $q_{30} < q_{30}^*$.

La figura 2.19 muestra las ramas de soluciones para el caso bajo estudio. Las ramas han sido generadas usando las expresiones de los equilibrios que proporcionan las ecuaciones (2.71), (2.72) y (2.73). La solución plana que se encuentra en el semiespacio de $q_3 > 0$ será referida a partir de ahora como rama 1, la que se encuentra en el semiespacio $q_3 < 0$ será la rama 2, y la de soluciones espaciales rama 3 (con q_3 y q_4 distintos de cero).

Para $q_{30} < q_{30}^*$, BP2 está situado por encima de SN, en la parte superior de la rama 2, rama 2b (por encima de SN). Como se demostró en el *Caso C.2* ($1 > \bar{\omega} > R$), la parte inferior de la rama 2, rama 2a (por debajo de SN), que se encuentra en este rango es estable si $\bar{\omega} > R$ (ver \bar{y}_4 en ecuación (2.82)). Estando BP2 en la rama 2b, no se esperan cambios en el signo de γ_2 para $\bar{\omega} > 1$ ya que no existen bifurcaciones en esta rama. De esta forma, por continuidad del caso *C.2*, se puede afirmar que la rama 2a completa es asintóticamente estable (\bar{y}_4), como se indica en la figura 2.19. Por otro lado, como se demostró en el caso *C.2*, la rama 2b es inestable (γ_1 se hace negativo justo en SN) para $\bar{\omega} < 1$, segmento de rama

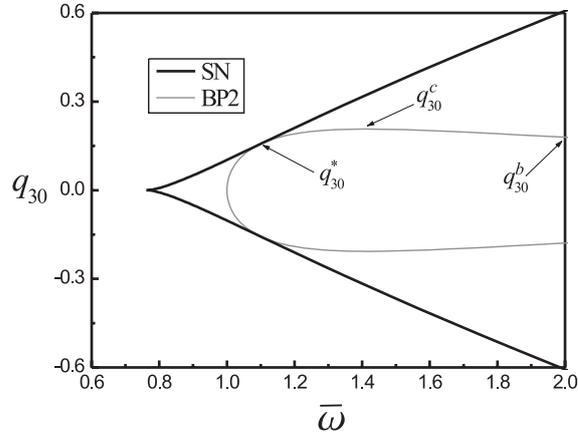


Figura 2.18: Lugar geométrico de los puntos SN y BP2 en el espacio de parámetros $\bar{\omega} - q_{30}$ para $R = 0.875$.

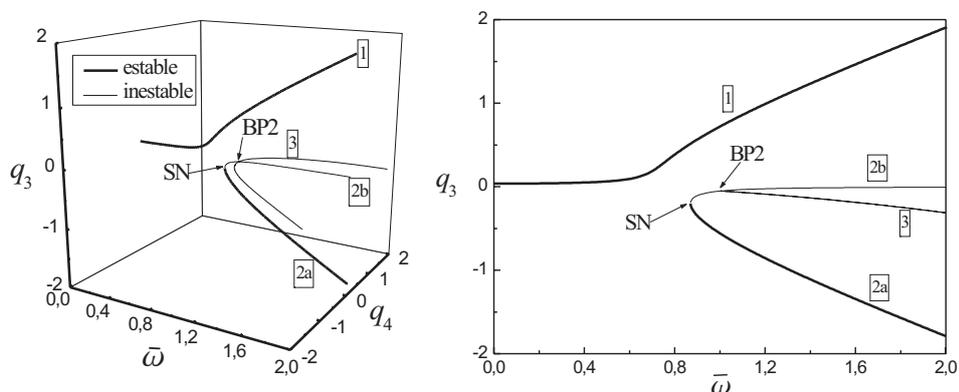


Figura 2.19: Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30} < q_{30}^*$.

entre SN y BP2. Como se ve en la figura 2.19 y se demostró en la figura 2.18, BP2 aparece para $\bar{\omega} > 1$. En este punto, donde surge la bifurcación de tridente supercrítica, el autovalor γ_2 de \mathbf{K} cambia de positivo a negativo. Por lo tanto, ambos autovalores son negativos a partir de ese punto. En cualquier caso, la rama 2b (\bar{y}_5) completa es inestable.

Caso D.2.2. $q_{30} > q_{30}^*$.

En esta situación, y tomando como referencia el caso anterior, el punto BP2 viaja desde la rama 2b hasta la 2a pasando por SN en el punto exacto de tangencia q_{30}^* de la figura 2.18. Esta situación es descrita por la figura 2.20 para un valor $q_{30}^a > q_{30}^*$. La rama 2b es, en este caso, inestable en todo su recorrido (hasta SN), ya que como se demostró al comienzo de esta sección para \bar{y}_5 , se tiene que $\gamma_1 < 0$, independientemente de la posición de BP2, que influye en el signo de γ_2 . Por lo tanto, en la rama 2b, γ_1 no cambia de signo hasta SN, donde pasa de negativo a positivo. En el tramo de rama 2a comprendido entre SN y BP2, $\gamma_1 > 0$ por tanto la estabilidad dependerá del signo de γ_2 . En este caso, (ver figura 2.20) BP2 es una bifurcación de tridente subcrítica en la que el autovalor pasa de negativo a positivo. Por lo tanto, la rama 2a es estable a partir de BP2 y la rama 3 es

inestable ya que el autovalor γ_2 es negativo en ella.

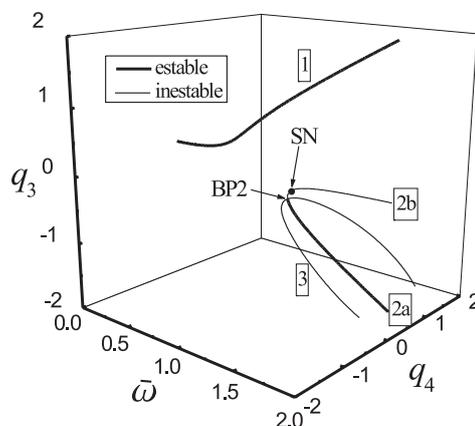


Figura 2.20: Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30}^a > q_{30}^*$.

Si se incrementa el valor de q_{30} , BP2 desciende a lo largo de la rama 2a en el rango de velocidades que se está estudiando $\bar{\omega} \in [0, 2]$. A partir de cierto valor q_{30}^b (ver figura 2.18), existen dos bifurcaciones en la rama 2a (BP2 y BP3), ya que para dicho valor el lugar geométrico de los BP's es cortado dos veces. A partir de cierto valor q_{30}^c , no existen BP's en la rama 2a (ningún corte con BP), y la rama 3 desaparece. Las bifurcaciones BP2 y BP3 colisionan y desaparecen, llevándose con ellas la rama de soluciones espaciales. Estos dos últimos casos están representados en las figuras 2.21 y 2.22.

La forma de la rama 3 de soluciones espaciales puede ser estudiada usando las ecuaciones (2.71) y (2.72) para eliminar $\bar{\omega}$, de forma que se tiene una expresión de la curva en el plano $y - q_4$ para valores de R y q_{30} dada por

$$q_{30}(y^2 + q_4^2) + y(1 - R^2) + q_{30} = 0, \quad (2.96)$$

que para $q_{30} \neq 0$ se corresponde con la expresión de una elipse. Las figuras 2.20 y 2.21 muestran la forma elíptica en 3D.

La tabla 2.1 resume todos los equilibrios y su estabilidad para el rango completo

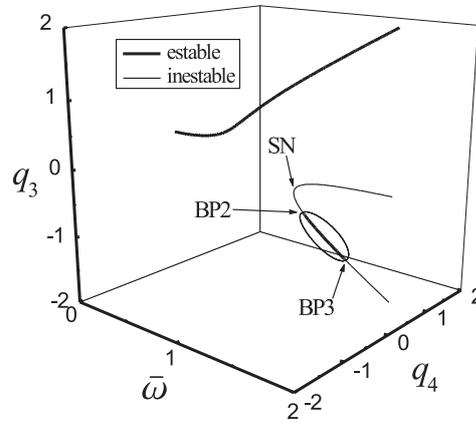


Figura 2.21: Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30}^b > q_{30}^a > q_{30}^*$.

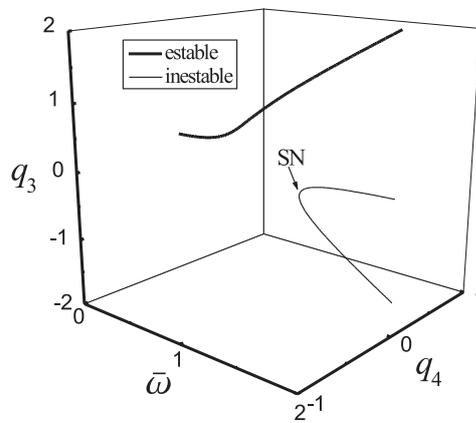


Figura 2.22: Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30}^b > q_{30}^c > q_{30}^*$.

de velocidades $\bar{\omega}$. Como se apuntó al derivarse las ecuaciones del modelo, el análisis del caso isótropo puede ser extraído del desarrollo anterior, sin más que hacer $R = 1$. Las figuras 2.15 y 2.23 muestran el sistema isótropo para el eje inicialmente recto y deformado, respectivamente, para un valor de $q_{30} = 1.9016 \times 10^{-2}$.

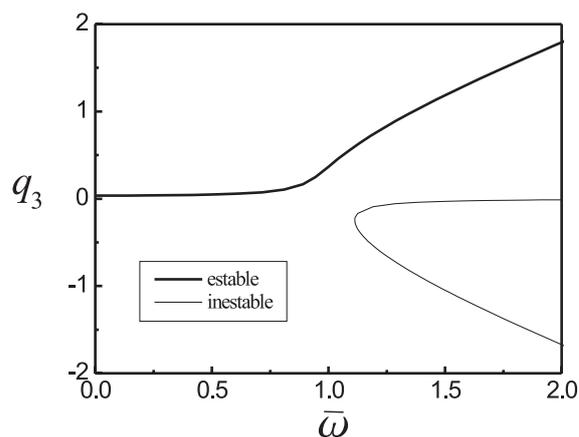


Figura 2.23: Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado e isótropo.

Una vez analizados todos los casos posibles, figuras 2.14, 2.19, 2.15 y 2.23, se pueden observar los cambios que introduce en la topología del sistema las roturas de simetría que se han introducido, ortotropía del eje, $R < 1$, y desviación inicial, q_{30} , de forma que BP1 se convierte en SN.

Finalmente, se van a enumerar una serie de conclusiones que se pueden extraer

| | | | | | |
|---------------------------------------|--|--|---|---------------------|---------------------|
| $\bar{\omega} < R$, subcrítica | 1 equilibrio estable (\bar{y}_1) | | | | |
| | $\lambda > \lambda_e$ | $\lambda < \lambda_e$ | | | |
| $R < \bar{\omega} < 1$, supercrítica | 1 eq. estable (\bar{y}_2) | 2 eq. estables (\bar{y}_3, \bar{y}_4), 1 eq. inestable (\bar{y}_5) | | | |
| $\bar{\omega} > 1$, supercrítica | 1 eq. estable (\bar{y}_2) | 1 eq. estable (\bar{y}_3), 1 eq. inestable (\bar{y}_5) | | | |
| | | \bar{y}_4 | <table border="1"> <tbody> <tr> <td>$q_{30} < q_{30}^*$</td> <td>$q_{30} > q_{30}^*$</td> </tr> <tr> <td>estable</td> <td>depende de q_{30}, R y $\bar{\omega}$</td> </tr> </tbody> </table> | $q_{30} < q_{30}^*$ | $q_{30} > q_{30}^*$ |
| $q_{30} < q_{30}^*$ | $q_{30} > q_{30}^*$ | | | | |
| estable | depende de q_{30} , R y $\bar{\omega}$ | | | | |

Tabla 2.1: Resumen de los equilibrios para el rotor no-lineal, ortótropo.

del análisis que se ha llevado a cabo en esta sección.

- Como afirmaban Genin y Maybee en sus estudios sobre el modelo de Jeffcott [36, 37, 38], las no-linealidades geométricas del eje juegan un papel determinante en la dinámica del rotor, más aún cuando éste opera a velocidades supercríticas.
- En el estudio presentado en esta tesis se han complementado los trabajos anteriormente citados, caracterizando las no-linealidades geométricas del eje por medio de una relación deformaciones-desplazamientos que retiene términos de orden superior (α_1, α_2). Estos términos pueden ser calculados a partir de la geometría del modelo. Así, dicho modelo puede ser usado para determinar el comportamiento de rotores reales.
- El análisis de estabilidad se ha llevado a cabo de una forma analítica, por lo que la dinámica del modelo se comprende de una manera más profunda.
- Desde el punto de vista ingenieril, la conclusión más importante que se puede extraer es que el rotor puede operar a velocidades supercríticas cuando el amortiguamiento histerético es importante en comparación con otras fuentes de amortiguamiento, como es el caso del SET u otras aplicaciones aeroespaciales. Para estas soluciones, las amplitudes debidas a la deformación son elevadas, por lo tanto, habrá que tener en cuenta si son admisibles desde el punto de vista de operación del sistema bajo estudio.
- Desde un punto de vista físico, se ha mostrado cómo las no-linealidades pueden cambiar por completo la topología de un sistema y dar lugar a soluciones que, a priori, son improbables a la luz de las teorías lineales, como la posible estabilidad del sistema rotor con amortiguamiento interno a velocidades supercríticas.

2.5. El modelo de Jeffcott modificado geoméricamente no-lineal para simulación en el tiempo

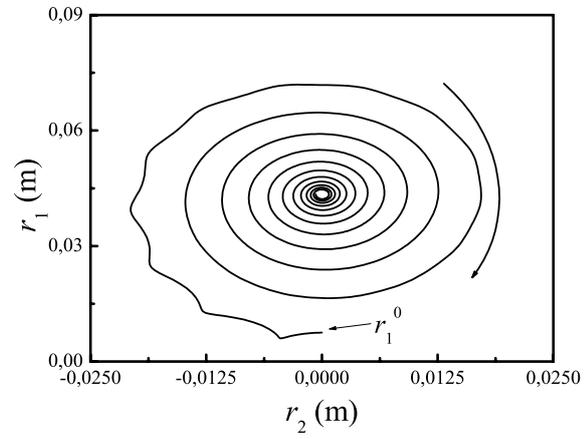
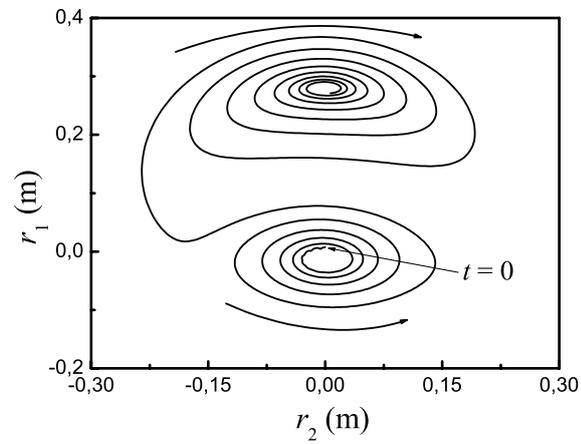
Finalmente, el modelo de Jeffcott formulado en este capítulo se va a simular en el tiempo. La velocidad angular ω_{spin} se aplica mediante una rampa coseno, partiendo desde cero y alcanzando la velocidad prescrita en un tiempo t_r . De esta forma, existe un periodo transitorio en el que no se puede prescindir de la ecuación de momentos alrededor de e_3 . Así, el sistema (2.21) debe ser modificado en la siguiente forma

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_1 - 2m\dot{r}_2\dot{\phi} - mr_2\ddot{\phi} - mr_1\dot{\phi}^2 + k_1(r_1 - r_1^0) \\ + k_1\alpha_1(r_1 - r_1^0)((r_1 - r_1^0)^2 + r_2^2) \\ + c_{i1}\dot{r}_1 + c_{i1}\alpha_1(r_1 - r_1^0)((r_1 - r_1^0)\dot{r}_1 + r_2\dot{r}_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_2 + 2m\dot{r}_1\dot{\phi} + mr_1\ddot{\phi} - mr_2\dot{\phi}^2 + k_2r_2 + k_2\alpha_2r_2((r_1 - r_1^0)^2 + r_2^2) \\ + c_{i2}\dot{r}_2 + c_{i2}\alpha_2r_2((r_1 - r_1^0)\dot{r}_1 + r_2\dot{r}_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} (I_a + I_b)\ddot{\phi} + m(r_1^2 + r_2^2)\ddot{\phi} + 2m(r_1\dot{r}_1 + r_2\dot{r}_2)\dot{\phi} \\ + mr_1\ddot{r}_2 - mr_2\ddot{r}_1 + C_\phi^T\lambda = 0 \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde $C(\phi, t) = 0$ es la restricción que impone la rampa de velocidad angular sobre el sistema. La ecuación (2.99) expresa el equilibrio de momentos sobre el disco alrededor del eje e_3 . La mayoría de las simulaciones dinámicas obtenidas con el presente modelo serán mostradas en el capítulo 6 de comparación de resultados. Las figuras 2.24 y 2.25 muestran dos simulaciones del modelo de Jeffcott representado por la ecuaciones (2.97)-(2.99). En el primer caso, la velocidad es subcrítica, de forma que el sistema presenta un solo equilibrio, el cual es estable. En el segundo caso, la velocidad es supercrítica, en el rango en el que tres soluciones coexisten, siendo dos de ellas estables y una inestable. Las constantes usadas en ambas simulaciones se pueden encontrar en la tabla 6.1 del capítulo 6.

Figura 2.24: Simulación del modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.8$.Figura 2.25: Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 1.1$.

Capítulo 3

Análisis de bifurcaciones y estabilidad de un modelo geoméricamente exacto del SET

El objetivo principal de este capítulo es el desarrollo de un modelo del SET más exacto y sin las limitaciones del modelo que se han presentado en el capítulo anterior. Este modelo estará basado en la teoría de Cosserat de una curva en el espacio, y la derivación de las ecuaciones de Kirchhoff-Love de una barra 3D en este contexto [50, 74, 52, 55, 75, 53]. El sistema de ecuaciones que se obtiene es un sistema en derivadas parciales (EDPs), con las complicaciones que ello conlleva [76]. El enfoque de este capítulo es, en esencia, similar al que usaron Fraser y Stump [53] para estudiar la dinámica de una hebra de material textil al ser enrollada para formar una madeja. En este trabajo, los autores usaron la teoría de barras 3D para derivar las características de bifurcaciones y estabilidad del sistema. Para una ba-

rra sujeta a una rotación constante, como es el caso del SET, los autores derivaron un conjunto de soluciones cuasi-estacionarias en un sistema coordinado móvil que está sujeto al mismo movimiento de rotación que la barra en cuestión. Con esto se consigue transformar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales, dependiente de las variables temporal y espacial, en un sistema diferencial ordinario en la variable espacial. La estabilidad de estas soluciones cuasi-estacionarias fue estudiada usando técnicas de perturbación [77]. Así, las soluciones no-estacionarias en los ejes móviles son detectadas como bifurcaciones de Hopf (nacimiento de soluciones periódicas) de las ramas de soluciones cuasi-estacionarias [22].

Además de los trabajos de Fraser y sus colaboradores [53, 78, 79, 80], recientemente, la mecánica de barras 3D formuladas mediante teorías de curvas en el espacio (Cosserat, Frenet) ha sido usada en campos tan dispares como la inestabilidad y transición 2D-3D por pliegue de barras sometidas a torsión pura (barras rectas [51], anillos [52], etc.); dinámica en la producción de madejas en la industria textil [53]; dinámica y comportamiento mecánico de perforadoras, usadas comúnmente en la industria petrolífera [54]; estructuras biológicas formadas por filamentos como ADN o fibras bacterianas [52]; comportamiento y perversiones de forma (efecto que se produce en el cable helicoidal de un teléfono) de plantas trepadoras, como la enredadera [55]; influencia de un campo magnético sobre un filamento conductor de electricidad y sujeto a un movimiento de rotación, alrededor de su eje longitudinal como modelo de tethers espaciales, nano-cables y cables moleculares [47, 48, 49] y dinámica de “spinning” tethers [45, 46, 81].

Existen dos maneras de enfocar estos problemas dependiendo de si la curva 3D es descrita usando la teoría de Frenet [53], o la teoría de Cosserat, ver por ejemplo la referencia [52]. En la teoría de Frenet, dada la posición de la línea media, $\mathbf{x}(s, t)$, siendo t la variable temporal y s la longitud de arco, el triedro asociado a dicha línea, y que proporciona la orientación espacial de cada punto del elemento unidimensional en el espacio viene dado por

$$\mathbf{t}(s, t) = \mathbf{x}'(s, t), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{n}(s, t) = \frac{\mathbf{x}''(s, t)}{|\mathbf{x}''(s, t)|}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{b}(s, t) = \mathbf{x}'(s, t) \times \frac{\mathbf{x}''(s, t)}{|\mathbf{x}''(s, t)|}, \quad (3.3)$$

donde $()'$ representa derivada parcial con respecto a la longitud de arco s ; $\mathbf{t}(s, t)$ es el vector tangente a la curva, $\mathbf{n}(s, t)$ es la normal a la curva y $\mathbf{b}(s, t)$ es la binormal. En la formulas (3.1)-(3.3), se ha supuesto que la curva es inextensible para simplificar la expresiones. De esta forma, conocida la posición de la curva, $\mathbf{x}(s, t)$, el triedro viene dado, sin más que realizar las operaciones (3.1)-(3.3). Así, como se puede ver en la figura 3.1, la sección asociada a cada punto de la curva tiene una orientación arbitraria con respecto al triedro de Frenet. Por otro lado, en la teoría de Cosserat, el llamado triedro director $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$, siendo $\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{t}$, deja libre la orientación de los vectores $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ en el plano de la sección (figura 3.1). De esta forma, dicha orientación se elige haciendo coincidir los vectores $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ con los ejes principales de inercia de la sección. En éste y otros estudios del autor [49, 45, 81], se ha optado por la descripción de Cosserat al ser más apropiada para el estudio en cuestión. Efectivamente, teniendo en cuenta que la sección del SET es ortótropa, la orientación de la sección cambia con respecto al triedro flotante de Frenet en el tiempo y el espacio [82], lo cual complica la descripción de la geometría de dicha

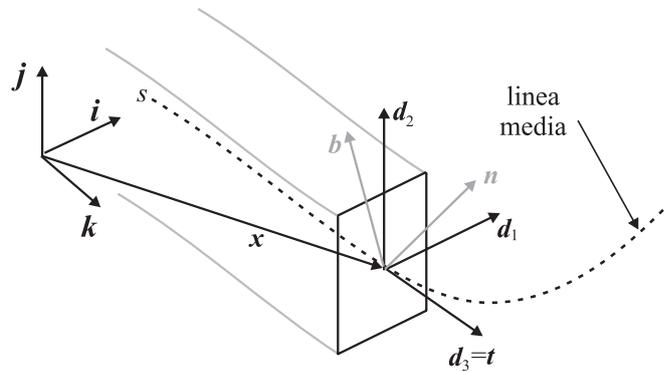


Figura 3.1: Triedros de Frenet y Cosserat asociados al elemento unidimensional.

sección. Generalmente, el triedro de Frenet se usa en filamentos de sección circular, ya que no es necesario conocer su orientación con respecto al triedro, para que ésta sea definida en cada punto de la curva e instante de tiempo. Por otro lado, el triedro de Cosserat se asocia a la sección de la barra, haciendo coincidir sus ejes con los ejes principales de inercia de la sección, como se muestra en la figura 3.1. Además, la descripción de Frenet presenta una discontinuidad para la barra recta en ausencia de fuerzas externas, debido a que $\mathbf{x}' = [0, 0, 1]$ y por tanto $\mathbf{x}'' = [0, 0, 0]$, estando por tanto la normal y binormal indeterminadas en esta situación, ver expresiones (3.1)-(3.3). La solución recta suele ser el estado de la barra que se usa como punto de partida para la continuación numérica [60, 61, 63] (ya que es la solución mas sencilla, y en ocasiones la única que se conoce de forma explícita), método que se usará para generar las ramas de soluciones paramétricas del sistema bajo estudio.

3.1. Ecuaciones de Kirchhoff-Love para el SET

En esta sección se van a formular y adaptar la ecuaciones de Kirchhoff-Love [50] de una barra al problema bajo estudio. El SET se puede considerar una barra de longitud finita sujeta a un movimiento de rotación alrededor de un eje inicialmente longitudinal, y con unas condiciones de contorno en los extremos un tanto especiales, ya que está empotrada al módulo central en un extremo y en el extremo libre está rígidamente conectada a un disco (ver figura 3.2). En la literatura se puede encontrar gran cantidad de información sobre la derivación de estas ecuaciones y demás detalles; se recomiendan las siguientes referencias: [50, 74, 52].

Antes de abordar la derivación de las ecuaciones, se van a hacer una serie de consideraciones previas. De esta forma, se podrá elegir, de entre las distintas opciones que presentan las ecuaciones de Kirchhoff-Love, el modelo más sencillo y que más se ajuste al problema bajo estudio. En este sentido, es importante tener en cuenta que aunque el tether debe ser diseñado para soportar fuerzas

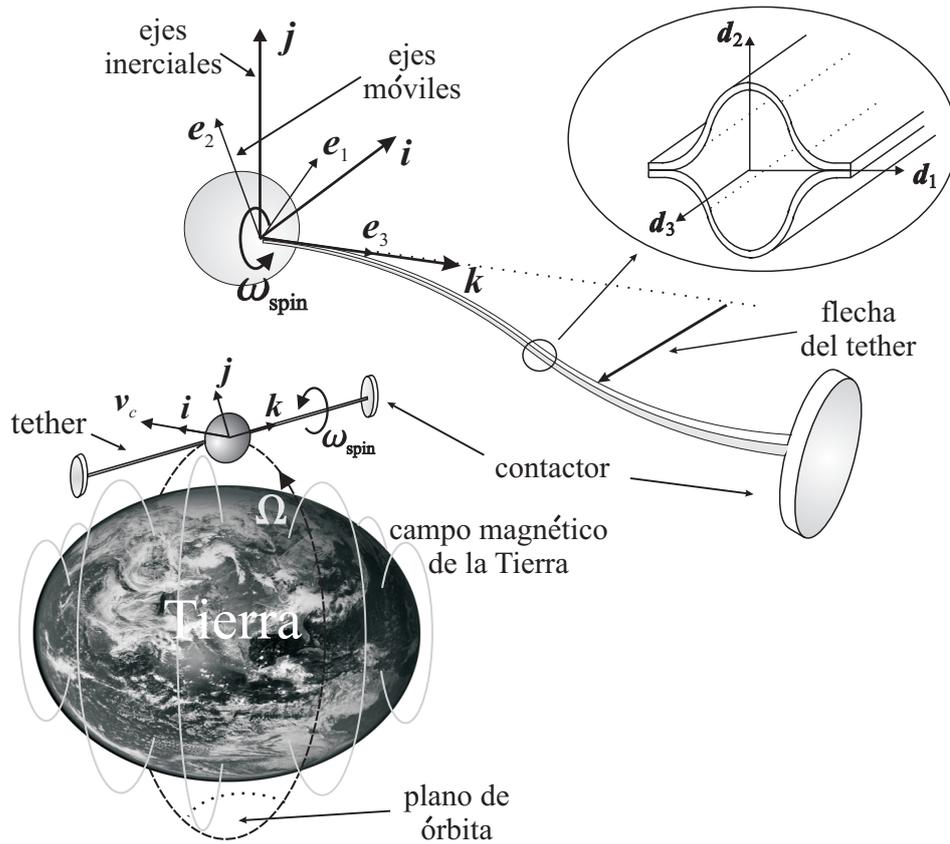


Figura 3.2: Órbita y orientación del SET. Sistemas de referencia y sección del tether.

de torsión y flexión, es más parecido a un cable, que no soporta este tipo de esfuerzos, que a una barra. Además, al ser la sección del tether extremadamente pequeña, (la relación de aspecto entre una longitud característica de la sección y su longitud total sería $\frac{0.025}{100}$) las deformaciones por cortante pueden despreciarse. Se va a considerar que el tether es inextensible, lo cual no está muy lejos de la realidad, como se comprobará en el capítulo de simulaciones dinámicas, y que las secciones transversales permanecen planas, y perpendiculares a la línea media tras la deformación, como corresponde al modelo de viga de Euler-Bernoulli [82, 69, 25]. En lo que sigue, se van a derivar las ecuaciones de Kirchhoff-Love bajo las suposiciones anteriores. Existen formulaciones [50] más generales en las que, por ejemplo, se incluye la deformación por cortante de la barra.

3.1.1. Teoría de Cosserat de una curva 3D, el triedro director

La forma en que se parametriza la curva 3D es esencial en la derivación de las ecuaciones de Kirchhoff-Love. A continuación se va a describir brevemente la parametrización que se adapta mejor a las características de la barra bajo estudio.

Dada una curva *regular* (sin puntos *singulares* [50]) en el espacio \mathbb{R}^3 , una curva parametrizada es una aplicación o mapeo \mathbf{x} sobre un intervalo $I = [p_0, p_1] \in \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^3 . Sea $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \rightarrow \mathbf{x}(p) = (x_1(p), x_2(p), x_3(p))$; el vector tangente a dicha curva, \mathbf{T} , se define como la derivada de \mathbf{x} con respecto a p . Como se ha supuesto que la curva es regular, el vector tangente nunca se anula, ya que la condición de punto singular, p^* , viene dada por $\mathbf{T}(p^*) = 0$. De esta forma, se puede definir la *longitud de arco* de la curva regular como

$$s(p) = \int_{p_0}^p |\mathbf{T}(p)| \, dp, \quad (3.4)$$

donde $|\mathbf{T}(p)|$ representa el módulo del vector \mathbf{T} . De forma alternativa, también se puede escribir

$$\frac{ds}{dp} = |\mathbf{T}(p)|. \quad (3.5)$$

Cuando la *longitud de arco* s se usa para parametrizar la curva, lo que se denomina parametrización natural, el vector tangente resulta ser unitario y la *curvatura* se puede definir como

$$\beta(s) = |\mathbf{T}'(s)|, \quad (3.6)$$

donde $()'$ representa derivada con respecto a s . Además se define el *plano normal*, como el plano que es perpendicular a la tangente.

Usando esta parametrización para describir la línea media de la barra, se puede optar por utilizar la teoría de Frenet o de Cosserat para caracterizar el volumen asociado a dicha curva. Como se apuntó en la introducción de este capítulo, se usará la teoría de Cosserat. Para ello es necesario definir el *triedro director* asociado a la sección transversal de la barra.

El triedro director asociado a las secciones transversales de la barra, $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$, se define como sigue: sea $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, donde $I = [0, l]$, siendo l la longitud total de la barra en reposo. El vector $\mathbf{d}_3(s)$ es tangente a la línea media, por tanto viene dado por

$$\mathbf{d}_3(s) = \mathbf{x}'(s) = \mathbf{T}(s). \quad (3.7)$$

El par de vectores $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ son funciones diferenciables y están contenidos en el plano normal. Este conjunto de vectores se elige de forma que compongan una triada ortonormal en sentido horario:

$$\mathbf{d}_1(s) \times \mathbf{d}_2(s) = \mathbf{d}_3(s), \quad \mathbf{d}_2(s) \times \mathbf{d}_3(s) = \mathbf{d}_1(s). \quad (3.8)$$

Una característica importante de este triedro es que la dirección de \mathbf{d}_1 o \mathbf{d}_2 , en el plano normal, con respecto a \mathbf{d}_3 no está fijada, lo que permite elegir esta dirección según convenga. Una vez hecha esta elección, además de fijar las condiciones (3.7) y (3.8), el triedro está totalmente definido. Se aprovechará esta característica del triedro de Cosserat para hacer coincidir los ejes \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 con los ejes principales de inercia de la sección para cada s (figura 3.2). De esta forma, se define la sección de la barra con mayor sencillez, ya que no existe movimiento relativo sección-triedro director.

Para conocer la variación del triedro director con respecto a la longitud de arco, s , se va a usar la condición de ortonormalidad. Considérese la condición de ortonormalidad

$$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij}, \quad (3.9)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kroenecker, y tómesese su derivada con respecto a s ,

$$\mathbf{d}'_i(s) \cdot \mathbf{d}_j(s) + \mathbf{d}_i(s) \cdot \mathbf{d}'_j(s) = 0. \quad (3.10)$$

Escribiendo $\mathbf{d}'_i(s) = \sum_{k=1}^3 K_{ik} \mathbf{d}_k$, nótese que éstas son las componentes del vector $\mathbf{d}'_i(s)$ en el triedro director, e introduciéndolo en la relación (3.10), se obtiene

$$\sum_k (K_{ik} \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_j + K_{jk} \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_k) = 0 \Rightarrow K_{ij} + K_{ji} = 0, \quad (3.11)$$

lo que implica que la matriz \mathbf{K} es antisimétrica de la forma

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_3 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & 0 & -\kappa_1 \\ -\kappa_2 & \kappa_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

donde $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, son las componentes del vector curvatura en el triedro director, de forma que éste viene dado por

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{k=1}^3 \kappa_k \mathbf{d}_k. \quad (3.13)$$

La dependencia con respecto a s de las variables ha sido eliminada para simplificar las expresiones. Teniendo en cuenta la matriz (3.12) y el vector curvatura (3.13), la derivada \mathbf{d}'_i se puede escribir como

$$\mathbf{d}'_i = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

La expresión (3.14), referida desde este momento como *ecuación de curvatura*, es una generalización de las ecuaciones de Frenet-Serret [50].

Nota: Hasta el momento, las variables en negrita representan vectores, no representan por tanto la matriz columna formada por las componentes de dicho

vector con respecto a cierto sistema de referencia, por ejemplo $[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3]^T$ definidos con respecto a $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$. Las componentes necesitan estar definidas con respecto a un sistema de coordenadas; los vectores son independientes o invariantes al cambio de sistema. Por esta razón, no se ha especificado a lo largo del texto en qué sistema se estaban dando las componentes de los vectores. Sólo cuando se ha necesitado usar las componentes de un vector, éstas han sido definidas directamente en el sistema correspondiente, como en la expresión (3.13).

Usando la ecuación de curvatura (3.14) en un sistema de ecuaciones diferenciales, no es necesario además imponer las 6 restricciones de ortonormalidad del triedro director, ya que están implícitas en las 9 igualdades escalares de dicha expresión. Esto es así debido a que la ecuación de curvatura se ha derivado directamente de las condiciones de ortonormalidad del triedro (3.9). De esta forma, no es necesario añadir restricciones adicionales al sistema diferencial. En realidad, la condición (3.14) está definida sobre la derivada de la condición de ortonormalidad, por lo que se podría pensar que esto no garantiza el cumplimiento de dicha condición a nivel de los directores, y no de sus derivadas. Sin embargo, cuando se definan las condiciones de contorno sobre el problema, se impondrán las seis relaciones (3.9) en el punto de partida de la integración, $s = 0$, lo cual unido a (3.14) garantiza la ortonormalidad a lo largo de toda la barra [50, 51].

Las componentes del vector curvatura en el triedro director son las curvaturas intrínsecas de la curva, siendo κ_1 y κ_2 de flexión (alrededor de \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 , respectivamente, contenidos en la sección transversal), y κ_3 de torsión (alrededor de \mathbf{d}_3 , perpendicular a la sección transversal).

3.1.2. Cinemática de una barra 3D descrita por su línea media

En el modelo más general de una *barra* se describe ésta como un sólido 3D con dos de sus dimensiones muy pequeñas en comparación con la tercera. En este apartado

se va a considerar una barra cuya línea media es una curva 3D de longitud l como la definida en el apartado anterior. Teniendo en cuenta que el tether se va a considerar inextensible, como se supuso al principio de esta sección, la curva que representa su línea media es inextensible. De esta forma, la longitud de arco, s , es invariante frente al tiempo y puede ser usada como una coordenada material. Además, teniendo en cuenta que la deformación por cortante es despreciable, como se apuntó anteriormente, la sección transversal de la barra en cualquier punto a lo largo de la línea media, $S(s)$, sigue contenida en el plano normal a ésta después de la deformación (figura 3.3)

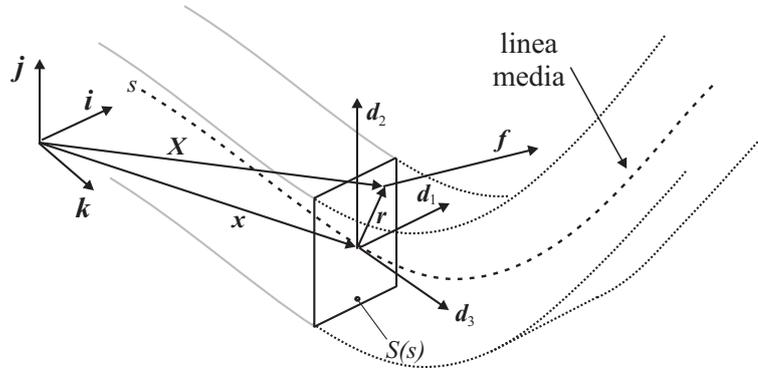


Figura 3.3: Barra 3D descrita por su línea media. Sección asociada y triédrico director.

La posición de un punto arbitrario de la barra se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s, \xi_1, \xi_2, t) &= \mathbf{x}(s, t) + \xi_1 \mathbf{d}_1(s, t) + \xi_2 \mathbf{d}_2(s, t) \\ &= \mathbf{x}(s, t) + \mathbf{r}(s, \xi_1, \xi_2, t), \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $\{\xi_1, \xi_2\}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}(s, \xi_1, \xi_2, t)$ en los ejes de la sección $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$. Una vez la barra está cinemáticamente descrita, se pueden derivar las ecuaciones dinámicas o de movimiento de la misma. En este proceso, se va a usar el modelo de Kirchhoff-Love [83] de una barra, por lo que las ecuaciones resultantes son referidas como “Ecuaciones de Kirchhoff-Love”. Existe cierta controversia [75,

82] sobre el nombre del modelo de barra y ecuaciones resultantes que se está usando en este apartado. Algunos autores han usado otros nombres para referirse al mismo modelo. Es posible encontrar una discusión histórica sobre este tema en [83].

En el modelo de Kirchhoff-Love, además de la suposiciones de línea media inextensible y deformaciones por cortante despreciables, es necesario asumir dos suposiciones adicionales. Primero, se supone que el radio característico de la sección de la barra, $h = \sqrt{\max\{\xi_1\}^2 + \max\{\xi_2\}^2}$, es pequeño comparado con la longitud de la barra ($\frac{h}{l} \ll 1$, suposición de barra delgada). Para realizar la segunda hipótesis, es necesario definir [75] el siguiente parámetro, que depende del cociente h/l , y de la norma del vector curvatura

$$\tau = \max_{s \in [0, l]}^{t \in T} \{ |\boldsymbol{\kappa}(s, t)| \cdot h, \frac{h}{l} \}, \quad (3.16)$$

donde T es el intervalo de tiempo donde se va a considerar la evolución de la barra. El parámetro τ caracteriza la deformación de la barra. En el modelo de Kirchhoff-Love, se supone que τ es pequeño y de esta forma se pueden despreciar términos del orden $O(\tau^2)$. En general, esto significa que la curvatura relativa o gradiente de curvatura a lo largo de la barra es pequeño (localmente), lo cual no quiere decir que los desplazamientos globales por deformación de la barra sean pequeños. De hecho, el modelo de Kirchhoff-Love es válido para describir grandes desplazamientos y giros por deformación de la sección de la barra, lo que proporciona un modelo de barra geoméricamente exacta y no-lineal.

Teniendo en cuenta estas dos últimas suposiciones, se puede hacer una descripción de la barra 1D, en la que cada punto de la línea media, s , lleva asociado una rebanada de barra que además no es deformable, es decir, se puede considerar un sólido rígido. De esta forma, en el equilibrio de fuerzas y momentos sobre la rebanada que se va a llevar a cabo a continuación para obtener las ecuaciones de movimiento de la barra, se pueden despreciar términos de orden alto, lo que facilita bastante la derivación y el uso de estas ecuaciones.

3.1.3. Ecuaciones de Kirchhoff-Love de equilibrio de fuerzas y momentos sobre la barra

Teniendo en cuenta todas las suposiciones del apartado anterior, que son apropiadas para el problema que se está estudiando, se asume que la barra está formada por un conjunto de rebanadas de espesor infinitesimal centradas en cada s . Así se tiene una descripción 1D de la barra.

Como se muestra en la figura 3.3, existe un esfuerzo interno $\mathbf{f} = \mathbf{f}(s, \xi_1, \xi_2, t)$ en cada punto, que es la proyección del tensor de tensiones en el plano de la sección de normal \mathbf{d}_3 , debido a la interacción de una rebanada infinitesimal de barra con la siguiente, o viceversa. El esfuerzo interno total en la sección $S(s)$ viene dado por

$$\mathbf{F}(s, t) = \int_{S(s)} \mathbf{f}(s, \xi_1, \xi_2, t) dS, \quad (3.17)$$

donde dS es un elemento diferencial de área de la sección. El esfuerzo interno sobre la sección puede expresarse según sus componentes sobre el triedro director como

$$\mathbf{F}(s, t) = \sum_{i=1}^3 F_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t), \quad (3.18)$$

donde $F_3(s, t)$ es el esfuerzo de tracción-compresión y $F_1(s, t)$ - $F_2(s, t)$ son los esfuerzos cortantes. Por otro lado, el momento que introduce el esfuerzo interno $\mathbf{f}(s, \xi_1, \xi_2, t)$ con respecto a la línea media en cada sección de la barra, puede ser calculado de la siguiente forma

$$\mathbf{M}(s, t) = \int_{S(s)} \mathbf{r}(s, \xi_1, \xi_2, t) \times \mathbf{f}(s, \xi_1, \xi_2, t) dS. \quad (3.19)$$

El momento interno se expresa de la misma forma que el esfuerzo interno en el triedro director como

$$\mathbf{M}(s, t) = \sum_{i=1}^3 M_i(s, t) \mathbf{d}_i(s, t), \quad (3.20)$$

donde $M_3(s, t)$ es el momento torsor y $M_1(s, t)$ - $M_2(s, t)$ son los momentos flectores sobre la barra.

Haciendo equilibrio de fuerzas y momentos (suponiendo las fuerzas y momentos de inercia como una acción más sobre la barra en virtud del teorema de D'Alembert) sobre un elemento diferencial de barra comprendido entre dos secciones separadas ds , sobre la línea media (rebanada), se obtienen las siguientes ecuaciones vectoriales

$$\mathbf{F}' = \rho A_s \ddot{\mathbf{x}}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{M}' + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{F} = \rho(I_2 \mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + I_1 \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2), \quad (3.22)$$

donde ρ es la densidad por unidad de área, (\prime) denota derivada con respecto a la longitud de arco s y $(\dot{})$ denota derivada con respecto al tiempo t . En las ecuaciones (3.21) y (3.22), los términos de inercia (en la parte derecha de la igualdad en ambos casos) se corresponden con los de un disco (rebanada infinitesimal) de pared delgada indeformable con área de la cara, A_s , igual al área de la sección uniforme del tether; y momentos de inercia, ρI_1 y ρI_2 , donde I_1 e I_2 son los momentos de la sección con respecto a las direcciones asociadas a \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 , respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S(s)} \xi_2^2 dS, \\ I_2 &= \int_{S(s)} \xi_1^2 dS. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En estas expresiones se ha eliminado, por simplicidad, la dependencia de las variables con el tiempo y el espacio.

Algunos autores, por ejemplo Goriely y Tabor [52], recomiendan derivar con respecto a s una vez más la ecuación (3.21) para tener todo el conjunto de ecuaciones expresado en función de los directores únicamente, no de \mathbf{x} . Esto lleva a algunas complicaciones menores, según se ha podido comprobar en la realización de esta tesis. Sin embargo, la razón principal por la que en este trabajo se elige no realizar esta derivación, y arrastrar \mathbf{x} en todos los cálculos es bien simple: será interesante obtener las formas que adopta el tether, lo cual se obtiene directamente de \mathbf{x} . Si se deriva la ecuación (3.21), se pierde la variable \mathbf{x} de las ecuaciones, de

forma que para obtener las formas del tether, habría que integrar en s la ecuación (3.7) para obtener \mathbf{x} a partir de \mathbf{d}_3 . Por lo tanto, en lugar de realizar la derivación, se usará la ecuación (3.21) tal como está y se añadirá al sistema de ecuaciones (3.21)-(3.22) la siguiente ecuación vectorial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{d}_3. \quad (3.24)$$

Las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.24) representan un sistema de dimensión 9 en función de 6 vectores: \mathbf{F} , \mathbf{M} , \mathbf{x} , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 y \mathbf{d}_3 , que representan 18 incógnitas.

A la hora de determinar el sistema de ecuaciones mencionado, es necesario añadir las ecuaciones asociadas a la ley de comportamiento del material en cuestión. Supóngase que el material de la barra es homogéneo e isótropo. La ley de comportamiento expresada en función de los momentos M_i y curvaturas κ_i , en lugar de la formulación más común en función de tensiones y deformaciones [82, 84], viene dada por

$$\begin{aligned} M_1 &= EI_1(\kappa_1 - \kappa_1^i), \\ M_2 &= EI_2(\kappa_2 - \kappa_2^i), \\ M_3 &= GK(\kappa_3 - \kappa_3^i), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde E es el módulo de Young, G es el módulo de cizalladura y K es una constante que dependerá del segundo momento de área, J , de la sección alrededor de \mathbf{d}_3 , y de las propiedades a torsión de dicha sección. Si la sección es simétrica con respecto a los ejes principales, entonces $J = I_1 + I_2$. Finalmente, κ_1^i , κ_2^i , κ_3^i son las componentes del vector curvatura en la configuración inicial en reposo y sin fuerzas externas, si la barra está inicialmente curvada o torsionada. Las ecuaciones (3.25) representan la llamada “Teoría de la Aproximación Ordinaria”, que es una generalización de la “Teoría de Euler-Bernoulli” de vigas. En estas ecuaciones se aplican las condiciones de Saint-Venant para una barra libre de fuerzas externas de superficie y volumen [82]. En el apartado siguiente, en el que se van a derivar las relaciones constitutivas para el material histerético real del tether, se explicarán con detalle estos conceptos y teorías.

Las expresiones (3.25) añaden 3 ecuaciones al sistema de 9 ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.24) además de 3 nuevas incógnitas, las curvaturas κ_i . Se tienen, por tanto, 12 ecuaciones y 21 incógnitas. La ecuación de curvatura (3.14) relaciona el vector curvatura con la variación del triedro director mediante 9 ecuaciones. Añadiendo esta ecuación al sistema anteriormente mencionado, se tienen 21 ecuaciones (3.21), (3.22), (3.24), (3.25) y (3.14), y 21 incógnitas, las componentes de los siguientes vectores: \mathbf{F} , \mathbf{M} , \mathbf{x} , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 y $\boldsymbol{\kappa}$. Por tanto, el sistema de EDPs queda determinado.

Las ecuaciones de curvatura (3.14) son unas expresiones un tanto particulares. Efectivamente, supóngase que se determina el triedro director para cada (s, t) . A partir de las ecuaciones de curvatura se pueden obtener las componentes del vector curvatura, sin embargo, se tendrían un total de 9 ecuaciones para determinar sólo 3 incógnitas. Esto implicaría que las 9 ecuaciones de curvatura no son independientes. Por otro lado, se sabe que la orientación de un triedro es sólo función de 3 parámetros, por ejemplo, los ángulos de Euler [56]. Esto implica que en la ecuación de curvatura, además de describirse la variación del triedro director, se están imponiendo las 6 restricciones de ortonormalidad entre los vectores del triedro y así, realmente se tienen 3 ecuaciones independientes, por ejemplo, las necesarias para determinar las tres componentes del vector curvatura, κ_i . Esta característica de la ecuación de curvatura es importante, ya que al usarla, se están imponiendo restricciones de forma implícita y no es necesario imponer esas restricciones explícitamente, lo que supondría añadir ecuaciones algebraicas al sistema diferencial.

3.1.4. Modelado del amortiguamiento histerético

Como se apuntó en el capítulo de introducción y más tarde se demostró en el análisis de los modelos de Jeffcott presentado en los apartados 2.3 y 2.4.1, el amortiguamiento histerético juega un papel crucial en el comportamiento dinámico del SET. Igualmente a como se procedió en el modelo de Jeffcott, se va a usar en

este caso un modelo de amortiguamiento viscoso equivalente; sirva la justificación que se dio en aquellos apartados para la presente teoría. En el modelo de Jeffcott, fue suficiente el uso de una ley tensión-deformación unidireccional (2.38), ya que en dicho modelo sólo se consideraban las tensiones perpendiculares a la sección del eje (viga de Euler-Bernoulli), σ_{33} . En el caso de la barra de Kirchhoff-Love, es necesario considerar todas las componentes del tensor de tensiones $\bar{\sigma}$, donde la barra indica variable tensorial. Teniendo todo esto en cuenta, se van a modificar la relaciones (3.25) de forma que contemplen la influencia del amortiguamiento.

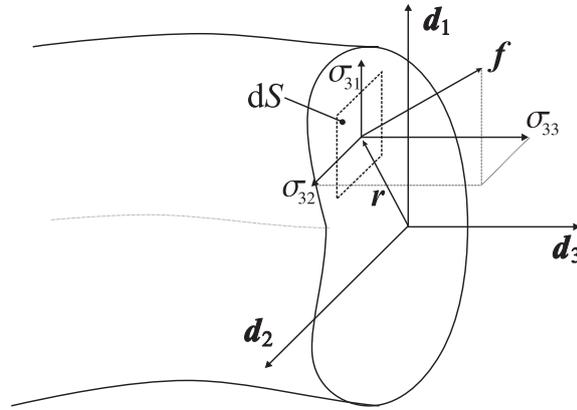


Figura 3.4: Tensiones y esfuerzos en la sección de la barra.

Supóngase que el SET está hecho de un material visco-elástico lineal [85]. La relación tensión-deformación 3D en este caso puede ser escrita como

$$\bar{\sigma} = 2G\bar{\epsilon} + \lambda tr(\bar{\epsilon})\bar{\mathbf{I}} + 2G\gamma_v\dot{\bar{\epsilon}} + \lambda\gamma_d tr(\dot{\bar{\epsilon}})\bar{\mathbf{I}}, \quad (3.26)$$

donde $\bar{\epsilon}$ es el tensor de deformaciones, λ es la constante de Lamé, $\bar{\mathbf{I}}$ es el tensor unitario de orden 3, $tr()$ es la traza del tensor y γ_v y γ_d son las constantes visco-elásticas. La constante γ_v está relacionada con el tensor de tensiones volumétrico (dilatación) y γ_d con el tensor de tensiones desviador [85]. Las componentes del vector de esfuerzos internos por unidad de área, f , son las proyecciones del tensor de tensiones $\bar{\sigma}$ sobre la sección transversal de la barra, cuya normal es el director

\mathbf{d}_3 . Siendo σ_{ij} con $i, j = 1, 2, 3$ las componentes del tensor de tensiones, el vector $f(s, \xi_1, \xi_2, t)$ resulta (figura 3.4)

$$\mathbf{f} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}]^T. \quad (3.27)$$

Sustituyendo la ecuación (3.27) en la expresión de los momentos dada por (3.19), se obtiene

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{S(s)} x_2 \sigma_{33} dS, \\ M_2 &= \int_{S(s)} -x_1 \sigma_{33} dS, \\ M_3 &= \int_{S(s)} (x_1 \sigma_{32} - x_2 \sigma_{31}) dS. \end{aligned} \quad (3.28)$$

En primer lugar, se van a obtener las ecuaciones (3.25) para un material elástico-lineal, cuyo tensor de tensiones viene dado por

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2G\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\bar{\mathbf{I}}, \quad (3.29)$$

a partir de las ecuaciones (3.28). Supóngase un elemento diferencial de área, dS , de la sección transversal de la barra (figura 3.4). Si la barra está libre de fuerzas externas de superficie y volumen, como se asume en la teoría de barras, se tiene que las siguientes componentes del tensor de tensiones son nulas [82]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = 0 &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} = 0 &= \lambda \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} = 0 &= 2G\varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde el índice mudo repetido implica sumatorio desde 1 hasta 3 (notación de Einstein). Sumando las dos primeras expresiones de (3.30) se obtiene

$$\lambda \varepsilon_{kk} + 2G(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \lambda \varepsilon_{kk} + 2G(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{33}) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{\lambda + G}{G} \varepsilon_{kk}. \quad (3.31)$$

Sustituyendo la expresión de ε_{33} en las tensiones no nulas, σ_{33} , σ_{31} y σ_{32} , y teniendo en cuenta la siguiente relación entre las constantes del material [84]

$$3\lambda + 2G = \frac{E}{1 - 2\nu}, \quad (3.32)$$

se obtiene la ley tensión-deformación en la siguiente forma

$$\sigma_{33} = E\varepsilon_{33}, \quad (3.33)$$

$$\sigma_{31} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{31}, \quad (3.34)$$

$$\sigma_{32} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{32}. \quad (3.35)$$

Por otro lado, la fórmula de Saint Venant [82] relaciona las deformaciones con las curvaturas de la siguiente forma

$$\varepsilon_{33} = -\kappa_2\xi_1 + \kappa_1\xi_2, \quad (3.36)$$

$$2\varepsilon_{31} = \kappa_3\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} - \xi_2\right), \quad (3.37)$$

$$2\varepsilon_{32} = \kappa_3\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} + \xi_1\right). \quad (3.38)$$

donde ξ_1 y ξ_2 fueron definidas en (3.15) y ϕ es la *función de torsión* de la sección [82]. Sustituyendo las expresiones (3.36)-(3.38) en las (3.33)-(3.35), y haciendo lo propio con estas en las expresiones de los momentos flectores M_1 y M_2 de (3.30), se tiene

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{S(s)} \xi_2 E \varepsilon_{33} dS \\ &= E \int_{S(s)} \xi_2 (\kappa_1 \xi_2 - \kappa_2 \xi_1) dS = E \kappa_1 \int_{S(s)} \xi_2^2 dS = EI_1 \kappa_1, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{S(s)} -\xi_1 E \varepsilon_{33} dS \\ &= E \int_{S(s)} -\xi_1 (\kappa_1 \xi_2 - \kappa_2 \xi_1) dS = E \kappa_2 \int_{S(s)} \xi_1^2 dS = EI_2 \kappa_2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Antes de realizar la integración en la expresión de M_3 , es necesario definir la función de torsión de la sección de la barra, $\phi(\xi_1, \xi_2)$. Como se mostró en el capítulo de introducción y en la figura 3.2, la sección real del tether es bastante compleja. Sin embargo, se asemeja bastante a un perfil cerrado de pared delgada con forma elíptica. A efectos dinámicos macroscópicos, tiene poca influencia la forma de la sección. Sin embargo, dicha forma tiene gran influencia en la distribución de

tensiones de dicha sección [9]. Por consiguiente, para el análisis de la dinámica macroscópica es apropiado asemejar el perfil real a una sección llena de forma elíptica. Así, sólo se necesita definir la forma de la sección para calcular su función de torsión, $\phi(\xi_1, \xi_2)$. De esta forma, asumiendo que la sección es una elipse de semiejes a en la dirección de \mathbf{d}_1 y b en la dirección de \mathbf{d}_2 , se podrán ajustar estos parámetros a y b de forma que las inercias de la sección elíptica sean las mismas que la de la sección real, dadas en la introducción, en la tabla 1.1. Para ello es necesario resolver el siguiente sistema

$$I_1 = \frac{38}{E} = \frac{\pi b^3 a}{4}, \quad I_2 = \frac{21}{E} = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad (3.41)$$

del que se obtiene que $a = 3.5030 \cdot 10^{-3}m$ y $b = 4.7122 \cdot 10^{-3}m$, ver tabla 1.1. Por otro lado, la función de torsión para una sección elíptica como la mencionada anteriormente es [82]

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \xi_1 \xi_2 = C_T \xi_1 \xi_2, \quad (3.42)$$

donde el coeficiente $C_T = 0.2881$, para los valores de las constantes obtenidos en (3.41). Teniendo esto en cuenta, la expresión final para el momento torsor M_3 se obtendrá como sigue

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_{S(s)} \frac{E}{1+\nu} (\xi_1 \varepsilon_{32} - \xi_2 \varepsilon_{31}) dS \\ &= \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{S(s)} (\xi_1 \kappa_3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} + \xi_1 \right) - \xi_2 \kappa_3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi_1} - \xi_2 \right)) dS \\ &= G \kappa_3 \left\{ (1 + C_T) \int_{S(s)} \xi_1^2 dS + (1 - C_T) \int_{S(s)} \xi_2^2 dS \right\} \\ &= G(J + C_T(I_2 - I_1)) \kappa_3. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Añadiendo las curvaturas intrínsecas iniciales [82], $\kappa_1^i, \kappa_2^i, \kappa_3^i$, a las ecuaciones (3.39), (3.40) y (3.43), se tiene la ley de comportamiento (3.25), en la que la constante de resistencia a torsión resulta ser $K = J + C_T(I_2 - I_1)$. En las integrales evaluadas en este proceso, se ha tenido en cuenta que la sección del tether tiene dos ejes de simetría que coinciden con \mathbf{d}_1 y \mathbf{d}_2 , por lo que $\int_{S(s)} \xi_1 \xi_2 dS = 0$.

Si se comparan los dos términos de la constante K , $C_T(I_2 - I_1) = \frac{-4.8977}{E}$ y $J = 59/E$. La inercia J es del orden de 12 veces mayor que el término corrector. Cuanto más se acerca la sección elíptica a la forma circular mayor es esta diferencia, hasta que en el límite para sección circular, $K = J$.

Una vez obtenidas las expresiones (3.25) a partir de la ley de tensión-deformación elástico-lineal (3.29), se van a derivar sus equivalentes para el material visco-elástico lineal representado por la ley (3.26). De nuevo, se supone la solución de Saint-Venant de la barra libre de fuerzas de volumen y superficie, por lo que se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = 0 &= \lambda(\varepsilon_{kk} + \gamma_d \dot{\varepsilon}_{kk}) + 2G(\varepsilon_{11} + \gamma_v \dot{\varepsilon}_{11}), \\ \sigma_{22} = 0 &= \lambda(\varepsilon_{kk} + \gamma_d \dot{\varepsilon}_{kk}) + 2G(\varepsilon_{22} + \gamma_v \dot{\varepsilon}_{22}), \\ \sigma_{12} = 0 &= 2G(\varepsilon_{12} + \gamma_v \dot{\varepsilon}_{12}).\end{aligned}\tag{3.44}$$

En lo que sigue, se va a suponer que $\gamma_v = \gamma_d = \gamma$ para simplificar las expresión final de la ley de comportamiento, de forma que sea similar a la ley elástica (3.25) [45]. En cualquier caso, para el modelo de barra que se ha desarrollado, la diferencia entre disipación por deformación volumétrica y desviadora no tendría gran influencia en el resultado final. Procediendo de forma análoga a como se hizo en (3.31), las expresiones de las tensiones no-nulas se pueden escribir como

$$\sigma_{33} = E(\varepsilon_{33} + \gamma \dot{\varepsilon}_{33}),\tag{3.45}$$

$$\sigma_{31} = 2G(\varepsilon_{31} + \gamma \dot{\varepsilon}_{31}),\tag{3.46}$$

$$\sigma_{32} = 2G(\varepsilon_{32} + \gamma \dot{\varepsilon}_{32}).\tag{3.47}$$

Usando de nuevo las expresiones (3.28) y (3.36)-(3.38), y haciendo las mismas consideraciones sobre la función de torsión de la barra y la simetría de la sección en las integrales, se obtiene la ecuación final que relaciona las curvaturas y sus derivadas temporales con los momentos internos

$$\begin{aligned}M_1 &= EI_1(\kappa_1 + \gamma \dot{\kappa}_1 - \kappa_1^i), \\ M_2 &= EI_2(\kappa_2 + \gamma \dot{\kappa}_2 - \kappa_2^i), \\ M_3 &= GJ(\kappa_3 + \gamma \dot{\kappa}_3),\end{aligned}\tag{3.48}$$

donde la torsión intrínseca κ_3^i se ha eliminado, ya que se supone que el tether no estará inicialmente torsionado. Recuérdese que los tether están almacenados en unos tambores antes del despliegue. Este almacenamiento introducirá tensiones residuales en el tether que tenderán a curvarlo en la dirección de menor segundo momento de área de la sección (que además es el eje alrededor del cual se enrolla el tether), pero no a torsionarlo.

Sustituyendo las expresiones (3.25) por (3.48), se llega al sistema definitivo de ecuaciones de movimiento del SET, que será de segundo orden en t y primero en s . Para resolver este sistema de EDPs es necesario formular un conjunto apropiado de condiciones iniciales y de contorno. Antes de abordar esta tarea, se va a mostrar como se han transformado las ecuaciones de movimiento al pasar del sistema inercial $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ a un sistema móvil $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (figura 3.2) que gira con velocidad constante ω_{spin} alrededor de $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$.

3.1.5. Ecuaciones del SET en los ejes móviles

El movimiento del SET tendrá una componente periódica debida a la excitación principal a la que está sometido: la rotación a velocidad constante, ω_{spin} , del módulo central. Esto ya se demostró cuando se planteó el modelo de Jeffcott [81, 86, 87] del capítulo 2. Además, esta componente periódica también se encontró en las simulaciones dinámicas del modelo multicuerpo [44] que se mostrarán en el capítulo 5. Como demostraron Fraser et al. [53], para un problema similar sujeto al mismo tipo de rotación, si las ecuaciones de movimiento se expresan en el sistema móvil es de esperar que aparezcan soluciones *cuasi-estacionarias* (equilibrios relativos), es decir, soluciones que no dependen del tiempo en los ejes móviles. A la hora de analizar las ecuaciones de movimiento del SET, se va a tener muy en cuenta esta propiedad de las soluciones. Efectivamente, si se esperan soluciones estacionarias en los ejes móviles, se podrán encontrar soluciones de las ecuaciones de movimiento en su versión estacionaria, lo que convertirá el sistema en EDO en la variable s . Usando técnicas de perturbación [52, 77] sobre las soluciones cuasi-estacionarias

se analizará su estabilidad. Para hacer esto, es necesario ver como afecta el cambio de ejes, desde inerciales a móviles, al conjunto de ecuaciones de movimiento del SET.

La transformación que relaciona los ejes móviles $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ con los inerciales $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ para un vector genérico $\mathbf{V}(s, t)$ con componentes en los ejes inerciales $\bar{\mathbf{V}} = [V_i, V_j, V_k]^T$ y componentes en los ejes móviles $\hat{\mathbf{V}} = [V_1, V_2, V_3]^T$, es

$$\begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{spin}t) & -\sin(\omega_{spin}t) & 0 \\ \sin(\omega_{spin}t) & \cos(\omega_{spin}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{V}} = A\hat{\mathbf{V}}. \quad (3.49)$$

La derivada con respecto al tiempo en los ejes inerciales del vector genérico $\mathbf{V}(s, t)$ se puede escribir como

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{\mathbf{V}}(s, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{V}}(s, t). \quad (3.50)$$

donde el vector $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de spin del tether y viene dada por

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_{spin})^T = \omega_{spin}\mathbf{k} = \omega_{spin}\mathbf{e}_3. \quad (3.51)$$

La parte derecha de la igualdad (3.21), que representa el equilibrio de fuerzas en la rebanada diferencial de barra, debe ser reescrita teniendo en cuenta la relación (3.50). Finalmente, esta ecuación se usará en su versión proyectada en los ejes móviles $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Así, el equilibrio de fuerzas queda en la siguiente forma

$$\mathbf{F}' = \rho A_s(\ddot{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}). \quad (3.52)$$

Usando el mismo razonamiento, la ecuación de equilibrio de momentos se transforma en

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' + \mathbf{d}_3 \times \mathbf{F} = & \rho I_2(\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + 2\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_1 + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega})) \\ & + \rho I_1(\mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2 + 2\mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_2 + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega})), \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde el observador estaría situado en los ejes móviles. Junto a las ecuaciones de equilibrio anteriores, el sistema final se completa con la ecuación de la tangente, la

ecuación de curvatura y las relaciones constitutivas dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{d}_3, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{d}'_i = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.55)$$

$$M_1 = EI_1(\kappa_1 + \gamma\dot{\kappa}_1 - \kappa_1^i),$$

$$M_2 = EI_2(\kappa_2 + \gamma\dot{\kappa}_2 - \kappa_2^i), \quad (3.56)$$

$$M_3 = GJ(\kappa_3 + \gamma\dot{\kappa}_3).$$

3.1.6. Condiciones de contorno

Para resolver el sistema de EDPs (3.52)-(3.56), es necesario imponer un conjunto de condiciones de contorno bien definido (condiciones no redundantes), así como condiciones iniciales. En este apartado, se van a formular las condiciones de contorno específicas del SET sobre la barra que se ha venido definiendo en los apartados anteriores. En $s = 0$, se ha asumido a lo largo de esta tesis que el tether está empotrado al módulo central, el cual gira a la velocidad de spin alrededor de \mathbf{k} . Así, en los ejes móviles, el tether está empotrado en $s = 0$. Las expresiones que definen esta condición son las siguientes (condiciones de contorno geométricas)

$$\mathbf{d}_1(0, t) = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{d}_2(0, t) = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{d}_3(0, t) = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{x}(0, t) = [0 \ 0 \ 0]^T. \quad (3.60)$$

Estas relaciones garantizan que el tether estará rígidamente unido al módulo central para todo t . Las cantidades que aparecen entre corchetes en las expresiones anteriores son las componentes de los correspondientes vectores en los ejes móviles $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

En el otro extremo del tether $s = l$, el contactor, que se ha modelado como un disco, está también rígidamente unido, de forma que no son posibles ni desplaza-

mientos ni giros relativos. En este caso, en el que el movimiento del extremo del tether es, a priori, desconocido se impondrán condiciones de contorno en fuerzas y momentos que se obtienen haciendo equilibrio entre la última sección del tether, los esfuerzos internos a ella asociados y las fuerzas de inercia del disco (condiciones de contorno naturales). Observando la figura 3.5, el equilibrio de fuerzas en $s = l$, incluyendo las fuerzas de inercia del disco en virtud del Teorema de D'Alembert, resulta

$$-\mathbf{F}(l, t) = m_d\{\ddot{\mathbf{x}}(l, t) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}(l, t) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}(l, t)\}, \quad (3.61)$$

donde m_d es la masa del contactor. Aplicando el equilibrio de momentos en la sección de conexión entre tether y contactor se obtienen tres condiciones de contorno adicionales.

La condición de contorno tether-contactor, se impone haciendo coincidir el triedro director evaluado en $s = l$ con los ejes principales del disco $\{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c\}$ (figura 3.5). Teniendo lo anterior en cuenta y llevando a cabo el equilibrio de momentos, las tres condiciones adicionales vendrán dadas por las tres componentes

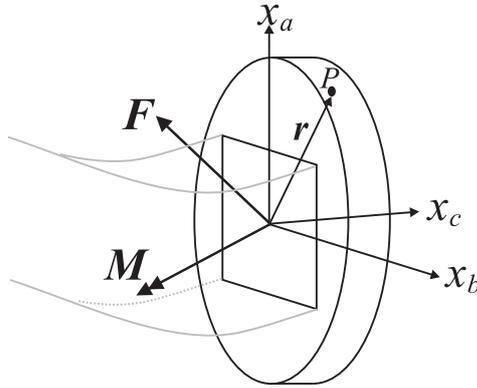


Figura 3.5: Equilibrio de fuerzas y momentos en el contactor.

de la siguiente ecuación vectorial

$$\begin{aligned}
-\mathbf{M} = & m_d \frac{e}{2} (\mathbf{d}_3 \times \ddot{\mathbf{x}} + 2\mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\
& + m_d \frac{R^2}{4} (\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2 + 2\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_1 + 2\mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_2 \\
& + \mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_2) \\
& + m_d \frac{e^2}{3} (\mathbf{d}_3 \times \ddot{\mathbf{d}}_3 + 2\mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_3 + \mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_3).
\end{aligned} \tag{3.62}$$

La dependencia de las variables con (l, t) ha sido suprimida para simplificar las expresiones. Se ha considerado que el contactor es un disco de radio R , espesor e y densidad uniforme.

El conjunto de ecuaciones (3.61) y (3.62) junto con (3.57)-(3.60), forman 18 condiciones de contorno. El sistema de EDPs que describe el movimiento del SET tiene dimensión 18 si se eliminan las componentes del vector curvatura κ_i , expresándolas en función de los momentos M_i a través de la ley de comportamiento. De esta forma, el sistema de ecuaciones diferenciales está cerrado al tener el mismo número de ecuaciones, incógnitas y condiciones de contorno.

3.1.7. Adimensionalización de las ecuaciones

El sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica del SET, (3.52), (3.53), (3.55), (3.54) y (3.56), se va a adimensionalizar escalando las variables de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\bar{t} = t \sqrt{\frac{EI_1}{l^3 m_d}} = t \omega_c, \quad \bar{s} = \frac{s}{l} \in [0, 1], \quad \bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \frac{l m_d}{\rho A_s EI_1}, \\
\bar{\omega} = \frac{\omega_{spin}}{\omega_c}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \frac{l^2 m_d}{\rho EI_1^2}, \quad \bar{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa} l, \quad \bar{\gamma} = \gamma \omega_c,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

donde $\omega_c^2 = \frac{EI_1}{m_d l^3}$. El factor $\sqrt{3}\omega_c$ representa aproximadamente la segunda frecuencia natural de flexión, asociada a la dirección de mayor inercia de la sección, de una barra empotrada-libre con una masa puntual m_d rígidamente unida al extremo libre, si la masa m_d es mayor que la masa de la barra. La constante ω_c

ha sido elegida para adimensionalizar las ecuaciones porque, como se vio en el capítulo 2, el modelo de Jeffcott de rotor lineal con amortiguamiento interno se inestabiliza a una frecuencia de giro igual a su primera frecuencia natural de flexión. En el presente modelo, aun siendo mucho más complejo y exacto que el de Jeffcott, se espera que, en un entorno de esa frecuencia, la dinámica del SET tenga cambios importantes (cambios de estabilidad, transición de una a varias soluciones posibles, etc.). No teniendo la seguridad a priori (ya que el presente modelo es altamente no lineal y detallado) de que esos cambios aparecerán exactamente a la primera frecuencia natural, se ha preferido no introducir el factor $\sqrt{3}$ en la adimensionalización.

Eliminando la barra de las variables por simplicidad (todas las variables a partir de este momento son adimensionales) y por lo tanto entendiendo $(\cdot)'$ por $\frac{\partial}{\partial s}$ y $(\ddot{\cdot})$ por $\frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}$, las ecuaciones en su versión adimensional resultan

$$\mathbf{F}' = \ddot{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' + Q\mathbf{d}_3 \times \mathbf{F} = & R(\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + 2\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_1 + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega})) \\ & + (\mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2 + 2\mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_2 + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega})), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{d}_3, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{d}'_i = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i, \quad (3.67)$$

y la ley de comportamiento en su versión vectorial

$$\mathbf{M} = P[(\kappa_1 + \gamma\dot{\kappa}_1 - \kappa_1^i)\mathbf{d}_1 + R(\kappa_2 + \gamma\dot{\kappa}_2 - \kappa_2^i)\mathbf{d}_2 + \frac{\Gamma(1+R)}{2}(\kappa_3 + \gamma\dot{\kappa}_3)\mathbf{d}_3], \quad (3.68)$$

donde los parámetros adimensionales son

$$Q = \frac{A_s l^2}{I_1}, \quad R = \frac{I_2}{I_1}, \quad P = \frac{lm_d}{\rho I_1}, \quad \Gamma = \frac{2G}{E}. \quad (3.69)$$

El sistema de EDPs (3.64) a (3.68) es el conjunto definitivo de ecuaciones que se va a resolver. Las condiciones de contorno adimensionales en $s = 0$ vienen dadas

por

$$\mathbf{d}_1(0, t) = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{d}_2(0, t) = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{d}_3(0, t) = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{x}(0, t) = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad (3.73)$$

y en $s = 1$ (la dependencia funcional de las variables ($s = 1, t$) se ha eliminado por simplicidad)

$$-r_m \mathbf{F} = \ddot{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{M} = & r_2(\mathbf{d}_3 \times \ddot{\mathbf{x}} + 2\mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \\ & + r_1(\mathbf{d}_1 \times \ddot{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{d}_2 \times \ddot{\mathbf{d}}_2 + 2\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_1 + 2\mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_2 \\ & + \mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_2) \\ & + r_3(\mathbf{d}_3 \times \ddot{\mathbf{d}}_3 + 2\mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{d}}_3 + \mathbf{d}_3 \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_3), \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde

$$r_m = \frac{\rho A_s l}{m_d}, \quad (3.76)$$

relaciona la masa del tether con la masa del contactor y

$$r_1 = \frac{m_d R^2}{4\rho I_1 l}, \quad (3.77)$$

$$r_2 = \frac{m_d e}{2\rho I_1}, \quad (3.78)$$

$$r_3 = \frac{de^2}{3\rho I_1 l}, \quad (3.79)$$

relacionan las inercias del contactor con la inercia mayor de la sección del tether.

3.2. Resolución de las ecuaciones de movimiento del SET

En general, las soluciones del sistema de EDPs (3.64)-(3.68) serán dependientes del espacio y del tiempo. La solución analítica de dichas ecuaciones es imposible de obtener y la resolución numérica se antoja cuando menos complicada. En cualquier caso, este modelo se ha planteado para trazar diagramas de bifurcaciones con las posibles soluciones del sistema en función de sus parámetros, no para simular en el tiempo. La simulación tan solo proporciona información para un sólo valor de los parámetros del sistema. Como se apuntó al principio del presente capítulo, se esperan soluciones periódicas [53] relacionadas con la frecuencia de giro que se le transmite al sistema, ω_{spin} . En este caso, y habiendo trasladado el sistema de ecuaciones a los ejes móviles $\{e_1, e_2, e_3\}$, dichas soluciones periódicas aparecerían en esta referencia como independientes del tiempo, soluciones cuasi-estacionarias también llamadas equilibrios relativos. La técnica de resolución de las ecuaciones está basada en estas ideas, de forma que mediante un esquema de perturbación, elaborado por Goriely y Tabor [52] para el caso específico de las ecuaciones de Kirchhoff-Love de una barra 3D, se asume que la solución se divide en una parte estacionaria y una perturbación sobre ella, que depende en general de s y t . Aplicando dicho esquema de soluciones, el $O(1)$ de las ecuaciones proporciona las soluciones cuasi-estacionarias y el $O(\delta)$ (δ es el parámetro pequeño de la perturbación) proporciona la estabilidad de dichas soluciones. El desarrollo se supone limitado al $O(\delta)$, por tanto, las ecuaciones resultan lineales en las variables perturbadas a diferencia del $O(1)$ que conserva la no-linealidad del problema original en las variables cuasi-estacionarias.

De una forma más intuitiva, el método propuesto consiste en hallar las soluciones cuasi-estacionarias y una vez éstas sean conocidas, perturbar el sistema fuera del equilibrio correspondiente y determinar como responde. Si la perturbación aumenta con el tiempo la solución será inestable mientras, que el caso contrario

indica estabilidad. La perturbación sólo es válida en un entorno de la solución, por lo tanto, no es apropiada para evaluar soluciones que se encuentren fuera de su intervalo de validez, es decir, soluciones no estacionarias.

La principal característica de la perturbación propuesta por Goriely y Tabor [52] es que el triedro director se mantiene ortonormal hasta el orden de la perturbación, $O(\delta)$. De esta forma, las ecuaciones de $O(1)$ así como las de $O(\delta)$ pueden ser proyectadas en el triedro, ya que se ha impuesto su ortonormalidad. En el caso en el que no se impusiera esta característica sobre la perturbación del triedro director, las ecuaciones proyectadas sobre dicho sistema serían erróneas. De esta forma, los vectores del triedro director se escriben como

$$\mathbf{d}_i(s, t) = \mathbf{d}_i^0(s) + \delta \mathbf{d}_i^t(s, t) + O(\delta^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.80)$$

donde δ , como se apuntó anteriormente, es el parámetro pequeño de la perturbación, $\mathbf{d}_i^0(s)$ es la solución cuasi-estacionaria y $\mathbf{d}_i^t(s, t)$ es el término de la perturbación. Para mantener el triedro ortonormal hasta el orden requerido, $O(\delta)$, se debe cumplir que

$$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij} + O(\delta^2), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.81)$$

El término corrector lineal de la perturbación, se puede escribir en términos de la base no-perturbada como

$$\mathbf{d}_i^t(s, t) = \sum_{j=1}^3 A_{ij}(s, t) \mathbf{d}_j^0(s), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.82)$$

Imponiendo que la base permanezca ortonormal en el $O(\delta)$, como indica la ecuación (3.81), se puede escribir lo siguiente

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}_i^0 + \delta \mathbf{d}_i^t) \cdot (\mathbf{d}_j^0 + \delta \mathbf{d}_j^t) &= \delta_{ij} + \delta(\mathbf{d}_i^0 \cdot \mathbf{d}_j^t + \mathbf{d}_j^0 \cdot \mathbf{d}_i^t) + O(\delta^2) \\ &= \delta_{ij} + \delta \left\{ \sum_{k=1}^3 A_{jk} \mathbf{d}_i^0 \cdot \mathbf{d}_k^0 + \sum_{k=1}^3 A_{ik} \mathbf{d}_j^0 \cdot \mathbf{d}_k^0 \right\} + O(\delta^2) \\ &= \delta_{ij} + \delta(A_{ji} + A_{ij}) + O(\delta^2), \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde la matriz A_{ij} debe ser antisimétrica, para que el término de $O(\delta)$ se anule, y se puede expresar como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Observando la matriz, se puede afirmar que las nueve componentes, que en principio debían describir la perturbación de los directores, se reducen a sólo tres coordenadas independientes: α_1 , α_2 y α_3 . De esta forma, se va a expresar la variación del triedro como un vector

$$\boldsymbol{\alpha}(s, t) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j(s, t) \mathbf{d}_j^0(s). \quad (3.85)$$

Esto está directamente relacionado con el hecho de que la orientación del triedro director es función de sólo tres parámetros independientes. Es por ello que la variación de la orientación del triedro, que en cierto modo está descrita por su perturbación, depende sólo de tres parámetros. Reescribiendo la expresión (3.80) considerando los resultados (3.82), (3.84) y (3.85), se obtiene la siguiente expresión compacta para los directores

$$\mathbf{d}_i(s, t) = \mathbf{d}_i^0(s) + \delta(\boldsymbol{\alpha}(s, t) \times \mathbf{d}_i^0(s)) + O(\delta^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.86)$$

Seguidamente se muestra el resultado de la ecuación anterior para, por ejemplo, $i = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(s, t) &= \mathbf{d}_1^0(s) + \delta\left(\left(\sum_{j=1}^3 \alpha_j(s, t) \mathbf{d}_j^0(s)\right) \times \mathbf{d}_1^0(s)\right) + O(\delta^2) \\ &= \mathbf{d}_1^0(s) + \delta(\alpha_3(s, t) \mathbf{d}_2^0(s) - \alpha_2(s, t) \mathbf{d}_3^0(s)), \end{aligned} \quad (3.87)$$

donde la ortonormalidad del triedro, ver expresión (3.8), ha sido considerada.

Como se ha visto, la perturbación de los directores depende de sólo tres coordenadas independientes. Esto también implica, como se verá más adelante, que las

ecuaciones de curvatura en su $O(\delta)$ son sólo tres, de las nueve posibles que provienen de la expresión (3.67). De esta forma, el número de incógnitas y ecuaciones sigue siendo igual aunque en el $O(\delta)$ se reduce en ambos a tres.

Las tres coordenadas de la perturbación del triedro (3.85), pueden ser interpretadas de una manera física análogamente a como se interpretan las curvaturas κ_i . Efectivamente, al proyectar la variación del triedro director, para una pareja (s, t) dada, sobre sí mismo, como se ha hecho en la ecuación (3.82), los α_j de la expresión (3.85) representan el giro alrededor de \mathbf{d}_j^0 , respectivamente, que sufre el triedro director cuando se perturba la solución cuasi-estacionaria.

Aclaración sobre los vectores incógnita y sus componentes

Antes de desarrollar una expresión compacta como la (3.86) para los vectores involucrados en las ecuaciones de movimiento del SET: \mathbf{F} , \mathbf{M} , \mathbf{x} , \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 y $\boldsymbol{\kappa}$, se va a describir qué proyección, y por tanto, qué componentes del vector, se va a usar para cada uno de ellos. Las dos opciones posibles son el triedro móvil $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y el triedro director $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$. Claramente, el vector de momentos internos \mathbf{M} y el vector curvatura $\boldsymbol{\kappa}$ (cuyas componentes en el triedro director ya se han usado antes en la ley de comportamiento) se van a proyectar en el triedro director, ya que facilita la definición de la ley de comportamiento (3.68). Por lo tanto, se tendrán

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 M_i \mathbf{d}_i, \quad (3.88)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^3 \kappa_i \mathbf{d}_i. \quad (3.89)$$

Por otro lado, para que la formulación sea más consistente y tener tanto momentos como fuerzas internas en los mismos ejes, el vector de fuerzas se expresa como

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{d}_i. \quad (3.90)$$

En este caso, la elección no es determinante y se podría haber usado la proyección en los ejes móviles. El vector posición, que proporcionará las formas del tether

para los distintos equilibrios cuasi-estacionarios del sistema, se va a proyectar en los ejes móviles. La proyección sobre el triedro director quitaría todo el sentido físico a esta variable. Por lo tanto, el vector se expresará como

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i, \quad (3.91)$$

donde, efectivamente, representando x_1 o x_2 frente a x_3 , se tendrán las formas del tether proyectadas en los planos $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, respectivamente. Finalmente, los vectores \mathbf{d}_i del triedro director se proyectan en los ejes móviles, resultando

$$\mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^3 d_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.92)$$

Principalmente, la diferencia entre las variables proyectadas en los ejes móviles y las proyectadas en el triedro director, es que en las primeras, la perturbación no afecta a los ejes sobre los que se proyecta, mientras que en el segundo caso es necesario tener en cuenta, a la hora de introducir la perturbación en la variable, que el triedro varía.

Una vez establecidas las variables del problema y sus componentes, se van a obtener expresiones compactas de las variables perturbadas, para una variable genérica $\mathbf{D}(s, t)$ que se proyecta en el triedro director, y una variable genérica $\mathbf{m}(s, t)$ que se proyecta en los ejes móviles.

Sea $\mathbf{D}(s, t) = \sum_{i=1}^3 D_i \mathbf{d}_i$. Introduciendo la perturbación donde corresponda, se tiene la siguiente secuencia de expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \sum_{i=1}^3 \{ [D_i^0(s) + \delta D_i^t(s, t) + O(\delta^2)] [\mathbf{d}_i^0(s) + \delta(\boldsymbol{\alpha}(s, t) \times \mathbf{d}_i^0(s))] \} + O(\delta^2) \\ &= \sum_{i=1}^3 \{ D_i^0(s) \mathbf{d}_i^0(s) + \delta D_i^t(s, t) \mathbf{d}_i^0(s) + \delta D_i^0(s) [\boldsymbol{\alpha}(s, t) \times \mathbf{d}_i^0(s)] \} + O(\delta^2). \end{aligned} \quad (3.93)$$

La expresión anterior será usada a la hora de introducir la perturbación en las ecuaciones del SET. Por otro lado, siendo $\mathbf{m}(s, t) = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{e}_i$ una variable cualquiera proyectada en los ejes móviles, su versión perturbada será

$$\mathbf{m}(s, t) = \sum_{i=1}^3 m_i(s, t) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 (m_i^0(s) + \delta m_i^t(s, t)) \mathbf{e}_i. \quad (3.94)$$

Introduciendo las expresiones (3.86), (3.93) y (3.94) en las ecuaciones (3.64)-(3.68) y condiciones de contorno (3.70)-(3.75), se podrá estudiar la estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias del SET.

3.2.1. Soluciones cuasi-estacionarias, $O(1)$ de las ecuaciones

Las ecuaciones de $O(1)$ no dependen del tiempo ya que sólo se retienen términos que dependen exclusivamente de s . De esta forma, las posibles soluciones cuasi-estacionarias serán soluciones de estas ecuaciones. Otras soluciones que dependan intrínsecamente del tiempo en los ejes móviles no serán captadas por el método de solución propuesto.

Las ecuaciones se han resuelto en su versión proyectada en el triedro director [52, 51]. Esta elección está condicionada por la complicación que introduciría, en la ecuación de momentos (3.65), proyectar la derivada espacial de los momentos internos (primer término de la ecuación), M_i , en los ejes móviles. De esta forma, las ecuaciones (3.64)-(3.68) se expanden en sus tres componentes, cada una de ellas en una de las direcciones \mathbf{d}_i . El $O(1)$ de la ecuación de equilibrio de fuerzas (3.64) viene dada por sus tres componentes como

$$(F_1^0)' - F_2^0 \kappa_3^0 + F_3^0 \kappa_2^0 = -\omega^2 (x_1^0 d_{11}^0 + x_2^0 d_{12}^0), \quad (3.95)$$

$$(F_2^0)' - F_3^0 \kappa_1^0 + F_1^0 \kappa_3^0 = -\omega^2 (x_1^0 d_{21}^0 + x_2^0 d_{22}^0), \quad (3.96)$$

$$(F_3^0)' - F_1^0 \kappa_2^0 + F_2^0 \kappa_1^0 = -\omega^2 (x_1^0 d_{31}^0 + x_2^0 d_{32}^0). \quad (3.97)$$

Las curvaturas que aparecen en la expresión anterior provienen de la derivación del vector \mathbf{F} al estar proyectado en el triedro director, de forma que se usa la ecuación de curvatura (3.67) para eliminar los términos \mathbf{d}'_i . Por su parte, el equilibrio de momentos se expande en sus tres componentes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (M_1^0)' &= \frac{2M_3^0 M_2^0}{P\Gamma(1+R)} - \left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \right) M_3^0 \\ &+ QF_2^0 + \omega^2 d_{23}^0 (d_{22}^0 d_{11}^0 - d_{21}^0 d_{12}^0), \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$(M_2^0)' = -\frac{2M_3^0 M_1^0}{P\Gamma(1+R)} + \frac{M_1^0 M_3^0}{P} - QF_1^0 + R\omega^2 d_{13}^0 (d_{21}^0 d_{12}^0 - d_{11}^0 d_{22}^0), \quad (3.99)$$

$$(M_3^0)' = \left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i\right) M_1^0 - \frac{M_1^0 M_2^0}{P} + R\omega^2 d_{13}^0 (d_{12}^0 d_{31}^0 - d_{11}^0 d_{32}^0) + \omega^2 d_{23}^0 (d_{22}^0 d_{31}^0 - d_{21}^0 d_{32}^0). \quad (3.100)$$

En este caso, κ_1^i se ha supuesto que es cero, modelándose el hecho de que la desviación inicial aparece únicamente en el plano en cuya dirección la sección del tether tiene menos momento ($\kappa_2^i \neq 0$). La ecuación de la tangente (3.66) por su parte se proyecta sobre los ejes móviles, por sencillez, de la siguiente forma

$$(x^0)' = \mathbf{d}_3^0, \quad (3.101)$$

al igual que la ecuación de curvatura (3.67)

$$(\mathbf{d}_i^0)' = \boldsymbol{\kappa}^0 \times \mathbf{d}_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.102)$$

donde $\boldsymbol{\kappa}^0 = \sum_{j=1}^3 \kappa_j^0 \mathbf{d}_j^0$. Por su parte, la ley de comportamiento (3.68), que ya está expresada según sus componentes en el triedro director se transforma para $O(1)$ en

$$M_1^0 = P\kappa_1^0, \quad (3.103)$$

$$M_2^0 = PR(\kappa_2^0 - \kappa_2^i), \quad (3.104)$$

$$M_1^0 = \frac{P\Gamma(1+R)}{2} \kappa_3^0, \quad (3.105)$$

pudiendo ser usadas para eliminar las componentes del vector curvatura κ_i^0 en función de los momentos M_i^0 . La dependencia con la longitud de arco s se ha suprimido por brevedad.

En cuanto a las condiciones de contorno, procediendo de la misma manera que

con las ecuaciones, se tiene, para $s = 0$,

$$\mathbf{d}_1^0(0) = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad (3.106)$$

$$\mathbf{d}_2^0(0) = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad (3.107)$$

$$\mathbf{d}_3^0(0) = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad (3.108)$$

$$\mathbf{x}^0(0) = [0 \ 0 \ 0]^T. \quad (3.109)$$

En $s = 1$, el $O(1)$ de las condiciones de contorno (3.74) y (3.75) viene dado, en sus tres componentes en el triedro director como

$$r_m F_1^0 = \omega^2(x_1^0 d_{11}^0 + x_2^0 d_{12}^0), \quad (3.110)$$

$$r_m F_2^0 = \omega^2(x_1^0 d_{21}^0 + x_2^0 d_{22}^0), \quad (3.111)$$

$$r_m F_3^0 = \omega^2(x_1^0 d_{31}^0 + x_2^0 d_{32}^0), \quad (3.112)$$

y

$$\begin{aligned} M_1^0 + r_1 \omega^2 d_{23}^0 (d_{22}^0 d_{11}^0 - d_{21}^0 d_{12}^0) + r_3 \omega^2 d_{33}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0) \\ + r_2 [\omega^2 x_3^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0) - \omega^2 (d_{11}^0 (x_3^0 d_{32}^0 - x_2^0 d_{33}^0) \\ + d_{12}^0 (x_1^0 d_{33}^0 - x_3^0 d_{31}^0) + d_{13}^0 (x_2^0 d_{31}^0 - x_1^0 d_{32}^0))] = 0, \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} M_2^0 + r_1 \omega^2 d_{13}^0 (d_{12}^0 d_{21}^0 - d_{11}^0 d_{22}^0) + r_3 \omega^2 d_{33}^0 (d_{32}^0 d_{21}^0 - d_{31}^0 d_{22}^0) \\ + r_2 [\omega^2 x_3^0 (d_{32}^0 d_{21}^0 - d_{31}^0 d_{22}^0) - \omega^2 (d_{21}^0 (x_3^0 d_{32}^0 - x_2^0 d_{33}^0) \\ + d_{22}^0 (x_1^0 d_{33}^0 - x_3^0 d_{31}^0) + d_{23}^0 (x_2^0 d_{31}^0 - x_1^0 d_{32}^0))] = 0, \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$M_3^0 + r_1 \omega^2 (d_{13}^0 (d_{12}^0 d_{31}^0 - d_{11}^0 d_{32}^0) + d_{23}^0 (d_{22}^0 d_{31}^0 - d_{21}^0 d_{32}^0)) = 0, \quad (3.115)$$

donde todas la variables están evaluadas en $s = 1$.

3.2.2. Estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias, $O(\delta)$ de las ecuaciones del SET

Una vez obtenidas las soluciones cuasi-estacionarias, su estabilidad se va a estudiar con la ayuda del $O(\delta)$ de las ecuaciones, como se apuntó al principio de este capítulo.

Siendo el esquema de la perturbación propuesta lineal, el sistema resultante va a ser lineal en las variables perturbadas \mathbf{x}^t , $\boldsymbol{\kappa}^t$, $\boldsymbol{\alpha}$, \mathbf{F}^t , \mathbf{M}^t (15 incógnitas). De la ecuación de equilibrio de fuerzas (3.64), el $O(\delta)$ resulta

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^t(s, t))' + \mathbf{B}_1(s)\mathbf{F}^t(s, t) + \mathbf{B}_2(s)\mathbf{x}^t(s, t) \\ + \mathbf{B}_3(s)\boldsymbol{\alpha}'(s, t) + \mathbf{B}_4(s)\boldsymbol{\alpha}(s, t) \\ = \mathbf{B}_5(s)\ddot{\mathbf{x}}^t(s, t) + \mathbf{B}_6(s)\dot{\mathbf{x}}^t(s, t), \end{aligned} \quad (3.116)$$

donde se ha usado notación matricial, de manera que las matrices $\mathbf{B}_i(s)$ de dimensión 3×3 , que dependen en general de la solución cuasi-estacionaria y por tanto de s , se adjuntan en el Apéndice A. Usando la misma nomenclatura, la ecuación de equilibrio de momentos (3.65) en su $O(\delta)$ será

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}^t(s, t))' + \mathbf{C}_1(s)\mathbf{M}^t(s, t) + \mathbf{C}_2(s)\boldsymbol{\alpha}'(s, t) \\ + \mathbf{C}_3(s)\boldsymbol{\alpha}(s, t) + \mathbf{C}_4(s)\mathbf{F}^t(s, t) \\ = \mathbf{C}_5(s)\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(s, t) + \mathbf{C}_6(s)\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s, t), \end{aligned} \quad (3.117)$$

donde las matrices $\mathbf{C}_i(s)$ vienen dadas de nuevo, en el Apéndice A. Por su parte, las 9 ecuaciones de curvatura (3.67) se reducen en su $O(\delta)$ a sólo 3 ecuaciones independientes (tantas como α_i) que relacionan el vector $\boldsymbol{\kappa}^t = \sum_{i=1}^3 \kappa_i^t \mathbf{d}_i^0$ con $\boldsymbol{\alpha}$, definido en (3.85), de la siguiente forma

$$\boldsymbol{\kappa}^t = \boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\kappa}^0 \times \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.118)$$

Teniendo en cuenta la relación anterior, y por tanto eliminando $\boldsymbol{\kappa}^t$ en favor de $\boldsymbol{\alpha}$,

el $O(\delta)$ de la ley de comportamiento resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^t(s, t) + \mathbf{D}_1(s)\boldsymbol{\alpha}'(s, t) + \mathbf{D}_2(s)\boldsymbol{\alpha}(s, t) \\ = \mathbf{D}_3(s)\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s, t) + \mathbf{D}_4(s)\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(\boldsymbol{\alpha}(s, t)), \end{aligned} \quad (3.119)$$

donde las matrices $\mathbf{D}_i(s)$ vienen dadas en el Apéndice A. Al haberse eliminado las componentes del vector $\boldsymbol{\kappa}^t$, el número de incógnitas se reduce a 12. Finalmente, el $O(\delta)$ de la ecuación de la tangente será

$$\begin{aligned} (x_1^t)'(s, t) &= \alpha_2(s, t)d_{11}^0(s) - \alpha_1(s, t)d_{21}^0(s), \\ (x_2^t)'(s, t) &= \alpha_2(s, t)d_{12}^0(s) - \alpha_1(s, t)d_{22}^0(s), \\ (x_3^t)'(s, t) &= \alpha_2(s, t)d_{13}^0(s) - \alpha_1(s, t)d_{23}^0(s), \end{aligned} \quad (3.120)$$

o en forma matricial

$$(\mathbf{x}^t)'(s, t) = \mathbf{G}(s)\boldsymbol{\alpha}(s, t), \quad (3.121)$$

donde $\mathbf{G}(s)$ viene dado en el Apéndice A. Aplicando el esquema de perturbación a las condiciones de contorno se obtienen las siguientes expresiones

$$\mathbf{x}^t(0, t) = \mathbf{0}, \quad (3.122)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(0, t) = \mathbf{0}, \quad (3.123)$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{F}^t(1, t) + \mathbf{E}_2\mathbf{x}^t(1, t) + \mathbf{E}_3\boldsymbol{\alpha}(1, t) = \mathbf{E}_4\ddot{\mathbf{x}}^t(1, t) + \mathbf{E}_5\dot{\mathbf{x}}^t(1, t), \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^t(1, t) + \mathbf{F}_1\mathbf{x}^t(1, t) + \mathbf{F}_2\boldsymbol{\alpha}(1, t) &= \mathbf{F}_3\ddot{\mathbf{x}}^t(1, t) \\ + \mathbf{F}_4\dot{\mathbf{x}}^t(1, t) + \mathbf{F}_5\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(1, t) + \mathbf{F}_6\dot{\boldsymbol{\alpha}}(1, t), \end{aligned} \quad (3.125)$$

donde \mathbf{E}_i y \mathbf{F}_i están evaluadas en $s = 1$ y sus expresiones se pueden encontrar en el Apéndice A. Las 12 relaciones (3.116), (3.117), (3.119) y (3.121) junto a las 12 condiciones de contorno anteriores y 24 condiciones iniciales para \mathbf{x}^t , $\dot{\mathbf{x}}^t$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, \mathbf{F}^t , $\dot{\mathbf{F}}^t$, \mathbf{M}^t and $\dot{\mathbf{M}}^t$, forman un sistema EDPs cerrado.

El sistema de ecuaciones de $O(\delta)$ obtenido es lineal en las variables perturbadas. Esto permite utilizar la técnica de separación de variables para su resolución. De esta forma, el sistema se transforma en un problema de autovalores que controla la

dependencia con el tiempo y que proporciona la información sobre la estabilidad de las soluciones para un equilibrio dado. Las soluciones serán por tanto de la forma

$$\mathbf{x}^t(s, t) = \hat{\mathbf{x}}^t(s)e^{\lambda t}, \quad (3.126)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(s, t) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}(s)e^{\lambda t}, \quad (3.127)$$

$$\mathbf{F}^t(s, t) = \hat{\mathbf{F}}^t(s)e^{\lambda t}, \quad (3.128)$$

$$\mathbf{M}^t(s, t) = \hat{\mathbf{M}}^t(s)e^{\lambda t}. \quad (3.129)$$

Para convertir el sistema en un problema común de autovalores, es necesario eliminar la dependencia con s tanto de las posibles soluciones (3.126)-(3.129), como de las ecuaciones. Para ello, se usará el Método de la Diferencias Finitas de forma que el sistema resultante es sólo dependiente de t , y puede ser resuelto como un problema de autovalores común en el que λ mide el crecimiento con el tiempo de la perturbación lineal. En general, tanto los autovalores como las amplitudes de las variables de la perturbación son números complejos [53], por lo que la condición de estabilidad pasa por que la parte real de los autovalores λ sea negativa, lo que indica una evolución de la perturbación exponencial decreciente.

Se esperan cambios en el signo de la parte real de los autovalores en los puntos de bifurcación que se encuentren al computar las ramas de soluciones cuasi-estacionarias. Esto se corresponderá con autovalores que cruzan del semiplano real negativo al positivo a través del cero. En este caso, es de esperar bifurcaciones tipo pliegue, tridente y transcítica [22]. Sin embargo, es también posible que el cambio de semiplano de los autovalores se produzca por pares conjugados que cruzan el eje imaginario en puntos regulares (no bifurcaciones, ver capítulo 2) de las ramas de soluciones cuasi-estacionarias. Este tipo de puntos se interpreta como el nacimiento de ramas de soluciones que no son estacionarias en los ejes móviles, bifurcaciones de Hopf, y que es imposible captar mediante la resolución del $O(1)$ de las ecuaciones del SET. Por esta razón, estas últimas bifurcaciones se esperan en puntos regulares de las ramas, o mejor dicho, regulares para soluciones cuasi-

estacionarias. Las nuevas ramas, que partirían de los puntos de bifurcación de Hopf, representarían soluciones periódicas en los ejes móviles, es decir, soluciones doblemente periódicas en los ejes inerciales. Para computar estas soluciones, sería necesario usar un esquema de perturbación no-lineal [88], que para el caso del SET se antoja prácticamente intratable por la complejidad de las condiciones de contorno y la ortotropía de la sección. Este aspecto se tratará con mayor detalle en el capítulo de conclusiones y trabajos futuros de esta tesis.

3.3. Resultados numéricos, diagramas de bifurcación, estabilidad y formas del tether

En este apartado se van a mostrar las ramas de soluciones del SET y su estabilidad. Es importante tener en cuenta que cuando el tether no está intrínsecamente desviado ($\kappa_2^i = 0$), los planos $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\}$ son planos de simetría del problema. Por lo tanto, se espera simetría en las ramas de soluciones con respecto a esos planos. Además, en este caso, la configuración recta es la solución trivial del sistema por lo que se espera que el tether se aleje de la solución trivial mediante bifurcaciones de tridente que son típicas en sistemas con simetría [22]. Cuando se rompe la simetría ($\kappa_2^i \neq 0$), las bifurcaciones de tridente se convierten en pliegues (puntos de tangente infinita) y las ramas pierden la simetría inicial. Esto es importante desde el punto de vista de la resolución de las ecuaciones ya que condiciona la secuencia de operaciones que se va a seguir. Efectivamente, es conveniente computar inicialmente las ramas para el problema simétrico, luego introducir el término que rompe la simetría y finalmente volver a computar las ramas.

Todas las suposiciones anteriores sobre las ramas de soluciones, etc., se han hecho basándose en la experiencia y en los resultados obtenidos con el modelo de Jeffcott, que ya mostraba esta estructura de las soluciones.

3.3.1. Métodos numéricos para el $O(1)$ de las ecuaciones

En este caso, las 18 ecuaciones (eliminando κ_i^0 en función de M_i^0), (3.95)-(3.105), junto a las condiciones de contorno (3.106)-(3.115) han de ser resueltas. Éste es claramente un problema de contorno en el intervalo $s \in [0, 1]$, que puede ser resuelto numéricamente mediante distintas técnicas como el disparo o las diferencias finitas [76], por citar algunas.

Como se mencionó al principio de este capítulo, con el presente modelo se busca obtener ramas de soluciones del SET como función de los parámetros del sistema, que serán principalmente ω y κ_2^i . Para generar estas soluciones se recurre pues a la técnica de continuación numérica, que se describió, grosso modo, en el capítulo 2. Por lo tanto, se necesita una herramienta capaz de resolver problemas de contorno en función de parámetros. Se ha elegido, el código libre AUTO2000 [63], que permite continuación numérica y resuelve el problema de contorno mediante colocación ortogonal [76]. Éste es uno de los métodos más robustos y precisos a la hora de resolver este tipo de problemas.

Principalmente, se han variado dos parámetros, ω y κ_2^i (velocidad de spin y curvatura inicial intrínseca). Los resultados que se van a mostrar en los apartados 3.3.3 y 3.3.4 están en el rango de velocidades $\omega \in [0, 50]$, que es el de operación típico del SET [9, 44]. Por su parte, los valores característicos del otro parámetro serán $\kappa_2^i = 0$, tether intrínsecamente recto y $\kappa_2^i = 0.14$, que se corresponde con una desviación inicial de 7 m en la punta del tether. En la tabla 3.1 se muestran los valores de los parámetros del sistema para la geometría que se describió en la introducción.

3.3.2. Métodos numéricos para el $O(\delta)$ de las ecuaciones

En este caso, se tiene un sistema de 12 EDPs que debe ser resuelto para conocer la estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias. En realidad, dicho sistema no puede ser resuelto mediante integración numérica común, ya que las 24 condiciones iniciales necesarias no están disponibles y su obtención es compleja. Por otro

lado, si se asumen las soluciones del tipo (3.126)-(3.129) y la dependencia con s se elimina resolviendo el problema espacial como se describirá en el siguiente párrafo, el sistema resultante es un problema lineal de autovalores que se resuelve sin necesidad de conocer las condiciones iniciales.

Observando las ecuaciones (3.116), (3.117), (3.119) y (3.121), con condiciones de contorno (3.122)-(3.125), e ignorando la dependencia con t , el sistema resultante en s es un problema de contorno lineal en el intervalo $s \in [0, 1]$.

Es necesario resolver este problema de contorno en la variable s de forma simbólica, ya que en realidad, una vez eliminada la dependencia con s hay que resolver el problema en t . De esta forma, durante la resolución del problema de contorno, hay que tratar con las variables simbólicas dependientes exclusivamente de t . Por lo tanto, el método usado para resolver el primero debe ser sencillo, sistemático y sin procesos iterativos que involucren las variables simbólicas (dependientes de t). El método de las diferencias finitas reúne estas características y consigue una precisión buena para esquemas de las diferencias sencillos (dos o tres

Tabla 3.1: Valores de los parámetros del SET.

| | |
|--------------|---------------|
| Q | 144505263.159 |
| R | 0.5526 |
| P | 126392390.92 |
| γ | 0.043753 |
| κ_2^i | 0-0.14 |
| r_m | 1.1433 |
| r_1 | 126.39 |
| r_2 | 6319.62 |
| r_3 | 0.4213 |
| Γ | 0.76923 |
| ω | 0-50 |

nodos de la discretización para evaluar las derivadas), lo que facilitará a la postre la resolución del problema de autovalores en t . Finalmente, se han usado diferencias finitas centradas (precisión de 2^0 orden) para aproximar las derivadas espaciales y el intervalo $s \in [0, 1]$ se ha discretizado en $(N - 1)$ intervalos comprendidos entre los nodos $n = 1(s = 0), 2, 3, \dots, N(s = 1)$. Para una variable genérica, $v(s)$, las diferencias finitas centradas en un nodo genérico n tienen la siguiente forma

$$v'(s_n) = (v(s_{n+1}) - v(s_{n-1})) \frac{N-1}{2}. \quad (3.130)$$

Las ecuaciones (3.116), (3.117), (3.119) y (3.121) se imponen en los nodos de la discretización excepto en $n = 1(s = 0)$ y $n = N(s = 1)$ donde se imponen las condiciones de contorno. De esta forma se tiene que la ecuación (3.116) discretizada es

$$\begin{aligned} & (\mathbf{F}_{n+1}^t(t) - \mathbf{F}_{n-1}^t(t)) \frac{N-1}{2} + \mathbf{B}_1(s_n) \mathbf{F}_n^t(t) + \mathbf{B}_2(s_n) \mathbf{x}_n^t(t) \\ & + \mathbf{B}_3(s_n) (\boldsymbol{\alpha}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\alpha}_{n-1}(t)) \frac{N-1}{2} + \mathbf{B}_4(s_n) \boldsymbol{\alpha}_n(t) \\ & = \mathbf{B}_5(s_n) \ddot{\mathbf{x}}_n^t(t) + \mathbf{B}_6(s_n) \dot{\mathbf{x}}_n^t(t), \\ & n = 2, 3, \dots, N-2, N-1, \end{aligned} \quad (3.131)$$

donde $s_n = \frac{n-1}{N-1}$ para $n = 1, 2, 3, \dots, N$ y el subíndice en las variables, por ejemplo $\mathbf{F}_{n+1}^t(t)$, significa que está evaluada en s_{n+1} . El resto de las ecuaciones algebraicas discretizadas vienen dadas por

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}_{n+1}^t(t) - \mathbf{M}_{n-1}^t(t)) \frac{N-1}{2} + \mathbf{C}_1(s_n) \mathbf{M}_n^t(t) \\ & + \mathbf{C}_2(s_n) (\boldsymbol{\alpha}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\alpha}_{n-1}(t)) \frac{N-1}{2} \\ & + \mathbf{C}_3(s_n) \boldsymbol{\alpha}_n(t) + \mathbf{C}_4(s_n) \mathbf{F}_n^t(t) \\ & = \mathbf{C}_5(s_n) \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_n(t) + \mathbf{C}_6(s_n) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_n(t), \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_n^t(t) + \mathbf{D}_1(s_n) (\boldsymbol{\alpha}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\alpha}_{n-1}(t)) \frac{N-1}{2} + \mathbf{D}_2(s_n) \boldsymbol{\alpha}_n(t) \\ & = \mathbf{D}_3(s_n) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_n(t) + \mathbf{D}_4(s_n) (\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{n+1}(t) - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{n-1}(t)) \frac{N-1}{2}, \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$(\mathbf{x}_{n+1}^t(t) - \mathbf{x}_{n-1}^t(t)) \frac{N-1}{2} = \mathbf{G}(s_n) \boldsymbol{\alpha}_n(t), \quad (3.134)$$

evaluadas en $n = 2, 3, \dots, N - 2, N - 1$. Por su parte, la condiciones de contorno se reescriben con la nueva notación como

$$\mathbf{x}_1^t(t) = \mathbf{0}, \quad (3.135)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1(t) = \mathbf{0}, \quad (3.136)$$

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{F}_N^t(t) + \mathbf{E}_2 \mathbf{x}_N^t(t) + \mathbf{E}_3 \boldsymbol{\alpha}_N(t) = \mathbf{E}_4 \ddot{\mathbf{x}}_N^t(t) + \mathbf{E}_5 \dot{\mathbf{x}}_N^t(t), \quad (3.137)$$

$$\mathbf{M}_N^t(t) + \mathbf{F}_1 \mathbf{x}_N^t(t) + \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\alpha}_N(t) = \mathbf{F}_3 \ddot{\mathbf{x}}_N^t(t) + \mathbf{F}_4 \dot{\mathbf{x}}_N^t(t) \quad (3.138)$$

$$+ \mathbf{F}_5 \ddot{\boldsymbol{\alpha}}_N(t) + \mathbf{F}_6 \dot{\boldsymbol{\alpha}}_N(t). \quad (3.139)$$

El número de ecuaciones es por tanto $12 \cdot (N - 2)$ en los nodos interiores del dominio más 12 condiciones de contorno, 6 de ellas en $n = 1 (s = 0)$ y las 6 restantes en $n = N (s = 1)$. Así, el número total de ecuaciones es de $12 \cdot (N - 1)$. Por otro lado, el número de incógnitas es igual a $12 \cdot N$ (12 variables en N nodos). Se necesitan por tanto 12 ecuaciones extra para cerrar el sistema.

Existen diferentes formas de añadir dichas ecuaciones [76]. Por ejemplo, es común añadir un nodo ficticio fuera del dominio, el cual se usa para evaluar la derivada justo en el contorno. Para el nodo inicial, $n = 1$, se introduciría un nodo ficticio a la izquierda del dominio, $n = 0$, de forma que la diferencia centrada resulta en este caso

$$v'(s_1) = (v(s_2) - v(s_0)) \frac{N - 1}{2}. \quad (3.140)$$

En este caso, se ha decidido imponer las ecuaciones en los contornos ya que da lugar a menos complicaciones; recuérdese que una vez resuelto el problema de contorno de forma simbólica hay que resolver el problema de autovalores en t . Para ello es necesario evaluar las derivadas con diferencias hacia delante en el caso de $s = 0$, y diferencias hacia atrás en el caso de $s = 1$, ya que en esos puntos no están disponibles nodos a uno y otro lado. Se han usado las diferencias hacia delante y atrás de segundo orden (usando tres puntos) para que la exactitud sea la misma que en el resto del dominio, recordar que las diferencias centradas tienen orden dos de precisión. De esta forma, se tiene que la diferencia finita hacia delante

es

$$v'(s_1) = (-v(s_3) + 4v(s_2) - 3v(s_1))\frac{N-1}{2}, \quad (3.141)$$

y hacia atrás

$$v'(s_N) = (3v(s_N) - 4v(s_{N-1}) + v(s_{N-2}))\frac{N-1}{2}. \quad (3.142)$$

Se imponen pues, 6 de las 12 ecuaciones en el primer nodo, $n = 1$, teniendo en cuenta que las condiciones en este contorno involucran a \mathbf{x}^t y $\boldsymbol{\alpha}$. Por lo tanto, se usan las 6 ecuaciones de equilibrio (3.116) y (3.117) que involucran a \mathbf{F}^t y \mathbf{M}^t en $n = 1$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & [-3\mathbf{F}_1^t(t) + 4\mathbf{F}_2^t(t) - \mathbf{F}_3^t(t)]\frac{N-1}{2} + \mathbf{B}_1(s_1)\mathbf{F}_1^t(t) \\ & + \mathbf{B}_2(s_1)\mathbf{x}_1^t(t) + \mathbf{B}_3(s_1)[-3\boldsymbol{\alpha}_1(t) + 4\boldsymbol{\alpha}_2(t) - \boldsymbol{\alpha}_3(t)]\frac{N-1}{2} \\ & + \mathbf{B}_4(s_1)\boldsymbol{\alpha}_1(t) = \mathbf{B}_5(s_1)\dot{\mathbf{x}}_1^t(t) + \mathbf{B}_6(s_1)\dot{\mathbf{x}}_1^t(t), \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} & [-3\mathbf{M}_1^t(t) + 4\mathbf{M}_2^t(t) - \mathbf{M}_3^t(t)]\frac{N-1}{2} + \mathbf{C}_1(s_1)\mathbf{M}_1^t(t) \\ & + \mathbf{C}_2(s_1)[-3\boldsymbol{\alpha}_1(t) + 4\boldsymbol{\alpha}_2(t) - \boldsymbol{\alpha}_3(t)]\frac{N-1}{2} \\ & + \mathbf{C}_3(s_1)\boldsymbol{\alpha}_1(t) + \mathbf{C}_4(s_1)\mathbf{F}_1^t(t) \\ & = \mathbf{C}_5(s_1)\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_1(t) + \mathbf{C}_6(s_1)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1(t). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Las 6 ecuaciones restantes se imponen en el contorno $s = 1$. Procediendo de la misma forma, en este contorno se impondrán las ecuaciones (3.119) y (3.121) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_N^t(t) + \mathbf{D}_1(s_N)[3\boldsymbol{\alpha}_N(t) - 4\boldsymbol{\alpha}_{N-1}(t) + \boldsymbol{\alpha}_{N-2}(t)]\frac{N-1}{2} \\ & + \mathbf{D}_2(s_N)\boldsymbol{\alpha}_N(t) = \mathbf{D}_3(s_N)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_N(t) \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} & + \mathbf{D}_4(s_N)[3\dot{\boldsymbol{\alpha}}_N(t) - 4\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{N-1}(t) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{N-2}(t)]\frac{N-1}{2}, \\ & (3\mathbf{x}_N^t(t) - 4\mathbf{x}_{N-1}^t(t) + \mathbf{x}_{N-2}^t(t))\frac{N-1}{2} = \mathbf{G}(s_N)\boldsymbol{\alpha}_N(t). \end{aligned} \quad (3.146)$$

Nótese que el subíndice en los vectores que están en negrita no se refiere a la componente del vector sino al nodo donde el vector está evaluado. Añadiendo

estas 4 últimas expresiones a las anteriores se tiene un sistema cerrado de $12 \cdot N$ ecuaciones para $12 \cdot N$ incógnitas, que son las variables $\mathbf{x}^t, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}^t, \mathbf{M}^t$ evaluadas en todos los nodos y dependientes sólo del tiempo t . Dicho sistema tiene la siguiente estructura

$$\mathbf{M}(s)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(s)\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(s)\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.147)$$

donde el vector de variables y las matrices tienen dimensión $12 \cdot N$, siendo

$$\mathbf{q}(t) = [\mathbf{x}_1^t, \boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{F}_1^t, \mathbf{M}_1^t, \dots, \mathbf{x}_N^t, \boldsymbol{\alpha}_N, \mathbf{F}_N^t, \mathbf{M}_N^t]^T. \quad (3.148)$$

El sistema anterior se resuelve como un problema de autovalores lineal de segundo orden sin más que expresar $\mathbf{q}(t) = \hat{q}e^{\lambda t}$. Los autovalores de este sistema (espectro infinito en el caso real, número discreto en el método aproximado que se propone [53]) proporcionan la información sobre la estabilidad de las ramas de soluciones cuasi-estacionarias. Para cada solución, se resuelve este sistema y se obtienen los autovalores correspondientes. El montaje de las matrices y la posterior resolución de los autovalores se ha llevado a cabo usando la rutina ARPACK [89] del programa MATLAB. La sensibilidad del método ante la discretización usada se ha chequeado [45] tomando distintos valores de N y comparando los resultados obtenidos, ver apartados 3.3.5 y 3.3.6.

3.3.3. Diagramas de bifurcación para el tether inicialmente recto, $\kappa_2^i = 0$

En este apartado, se van a obtener diagramas de bifurcación del SET. En estos diagramas, se trazan ramas de soluciones, que representan la variación de magnitudes características del sistema asociadas a los equilibrios al hacer variar los parámetros del problema.

Se empieza la continuación para el caso de un tether inicialmente (intrínsecamente) recto, $\kappa_2^i = 0$, solución trivial del sistema. De esta forma, las soluciones deben reflejar la simetría del problema con respecto a los planos $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

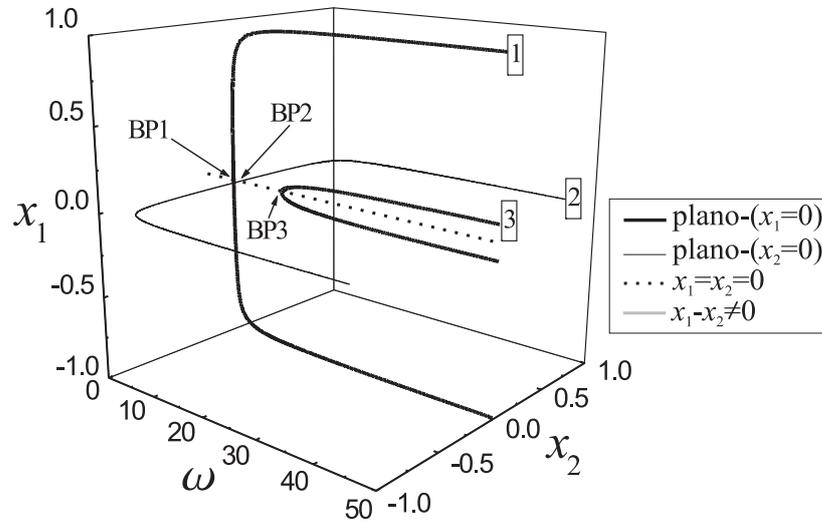


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación 3D para el SET simétrico con $\kappa_2^i = 0$. Rango de velocidades de operación $0 < \omega < 50$. Por claridad se han omitido las ramas que nacen de bifurcaciones para $\omega > 15$, que se representan en la figura 3.7

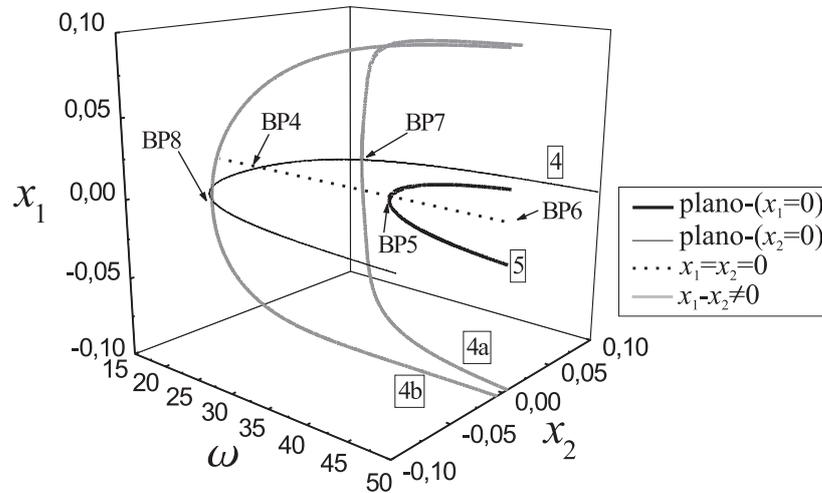


Figura 3.7: Zoom de la figura 3.6 mostrando las ramas que bifurcan de la solución trivial para $15 < \omega < 50$.

Las figuras 3.6 y 3.7 muestran el diagrama de bifurcación tridimensional en el que se representan los desplazamientos adimensionales del contactor según \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , es decir, $x_1(1)$ y $x_2(1)$, frente al parámetro principal de la continuación, ω . La figura 3.8 muestra las proyecciones de dicho diagrama sobre los planos $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Desde $\omega = 0$ hasta BP1, ver tabla 3.2, la configuración recta es la única solución posible. En BP1, se produce una bifurcación de tridente supercrítica [22] de la que emerge una nueva rama de soluciones en el plano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$, que es la dirección de menor segundo momento de área de la sección del tether, que será referida como rama 1. El punto BP1 se corresponde aproximadamente con la primera frecuencia natural de flexión del sistema. La forma del tether en esta rama de soluciones será aproximadamente el primer modo de vibración de una barra empotrada con una masa en su extremo libre. Teniendo en cuenta que la solución trivial con $\omega = 0$ es estable, por continuidad se puede afirmar que en ausencia de bifurcaciones la rama comprendida entre $\omega = 0$ y BP1 será estable. Por el tipo de bifurcación, la solución recta se espera que pierda la estabilidad que se transfiere a la solución no-trivial. Por tanto, la rama 1 será estable para todo ω salvo que se encuentre alguna bifurcación de Hopf en el análisis de estabilidad

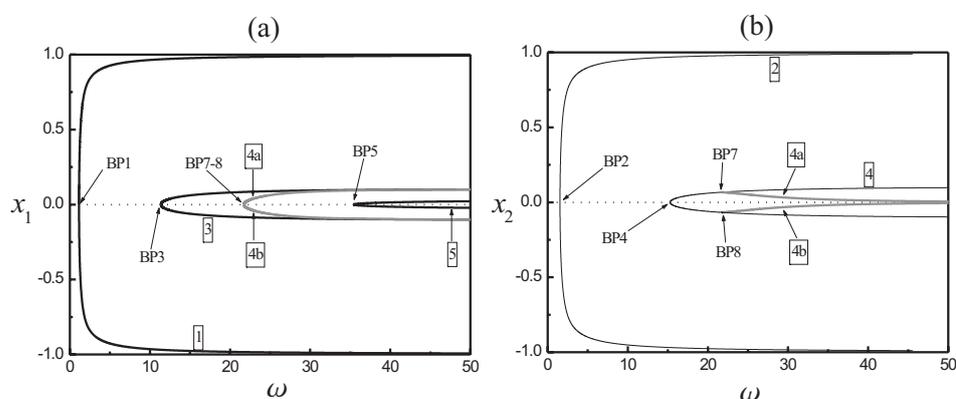


Figura 3.8: Proyección del diagrama de bifurcación de las figuras 3.6 y 3.7 sobre los planos: (a) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y (b) $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

que se mostrará más tarde, ver capítulo 2 para definición de las bifurcaciones. Un resultado equivalente fue encontrado en el modelo de Jeffcott [86]. La no-linealidad cambia la topología del sistema y provoca la aparición de soluciones estables para velocidades supercríticas, $\omega > BP1$.

Tabla 3.2: Bifurcaciones en el caso $\kappa_2^i = 0$.

| | |
|-------|-------|
| BP1 | 1.14 |
| BP2 | 1.54 |
| BP3 | 11.4 |
| BP4 | 15.3 |
| BP5 | 35.6 |
| BP6 | 47.7 |
| BP7-8 | 21.73 |

El resto de bifurcaciones que aparecen en las figuras 3.6, 3.7 y 3.8 se corresponden con frecuencias naturales de flexión mayores. En BP2 (primera frecuencia natural de flexión en la dirección de mayor segundo momento de área de la sección del tether), la solución trivial bifurca (tridente supercrítica) en el plano $\{e_2, e_3\}$, rama 2. De las bifurcaciones BP3 y BP5, emergen las ramas 3 y 5 en el plano $\{e_1, e_3\}$. En BP4, aparece una segunda bifurcación en el plano $\{e_2, e_3\}$ dando lugar a la rama 4. Hasta el momento, todas las ramas nombradas se encuentran contenidas en un plano, sin embargo, en BP7 y BP8 sobre la rama 4, aparecen nuevas ramas a través de bifurcaciones secundarias, ramas 4a y 4b. Es interesante notar que estas nuevas ramas son tridimensionales ya que tienen proyección tanto en el plano $\{e_1, e_3\}$ como en el $\{e_2, e_3\}$ (figura 3.8).

3.3.4. Diagramas de bifurcación para el tether inicialmente desviado, $\kappa_2^i \neq 0$

Partiendo de los diagramas del caso anterior, se realizan continuaciones de las distintas ramas, desde $\kappa_2^i = 0$ hasta su valor final, $\kappa_2^i = 0.14$. A partir de este punto se repite la continuación en ω dando lugar a las distintas ramas de soluciones para el caso que se está estudiando. Cuando se rompe la simetría en uno de los planos originales, que es el efecto de $\kappa_2^i \neq 0$, las ramas que eran simétricas (ramas 1, 3 y 5) pasan a formar nuevas ramas que en general dejan de estar conectadas. A partir de este momento, el nombre de las ramas contenidas en el plano $\{e_1, e_3\}$ empezará con la letra *B* seguida de un número, según su orden de aparición. La procedencia de esas ramas se explica a continuación. Como el problema permanece siendo simétrico con respecto al plano $\{e_1, e_3\}$, las ramas que inicialmente estaban contenidas en su plano perpendicular $\{e_2, e_3\}$ en el caso $\kappa_2^i = 0$ (ramas 2 y 4), serán en este caso totalmente tridimensionales, aunque continúan naciendo en pares simétricos tipo tridente. Estas ramas, junto a las ramas 4a y 4b, conservan el mismo nombre que en el apartado anterior pero en este caso añadiéndole la etiqueta “ $-\kappa_2^i$ ”.

La figura 3.9 muestra las ramas *B1* y *B2*, contenidas en $\{e_1, e_3\}$, y la proyección sobre ese mismo plano de la rama tridimensional $2-\kappa_2^i$. La procedencia de esas ramas desde el caso simétrico es fácilmente reconocible observando las figuras 3.6, 3.7 y 3.8. Efectivamente, tan pronto como la desviación inicial es introducida en el plano $\{e_1, e_3\}$, la bifurcación BP1 se transforma en un pliegue [22, 45], indicado en la figura 3.9 como lp1. Por otro lado, la bifurcación BP2 persiste, simétrica con respecto a $\{e_2, e_3\}$, conectando la rama *B2* con la rama $2-\kappa_2^i$. La figura 3.10-(a) muestra la proyección sobre $\{e_2, e_3\}$ de dicha rama (sólo se muestra una mitad de la rama al ser ésta simétrica).

En Fraser et al. [53], las soluciones 3D sólo aparecen bajo el efecto de la resistencia aerodinámica, que es una fuerza externa que actúa perpendicularmente al eje de la barra. Como se ve en las figuras 3.10, el SET tiene soluciones 3D sin

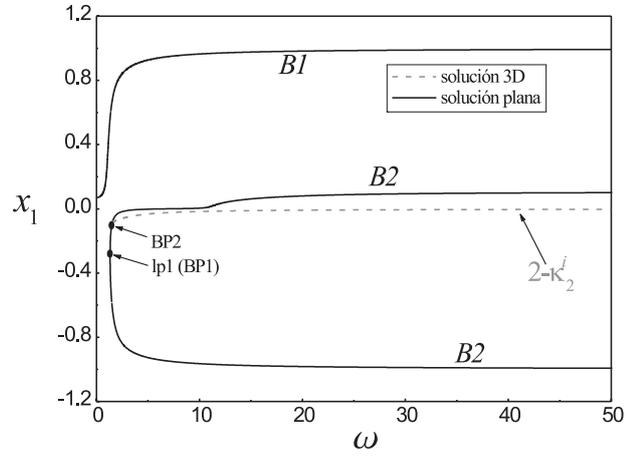


Figura 3.9: Continuación en ω para $\kappa_2^i \neq 0$ de las ramas $B1$ y $B2$. Proyección en el plano $\{e_1, e_3\}$.

Tabla 3.3: Bifurcaciones en las ramas para $\kappa_2^i \neq 0$.

| | |
|--------------------------|----------|
| $B2$ | ω |
| lp1 | 1.32 |
| BP2 | 1.55 |
| $B3$ | ω |
| lp2 | 11.93 |
| BP4 | 11.29 |
| $(4, 4a, 4b)-\kappa_2^i$ | ω |
| lp3-4 | 23.65 |

la acción de fuerzas externas. Probablemente, esta diferencia es debida a que el modelo usado en esta tesis considera la resistencia a torsión y flexión de la barra, mientras que en el trabajo anteriormente mencionado se usa un modelo de cuerda.

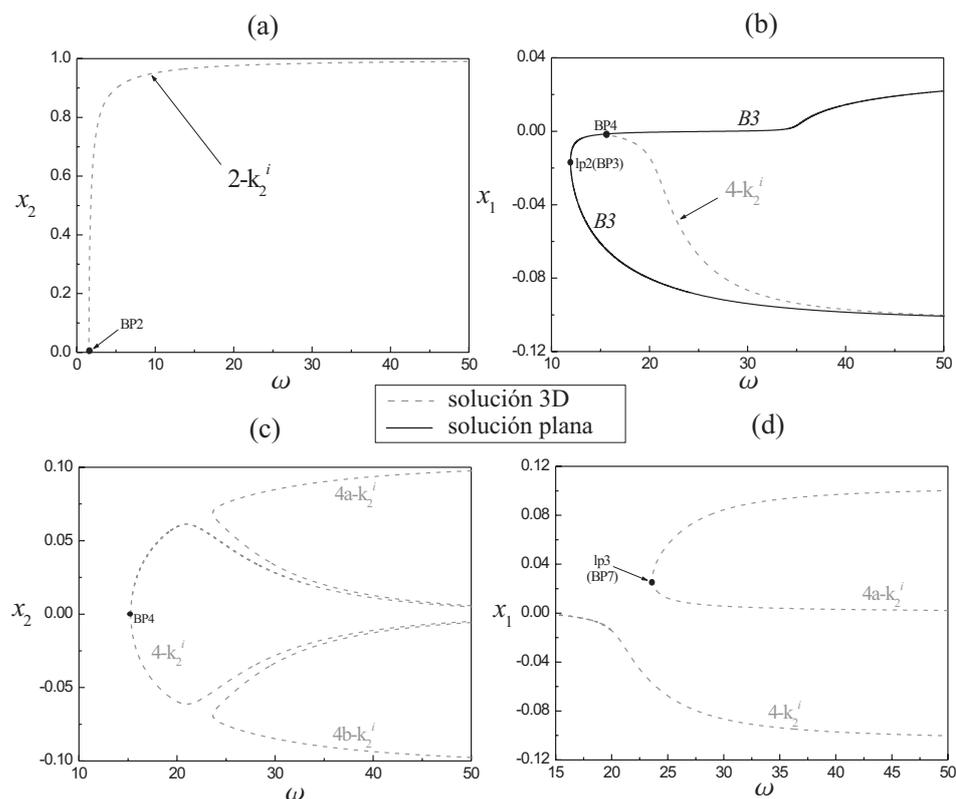


Figura 3.10: (a) Proyección sobre $\{e_2, e_3\}$ de la rama $2-\kappa_2^i$. (b) ramas $B3$ y $4\kappa_2^i$. (c) ramas $4\kappa_2^i$, $4a\kappa_2^i$ y $4b\kappa_2^i$ sobre $\{e_2, e_3\}$. (d) ramas $4\kappa_2^i$, $4a\kappa_2^i$ y $4b\kappa_2^i$ sobre $\{e_2, e_3\}$.

La rama $B3$ está formada por la unión de la mitad negativa de la rama 3 con el segmento recto para el caso $\kappa_2^i = 0$ comprendido entre BP3 y BP5 y con la mitad positiva de la rama 5. En este caso, BP3 se transforma en un pliegue, lp2 en

la figura 3.10-(b), y BP4 persiste, conectando $B\mathcal{B}$ con la rama $4-\kappa_2^i$, que proviene de la rama 4 para $\kappa_2^i = 0$. Además, debido a la rotura de simetría en el plano $\{e_1, e_3\}$, las ramas 4, 4a y 4b se transforman (figuras 3.10-(c) y (d)) en tres ramas diferentes que ya no están interconectadas y que serán referidas como ramas $4-\kappa_2^i$, $4a-\kappa_2^i$ y $4b-\kappa_2^i$.

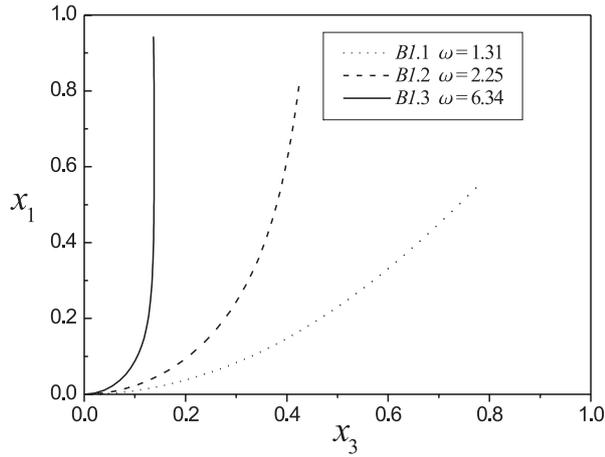


Figura 3.11: Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B1$.

Para cada una de estas ramas mostradas en las figuras, en las que sólo se representa la flecha del contactor, el tether tendrá una forma particular, que como se verá, está asociada directamente con el modo de deformación que se excita en cada caso. Las figuras 3.11 a 3.17 muestran la forma del tether para las distintas ramas y para distintos valores de ω , donde $x_3(s)$ representa la coordenada según e_3 de la línea media del tether. En las figuras 3.11 y 3.12, correspondientes a las ramas $B1$ y $B2$ respectivamente, la forma del tether es equivalente al primer modo de vibración a flexión de una barra empotrada-libre con una masa puntual en su extremo libre. Nótese que las soluciones representadas en ambos casos proceden de la rama 1 para el caso $\kappa_2^i = 0$. Como se dijo en la sección anterior, se espera que las

soluciones correspondientes a la rama 1 sean estables salvo que a lo largo de dicha rama aparezca una bifurcación de Hopf. De esta forma, las formas representadas en las figuras 3.11 y 3.12 serían las que el sistema adoptaría en condiciones de operación. La flecha de las soluciones de la rama $B1$ se disparan tan pronto la velocidad sobrepasa el régimen subcrítico, $lp1 \sim 1.32$, ver tabla 3.3. En el caso de la figura, la flecha en el extremo del tether alcanza del orden del 60% de su longitud para una velocidad $\omega = 1.31$, ligeramente por encima de la crítica. Por lo tanto, estas soluciones, aunque estables como se comprobará en las secciones siguientes, no son admisibles desde el punto de vista de operación correcta del SET. De igual forma, las soluciones estables de la rama $B2$, que como se comprobará se encuentran por debajo del punto $lp1$ (figura 3.9), también serán inadmisibles. Estas soluciones alcanzan su flecha mínima precisamente en el punto $lp1$, que como se ve en la figura, aproximadamente indican una flecha del orden del 30% de la longitud del tether para una velocidad muy poco por encima de la velocidad crítica.

En la figura 3.13, las formas del tether se corresponden con el segundo modo de vibración de la configuración anteriormente mencionada. Por su parte, en la figu-

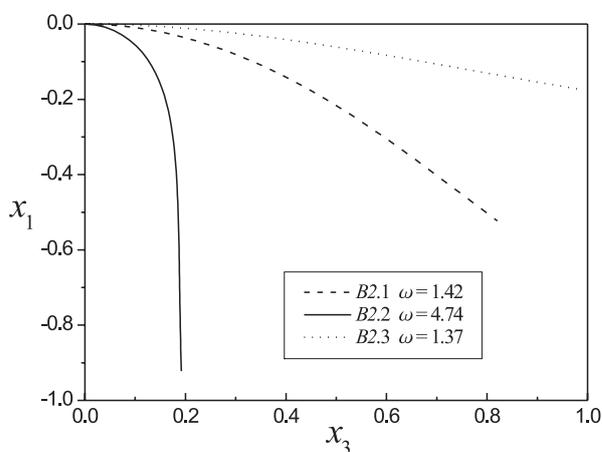


Figura 3.12: Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B2$.

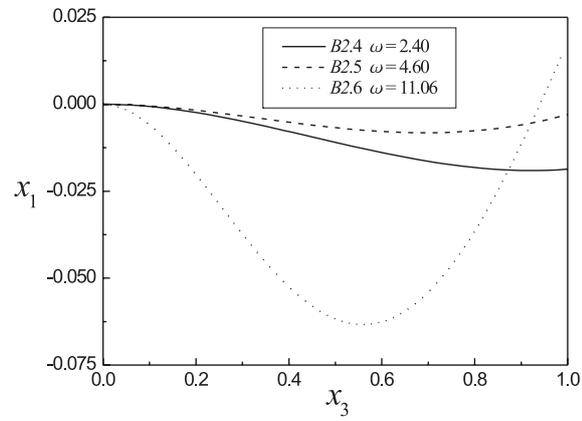


Figura 3.13: Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B2$.

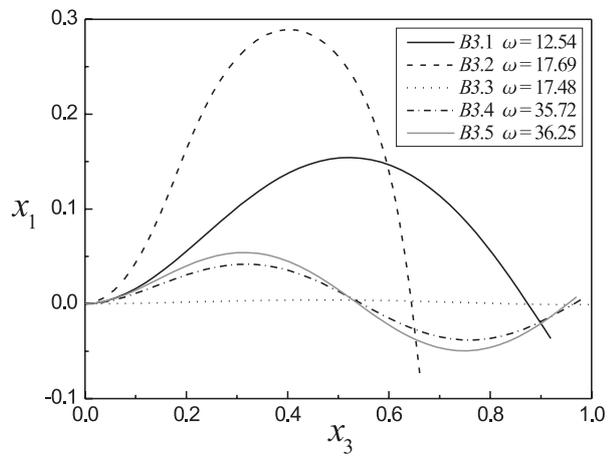


Figura 3.14: Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B3$.

ra 3.14 se tienen el segundo y tercer modos. La aparición de dos modos distintos, tanto en la rama $B2$ como en la $B3$, es debida a que estas ramas están formadas por distintos trozos de rama original del caso $\kappa_2^i = 0$.

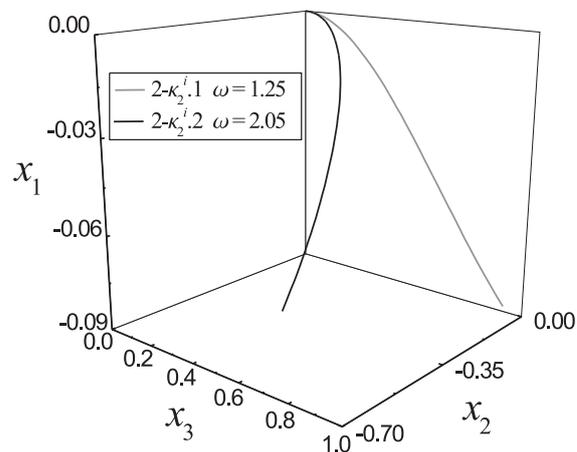


Figura 3.15: Formas tridimensionales del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $2-\kappa_2^i$.

Hasta el momento, todas las formas representadas en las figuras 3.11 a 3.14 son *soluciones planas* contenidas en $\{e_1, e_3\}$. En el modelo tipo barra propuesto en la presente tesis, las *soluciones tridimensionales* (fuera del plano $\{e_1, e_3\}$) aparecen en total ausencia de fuerzas externas, como se puede ver en las figuras 3.15 a 3.17, a diferencia del modelo propuesto por Fraser et al. [53]. En estos casos, las formas del tether son similares a las del caso plano pero con un carácter tridimensional.

A lo largo de las figuras 3.11 a 3.17, el tether adopta formas en las que se producen grandes desplazamientos por deformación, llegando a reproducir flechas de hasta el 90% de su longitud. En cualquier caso, estas formas están dentro de las hipótesis del modelo, ya que las deformaciones locales, que son las que se restringen en el modelo de Kirchhoff-Love [52, 82], se mantienen acotadas y las grandes deformaciones globales son debidas a los desplazamientos y giros de las

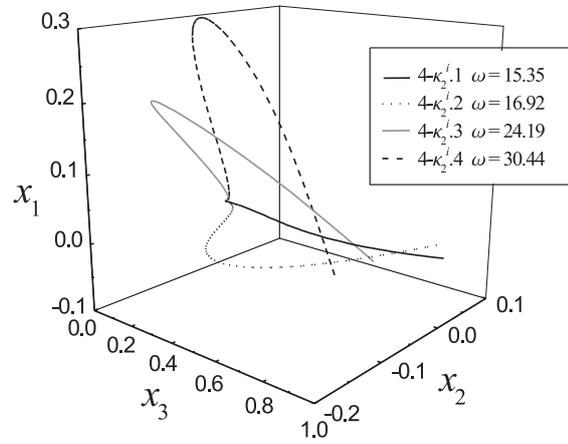


Figura 3.16: Formas tridimensionales del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $4-\kappa_2^i$.

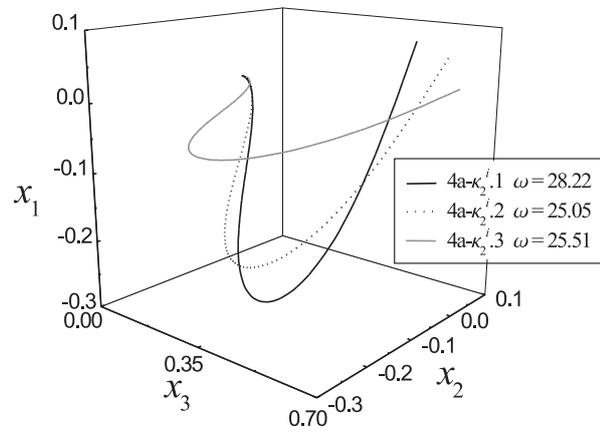


Figura 3.17: Formas tridimensionales del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $4a-\kappa_2^i$.

distintas secciones de la barra.

3.3.5. Estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias,

$$\kappa_2^i = 0$$

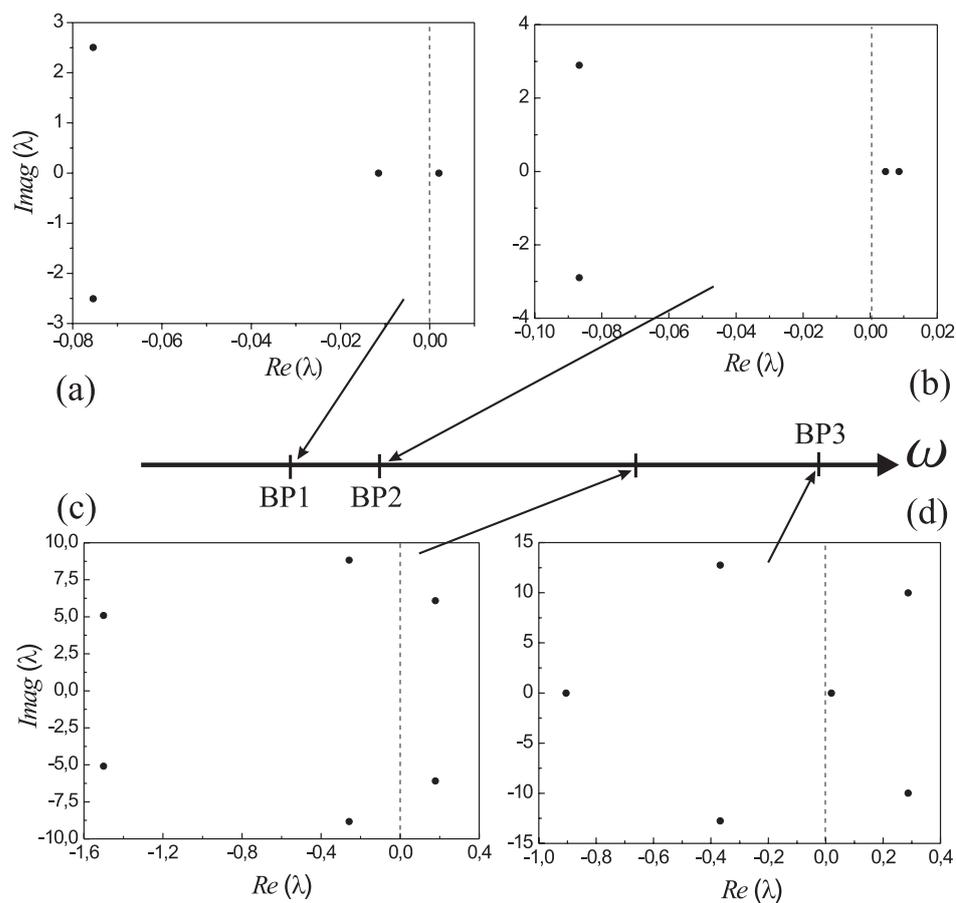


Figura 3.18: Evolución de los autovalores con mayor parte real a lo largo de la solución trivial para $\kappa_2^i = 0$ desde $\omega = 0$ a BP3.

En este análisis, se va a mostrar en primer lugar la evolución de los autovalores para la solución trivial, donde aparecen las bifurcaciones de tridente BP1 a BP6.

Esto ayudará a comprender con mayor facilidad la evolución de los autovalores en el caso real, cuando $\kappa_2^i \neq 0$. En la situación inicial, es decir, tether recto y velocidad $\omega = 0$, los autovalores son todos conjugados con parte real negativa. En el caso conservativo, sin amortiguamiento, los autovalores también serían conjugados pero esta vez con parte real nula. Estarían colocados por parejas en el eje imaginario, como corresponde a los sistemas Hamiltonianos. Como se muestra en la figura 3.18, la solución trivial es estable hasta que ω alcanza el valor BP1, donde tiene lugar una bifurcación de tridente y como adelanta la teoría de sistemas dinámicos [22], un autovalor real cruza el eje imaginario a través del cero. El mecanismo que siguen los autovalores en este tipo de bifurcación comienza por la colisión de dos autovalores conjugados. Tras esta colisión sobre el eje real, uno de los autovalores aumenta su parte real (el que a la postre cruza el semiplano) mientras que el otro la disminuye, viaja en la dirección opuesta. La descripción del proceso comienza en la figura 3.18 a partir de la colisión y posterior separación de los autovalores. En el panel (a) de la figura 3.18, se muestra la situación de los autovalores justo después del punto BP1. A medida que se aumenta el valor del parámetro de continuación, ω , hacia el valor BP2, el autovalor que viajaba en dirección opuesta al semiplano real positivo invierte su tendencia y comienza un movimiento de aproximación hacia éste. Justo en el punto BP2, este autovalor cruza, al igual que su gemelo (su conjugado al principio), al semiplano real positivo. Ésta es la bifurcación de tridente secundaria. Las bifurcaciones BP1 y BP2, en realidad, representan el mismo fenómeno pero con cierto desfase, propiciado por la diferencia de inercias que existe en la sección, dos direcciones preferentes, que como se vio en la sección anterior, dan lugar a deformaciones en dos planos perpendiculares entre sí. En el caso de sección circular, no existe una dirección preferencial para que la barra bifurque. Este caso se mostró cuando se estudió el modelo de Jeffcott (figura 2.15), donde las dos bifurcaciones, BP1 y BP2, se funden en una sola. En el caso de sección isótropa, el sistema presenta una mayor degeneración en la bifurcación, lo que matemáticamente se pone de manifiesto por el paso simultáneo de dos

autovalores reales por el cero. En este caso, el eje tiene un continuo de soluciones a el que tender, es decir, se queda indeterminada la dirección en que se deformará. Físicamente, este efecto ocurre, por ejemplo, en un lápiz con punta afilada que se coloca perpendicular a la mesa. Bajo la única acción de la gravedad, el lápiz puede caer en cualquier dirección. Esto se denomina rotura espontánea de simetría. Sin embargo, cuando la sección es ortótropa la dirección de deformación de la barra está determinada. Este efecto también se puede entender apelando a las simetrías del sistema. En el caso isótropo, existe un eje de simetría del problema, e_3 . Esta simetría, representa una degeneración en las ecuaciones mayor que la simetría que presenta el problema ortótropo, es decir, dos planos de simetría preferenciales. El panel (b) de la figura 3.18 representa un valor del parámetro de continuación ligeramente mayor que BP2.

Entre BP2 y BP3, los dos autovalores que están en la zona inestable vuelven a colisionar, esta vez en el semiplano real positivo, y se vuelven complejos conjugados como se muestra en la figura 3.18-(c) para un valor de $\omega = 7.4562$. En las bifurcaciones que aparecen para mayores valores de ω , que vuelven a aparecer por parejas, BP3-BP4 y BP5-BP6, el mecanismo de variación de los autovalores es equivalente al descrito anteriormente (figuras 3.18 y 3.19).

Siguiendo los equilibrios de la rama 1 desde BP1, se esperan soluciones estables, como se apuntó anteriormente, debido al tipo de bifurcación. Efectivamente, en una tridente supercrítica [22], la solución antes de la bifurcación, que es única y estable, pierde la estabilidad, como se ha demostrado mediante las figuras 3.18 y 3.19, en favor de las nuevas soluciones emergentes. La figura 3.20 muestra como los autovalores de la rama 1 están situados en el semiplano real negativo para distintos valores de ω , cada vez mayores y más lejanos de BP1.

La computación de los autovalores se ha detenido en esta rama para valores $\omega \sim 20$. Para estos valores de la velocidad, la flecha del contactor es $x_1 \sim 0.98$. Esto significa que el tether está prácticamente paralelo al eje e_1 , lo que implica que los valores de la curvatura, momentos y fuerzas internas y sus gradientes cerca del

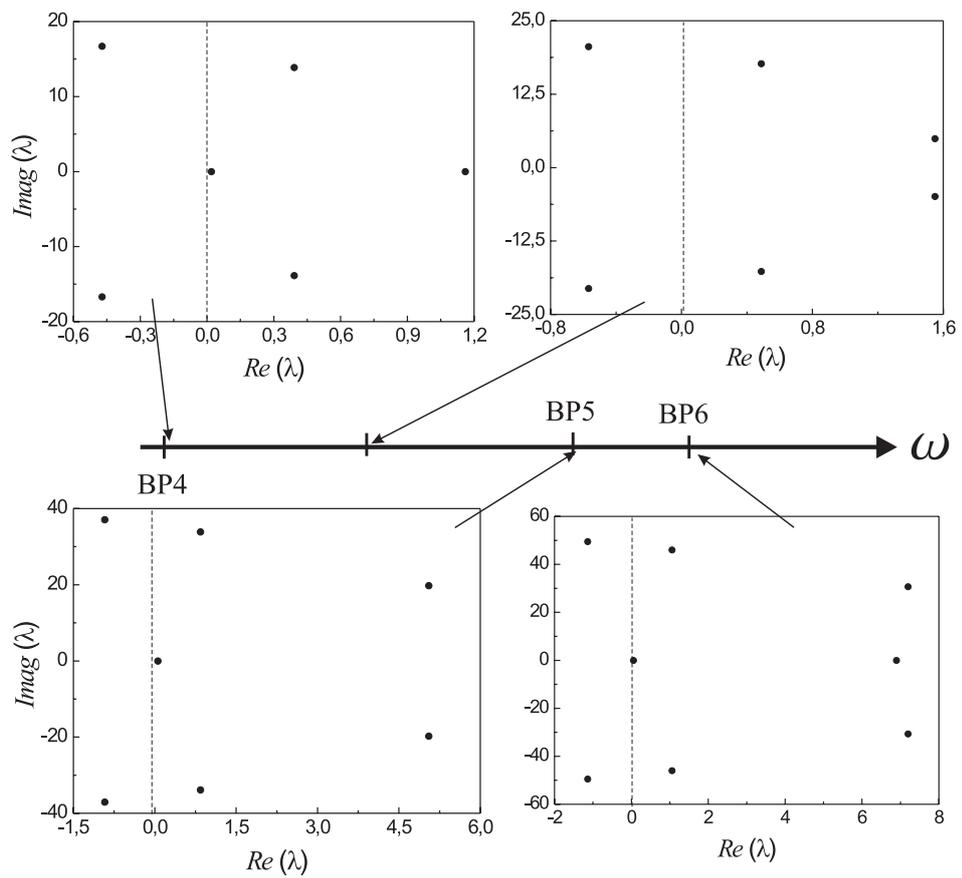


Figura 3.19: Evolución de los autovalores con mayor parte real a lo largo de la solución trivial para $\kappa_2^i = 0$ desde BP4 a BP6.

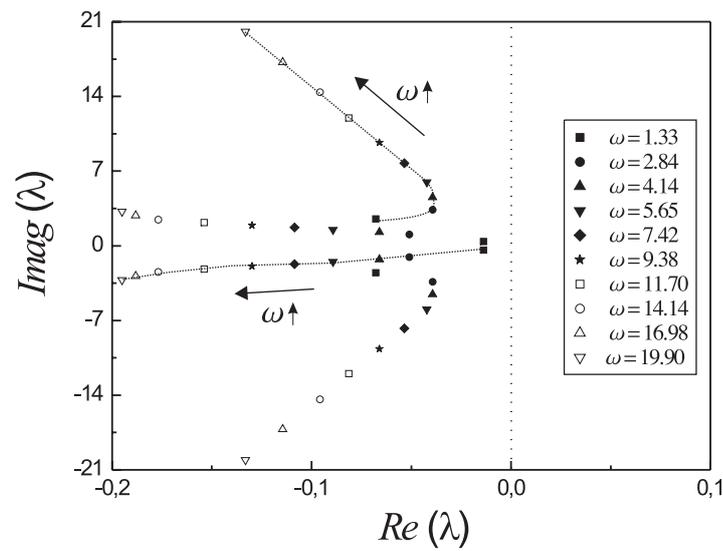


Figura 3.20: Evolución de los cuatro autovalores con mayor parte real a lo largo de la rama 1. La línea de puntos, que representa la evolución de los autovalores al variar ω , es ficticia.

empotramiento, $s = 0$, son muy altos (figuras 3.11 y 3.12). En tales condiciones, se ha encontrado que el esquema de diferencias finitas usado para resolver el problema de $O(\delta)$ tiene problemas de convergencia con respecto al número de puntos de discretización utilizados, N . En los cálculos mostrados en las figuras 3.18, 3.19 y 3.20, el método converge típicamente para valores $N \sim [130 - 160]$, dependiendo del tamaño de los gradientes a lo largo del tether en cada caso. A modo de aclaración, se recuerda que mediante las diferencias finitas se busca aproximar las derivadas o gradientes de las variables. Cuanto mayores y más cambiantes sean estos en función de s , más difícil será obtener una buena aproximación. Dicho esto, será más sencillo comprender la razón por la cual, el método usado no converge hacia un resultado único e independiente de N , cuando el tether adopta configuraciones de alta deformación, como la nombrada anteriormente.

Tan pronto como los gradientes anteriormente señalados aumentan, es necesario disminuir el tamaño de la malla en la discretización. Pero este tamaño tiene un límite por debajo del cual, el método numérico propaga los errores con gran rapidez y falla. Efectivamente, se puede demostrar [90], que el límite superior (solución aproximada) que acota la solución real de un problema diferencial resuelto mediante diferencias finitas es inversamente proporcional al tamaño de la malla y directamente proporcional al error de redondeo de la aproximación. De esta forma, aunque el error de redondeo sea pequeño, es posible, para cierto valor de la longitud del intervalo y por debajo de éste, que la solución obtenida sea errónea, ya que el límite superior anteriormente mencionado se dispara. En las condiciones en que el método falló en la rama 1, se tenían unos gradientes tan altos que la discretización debía ser demasiado fina, tanto que propagaba los errores (“dilema de la elección del tamaño de malla”). Por lo tanto, es imposible llegar a un compromiso entre una buena aproximación de los gradientes (reducción de los intervalos) y la no propagación de errores en estas condiciones. De esta forma, aunque se aumente el número de nodos N , la solución no converge a un valor fijo.

Dicho esto, se puede afirmar que la rama 1 es estable como mínimo hasta $\omega \sim$

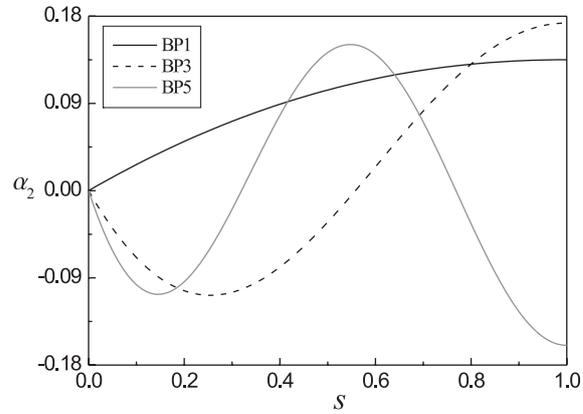


Figura 3.21: Formas de las autofunciones para tres bifurcaciones de tridente consecutivas (BP1, BP3 y BP5) en el plano $\{e_1, e_3\}$.

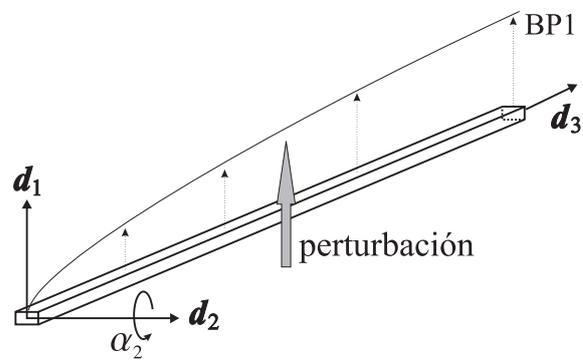


Figura 3.22: Modo de desestabilización de la solución trivial en BP1, desplazamientos en el plano $\{e_1, e_3\}$.

20, ya que no se encontraron evidencias de bifurcaciones de Hopf hasta este valor. A partir de este valor aproximado de la velocidad, para el cual el método numérico falla, es aventurado predecir el comportamiento de los autovalores, aunque no sería extraño que una de estas bifurcaciones de Hopf apareciera para altas velocidades. Como se ha indicado antes, no existe un valor fijo de ω para el cual el método empiece a fallar, ya que este fallo depende de muchos factores. Lo mostrado para la rama 1 puede ocurrir para cualquier otra rama. Por tanto, es necesario analizar la convergencia del método durante el análisis de estabilidad de cualquier rama, siendo inapropiado dicho análisis cuando falle la convergencia.

La figura 3.21 muestra la forma de las autofunciones asociadas a los autovalores que cruzan a través del cero en BP1, BP3 y BP5. Estas autofunciones representan la forma que tendría la perturbación que se superpone sobre la solución cuasi-estacionaria del tether para analizar su estabilidad. Al corresponderse estas autofunciones con autovalores cuya parte real tiende a ser positiva, proporcionan, aproximadamente, la forma en que el tether se desestabiliza al aplicar una perturbación sobre una solución cuasi-estacionaria inestable, en un entorno cercano a dicha solución. En el caso representado en la figura 3.21, existe una rotación alrededor de \mathbf{d}_2 ($\alpha_2 \neq 0$), que es paralelo a \mathbf{e}_2 a lo largo de todo el tether para la solución trivial, la cual induce desplazamientos de la barra en su plano perpendicular $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ (figura 3.22). De forma equivalente, se pueden explicar las bifurcaciones BP2, BP4 y BP6, correspondiéndose en este caso el autovalor inestable con $\alpha_1 \neq 0$.

3.3.6. Estabilidad de las soluciones cuasi-estacionarias,

$$\kappa_2^i \neq 0$$

En el caso $\kappa_2^i = 0$, se ha confirmado que una de las ramas que evoluciona en la zona supercrítica es estable, la rama 1. En este apartado, se va a analizar cómo afecta la rotura de simetría sobre la estabilidad de las ramas. En particular, se va a mostrar la evolución de los autovalores a lo largo de las ramas *B1* y *B2*. El resto de ramas será inestable ya que proceden de bifurcaciones de tridente supercríticas

posteriores a BP1 del caso $\kappa_2^i = 0$.

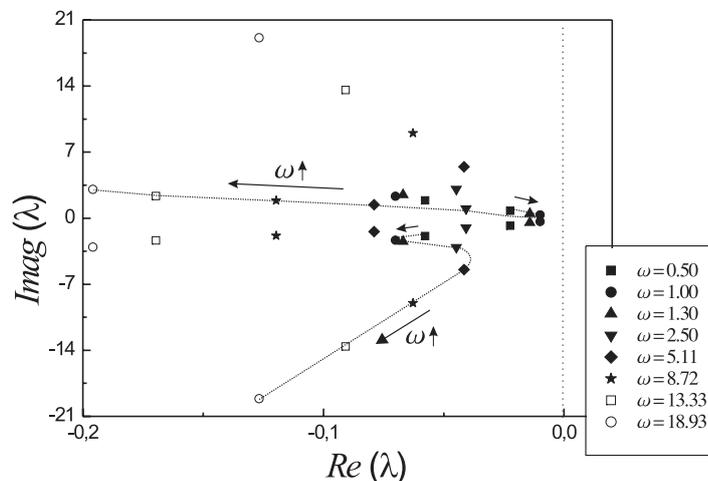


Figura 3.23: Evolución con ω de los autovalores con parte real mayor a lo largo de la rama $B1$.

La figura 3.23 muestra la evolución de los autovalores a lo largo de la rama $B1$. Antes de $\omega \sim lp1$ (figura 3.9), una pareja de autovalores conjugados se aproxima al eje imaginario de forma equivalente a como ocurría en el tramo $\omega \in [0, BP1]$ de la solución trivial. Como se mencionó en las secciones anteriores, el punto $lp1$ se corresponde con el desdoblamiento que sufre la bifurcación BP1 al introducir la desviación inicial, $\kappa_2^i \neq 0$. Aproximadamente en $\omega \sim lp1$, estos autovalores cambian de sentido y comienzan a viajar hacia la izquierda en el semiplano real negativo, ahora siguiendo una evolución equivalente a la de los autovalores del caso $\kappa_2^i = 0$ en la parte superior de la rama 1. En cualquier caso, la nueva rama $B1$ evoluciona según lo hacían las ramas de las que procede, por lo que la introducción de $\kappa_2^i \neq 0$ no parece que afecte demasiado sobre el comportamiento de los autovalores. De esta forma, se puede afirmar que también en este caso, que por otro lado es el más cercano al comportamiento real del SET, existen soluciones estables en la zona supercrítica.

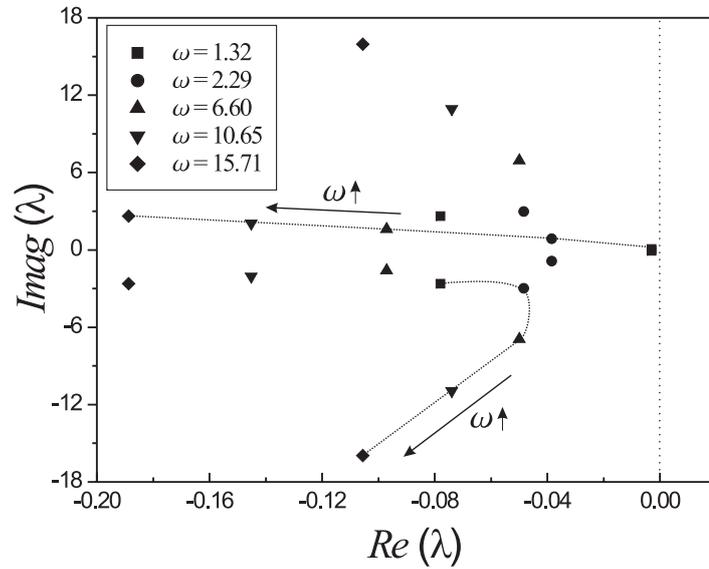


Figura 3.24: Evolución con ω de los autovalores con parte real mayor a lo largo de la rama $B2$, bajo $lp1$.

La figura 3.24 muestra la evolución de los autovalores en la porción de la rama $B2$ que nace en $lp1$ y tiene amplitudes mayores (porción inferior de la rama). El análisis se ha detenido en $\omega \sim 16$ por problemas de convergencia. En $lp1$ ($\omega = 1.32$) el par de autovalores conjugado está casi sobre el eje imaginario. Al evolucionar a lo largo de este tramo de la rama, estos autovalores se alejan del eje imaginario, viajando hacia la izquierda, de forma análoga a como lo hacían en el caso $\kappa_2^i = 0$, por el tramo inferior de la rama 1. Por lo tanto, se puede afirmar que al menos, hasta $\omega \sim 16$, esta rama es estable. Por otro lado, la figura 3.25 muestra la evolución de los autovalores de la porción de rama $B2$ que nace en $lp1$ y tiene amplitudes menores (porción superior de la rama). En la transición entre las dos partes en que se ha dividido la rama, $lp1$, una pareja de autovalores conjugados colisiona, se vuelve real, y uno de ellos cruza el eje imaginario a través del zero. Entre $lp1$ y $BP2$ el autovalor que permanecía en el semiplano real negativo

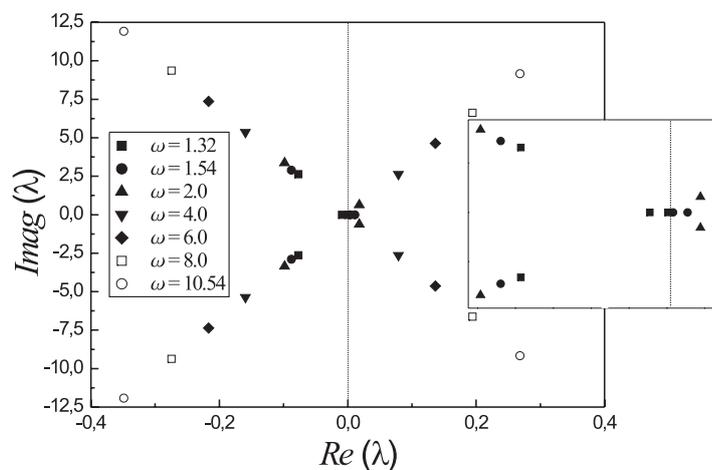


Figura 3.25: Evolución con ω de los autovalores con parte real mayor a lo largo de la rama $B2$, sobre $lp1$.

también se aproxima al eje imaginario, cruzándolo exactamente en el punto BP2, correspondiente a la bifurcación secundaria de BP1 en el caso $\kappa_2^i = 0$. A partir de aquí, los dos autovalores que en este momento se encuentran en el semiplano real positivo chocan en el eje real y se vuelven un par conjugado. En cualquier caso, este tramo de la rama $B2$ es inestable.

Como se explicó en el apartado 2.2, la teoría lineal de rotores predice comportamiento inestable para velocidades supercríticas, que en el caso que se está estudiando sería $\omega_{crit} = 1.14$. Como se ha visto en los resultados mostrados en esta sección, figuras 3.20, 3.23 y 3.24, las soluciones parecen ser estables si la no-linealidad geométrica del tether se tiene en cuenta como un factor importante en la dinámica del SET. Ya se pudo ver este resultado en el modelo simplificado de Jeffcott, sin embargo, es ahora cuando, salvo para los valores en los que el método numérico falla, se puede afirmar rotundamente que el SET tiene soluciones estables para velocidades supercríticas.

3.3.7. Funcionamiento del SET en condiciones reales de operación

Como se apuntó en la introducción de esta tesis, cuando se describía el SET, la velocidad de rotación de spin, ω_{spin} , que se debe aplicar al sistema para estabilizarlo giroscópicamente es del orden de 28 veces su primera frecuencia natural de flexión, en términos de velocidad adimensional ω_c , $\omega_{spin} = 43\omega_c$. Analizando los diagramas de bifurcación trazados en los apartados anteriores, se observa que para tan altas velocidades de rotación, la solución estable es inadmisibles desde el punto de vista de operación del sistema. Efectivamente, en estos casos, la flecha del contactor es del orden de 0.95 veces la longitud del tether (figuras 3.11 y 3.12), lo que significa que el sistema está totalmente alejado de la configuración recta, que es la óptima para que el SET interacte correctamente con las líneas de campo magnético de la Tierra. En estas condiciones, la operación del SET es imposible, por lo que aun siendo estas soluciones estables, no son admisibles desde un punto de vista operacional. En este apartado, se van a mostrar posibles soluciones que hagan que la flecha del tether sea menor en las condiciones de operación, siempre actuando sobre los parámetros del sistema, que modifican la geometría, etc. De esta forma, fijando la velocidad del sistema y a partir de las soluciones obtenidas en los diagramas de bifurcación cuyo parámetro de continuación era ω , se van a variar los demás parámetros del sistema, ver (3.69) y (3.76)-(3.79), para observar la influencia que tienen sobre la flecha final del sistema. Las continuaciones sobre los parámetros r_m , r_1 , r_2 y r_3 evidencian la poca influencia que estos tienen sobre la flecha final del contactor. En dichos diagramas, la flecha permanece prácticamente constante ante grandes cambios del parámetro. De esta forma, se descarta su variación para el re-diseño del SET. Los correspondientes diagramas de bifurcación no se muestran ya que no aportan ningún dato de interés. Por otro lado, los parámetros

$$Q = \frac{A_s l^2}{I_1}, \quad P = \frac{l m_d}{\rho I_1}, \quad (3.149)$$

sí mostraron gran influencia sobre la flecha final del extremo del tether-contactor. Siendo la inercia de la sección I_1 proporcional al área de la sección por su radio de giro, el parámetro Q está relacionado con la inversa de la longitud de pandeo del tether. Por su parte, el parámetro P relaciona la masa del contactor con el momento de inercia de la sección del tether. Ambos parámetros resultaron tener gran influencia sobre la flecha final del contactor para una velocidad de spin fijada. La figura 3.26 muestra la evolución de la flecha del contactor frente a P para $\omega = 43$ constante. Para la geometría real del SET descrita en la introducción de esta tesis, dicho parámetro tiene un valor $P = 1.264 \times 10^8$, siendo este el punto de partida del diagrama de bifurcación mostrado en la figura. En la parte derecha de la figura 3.26, se muestra la forma del tether para tres valores característicos: $P_1 = 1.460 \times 10^8$, $P_2 = 1.597 \times 10^{11}$ y $P_3 = 9.734 \times 10^{11}$. Nótese, que aumentando P desde su valor original hasta P_2 , es decir, 1260 veces mayor, la flecha se reduce prácticamente hasta la mitad. En el punto P_3 , donde el valor de la constante es 7700 veces el original, la flecha se reduce a prácticamente la deformación inicial que era de 7 m.

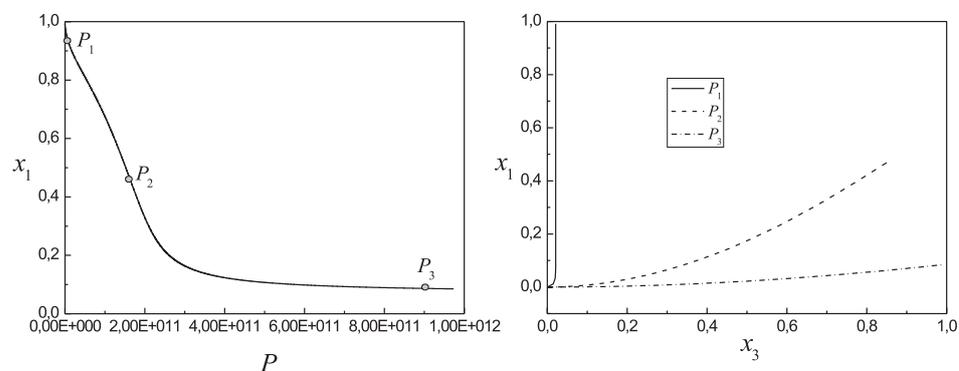


Figura 3.26: Evolución de la flecha del contactor frente a P y formas del tether para $\omega = 43$.

La figura 3.27 muestra la evolución de la flecha del contactor frente a Q para

$\omega = 43$ constante. Para la geometría real del SET, dicho parámetro tiene un valor $Q = 1.445 \times 10^8$, siendo éste el punto de partida del diagrama de bifurcación. Como se puede observar en la figura, la flecha disminuye cuando el parámetro Q disminuye. En la parte derecha de la figura se representan las formas del tether para distintos valores del parámetro: $Q_1 = 6.740 \times 10^7$, $Q_2 = 3.963 \times 10^6$, $Q_3 = 2.3827 \times 10^5$, $Q_4 \sim 0$. Entre los valores Q_1 y Q_2 , donde se reduce el parámetro del orden de 17 veces, la disminución de la flecha es inapreciable, sin embargo, entre Q_1 y Q_3 , con una reducción del parámetro del orden de 285 veces, la flecha pasa de un valor $x_1 = 0.98$ a $x_1 = 0.78$, aproximadamente.

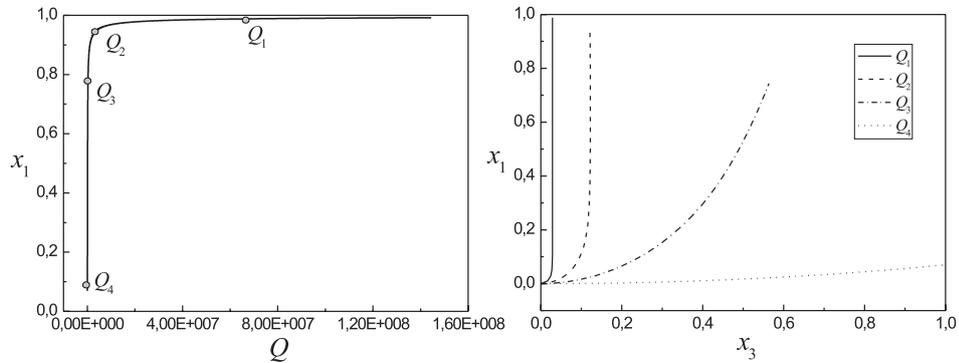


Figura 3.27: Evolución de la flecha del contactor frente a Q y formas del tether para $\omega = 43$.

En los dos casos mostrados, la flecha inicial de la que se parte, para $\omega = 43$, es del orden de $x_1 = 0.985$, lo que resulta bastante desfavorable. De esta forma es necesaria una gran variación de los parámetros para obtener una disminución apreciable de la flecha. Las figuras 3.28 y 3.29 muestran diagramas equivalentes a aquellos mostrados en 3.26 y 3.27 para una velocidad supercrítica mucho menor, $\omega = 2$. En ambos casos, el efecto del aumento o disminución de los parámetros se refleja en una variación más apreciable de la flecha final. Los valores característicos para los que se han representado las correspondientes formas del tether son en el

primer caso (figura 3.28): $P_1 = 1.9849 \times 10^8$, $P_2 = 3.1821 \times 10^9$, $P_3 = 4.8629 \times 10^9$ y $P_4 = 5 \times 10^9$, y en el segundo (figura 3.29): $Q_1 = 1.4277 \times 10^8$, $Q_2 = 8.1611 \times 10^7$ y $Q_3 = 1.65 \times 10^7$. Como se puede observar, la variación de los parámetros no es tan drástica como en el caso $\omega = 43$ y sin embargo la flecha del contactor varía apreciablemente.

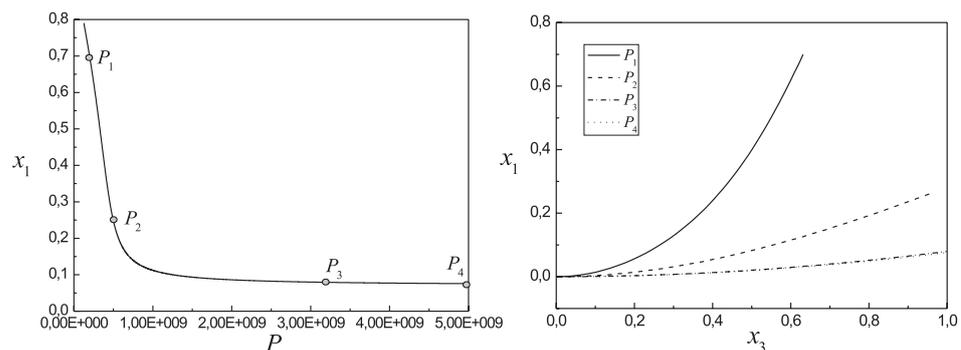


Figura 3.28: Evolución de la flecha del contactor frente a P y formas del tether para $\omega = 2$.

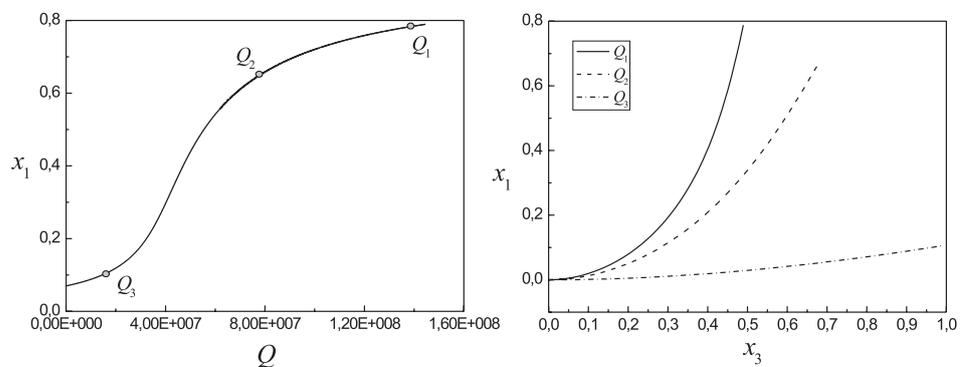


Figura 3.29: Evolución de la flecha del contactor frente a Q y formas del tether para $\omega = 2$.

Capítulo 4

Influencia de las fuerzas de Lorentz sobre el SET

En este capítulo, se va a estudiar la influencia de la componente no deseada de las fuerzas de Lorentz sobre el SET (términos cruzados en la expresión (1.24) de la introducción). De esta forma, se pretende conocer a fondo cómo interacciona esta fuerza con el tether y además justificar la no inclusión de dichas fuerzas en el modelo de Cosserat del SET llevado a cabo en el capítulo anterior. En la introducción de esta tesis se habló sobre las sollicitaciones principales a las que está sometido el SET, la rotación de spin y las fuerzas de Lorentz. En el capítulo anterior, se estudió la dinámica del SET bajo la acción de la rotación de spin a que está sometida la estructura. De esta forma, se obvió la presencia de la fuerza de Lorentz. En este capítulo, se va a estudiar la influencia de la componente no deseada de la fuerza de Lorentz sobre el sistema tether sin velocidad de spin y con ella. De esta forma, se pretende complementar el estudio del capítulo anterior y reforzar su validez. En cuanto a la componente de frenado de la fuerza de Lorentz, su influencia se estudiará en el siguiente capítulo, donde se lleva a cabo un modelo MSD del SET.

Es bien conocido, que un filamento conductor de corriente que se mantiene tenso entre los dos polos de un imán (figura 4.1), pandea desde la posición recta inicial hasta una configuración aproximadamente helicoidal, cuando se supera cierta corriente crítica. Una fotografía de dicho fenómeno se puede encontrar en la Sección 10.4.3 del libro de Woodson y Melcher [91], donde además se lleva a cabo un análisis de estabilidad lineal de dicho fenómeno, estando el filamento modelado como un cable. El problema fue estudiado en primera instancia por Wolfe [92], el cual realizó un riguroso estudio sobre el sistema modelando el filamento como un cable geoméricamente no-lineal suspendido entre dos apoyos fijos y colocado en el seno de un campo magnético uniforme paralelo al filamento en su configuración indeformada. En dicho estudio, se muestra como de la solución trivial (filamento recto indeformado) bifurcan infinitas ramas de soluciones, como ocurre por ejemplo en el problema del pandeo a compresión de la viga de Euler. En este caso, las soluciones no-triviales que aparecen en las ramas que bifurcan de la solución trivial son hélices perfectas. Esto es debido a que la fuerza de volumen (Lorentz) es normal en todo momento al filamento deformado a lo largo de toda su longitud, de

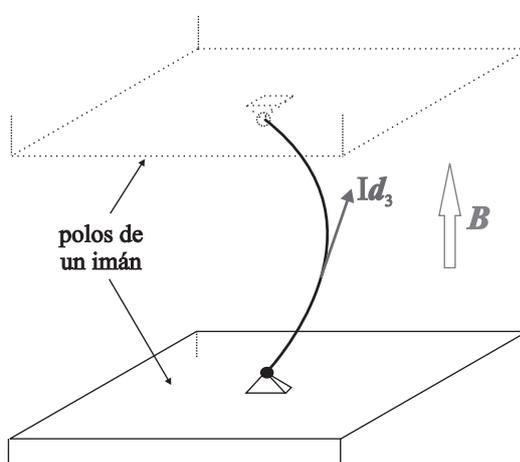


Figura 4.1: Montaje experimental del hilo conductor, Woodson y Melcher [91].

forma que dicho filamento debe alcanzar un estado de tensión uniforme, que es el que aparece en una hélice [47, 49, 48, 93]. Además, en este trabajo, se obtuvieron algunos resultados de estabilidad (estática, ya que no existe ninguna excitación dinámica sobre el sistema) que indicaban que la primera rama de soluciones es estable, siendo el resto de ramas inestable.

En un trabajo posterior del mismo autor [94], el estudio se extendió al caso en el que el filamento es girado a velocidad angular constante alrededor de su eje longitudinal. De nuevo, modelando el filamento como un cable, se encontraron soluciones no-triviales que giraban a la velocidad angular prescrita. Estos resultados fueron extendidos por Healey [93], el cual usó teorías de bifurcación equivariante para tratar con las simetrías del problema, en el caso de un filamento-cable de sección isótropa.

Wolfe [95] también estudió el mismo problema del filamento, pero modelándolo como una barra, es decir, las rigideces a flexión y torsión del filamento cobran importancia. Bajo condiciones de contorno de biempotramiento encontró bifurcaciones sobre la solución trivial, de nuevo obteniendo un número infinito de ramas de equilibrio, como en el caso del modelado tipo cable [92]. Estas soluciones no-triviales del modelo sólo se dan en el caso en el que el material se considera inelástico. En cualquiera de los casos, todos los trabajos citados anteriormente, demuestran la existencia de soluciones postcríticas pero no estudian el comportamiento postcrítico del sistema, es decir, formas y estabilidad de las soluciones.

En el caso del SET, el tether hace las veces de filamento conductor de corriente, mientras ciertas componentes del campo geomagnético representan el campo magnético uniforme del experimento citado en la figura 4.1. Como se ha recalcado a lo largo de esta tesis, las rigideces a flexión y torsión del tether son vitales para su correcto funcionamiento, de forma que los modelos tipo cable anteriormente citados [92, 93, 94] no son apropiados en el caso del SET. Además, el SET está sujeto a una continua rotación de spin, en la misma forma en que Wolfe [94] introdujo dicha rotación en su modelo tipo cable. Por lo tanto, el modelo tipo barra sujeto a

rotación de spin no ha sido tratado en la literatura, lo que le confiere cierto interés científico, sumado por supuesto al objetivo final de esta tesis, que no es más que conocer la dinámica del SET de una forma lo más próxima posible a la realidad.

Como se vio en la introducción, el tether no será perpendicular al campo geomagnético en todo momento. Esta imperfección del sistema fue modelada introduciendo el término B_2 en la expresión del campo geomagnético dada por (1.23). Además el tether no es un elemento recto, sino que sufre deformaciones como se ha demostrado en los capítulos anteriores. De esta forma, la expresión final de la fuerza de Lorentz sobre el sistema tether presentado en la figura 1.11 viene dada, al igual que en la expresión (1.24) de la introducción, por

$$d\mathbf{F} = I \left(\frac{\partial Y}{\partial s} B_2 - \frac{\partial Z}{\partial s} B_1, -\frac{\partial X}{\partial s} B_2, \frac{\partial X}{\partial s} B_1 \right)^T ds, \quad (4.1)$$

donde $B_1 \gg B_2$. Los símbolos en la ecuación anterior conservan el mismo significado que en el capítulo de introducción. En condiciones ideales, el tether permanecería recto y la imperfección $B_2 = 0$, de forma que el término $-\frac{\partial Y}{\partial s} B_1 I ds$ según la dirección \mathbf{k} de avance del sistema se opone al movimiento y frena como se pretendía (componente deseada de la fuerza de Lorentz). Por otro lado, el término B_2 (paralelo al tether indeformado como el campo magnético del experimento de la figura 4.1) en las direcciones \mathbf{i} y \mathbf{j} tendería a enrollar el tether en una configuración cuasi-helicoidal, según indican los estudios anteriormente mencionados [92, 94, 95, 93]. Además, este comportamiento ha sido observado en varias configuraciones tether en órbita [2, 1].

En este capítulo se va a estudiar la influencia de la componente B_2 (paralela al tether) del campo geomagnético sobre un sistema TE. Dicho TE podrá encontrarse en reposo con respecto al sistema inercial $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (figura 4.2), o sometido a una velocidad de spin $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. En el primer caso, se tiene un problema puramente estático, sin embargo, en el caso del spinning tether el problema es dinámico.

En cuanto a las condiciones de contorno, se va a suponer que los módulos que se encuentran situados en ambos extremos del tether tienen una masa lo suficientemente grande, con respecto a la de éste como para poder considerarlos

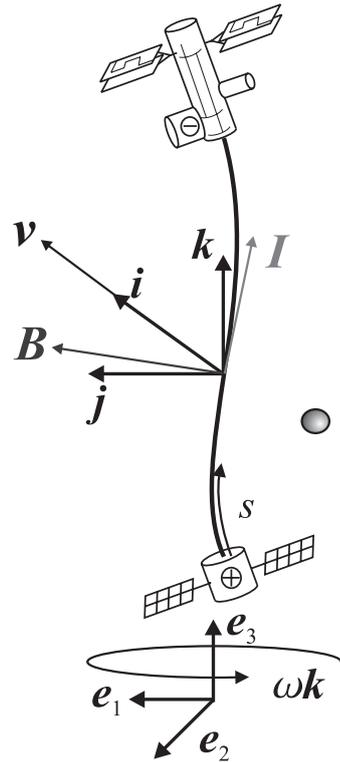


Figura 4.2: Interacción de un TE con el campo geomagnético.

fijos con respecto al sistema inercial $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ en el caso estático, y rotando a la velocidad de ω en el caso del spinning tether (figura 4.2). Esta suposición es común en los sistemas tether radialmente estabilizados [2, 1]. En el caso del SET, el módulo central se ha considerado fijo en los ejes inerciales en todos los modelos que se han formulado anteriormente en esta tesis. Por otro lado, el contactor tendrá un movimiento bastante apreciable, como se mostró en el capítulo 3. Sin embargo, la condición de contorno derivada del acoplamiento tether-contactor es demasiado compleja, de forma que se ha decidido imponer que la posición del contactor es fija, como se ha supuesto en el caso del módulo central. Además, cuando el movimiento del contactor con respecto a la posición indeformada del tether es grande, éste deja de interactuar con el campo geomagnético, de forma que se obtendrían resultados con poco sentido práctico. La figura 4.2 muestra el sistema que se va a estudiar, en el que sólo se considerará la componente del campo que introduce el efecto perjudicial sobre el tether, de forma que éste se podrá expresar como

$$\mathbf{B}_0 = B_2 \mathbf{k}. \quad (4.2)$$

Así, el problema representado en las figuras 4.1 y 4.2 es equivalente.

Otra posible aplicación del trabajo desarrollado en este capítulo es el estudio de nanocables conductores. Estos nanocables pueden ser de silicio, nanotubos de carbono y fibras biológicas como el ADN, proteínas y microtúbulos [96]. Además, la discusión sobre si el ADN es un cable conductor o no, continúa en la comunidad científica [97]. Se cree que todas estas nanoestructuras tienen un gran potencial, ya que en el futuro se piensa en ellas como partes de circuitos de sistemas electrónicos. La interacción de estos cables con los campos magnéticos también podría explotarse para obtener ciertas propiedades deseables en este tipo de elementos.

4.1. Ecuaciones de Kirchhoff-Love del TE en los ejes móviles

En este apartado, se van a modificar las ecuaciones que se obtuvieron para el SET en el capítulo anterior de forma que se incluya el efecto del campo magnético y la corriente sobre el movimiento del mismo. De nuevo, estas ecuaciones se van a plantear en un triedro móvil, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que rota alrededor de $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ a la velocidad $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. De esta forma, las soluciones estáticas se obtendrán sin más que hacer la velocidad angular nula.

Se supone que a través del tether fluye una corriente constante, cuya intensidad se puede escribir como

$$\mathbf{I} = I \mathbf{x}' = I \mathbf{d}_3. \quad (4.3)$$

Aquí se ha impuesto que la dirección de la corriente es la misma que la que sigue la línea media de la barra, lo cual es consistente con la teoría unidimensional (barra parametrizada con un solo parámetro) que se está usando. Además, se supone que la sección del conductor (tether) es lo suficientemente pequeña como para despreciar las posibles corrientes inducidas en el plano de la sección (corrientes eddy [91]). Como se explicó en la introducción, la corriente \mathbf{I} interacciona con el campo \mathbf{B}_0 generando la fuerza de Lorentz, que es una fuerza de volumen, dada por

$$\mathbf{F}_L = I \mathbf{d}_3 \times \mathbf{B}_0, \quad (4.4)$$

donde la expresión del campo viene dada por (4.2). Es bien conocido que las fuerzas de volumen no introducen momentos en una barra, de forma que la expresión del equilibrio de momentos para el sistema de la figura 4.2 es exactamente la misma que aquella que se usó en el capítulo anterior, dada por (3.53). Por otra parte, el balance de fuerzas (3.52) si se ve afectado por la acción de la fuerza de Lorentz, quedando modificado en la siguiente forma

$$\mathbf{F}' + I B_2 \mathbf{d}_3 \times \mathbf{k} = \rho A_s (\ddot{\mathbf{x}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}). \quad (4.5)$$

Además de la ecuaciones de balance de fuerzas y momentos, para tener un sistema de ecuaciones en derivadas parciales completo, es necesario añadir la ecuación de la tangente, la ecuación de curvatura y las relaciones constitutivas, dadas al igual que en el capítulo 3 por las expresiones (3.54)-(3.56).

4.2. Condiciones de contorno del TE

Como se mencionó al principio del capítulo, se va a suponer que el tether se encuentra empotrado en los módulos extremos. De esta forma, se tienen condiciones de contorno equivalentes a las formuladas por Wolfe [92, 94] y Healey [93] para el modelo tipo cable. En el extremo superior, $s = l$, se impone que la sección extrema del tether está fija, siendo la condiciones de contorno en este caso

$$x(l) = 0, \quad (4.6)$$

$$y(l) = 0, \quad (4.7)$$

$$z(l) = l, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{d}_3(l) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{d}_3(l) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{d}_1(l) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (4.11)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$. En lugar de fijar la distancia entre los empotramientos, se va a permitir que el tether deslice en su extremo $s = 0$, es decir, el tether está empotrado al módulo que se puede mover a lo largo de $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Además, en esta sección extrema del tether se introduce una tensión de control T (positiva para tensión). En el caso del modelo tipo cable, es necesario que éste se encuentre en tensión para que se produzca el pandeo [91, 92]. La tensión de control T que se incluye en el presente modelo tipo barra sería equivalente a la tensión artificial introducida en el cable. De esta forma, las condiciones de

contorno en $s = 0$ serán

$$x(0) = 0, \quad (4.12)$$

$$y(0) = 0, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{e}_3 = -T, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{d}_3(0) \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{d}_3(0) \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{d}_1(0) \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (4.17)$$

Al igual que en el modelo de Cosserat del SET, a las condiciones anteriores hay que añadir las condiciones de ortonormalidad en el extremo donde comienza la integración, lo que garantiza que estas condiciones se cumplen para todo s . Así, sumando las condiciones siguientes,

$$\mathbf{d}_i(0) \cdot \mathbf{d}_j(0) = \delta_{ij}, \quad (4.18)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, se tiene las 18 condiciones de contorno requeridas. Nótese que las condiciones anteriores implican que en $s = 0$ y $s = l$, el triedro director $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ coincide con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

4.3. Adimensionalización de las ecuaciones

Ya que las condiciones de contorno a las que está sometida la barra son condiciones de empotramiento en ambos extremos, se va a usar la primera frecuencia natural de una barra biempotrada para adimensionalizar la variable temporal. De esta

forma, las nuevas variables escaladas serán

$$\begin{aligned}\omega_c &= \sqrt{f \frac{EI_1}{\rho AL^4}}, \quad \bar{t} = t\omega_c, \quad \bar{s} = \frac{s}{L} \in [0, 1], \\ \bar{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \frac{L^2}{fEI_1}, \quad \bar{T} = T \frac{L^2}{fEI_1}, \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \frac{AL^3}{fEI_1^2}, \quad \bar{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}L,\end{aligned}\tag{4.19}$$

donde $f = 500.5639$ para la primera frecuencia natural. Con estas variables adimensionales, las ecuaciones que proporcionan las soluciones rotatorias cuasi-estáticas en los ejes móviles (eliminando la barra sobre las variables por simplicidad y teniendo en cuenta que $()' = \frac{d}{d\bar{s}}$) son

$$\mathbf{F}' + B\mathbf{d}_3 \times \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}),\tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}' + Q\mathbf{d}_3 \times \mathbf{F} &= R(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_1)(\mathbf{d}_1 \times \boldsymbol{\omega}) \\ &+ (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_2)(\mathbf{d}_2 \times \boldsymbol{\omega}),\end{aligned}\tag{4.21}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{d}_3,\tag{4.22}$$

$$\mathbf{d}'_i = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_i,\tag{4.23}$$

a las que hay que añadir las relaciones constitutivas

$$\mathbf{M} = \frac{Q}{f} \left[\kappa_1 \mathbf{d}_1 + R\kappa_2 \mathbf{d}_2 + \frac{\Gamma(1+R)}{2} \kappa_3 \mathbf{d}_3 \right],\tag{4.24}$$

donde los parámetros adimensionales son

$$Q = \frac{AL^2}{I_1}, \quad R = \frac{I_2}{I_1}, \quad B = \frac{B_2 IL^3}{fEI_1}, \quad \Gamma = \frac{2G}{E}.\tag{4.25}$$

En cuanto a las condiciones de contorno, se pueden usar las expresiones (4.6)-(4.18), suponiendo que a partir de este momento se refieren a las variables adimensionales y que se imponen en $\bar{s} = 0$ y $\bar{s} = 1$.

4.4. Resolución de las ecuaciones de movimiento

El sistema formulado en la sección anterior es un problema de contorno perfectamente definido en la variable s . De nuevo, se usará el programa de continuación

Tabla 4.1: Constantes características y parámetros adimensionales para el SET.

| | | | |
|--------|-------------------------------------|----------|---------------|
| L | 100 m | Q | 9997136842.15 |
| A | $4.16 \times 10^{-6} m^2$ | R | 0.5526 |
| E | $1.32 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}$ | Γ | 0.76923 |
| EI_1 | 38 Nm^2 | f | 500.5639 |
| EI_2 | 21 Nm^2 | | |

numérica AUTO2000 [63] que resuelve el problema de contorno mediante colocación ortogonal [76] y permite trazar ramas de soluciones en función de los parámetros del sistema. Es necesario conocer una solución del problema para un valor determinado de los parámetros, desde la cual se comienza la continuación. Para $\omega = 0$ y $B = 0$, la barra recta sin torsión, correspondiente a los siguientes valores de las variables:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(\bar{s}) &= \bar{s}\mathbf{e}_3, & \bar{\mathbf{F}}(\bar{s}) &= -\bar{T}\mathbf{e}_3, & \bar{\mathbf{M}}(\bar{s}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{d}_i(\bar{s}) &= \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3), & \bar{s} &\in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.26)$$

es solución (trivial) del sistema de ecuaciones.

Los parámetros de continuación serán B , que mide la magnitud del campo magnético y la corriente del tether, y ω , que como ya se ha indicado representa la velocidad angular a la que gira el spinning tether. El resto de constantes características y parámetros del sistema se han tomado del SET y se listan en la tabla 4.1.

A partir de la solución trivial mostrada en (4.26) se realiza, manteniendo $\omega = 0$, la primera continuación en B . En estas condiciones, no se encuentra ningún punto de bifurcación en la rama de soluciones triviales, de forma que dicha solución trivial es la única posible para este valor de los parámetros. Esto significa que el sistema TE, con las condiciones de contorno aquí formuladas no reacciona ante la acción de la componente no deseada del campo geomagnético. En condiciones reales de operación, el tether no estará perfectamente recto ni las condiciones de

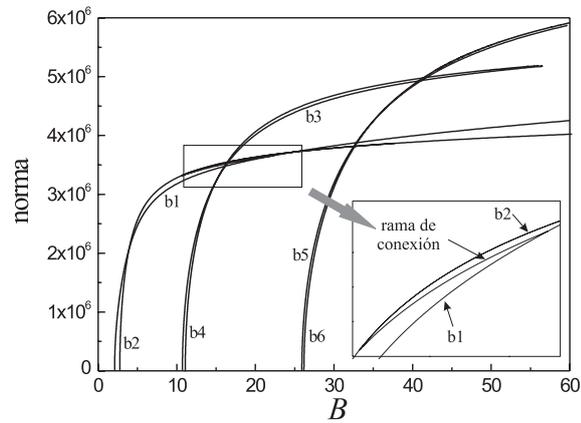


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación para $\omega = 2\omega_c$.

contorno serán tan claras y sencillas como en el ejemplo que aquí se ha resuelto. De forma que el sistema real, probablemente, sí sufriría cierta acción del campo magnético. Los resultados aquí obtenidos confirman de forma numérica lo que Wolfe [95] demostró teóricamente: es necesario que la barra sea inelástica para que se produzcan las bifurcaciones. En el caso elástico, que es el que se tiene en el SET, ya que la parte viscoelástica de las relaciones constitutivas no tiene influencia en el análisis de las soluciones estáticas o cuasi-estáticas (ecuación (4.24)), la única solución estática ($\omega = 0$) es la trivial.

La figura 4.3 muestra el diagrama de bifurcación generado variando el parámetro B , para un valor de la velocidad angular $\omega = 2\omega_c = 0.15$ rad/s, por encima de la velocidad crítica de giro que será $\omega = \omega_c = 0.075$ rad/s. En el eje de ordenadas se representa la suma de la norma de todas las variables del problema. Con esta medida de la solución, el diagrama representado en la figura se ve con mayor claridad. La figura muestra una secuencia (probablemente infinita) de ramas de soluciones no-triviales que nacen de la rama de soluciones triviales en bifurcaciones tipo tridente ($B = 2.09, 2.74, 10.72, 11.08, 25.91, 26.18$), de forma similar a la barra estática ($\omega = 0$) inelástica de Wolfe [95]. La figura 4.3 muestra las primeras

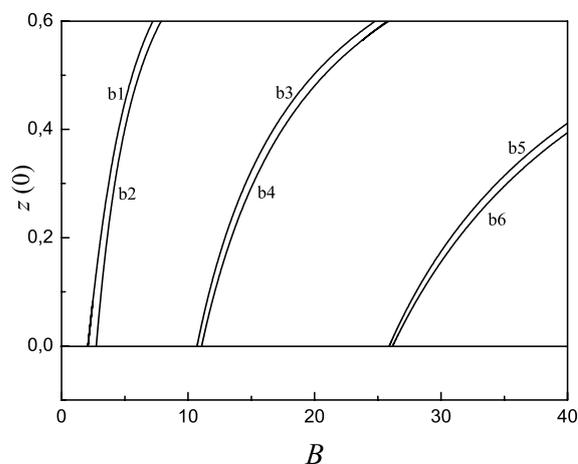


Figura 4.4: Zoom diagrama de bifurcación para $\omega = 2\omega_c$.

6 ramas, que aparecen en pares debido a la ortotropía del eje. El zoom en dicha figura muestra una rama de soluciones que conecta la pareja b1-b2. Una conexión similar aparece entre b3-b4 y b5-b6. La forma que adopta la barra a lo largo de dichas conexiones es una transición entre las formas de las ramas conectadas. La figura 4.4 muestra el diagrama de bifurcación en su zona inferior, por debajo de las conexiones entre las parejas. En esta ocasión, se representa en el eje de ordenadas la altura que adopta el extremo del tether que se encuentra en la cota cero para la solución trivial, $z(0) = 0$. Una vez la barra bifurca, el extremo, al que se le ha permitido deslizar a lo largo de \mathbf{k} , aumenta su altura (la barra se acorta al adoptar la forma helicoidal). Este efecto se puede apreciar en las figuras 4.5 y 4.6, donde se representan las proyecciones $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ y $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de las soluciones en las ramas b1, b3 y b5 para una altura constante de $z(0) = 0.4$. Las ramas b2, b3 y b4 proporcionan las mismas formas pero intercambiando las proyecciones $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ por $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y viceversa. En la figura 4.5 se observa como el sistema se deforma hacia valores de x positivos. Esto es debido a que la corriente \mathbf{I} y el campo magnético \mathbf{B}_0 tienen el mismo sentido. Si el sentido de ambos fuera contrario, el tether se

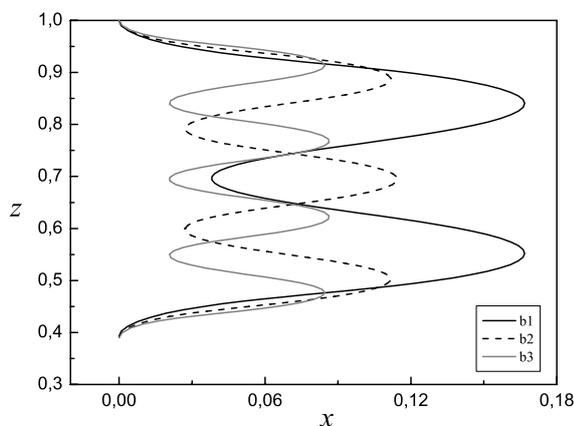


Figura 4.5: Proyección de los tres primeros modos del tether en el plano $\{e_1, e_3\}$ para una valor de $z(0) = 0.4$. Valores de B : 4.448 (b1), 16.49 (b3) y 38.74 (b5).

deformaría hacia valores de x negativos.

La figura 4.7 muestra la forma tridimensional de una solución de la rama b4. Como se puede observar, la forma es helicoidal salvo en los extremos donde la condición de contorno de empotramiento no permite una forma de hélice perfecta. Para ello, sería necesario aplicar las condiciones de contorno diseñadas por Valverde y Van der Heijden [47, 48, 49], condiciones de contorno de “percha”, que permiten que la barra se deforme como una hélice perfecta.

Desde el punto de vista del diseño, sería interesante cuantificar el valor para el cual el TE padea fuera de la solución trivial recta por la acción del campo geomagnético. En el caso que se ha resuelto en esta sección, la primera bifurcación se tiene para $B = 2.09$, que en variables dimensionales sería $IB_2 = 7.942 \times 10^{-5} \frac{N}{m}$. Asumiendo un valor máximo del campo geomagnético de $B_g = 7 \times 10^{-5} T$ [2], y una corriente también máxima en el tether $I = 1 A$ [4, 2], el valor máximo esperado de la constante $IB_g = 7 \times 10^{-5} \frac{N}{m}$. En el caso del SET, para la velocidad de spin que se ha supuesto en el caso mostrado en las figuras anteriores, el sistema se encuentra por debajo del campo-corriente crítico aunque bastante cercano. Así, el efecto

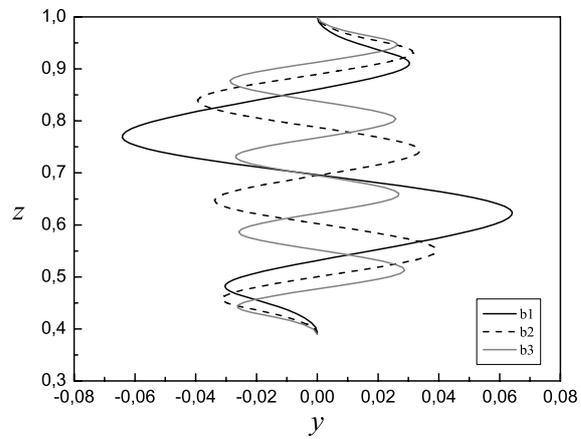


Figura 4.6: Proyección de los tres primeros modos del tether en el plano $\{e_2, e_3\}$ para un valor de $z(0) = 0.4$. Valores de B : 4.448 (b1), 16.49 (b3) y 38.74 (b5).

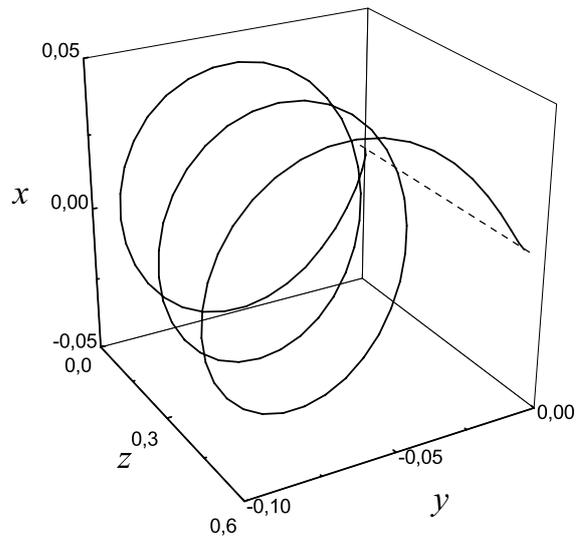


Figura 4.7: Vista 3D de la solución $z(0) = 0.4$ y $B = 17.15$ de la rama b4.

de la componente B_2 no deseada del campo geomagnético se puede despreciar. Nótese que el parámetro B depende del cubo de la longitud del tether l (ver ecuación (4.25)), lo que significa que para tethers de mayor longitud que el SET, por ejemplo TE estabilizados radialmente, el valor crítico es superado, resultando en el pandeo del tether en una forma cuasi-helicoidal como la mostrada en la figura 4.7. Este efecto fue observado en varias misiones con TE, como la misión PGM y la TSS-1R [2, 1].

En resumen en este capítulo se ha mostrado como un spinning tether electrodinámico bifurca de la solución trivial recta cuando se incrementa el campo geomagnético (o la corriente). En lo que respecta al SET, se puede afirmar que se encuentra por debajo de la zona de peligro.

Capítulo 5

Simulación dinámica del SET. Modelo multicuerpo

Como se ha descrito previamente en esta tesis, es fundamental que la descripción de las fuerzas elásticas y de amortiguamiento retenga las no-linealidades geométricas propias de una estructura tan esbelta como el SET. Además, tanto la rigidez del sistema a flexión como a torsión son determinantes en el comportamiento dinámico del mismo, por lo que el tether debe ser modelado como una barra y no como un cable [44, 2, 1]. Así, para conseguir un buen modelo que permita la simulación dinámica del SET es necesario usar un elemento tipo barra cuya relación desplazamientos-deformaciones sea no-lineal, permitiendo grandes desplazamientos y giros por deformación.

En esta dirección, existen varias posibilidades, como por ejemplo la formulación basada en el *Large Rotation Vector* de Simo y Vu-Quoc [98, 99] para el método de los elementos finitos (MEF). En este caso, el elemento finito, que representa una porción de la barra, es descrito usando como coordenadas nodales los desplazamientos y ángulos girados de dichos nodos, todos ellos medidos con respecto a una referencia inercial o global. La presencia de ángulos en esta formu-

lación crea dificultades, ya que éstos deben ser interpolados a lo largo del proceso de integración de las ecuaciones de movimiento del elemento finito. Para que el proceso de interpolación de los ángulos sea correcto, y por tanto no se incurra en el incumplimiento de las ecuaciones de conservación de la mecánica, es necesario diseñar integradores que aseguren la conservación de la energía, o la cantidad de movimiento del sistema [100].

Otras posibles formulaciones también basadas en el Large Rotation Vector son las propuestas por Avelló y García de Jalón [58] y Geradín y Cardona [101], que en lugar de describir las orientaciones usando ángulos, utilizan triadas de vectores unitarios y ortogonales en el marco del MEF. Otra formulación de reciente aparición, y también basada en el MEF, es la de coordenadas nodales absolutas, que en lugar de giros o vectores unitarios usa pendientes para representar las orientaciones en los nodos [56, 102].

En el caso tridimensional, todos los métodos anteriormente nombrados usan coordenadas absolutas (medidas desde una referencia global) y *mecánica de los medios continuos*, para definir la función de energía de deformación y derivar las fuerzas elásticas geoméricamente no-lineales de los correspondientes elementos.

Por otro lado, se tienen los métodos basados en referencias flotantes, que describen la posición de cualquier punto de los sólidos mediante una combinación de coordenadas absolutas de referencia (posición y orientación de la referencia flotante) y coordenadas elásticas locales (descripción de los desplazamientos debidos a deformación del sólido con respecto a la referencia flotante). Estos métodos son los más antiguos [56, 103], y por tanto mejor establecidos, en la dinámica de sistemas multicuerpo (DSM), existiendo formulaciones tanto para elementos deformables lineales como para no-lineales. Los conjuntos de coordenadas que describen la posición y orientación de los sistemas de referencia flotantes pueden ser posiciones de puntos, ángulos que definen la orientación de un triedro, coordenadas de vectores unitarios, etc. Dependiendo de este factor, existen diferentes formulaciones como la clásica formulación de referencias flotantes con posiciones y orientación

del triedro asociado al sólido deformable [56] (mediante, por ejemplo, ángulos o parámetros de Euler) o la formulación de *coordenadas naturales* [58], que define las componentes absolutas del vector posición de puntos materiales o de vectores unitarios ortonormales ligados a los sólidos deformables. En cualquier caso, los grandes movimientos de sólido rígido (desplazamientos y giros) son descritos por el movimiento de la referencia flotante, sobre la que se superponen los desplazamientos y giros por deformación, que son descritos con respecto a dicha referencia. Esto permite en la mayoría de los casos usar una relación deformación-desplazamientos lineal que facilita la obtención de las fuerzas elásticas del sólido. También es posible en este caso usar modelos elásticos con cierto grado no-lineal, como los modelos que tienen en cuenta el acortamiento axial por flexión de barras hasta cierto nivel de deformación [104, 86].

Como se puede ver, existen varias formulaciones que son susceptibles de ser usadas para modelar el SET. En el siguiente apartado, se va a describir el procedimiento usado y las razones de la elección, que estarán basadas en criterios de sencillez de la formulación, velocidad de integración y robustez del método.

5.1. Modelado del SET

5.1.1. Coordenadas naturales y subestructuración

Los tethers que forman el SET son estructuras muy esbeltas, siendo su relación sección-longitud del orden de 0.025/100. Por lo tanto, se esperan grandes desplazamientos y rotaciones por deformación. Además, debido a la naturaleza de las acciones que actúan sobre el sistema (pequeña carga transversal, debida a la acción de la fuerza de Lorentz y, rotación de la base con arranque suave), se intuye que las deformaciones locales (entendidas por su definición en la teoría de la elasticidad, “strains”) serán moderadamente pequeñas. Efectivamente, las elongaciones o deformaciones volumétricas, como puede ser la deformación axial del tether ante una carga también axial, serán pequeñas con respecto a la unidad [69]. Además,

debido a que la sección del tether es muy pequeña, sección de pared delgada, el efecto Poisson será prácticamente despreciable. Por otro lado, una barra tan esbelta sin grandes cargas transversales o apoyos fijos intermedios no sufrirá deformaciones, por cortante, apreciables por lo que de nuevo, se podrán despreciar éstas frente a la unidad [69]. En estas condiciones, salvo por los grandes desplazamientos y giros por deformación que sufrirá la barra, es acertado tratar esta estructura como un elemento unidimensional descrito por su línea media. Además, se podrán asumir las hipótesis de la Resistencia de Materiales, de forma que las secciones (asociadas de forma continua a cada punto de la línea media) permanecen planas y perpendiculares a la línea media después de la deformación. En el caso en el que los giros por deformación de las secciones de la barra fueran también despreciables frente a la unidad, se tendría la *Viga de Euler-Bernoulli*, cuya relación deformaciones-desplazamientos es lineal. Por lo tanto, parece bastante apropiado usar una descripción basada en la viga de Euler-Bernoulli que permita grandes giros por deformación. Dicho esto, se van a descartar las formulaciones que recurran a la mecánica del medio continuo tridimensional, como la formulación en coordenadas absolutas nodales [102], o las basadas en el Large Rotation Vector [58, 101]; que parametrizan la barra como un volumen tridimensional en lugar de hacerlo parametrizando únicamente su línea media. En cualquier caso, es bien sabido [105] que el uso de formulaciones basadas en coordenadas globales conlleva tiempos altos de computación y baja eficiencia en comparación, por ejemplo, con las formulaciones basadas en referencias flotantes.

Las técnicas de subestructuración permiten el uso de formulaciones basadas en referencias flotantes con relaciones deformaciones-desplazamientos geoméricamente lineales, en el contexto de sólidos sujetos a grandes desplazamientos y rotaciones por deformación (geoméricamente no-lineales). El concepto, introducido por Wu y Haug [57] en el campo de la dinámica de sistemas multicuerpo, es simple y a la vez efectivo, lo que es deseable en cualquier formulación basada en DSM. Esta técnica consiste en la división del sólido deformable bajo estudio en una serie

de *subestructuras* que se tratan como sólidos diferentes e independientes. Estas subestructuras se unen unas a otras mediante restricciones de conexión rígida, de forma que reproducen el sólido original bajo estudio (figura 5.1). De esta forma, se utilizan tantas subestructuras como sea necesario para que los desplazamientos y giros por deformación de la barra, dentro de cada una de las subestructuras, sean lo suficientemente pequeños (despreciables frente a la unidad) para usar una relación deformaciones-desplazamientos geoméricamente lineal. Así, las fuerzas elásticas que actúan sobre cada subestructura son sencillas de obtener y se pueden usar técnicas de discretización clásicas como la descomposición modal. La unión de dos o más subestructuras introduce el carácter geoméricamente no-lineal sobre el modelo, ya que los desplazamientos y giros de sólido rígido de las referencias flotantes están acoplados con los desplazamientos y giros por deformación, que se producen dentro de las subestructuras. De esta forma, los desplazamientos por flexión y tracción-compresión, que en el modelo lineal están desacoplados, se acoplan por la acción de unas subestructuras sobre otras, de forma que se obtiene el deseado acortamiento por flexión: efecto directo de las relaciones desplazamientos-deformaciones no-lineales.

A la hora de definir las referencias flotantes asociadas a cada una de las subestructuras, se han usado coordenadas naturales en la forma propuesta por García de Jalón [58] (para sólidos rígidos), en su versión adaptada a sólidos deformables propuesta por Cuadrado et al. [106]. En el contexto de la subestructuración, un conjunto de coordenadas naturales apropiado da lugar a una formulación trivial de las restricciones de unión entre las diferentes subestructuras, que como se sabe, no es en general un trabajo simple para otros conjuntos de coordenadas de referencia [107]. Efectivamente, las coordenadas naturales de referencia serán definidas en las secciones de conexión entre las subestructuras, que como se ha dicho, se deben tratar como conexiones rígidas (figura 5.1).

Como recomiendan Cuadrado et al. [106], para conexiones rígidas entre sólidos flexibles 3D, se debe colocar un punto, o lo que es lo mismo, tres coordenadas na-

turales de posición (\mathbf{r}_0^i) y tres vectores ortogonales y unitarios ($\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$, nueve coordenadas naturales) entre cada dos subestructuras (figura 5.1). Estos conjuntos de coordenadas naturales se usan directamente como sistema de referencia a la hora de describir las diferentes subestructuras, de forma que la subestructura i -ésima tendrá asociado el sistema de referencia $\{\mathbf{r}_0^i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ (figura 5.1). Por otro lado, la subestructura i -ésima también tiene asociado el conjunto de coordenadas naturales $\{\mathbf{r}_0^{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}\}$. Compartiendo dichas coordenadas con la subestructura siguiente, la restricción de conexión rígida se impone automáticamente, por lo que no es necesario añadir ecuaciones algebraicas de restricción a las ecuaciones dinámicas de la subestructura. Esto representa una gran ventaja desde el punto de vista de la integración numérica [76, 108, 109].

Antes de la realización del modelo que se está presentando en esta sección, se llevó a cabo un modelo multicuerpo del SET también basado en la subestructuración y descripción de las referencias flotantes, mediante coordenadas cartesianas

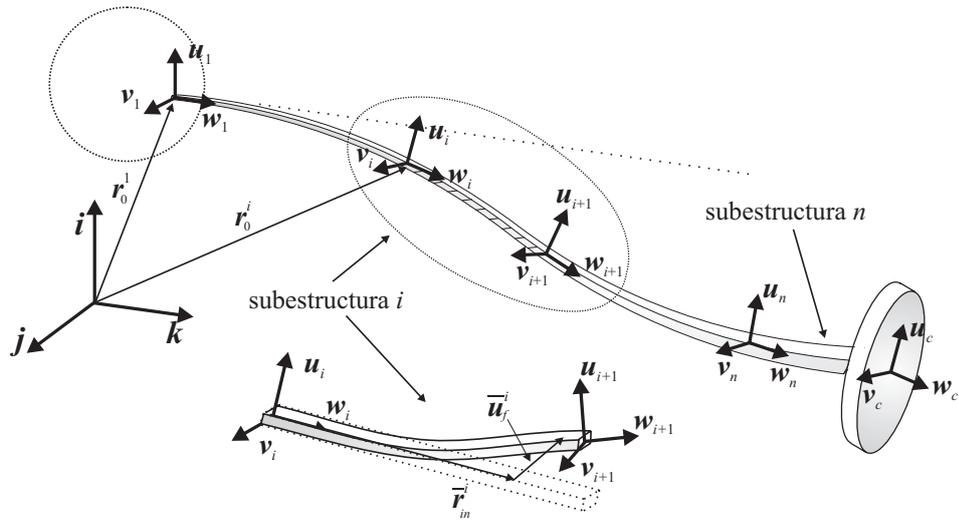


Figura 5.1: Subestructuración del tether y coordenadas naturales usadas en la modelización.

y parámetros de Euler [107]. La formulación de las restricciones de conexión rígida entre las subestructuras es muy compleja en este caso, ya que es necesario hacer coincidir la orientación y posición de dos secciones de dos sólidos, en principio, independientes. Esto da lugar a unas expresiones altamente no-lineales de las restricciones en términos de coordenadas de posición, parámetros de Euler y amplitudes de modos de deformación. Estas restricciones tan complejas introducen altas frecuencias e inestabilidad numérica en las ecuaciones, lo que complica el proceso de integración. Además, esta formulación no garantiza la continuidad en los momentos y esfuerzos internos de la barra, lo que aporta una mayor inestabilidad a las ecuaciones dinámicas. Todos estos factores hicieron prácticamente imposible la resolución de dicho modelo e impulsaron la formulación de uno nuevo [44], que es el que se describe en estas páginas.

5.1.2. Cinemática de una subestructura

La modelización de sólidos 3D flexibles mediante coordenadas naturales exige, como mínimo, la descripción de la posición de un punto material del sólido (no flotante), es decir, tres coordenadas naturales, y de tres vectores ortogonales y unitarios físicamente unidos a dicho punto (imagínense dichos vectores físicamente clavados en el sólido). Con esto se tiene la posición y la orientación de un triedro local en el sólido sobre el que se definirán las fuerzas internas (elásticas y de amortiguamiento). Otros puntos o vectores unitarios definidos sobre el mismo sólido serán referidos a partir de este momento como puntos y vectores *en exceso* [106].

Considérese la i -ésima de las n subestructuras en las que se ha dividido el tether (figura 5.1). El conjunto de coordenadas $\{\mathbf{r}_0^i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ define un triedro ortonormal que será usado como sistema de referencia local del sólido. El conjunto de coordenadas $\{\mathbf{r}_0^{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}\}$, que también se encuentra físicamente unido al sólido en cuestión en la unión con la siguiente subestructura, está en exceso. Teniendo esto en cuenta, la posición de un punto cualquiera de la subestructura

se puede expresar como

$$\mathbf{r}^i = \mathbf{r}_0^i + \mathbf{A}^i(\bar{\mathbf{r}}_{in}^i + \bar{\mathbf{u}}_f^i), \quad (5.1)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}_{in}^i = [\bar{r}_x, \bar{r}_y, \bar{r}_z]^T$ representa las componentes del vector posición del punto en los ejes locales cuando el sólido se encuentra indeformado según $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$, respectivamente, y $\bar{\mathbf{u}}_f^i$ representa los desplazamientos debidos a la deformación con respecto a la indeformada de nuevo en los ejes locales. La barra sobre las variables indica que son componentes referidas a ejes locales mientras que el resto de variables sin barra estarán referidas a los ejes inerciales $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. La matriz de rotación, \mathbf{A}^i , relaciona las coordenadas locales y globales de un vector, según esté referido a ejes locales $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ o globales $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Siendo el triedro $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ ortogonal, la matriz de rotación se construye fácilmente como $\mathbf{A}^i = [\mathbf{u}_i \ \mathbf{v}_i \ \mathbf{w}_i]$. De esta forma, se tiene que $\mathbf{r}^i = \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{r}}^i$.

Para completar la cinemática de la subestructura, es necesario discretizar el campo de desplazamientos por deformación, $\bar{\mathbf{u}}_f^i$. Hay que tener en cuenta que las variaciones de las coordenadas naturales en exceso, $\{\mathbf{r}_0^{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}\}$, pueden deformar la subestructura. Por ello, Cuadrado et al. [106] recomiendan usar el *Método de Rayleigh-Ritz* con fronteras fijas, que mediante el uso de *modos estáticos* y *modos dinámicos* discretiza los desplazamientos como una suma de modos de deformación por sus correspondientes amplitudes. Los modos estáticos están asociados a las variaciones de las coordenadas naturales en exceso, que como se ha dicho, pueden deformar la subestructura. Efectivamente, las coordenadas naturales $\{\mathbf{r}_0^i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ se toman como referencia (representan movimientos de sólido rígido), de forma que las variaciones de $\{\mathbf{r}_0^{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}\}$ con respecto a las anteriores introducen deformaciones en la subestructura (figura 5.2). Sobre los modos estáticos se superponen los llamados modos dinámicos, que no son más que los modos de vibración del sólido con todas las fronteras fijas (fronteras: puntos materiales a los que se asocian coordenadas naturales), en este caso, $\{\mathbf{r}_0^i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ y $\{\mathbf{r}_0^{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}\}$, por lo que se tendrán los modos de vibración de una barra biempotrada. Así, el vector de desplazamientos por deformación, se puede

expresar como

$$\bar{\mathbf{u}}_f^i(z, t) = \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_k(z) \eta_k(t) + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_l(z) \xi_l(t), \quad (5.2)$$

donde n_s y n_d son el número de modos estáticos y dinámicos, respectivamente; $\bar{\Phi}_k(z)$ es una función vectorial 3×1 del parámetro longitudinal z , que contiene el modo estático en la fila correspondiente (1, 2 ó 3), según el desplazamiento se produzca según la dirección \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i o \mathbf{w}_i (figura 5.2); $\bar{\Psi}_l(z)$ contiene los modos dinámicos de igual forma que el anterior y $\eta_k(t)$ y $\xi_l(t)$, son las coordenadas generalizadas elásticas que representan las amplitudes de los modos estáticos y dinámicos, respectivamente, en cada instante. Las amplitudes de los modos estáticos no son en realidad nuevas variables del problema [106], ya que es posible expresarlas como función de las coordenadas naturales adyacentes (movimiento relativo entre $\{\mathbf{r}_0^{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}\}$ y $\{\mathbf{r}_0^i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$), como se verá más adelante cuando se formulen las restricciones cinemáticas. Por lo tanto, no introducen nuevos grados de libertad en el problema.

En el caso que nos ocupa, la subestructura se comportará como una viga de Euler-Bernoulli, por lo que, tanto los modos estáticos como dinámicos se pueden obtener analíticamente con relativa facilidad. El presente método de discretización también es válido para configuraciones y sólidos de geometría más compleja. En estos casos, se discretizaría usando el MEF, de forma que los modos estáticos y dinámicos se obtendrían mediante *síntesis modal de componentes* [56].

El número de modos estáticos requeridos es de tres por cada punto en exceso, \mathbf{r}_0^{i+1} , más uno por cada vector unitario en exceso (giro alrededor de la dirección definida por el vector). Por tanto, serán necesarios $n_s = 6$ modos estáticos, uno de los cuales está relacionado con la torsión de la barra. Teniendo en cuenta que la subestructura se comporta como una viga de Euler-Bernoulli, se ha de considerar que todos los puntos de la sección tienen la misma velocidad, siendo ésta igual a la velocidad de la línea media de la barra. Por otro lado, la rotación de las secciones por torsión alrededor de la línea media no necesita ser conocida para completar la cinemática del elemento. Por lo tanto, se toma $n_s = 5$ eliminando los modos de

torsión tanto de los estáticos como de los dinámicos. En cualquier caso, el hecho de que la descripción cinemática no necesite cuantificar la torsión no significa que ésta no tenga influencia sobre el sistema. De hecho, la subestructura tendrá rigidez a torsión y existirá una energía de deformación asociada a sus deformaciones por torsión. Esto significa que, de alguna forma, se tendrá que cuantificar la rotación de la sección alrededor de la línea media mediante un ángulo, θ , que además se va a discretizar en la misma forma que $\bar{\mathbf{u}}_f^i$, como sigue

$$\theta(z, t) = \bar{\Phi}_t(z)\eta_t(t) + \sum_{s=1}^{n_{dt}} \bar{\Psi}_{ts}(z)\xi_{ts}(t), \quad (5.3)$$

donde n_{dt} es el número de modos dinámicos de torsión, $\bar{\Phi}_t(z)$ es el modo estático asociado a la torsión, $\bar{\Psi}_{ts}(z)$ es el s -ésimo modo dinámico de torsión y $\eta_t(t)$ y $\xi_{ts}(t)$ son las amplitudes de dichos modos, respectivamente.

Una vez establecida la cinemática de una subestructura, el vector de coorde-

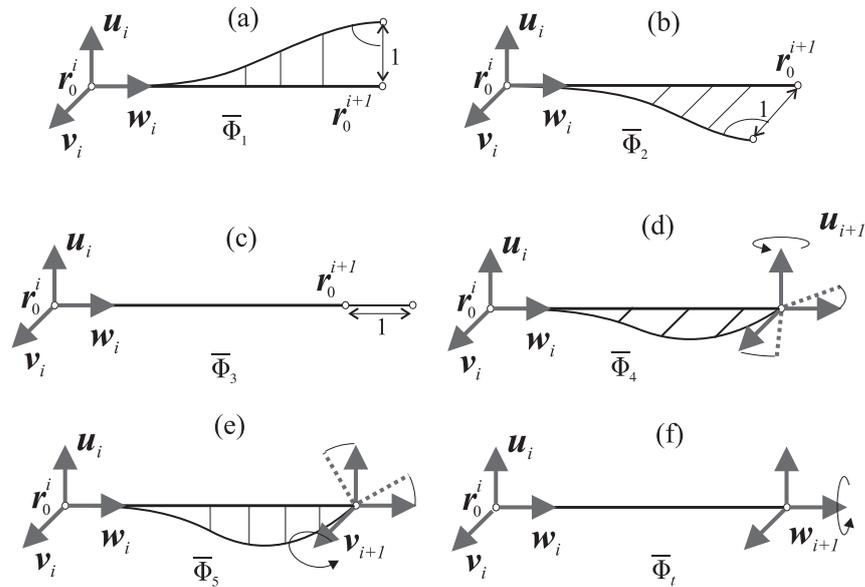


Figura 5.2: Modos estáticos de una subestructura.

nadas generalizadas asociado a ella será

$$\mathbf{q}^i = \left[\mathbf{r}_0^{iT} \ \mathbf{u}_i^T \ \mathbf{v}_i^T \ \mathbf{w}_i^T \ \eta_1 \ \cdots \ \eta_{n_s} \ \eta_t \ \xi_1 \ \cdots \ \xi_{n_d} \ \xi_{t_1} \ \cdots \ \xi_{t_{ndt}} \right]^T, \quad (5.4)$$

donde el número de modos dinámicos es elegido por el analista según la naturaleza del problema que se está resolviendo.

5.1.3. Expresiones de los modos estáticos y dinámicos

Como se ha dicho anteriormente, en general para un sólido de geometría arbitraria, se usará el MEF para discretizar el sólido y síntesis modal de componentes para obtener los modos de vibración a partir de la discretización realizada. De todos los nodos de la discretización, la mayoría de ellos serán nodos internos al sólido y unos pocos serán nodos frontera. Estos nodos frontera coincidirán con los puntos de unión del sólido al resto del mecanismo, es decir, los pares cinemáticos en el caso general de un mecanismo. En el presente método, se considera que los nodos frontera están fijos a la hora de obtener los modos dinámicos del sólido. Una vez obtenidos estos, los modos estáticos se consiguen deformando el sólido según las coordenadas naturales que se hayan asociado al punto frontera. Por tanto, como se dijo en la sección anterior, el número de modos estáticos, su forma y el tipo de modos dinámicos depende directamente del conjunto de coordenadas naturales que se haya elegido para caracterizar el par en cuestión. El tether se puede considerar como una viga de Euler-Bernoulli, por lo que la obtención de los modos estáticos es directa, como se va a mostrar a continuación.

Cada punto en exceso, \mathbf{r}_0^{i+1} , sobre el que define el origen del sistema local, \mathbf{r}_0^i , da lugar a tres modos de deformación estáticos. Éstos son las deformadas estáticas correspondientes a un desplazamiento unitario de dicho punto según las tres direcciones del triedro local $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$. El modo $\bar{\Phi}_1 = \frac{3}{l^2}z^2 - \frac{2}{l^3}z^3$, se obtiene desplazando el punto como se puede observar en la figura 5.2-a, y obteniendo las constantes del polinomio cúbico $\Phi = az^3 + bz^2 + cz + d$, a partir de las condiciones de contorno correspondientes. De igual forma se tiene que $\bar{\Phi}_2 = \bar{\Phi}_1$ y que $\bar{\Phi}_3 = \frac{z}{l}$,

ver figuras 5.2-b y 5.2-c.

Por otro lado, los giros (que se suponen infinitesimales, y por tanto, se pueden identificar con las derivadas de los desplazamientos) alrededor de los vectores unitarios en exceso, \mathbf{u}_{i+1} , \mathbf{v}_{i+1} , \mathbf{w}_{i+1} , también deforman la subestructura, como se puede observar en las figuras 5.2-d, 5.2-e y 5.2-f. Los modos de deformación correspondientes a dichos giros tienen las siguientes expresiones

$$\bar{\Phi}_4 = -\bar{\Phi}_5 = \frac{1}{l}z^2 - \frac{1}{l^2}z^3, \quad (5.5)$$

donde $\bar{\Phi}_4$ se corresponde con el giro positivo alrededor de \mathbf{u}_{i+1} , que introduce desplazamientos positivos en el plano $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$, al contrario que el giro positivo alrededor de \mathbf{v}_{i+1} , que introduce desplazamientos negativos en el plano $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i\}$. Finalmente, el giro alrededor de \mathbf{w}_{i+1} torsiona la subestructura, dando lugar a $\bar{\Phi}_t = \frac{z}{l}$.

Los vectores columna $\bar{\Phi}_k$ vienen dados según lo anterior por

$$\bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\Phi}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\Phi}_3 \end{bmatrix}, \bar{\Phi}_4 = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\Phi}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\Phi}_5 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Las funciones $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$ y $\bar{\Phi}_3$, son adimensionales, ya que la dimensión va asociada a la coordenada generalizada, sin embargo, $\bar{\Phi}_4$ y $\bar{\Phi}_5$ tienen dimensión de longitud, ya que las coordenadas generalizadas correspondientes son adimensionales (ángulos).

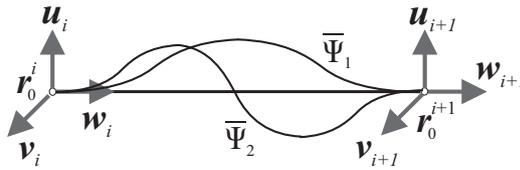


Figura 5.3: Modos dinámicos de una subestructura.

Por su parte, los modos dinámicos serán los modos de vibración de una barra

biempotrada, ya que los desplazamientos y giros de los contornos o fronteras permanecen fijos. La figura 5.3 muestra los dos primeros modos dinámicos de flexión en el plano $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i\}$, que serán idénticos a los correspondientes modos del plano $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$. La expresión de dichos modos viene dada por [25]

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{fj} &= \sinh(\beta_j \frac{z}{l}) - \sin(\beta_j \frac{z}{l}) + \alpha_j (\cosh(\beta_j \frac{z}{l}) - \cos(\beta_j \frac{z}{l})), \\ \alpha_j &= \frac{\sinh(\beta_j) - \sin(\beta_j)}{\cos(\beta_j) - \cosh(\beta_j)}, \quad j = 1, \dots, n_{df},\end{aligned}\quad (5.7)$$

donde n_{df} es el número de modos dinámicos de flexión, que será el mismo tanto en $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i\}$ como en $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$. Los coeficientes β_j son las distintas soluciones de la siguiente ecuación no-lineal

$$\cosh(\beta_j)\cos(\beta_j) = -1. \quad (5.8)$$

Por su parte, los modos dinámicos axiales tendrán la siguiente expresión para la barra biempotrada

$$\bar{\Psi}_{aj} = \sin((2j-1)\frac{\pi z}{2l}), \quad j = 1, \dots, n_{da}, \quad (5.9)$$

donde n_{da} es el número total de modos dinámicos axiales. Finalmente, los modos dinámicos de torsión para la barra biempotrada serán

$$\bar{\Psi}_{ts} = \sin((2s-1)\frac{\pi z}{2l}), \quad s = 1, \dots, n_{dt}. \quad (5.10)$$

5.1.4. Energía de deformación de una subestructura

A la hora de obtener la energía de deformación de una subestructura, es necesario conocer las componentes del vector de desplazamientos por deformación, así como el ángulo de rotación por torsión. El vector de desplazamientos por deformación (eliminando el índice i por simplicidad) viene dado, según sus componentes en el triedro local $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$, como $\bar{\mathbf{u}}_f = [\bar{u}_{fx}, \bar{u}_{fy}, \bar{u}_{fz}]^T$, donde el subíndice x , y o z indica la correspondiente componente. Por su parte, el ángulo de rotación por torsión viene dado por (5.3). Cada subestructura se comporta como una viga

de Euler-Bernoulli con respecto a su referencia flotante, por lo que su energía de deformación será la suma de las producidas por flexión, torsión y tracción-compresión. Teniendo esto en cuenta, la energía de deformación se puede expresar como [25]

$$\begin{aligned}
 U &= U_x^{flex} + U_y^{flex} + U^{axial} + U^{tor} \\
 &= \frac{1}{2}EI_y \int_0^l (\bar{u}''_{fx})^2 dz + \frac{1}{2}EI_x \int_0^l (\bar{u}''_{fy})^2 dz \\
 &\quad + \frac{1}{2}EA_s \int_0^l (\bar{u}'_{fz})^2 dz + \frac{1}{2}G(I_x + I_y) \int_0^l (\theta')^2 dz,
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde E es el módulo de Young, G es el módulo de cizalladura, A_s es el área de la sección de la subestructura, I_x e I_y son los momentos de la sección alrededor de los ejes \mathbf{u}_i y \mathbf{v}_i , respectivamente, y z es la coordenada longitudinal que recorre la subestructura recta en su configuración indeformada. En la expresión (5.11) se ha considerado que la torsión es uniforme. El símbolo $()'$ denota derivada con respecto a la coordenada z . Sustituyendo (5.2) y (5.3) en la expresión (5.11) y agrupando, se puede escribir la energía de deformación en forma compacta como

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^T & \boldsymbol{\xi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{est} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{din} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

donde $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5, \eta_t]^T$ es el vector formado por las amplitudes de los modos estáticos y $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{nd}, \xi_{t1}, \dots, \xi_{t_{ndt}}]^T$ es el vector formado por las amplitudes de los modos dinámicos, ambos convenientemente ordenados. El vector $\boldsymbol{\xi}$ contendrá en primer lugar las amplitudes de los n_{df} modos dinámicos de flexión según $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i\}$, a continuación los n_{df} correspondientes a la flexión en el plano $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ y seguidamente, se tendrán las amplitudes de los n_{da} modos axiales, de forma que se debe cumplir que $n_d = 2n_{df} + n_{da}$. Finalmente el vector $\boldsymbol{\xi}$ contendrá las n_{dt} amplitudes de las modos dinámicos de torsión. La matriz \mathbf{K}_{din} es diagonal debido a la ortogonalidad de los modos dinámicos de vibración dados por (5.7), (5.9) y (5.10). Por su parte, la matriz \mathbf{K}_{est} también contendrá términos fuera de la diagonal, ya que los modos estáticos no son ortogonales entre sí [106].

5.1.5. Energía cinética de una subestructura, el Método Co-rotacional

Para obtener la energía cinética de una subestructura, que vendrá dada por (se elimina el superíndice i por simplicidad)

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dm, \quad (5.13)$$

siendo V el volumen de la subestructura y m su masa, es necesario diferenciar con respecto al tiempo la expresión (5.1), obteniéndose

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}_{in} + \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_k \eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_l \xi_l) + \mathbf{A}(\sum_{k=1}^{n_s} \dot{\bar{\Phi}}_k \dot{\eta}_k + \sum_{l=1}^{n_d} \dot{\bar{\Psi}}_l \dot{\xi}_l). \quad (5.14)$$

Introduciendo (5.14) en la expresión (5.13) y realizando las integrales de volumen sobre las funciones de forma, se obtiene la energía cinética de una subestructura. La expresión resultante es compleja y exige un coste computacional bastante alto ya que es necesario evaluar gran número de integrales de volumen.

El *método co-rotacional*, propuesto por G eradin y Cardona [101] y adaptado al uso de coordenadas naturales por Avell  [110] y Cuadrado et al. [108], proporciona una expresión más sencilla de la energía cinética, con un menor coste computacional, ya que, como se verá a continuación, se eliminan las integrales de volumen. De esta forma se obtiene una matriz de masa, que aunque depende de \mathbf{q}^i , es más compacta y facilita el cálculo del vector de fuerzas de inercia cuadráticas en velocidades [108]. En lo que sigue, se va a describir brevemente dicho método adaptado al problema que se est  resolviendo, el SET.

Considérese la subestructura i -ésima del SET (figura 5.4), donde la posición de cualquier punto viene dada por (5.1). La barra se discretiza mediante elementos finitos unidimensionales y regulares a lo largo de ella (figura 5.4).

En el entorno del MEF, los desplazamientos por deformación del sólido se expresan como

$$\bar{\mathbf{u}}_f(z, t) = \mathbf{N}(z) \bar{\mathbf{q}}_f^*(t), \quad (5.15)$$

donde la matriz $\mathbf{N}(z)$ contiene las funciones de interpolación y $\bar{\mathbf{q}}_f^*(t)$ contiene las variables nodales. El método co-rotacional propone una interpolación de las velocidades globales $\dot{\mathbf{r}}$, usando la misma matriz de interpolación de las posiciones locales en (5.15), en lugar de diferenciar la expresión (5.1), de forma que se escribe

$$\dot{\mathbf{r}}(z, t) = \mathbf{N}(z)\mathbf{v}^*(t), \quad (5.16)$$

donde $\mathbf{v}^* = [\mathbf{v}^{1T}, \dots, \mathbf{v}^{jT}, \dots, \mathbf{v}^{pT}]^T$, siendo p el número de nodos de la discretización y $\mathbf{v}^{jT} = [v_x^j, v_y^j, v_z^j]^T$, el vector velocidad absoluta del nodo. Nótese que los desplazamientos nodales $\bar{\mathbf{q}}_f^*$, están medidos en la referencia local mientras que las velocidades nodales, \mathbf{v}^{jT} , están medidas en ejes inerciales $\{i, j, k\}$. La expresión (5.16) proporciona una aproximación del campo real de velocidades alternativa a la que se obtiene en (5.14).

En un sólido rígido con movimiento espacial, el campo de velocidades queda determinado por la velocidad de dos puntos no alineados con el eje instantáneo de rotación. De esta forma, la velocidad de cualquier otro punto del sólido se obtiene

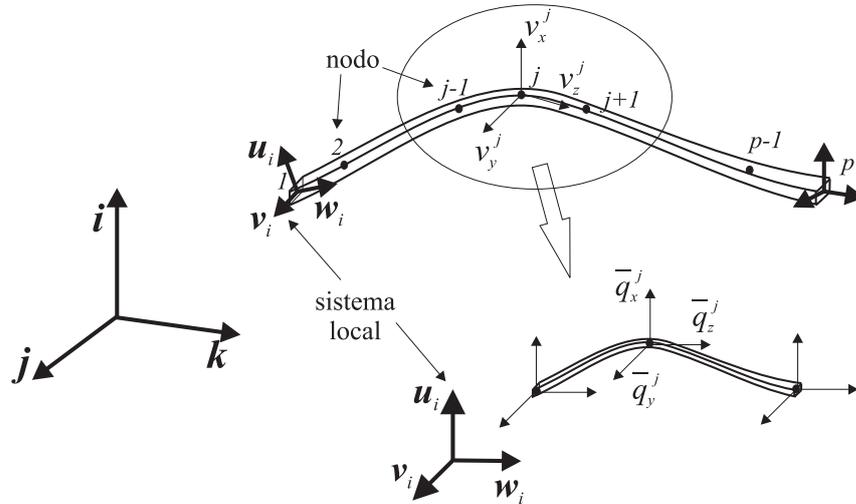


Figura 5.4: Método Co-rotacional. Discretización campo desplazamientos locales y velocidades globales.

como combinación lineal de las dos anteriores. Se ha supuesto que las deformaciones dentro de cada subestructura serán moderadamente pequeñas, de forma que la velocidad de un punto del sólido deformable será aproximadamente igual a una combinación lineal de las velocidades de dos de sus puntos [110]. Dicho esto, se propone el uso de una interpolación lineal (combinación lineal) de velocidades en la expresión (5.16), y por tanto en (5.15). Dicha interpolación dará lugar a una buena aproximación del campo de velocidades y además será sencilla desde el punto de vista de la formulación. De esta forma, se van a usar elementos finitos lineales con tres desplazamientos en cada nodo (figura 5.4). Así, la expresión (5.15) se transforma en

$$\bar{\mathbf{u}}_f = \mathbf{N} \bar{\mathbf{q}}_f^* = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_p & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_p & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}_f^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}_f^j \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{q}}_f^p \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

donde $\bar{\mathbf{q}}_f^j = [\bar{q}_x^j, \bar{q}_y^j, \bar{q}_z^j]^T$. Usando la expresión (5.16), la energía cinética se puede expresar como

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dm = \frac{1}{2} \mathbf{v}^{*T} \mathbf{M}_{MEF} \mathbf{v}^*, \quad (5.18)$$

donde \mathbf{M}_{MEF} , que es una matriz $3p \times 3p$ constante, es la matriz que aparece en el MEF para una barra discretizada con elementos tipo *link* 3D lineales y que es una salida común para cualquier código de EF comercial.

La expresión de la energía cinética obtenida en (5.18), con matriz de masa constante, es muy sencilla, aunque no está expresada en función de las coordenadas generalizadas del problema, \mathbf{q}^i , que vienen dadas por (5.4), y sus derivadas. Por lo tanto, es necesario relacionar las coordenadas generalizadas reales del problema con las velocidades globales de los nodos, \mathbf{v}^* . Para ello, se va a introducir la discretización de EF del campo de desplazamientos por deformación locales, $\bar{\mathbf{u}}_f$, dada por (5.17), en la expresión de los desplazamientos (5.1); y se va a derivar ésta

con respecto al tiempo, obteniéndose la siguiente expresión de las velocidades de la subestructura (se suprime el índice i que indica la subestructura)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}_{in} + \mathbf{N}\bar{\mathbf{q}}_f^*) + \mathbf{A}\mathbf{N}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_f^*. \quad (5.19)$$

Igualando esta expresión a (5.16), particularizando en el nodo j -ésimo, se tiene la siguiente igualdad

$$\mathbf{v}^j = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}_{in}^j + \bar{\mathbf{q}}_f^j) + \mathbf{A}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_f^j, \quad (5.20)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}_{in}^j$ es la posición del nodo j -ésimo en la configuración indeformada. En la expresión anterior, se ha tenido en cuenta que las funciones de interpolación, N_j , toman el valor unidad o cero en los nodos.

Por otro lado, se tiene que el campo de desplazamientos por deformación, $\bar{\mathbf{u}}_f$, viene dado por la expresión (5.2) que se obtuvo en el apartado anterior, de forma que el vector $\bar{\mathbf{q}}_f^j$ de desplazamientos nodales se obtiene particularizando la expresión (5.2) en el nodo correspondiente como sigue

$$\bar{\mathbf{q}}_f^j = \bar{\mathbf{u}}_f(z^j) = \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_k(z^j)\eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_l(z^j)\xi_l = \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_k^j\eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_l^j\xi_l, \quad (5.21)$$

donde $\bar{\Phi}_k^j$ es el k -ésimo modo estático y $\bar{\Psi}_l^j$ es el l -ésimo modo dinámico, ambos particularizados en el nodo j .

Introduciendo (5.21) y su derivada con respecto al tiempo en (5.20) y reorganizando, se puede escribir la siguiente relación, para todos los nodos de la discretización

$$\mathbf{v}^* = [\mathbf{v}^{1T}, \dots, \mathbf{v}^{jT}, \dots, \mathbf{v}^{pT}]^T = \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & b_{11}\mathbf{I} & b_{12}\mathbf{I} & b_{13}\mathbf{I} & \mathbf{A}\bar{\Phi}_1^1 & \dots & \mathbf{A}\bar{\Phi}_{n_s}^1 & \mathbf{A}\bar{\Psi}_1^1 & \dots & \mathbf{A}\bar{\Psi}_{n_d}^1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & b_{p1}\mathbf{I} & b_{p2}\mathbf{I} & b_{p3}\mathbf{I} & \mathbf{A}\bar{\Phi}_1^p & \dots & \mathbf{A}\bar{\Phi}_{n_s}^p & \mathbf{A}\bar{\Psi}_1^p & \dots & \mathbf{A}\bar{\Psi}_{n_d}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_0 \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\eta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\eta}_{m_s} \\ \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n_d} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

donde

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \bar{r}_{in,x}^1 + \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_{k,x}^1 \eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_{l,x}^1 \xi_l, \\
b_{12} &= \bar{r}_{in,y}^1 + \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_{k,y}^1 \eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_{l,y}^1 \xi_l, \\
b_{13} &= \bar{r}_{in,z}^1 + \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_{k,z}^1 \eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_{l,z}^1 \xi_l, \\
&\vdots \\
b_{p1} &= \bar{r}_{in,x}^p + \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_{k,x}^p \eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_{l,x}^p \xi_l, \\
b_{p2} &= \bar{r}_{in,y}^p + \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_{k,y}^p \eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_{l,y}^p \xi_l, \\
b_{p3} &= \bar{r}_{in,z}^p + \sum_{k=1}^{n_s} \bar{\Phi}_{k,z}^p \eta_k + \sum_{l=1}^{n_d} \bar{\Psi}_{l,z}^p \xi_l.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

La energía cinética se puede expresar, por tanto, como

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{M}_{MEF} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \tag{5.24}$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa definitiva de la subestructura, que viene dada por

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{M}_{MEF} \mathbf{B}. \tag{5.25}$$

Con el método anteriormente expuesto, se consigue una matriz de masa más sencilla que la que se hubiera conseguido derivando la expresión (5.1) directamente e introduciéndola en la expresión de la energía cinética. En cualquier caso, la mayor ventaja de este método es que facilita enormemente la obtención del vector de fuerzas de inercia cuadráticas en velocidades [56, 108] (que aparece en cualquier formulación con matriz de masa no constante), de forma que su expresión es tan simple como

$$\mathbf{Q}_v = -\mathbf{B}^T \mathbf{M}_{MEF} \dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{q}}, \tag{5.26}$$

siendo la obtención de $\dot{\mathbf{B}}$ trivial con la ayuda de (5.22) y (5.23). Avello [110] demostró que el método co-rotacional en el marco de las coordenadas naturales mantiene la convergencia del MEF. Además, también se muestra de forma teórica y numérica, que la aproximación no consistente en velocidades (5.16), usada en el método co-rotacional, proporciona buenos resultados.

5.1.6. Potencia disipada en una subestructura y fuerzas de amortiguamiento

Como se ha venido comentando a lo largo de esta tesis, las fuerzas de amortiguamiento histerético juegan un papel determinante en la dinámica del SET. En la literatura sobre dinámica de sistemas multicuerpo, en general, no se le presta gran atención a la formulación de estas fuerzas, recurriéndose a la técnicas desarrolladas en el campo de la dinámica de estructuras [111]. En primer lugar se van a formular las fuerzas de amortiguamiento histerético con un esquema similar al usado en dinámica de estructuras, esto es, suponiendo una matriz de amortiguamiento proporcional a las matrices de masa y rigidez. En segundo lugar, se propone una formulación de las fuerzas de amortiguamiento histeréticas equivalentes a las que aparecerían en un material con amortiguamiento viscoso, lo cual es suficientemente aproximado para frecuencias de excitación próximas a la frecuencia de cálculo de las constantes que caracterizan el amortiguamiento viscoso equivalente.

Amortiguamiento proporcional de Rayleigh

El amortiguamiento proporcional de Rayleigh, ampliamente usado en el campo de la dinámica de estructuras [111], está basado en suponer que la matriz de amortiguamiento se puede expresar como

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (5.27)$$

donde α y β son constantes que dependen del material. En este contexto, el amor-

tiguamiento modal se obtiene a través de la masa y rigidez modal como sigue

$$c_{ii} = 2\xi_i \sqrt{m_{ii}k_{ii}}, \quad (5.28)$$

donde i varía desde la unidad hasta la suma de modos estáticos y dinámicos, incluyendo los modos de torsión, que resulta ser $(n_s + n_d + n_{dt} + 1)$. Así, m_{ii} y k_{ii} son la masa y la rigidez asociadas a la i -ésima amplitud modal y ξ_i es la constante de amortiguamiento interno del material para cada modo de deformación.

Potencia disipada y función de disipación de Rayleigh

Este segundo procedimiento, ha sido también utilizado en la formulación de las fuerzas de amortiguamiento del modelo de Jeffcott, así como en García-Vallejo et al. [70] para la formulación de coordenadas nodales absolutas [56] y en Valverde et al. [86, 87, 45]. Este método está basado en la definición de una función de disipación de Rayleigh por medio de la expresión de la potencia disipada por las fuerzas internas del sólido flexible. En primer lugar, es necesario suponer que el material histerético se comporta como un material viscoso equivalente. En estas condiciones, se pueden realizar consideraciones análogas a las propuestas en el modelo del tether, basado en las ecuaciones de Kirchhoff-Love del capítulo 3, sobre la ley tensión-deformación. Por lo tanto, las únicas tensiones a tener en cuenta son las normales a la sección debidas a flexión y tracción-compresión, σ_{33} , y las tensiones tangenciales, σ_{31} y σ_{32} , debidas a la torsión. Estas relaciones vienen dadas de nuevo por

$$\sigma_{33} = E(\varepsilon_{33} + \gamma\dot{\varepsilon}_{33}), \quad (5.29)$$

$$\sigma_{31} = 2G(\varepsilon_{31} + \gamma\dot{\varepsilon}_{31}), \quad (5.30)$$

$$\sigma_{32} = 2G(\varepsilon_{32} + \gamma\dot{\varepsilon}_{32}), \quad (5.31)$$

donde γ es la constante de amortiguamiento viscoso equivalente, que se calcula de igual forma a como se mostró en 2.4.1. En las expresiones (5.29)-(5.31) se ha supuesto que la barra disipa energía con la misma constante de amortiguamiento

para deformaciones de dilatación pura y deformaciones relacionadas con el tensor desviador. Generalmente, en sólidos viscoelásticos lineales se usan diferentes constantes entre las dos formas de deformación. Las tensiones tangenciales debidas a la torsión en la sección de la barra serán

$$\tau = -\sigma_{31} = \sigma_{32}, \quad (5.32)$$

con deformación asociada $\epsilon_t = 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{32}$, de forma que la relación tensión-deformación se expresa como

$$\tau = G(\epsilon_t + \gamma\dot{\epsilon}_t). \quad (5.33)$$

La potencia disipada por el tether, teniendo en cuenta las relaciones tensión-deformación anteriores y la expresión de la energía de deformación dada por (5.11), es [72]

$$\begin{aligned} P_{dis} = & \left(\int_0^l \gamma EI_y \left(\frac{\partial^3 \bar{u}_{fx}}{\partial z^2 \partial t} \right)^2 dz + \int_0^l \gamma EI_x \left(\frac{\partial^3 \bar{u}_{fy}}{\partial z^2 \partial t} \right)^2 dz \right. \\ & \left. + \int_0^l \frac{1}{2} \gamma G (I_x + I_y) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right)^2 dz + \int_0^l \gamma EA_s \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_{fz}}{\partial z \partial t} \right)^2 dz \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Finalmente, suponiendo que la función de disipación de Rayleigh $F_d = 0.5P_{dis}$ [70] e introduciendo las expresiones de los desplazamientos por deformación (5.2) y giros por deformación (5.3) de la sección, es fácil obtener las fuerzas de amortiguamiento como

$$\mathbf{F}_a = -\frac{\partial F_d}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (5.35)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ son las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas.

5.1.7. Fuerzas externas de Lorentz sobre una subestructura.

Como se explicó en el capítulo de introducción de esta tesis, la fuerza de Lorentz que el campo magnético de la Tierra genera sobre el tether, se puede modelar como una fuerza distribuida por unidad de longitud de módulo constante y dirección perpendicular a la línea media del tether. En los ejes que se han considerado

inerciales $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, dicha fuerza gira alrededor de \mathbf{k} con una frecuencia igual a la velocidad angular orbital del tether, Ω . De esta forma, el vector fuerza tendrá la siguiente expresión

$$\mathbf{F}^T = [F\cos(\Omega t), F\sen(\Omega t), 0]^T, \quad (5.36)$$

donde F es una fuerza distribuida cuyo valor viene dado en la tabla 1.3 de la introducción. La fuerza generalizada debida a esta sollicitación externa sobre el tether se obtiene como

$$\mathbf{Q}_{ext} = \int_0^l \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} dz, \quad (5.37)$$

donde \mathbf{r} , que es la posición de un punto genérico de la subestructura, viene dado por (5.1) y \mathbf{q} es el vector de coordenadas generalizadas de la subestructura, dado en (5.4).

5.1.8. Ecuaciones de Lagrange de una subestructura. Aplicación de las restricciones cinemáticas

Una vez determinadas las expresiones de la energía cinética, energía potencial, fuerza generalizada asociada a las fuerzas externas y función de disipación, las ecuaciones de movimiento de una subestructura se obtienen mediante las ecuaciones de Lagrange, cuya expresión es [56]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right) - \frac{\partial L^i}{\partial \mathbf{q}^i} + \frac{\partial F_d^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} = \mathbf{Q}_{ext}^i, \quad (5.38)$$

donde L^i es el Lagrangiano, $L^i = T^i - U^i$ (el índice i indica la subestructura). Sustituyendo las expresiones de T^i , U^i , F_d^i y \mathbf{Q}_{ext}^i en la expresión anterior se obtiene

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i = \mathbf{Q}_v^i + \mathbf{Q}_{ext}^i, \quad (5.39)$$

donde \mathbf{M}^i es la matriz de masa de la subestructura que viene dada por (5.25); \mathbf{K}^i es la matriz de rigidez, cuya expresión se deriva de (5.11); \mathbf{C}^i es la matriz de amortiguamiento, que se obtendrá por uno de los dos procedimientos expuestos anteriormente y \mathbf{Q}_v^i es el vector de fuerzas de inercia cuadráticas en velocidad,

dado por (5.26). En las ecuaciones (5.38) y (5.39), se ha supuesto que las variables \mathbf{q}^i son independientes.

Además del balance de fuerzas generalizadas que representa la ecuación anterior, es necesario aplicar una serie de restricciones cinemáticas en cada subestructura que garanticen el cumplimiento de ciertas relaciones, como será por ejemplo, la ortogonalidad de los vectores unitarios. En este caso, las variables \mathbf{q}^i son dependientes, por lo que el cumplimiento de estas restricciones cinemáticas, que a partir de este momento serán referidas como

$$\Phi^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^{i+1}, t) = \mathbf{0}, \quad (5.40)$$

requiere modificar el equilibrio de fuerzas generalizadas (5.39). Esto se hace mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, que introducen en el sistema las fuerzas generalizadas necesarias para que se cumplan las restricciones (5.40). De esta forma, la ecuación (5.39) se transforma en

$$\mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{C}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{K}^i \mathbf{q}^i + (\Phi_{\mathbf{q}^i}^i)^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}_v^i + \mathbf{Q}_{ext}^i, \quad (5.41)$$

donde $\Phi_{\mathbf{q}^i}^i$ representa el jacobiano de las restricciones y $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores de Lagrange. Para resolver el problema, a esta ecuación habrá que añadir las ecuaciones (5.40), con lo que se consigue el mismo número de ecuaciones e incógnitas, ya que los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ no son conocidos. A continuación, se van a mostrar las ecuaciones de restricción a considerar para cerrar el problema.

En primer lugar, es necesario imponer restricciones en cada subestructura que garanticen que los vectores \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i y \mathbf{w}_i , son unitarios y ortogonales entre sí, de la

siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{u}_i - 1 &= 0 \\
\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{v}_i - 1 &= 0 \\
\mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{w}_i - 1 &= 0 \\
\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{v}_i &= 0 \\
\mathbf{u}_i^T \cdot \mathbf{w}_i &= 0 \\
\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{w}_i &= 0
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Por otro lado, como se apuntó cuando se introdujeron los modos estáticos de una subestructura en (5.2), las amplitudes de dichos modos, η_k^i , no son independientes. Por lo tanto, se van a derivar restricciones que expresen la dependencia de dichas amplitudes con respecto a las coordenadas naturales de la subestructura, $\{\mathbf{r}_0^i, \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i\}$ y $\{\mathbf{r}_0^{i+1}, \mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}\}$.

Así, se tienen η_1^i , η_2^i y η_3^i , relacionadas con las deformaciones debidas a las variaciones de las coordenadas naturales en exceso, \mathbf{r}_0^{i+1} (figuras 5.2-(a)-(b)-(c)). En ejes locales de la subestructura, la deformación que sufre ésta por los movimientos de \mathbf{r}_0^{i+1} con respecto a \mathbf{r}_0^i será

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{A}^{iT} \mathbf{r}_0^{i+1} - \bar{\mathbf{r}}_{in}^i(l) - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{r}_0^i, \tag{5.43}$$

donde \mathbf{A}^{iT} es la matriz de giro de los ejes inerciales con respecto a los ejes locales correspondientes a la subestructura i -ésima y $\bar{\mathbf{r}}_{in}^i(l) = [0, 0, l]^T$ es la posición en ejes locales en la configuración indeformada de \mathbf{r}_0^{i+1} . De esta forma, la restricción correspondiente se puede expresar como

$$\mathbf{a}^i - \boldsymbol{\eta}_a^i = \mathbf{0}, \tag{5.44}$$

donde $\boldsymbol{\eta}_a^i = [\eta_1^i, \eta_2^i, \eta_3^i]^T$.

En segundo lugar se tienen η_4^i , η_5^i y η_6^i , relacionadas respectivamente con los giros (de magnitud pequeña) alrededor de los vectores unitarios \mathbf{u}_{i+1} , \mathbf{v}_{i+1} y \mathbf{w}_{i+1} , que provocan desplazamientos según las direcciones \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i y torsión de la subestructura (figuras 5.2-(d)-(e)-(f)). Para plantear las restricciones asociadas a estos

vectores, se va a construir una matriz de giros por deformación Γ^{i+1} , que aplicada sobre cada uno de los vectores $\bar{\mathbf{u}}_{i+1}$, $\bar{\mathbf{v}}_{i+1}$ y $\bar{\mathbf{w}}_{i+1}$ (expresados en ejes locales), proporciona su posición después de la deformación en los ejes locales. Esta matriz, siendo los giros infinitesimales, tiene la forma

$$\mathbf{\Gamma}^{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\eta_4 & \eta_6 \\ \eta_4 & 1 & -\eta_5 \\ -\eta_6 & \eta_5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Las restricciones asociadas se obtienen seleccionando tres ecuaciones independientes de las nueve siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{\Gamma}^{i+1} \bar{\mathbf{u}}_{i+1} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{iT} \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{\Gamma}^{i+1} \bar{\mathbf{v}}_{i+1} &= \mathbf{0} \quad , \\ \mathbf{A}^{iT} \mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{\Gamma}^{i+1} \bar{\mathbf{w}}_{i+1} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.46)$$

ya que las otras seis están repetidas. Con esto, se tendría caracterizado el vector de restricciones de cada subestructura $\Phi^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{q}^{i+1}, t)$.

5.1.9. Ecuaciones de movimiento del SET. Acoplamiento de las subestructuras

Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento de una subestructura (5.41), es necesario imponer restricciones que las acoplen todas, de forma que reproduzcan el sólido original que se está estudiando: el tether. Esto se consigue sin más que compartir las coordenadas naturales que se encuentran exactamente en las uniones entre subestructuras. De esta forma, usando para el montaje de las matrices un procedimiento análogo al que se usa en el MEF, se tendrían las ecuaciones de movimiento del tether completo. Una vez hecho esto, sólo falta aplicar las restricciones de rotación a velocidad constante ω_{spin} del módulo central (sobre la primera subestructura) e introducir el contactor como un sólido rígido conectado al extremo

de la última subestructura. Las primeras vendrán dadas por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_0^1 &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{u}_1 &= [\cos(\omega_{spin}t), \sin(\omega_{spin}t), 0]^T \\
 \mathbf{v}_1 &= [-\sin(\omega_{spin}t), \cos(\omega_{spin}t), 0]^T \\
 \mathbf{w}_1 &= \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

En lo que respecta al contactor, se añadirán al sistema de ecuaciones existente, las ecuaciones de movimiento de un disco de masa m_d , radio R y espesor e , asociadas a un sólido que está descrito por la posición, \mathbf{r}_0^c , de un sistema local de coordenadas dado por \mathbf{u}_c , \mathbf{v}_c y \mathbf{w}_c . Estas ecuaciones se encuentran en la literatura sobre dinámica de sistemas multicuerpo rígidos descritos por coordenadas naturales [58], así como en la referencia [44]. Finalmente, se harán coincidir las coordenadas naturales del contactor con las finales del tether, de forma que ambos sólidos estén rígidamente unidos.

En estas condiciones, el sistema de ecuaciones del SET tendrá la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{Q} \\
 \Phi(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

donde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_{ext} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q}$.

5.1.10. Resolución de las ecuaciones de movimiento del SET

A la hora de resolver el sistema de ecuaciones algebraico-diferencial (5.48) por integración numérica, existen numerosos procedimientos [56, 76, 109]. En general, es necesario que el método garantice el cumplimiento de las restricciones, que tenga buena precisión y que sea estable, de forma que el proceso de integración no “explote” por acumulación de errores numéricos. Bayo et al. [112] y Cuadrado et al. [108, 109] recomiendan el uso de formulaciones de Lagrange aumentadas con proyecciones sobre las restricciones, en el entorno de las formulaciones en

coordenadas naturales con sólidos rígidos y flexibles. Hay que tener en cuenta que en este tipo de problemas mixtos con sólidos tanto rígidos como flexibles, las ecuaciones de movimiento tienden a ser muy “rígidas”, es decir, las frecuencias que caracterizan el problema son muy dispares. Además, la geometría del problema bajo estudio refuerza la aparición de estas frecuencias dispares en la solución. Esto es debido a que el tether es una barra altamente distorsionada, ya que su sección es muy pequeña frente a su longitud, lo que implica que las frecuencias asociadas a movimientos de deformación longitudinales son mucho mayores que las asociadas a movimientos de deformación por flexión.

En particular, la formulación de Lagrange aumentada de índice 3 con proyecciones de las velocidades y aceleraciones ortogonales a la matriz de masa [112, 108, 109], ha sido usada para resolver las ecuaciones (5.48). De esta forma, el sistema de n ecuaciones y m restricciones con n coordenadas generalizadas, \mathbf{q} , y m multiplicadores de Lagrange, $\boldsymbol{\lambda}$, se transforma en

$$M\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{Q}, \quad (5.49)$$

de dimensión reducida n , donde $\boldsymbol{\lambda}^*$ es el vector de multiplicadores de Lagrange modificado y α es un factor de penalización, es decir, un número muy alto. Para obtener el vector de multiplicadores de Lagrange modificado y así tener el mismo número de ecuaciones y de incógnitas, se usa el siguiente proceso iterativo

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+1}^* = \boldsymbol{\lambda}_i^* + \alpha \Phi_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.50)$$

donde el subíndice i representa la iteración en que se encuentra el proceso. En el límite, cuando las restricciones se cumplen exactamente, se demuestra [109] que $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}$. Una vez que las ecuaciones están escritas en la forma (5.49), se utiliza la regla trapezoidal a nivel de aceleraciones y velocidades [76, 109], de forma que estas ecuaciones se transforman en un sistema algebraico no-lineal en función de las posiciones \mathbf{q} , y por supuesto, de los multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}^*$. Este sistema se resuelve mediante el método de Newton-Raphson modificado, de forma que la

iteración (5.50) se lleva a cabo en cada paso de tiempo. Este proceso de integración es robusto y garantiza que las restricciones y sus derivadas se cumplen con la precisión que requiera el analista [109]. Además, se resuelve un número reducido de ecuaciones, con el ahorro computacional que ello conlleva.

5.2. Resultados de la simulación dinámica multicuerpo

Con el modelo descrito anteriormente se realizaron numerosas pruebas, con la intención de encontrar el número óptimo de subestructuras para la longitud real del tether, que como se apuntó en la introducción de esta tesis es de $l = 100$ m. El número total de subestructuras debe ser aquel para el que los desplazamientos elásticos, que se produzcan dentro de dichas subestructuras, sean suficientemente pequeños, como para no violar las hipótesis de pequeños desplazamientos elásticos asumidas en el modelo de viga de Euler-Bernoulli. Por otro lado, hay que tener en cuenta que, a mayor número de subestructuras, mayor número de ecuaciones e incógnitas que resolver. Habiéndose usado dos modos dinámicos de flexión en cada plano, es decir $n_{df} = 2$, dos modos dinámicos axiales, $n_{da} = 2$ y dos de torsión, $n_{dt} = 2$, de forma que el número total de modos dinámicos por cada subestructura es de 8, así como un total de seis modos estáticos, contando el de torsión, cada subestructura tiene 12 grados de libertad de sólido rígido más 14 amplitudes modales, es decir, un total de 26 grados de libertad. De esta forma, el coste computacional del incremento de subestructuras es alto, tanto más cuanto mayor es el número total sobre el que se incrementa. Esto es debido a que el número de elementos en las matrices no aumenta de forma lineal sino cuadrática.

Finalmente, para la longitud y geometría real del tether, se comprobó que 10 subestructuras era el número óptimo, lo cual da lugar a 10×26 más 12 (correspondientes al contactor) grados de libertad. Dado el elevado número de ecuaciones e incógnitas del problema, el método de Lagrange aumentado, en el que las res-

tricciones no se resuelven como ecuaciones del sistema, resultó ser muy apropiado a la hora de resolver las ecuaciones de movimiento del SET. Además, cada subestructura se dividió en un total de 10 elementos finitos lineales para llevar a cabo la aproximación co-rotacional de la energía cinética, ver (5.16).

En cuanto a la desviación inicial del SET, ésta se ha modelado suponiendo que la estructura se deforma según su primer modo de flexión en la dirección de menor momento de la sección, de forma que la punta del tether se encuentra a 7 m de la posición recta inicial. La velocidad angular, ω_{spin} , es cero en el instante inicial, alcanzando su valor final de forma gradual (rampa cosenoidal) en 50 s.

Una vez decidida la metodología de resolución y las características del modelo, se resolvió para distintas velocidades de rotación, tanto subcríticas como supercríticas. Se comprobó [44], que usando una sola subestructura, es decir, con una descripción geoméricamente lineal de las fuerzas elásticas y de amortiguamiento; el sistema es estable a velocidades subcríticas pero se vuelve inestable tan pronto se supera la velocidad crítica del sistema, como sugiere la literatura más común sobre dinámica de rotores [27, 26]. Una vez que el sistema se modela con el número suficiente y apropiado de subestructuras, las soluciones para velocidades supercríticas permanecen acotadas en ejes inerciales, tendiendo a una flecha fija cuando se alcanza el estado permanente, si estas soluciones se proyectan en un triedro móvil que gira con velocidad angular constante ω_{spin} alrededor del eje \mathbf{k} . En lo que sigue, se van a presentar los resultados correspondientes a las mencionadas simulaciones. Se va a mostrar la posición del contactor \mathbf{r}_0^c proyectada en los ejes rotatorios que se acaban de mencionar. De esta forma, las tres coordenadas del contactor en los ejes móviles vendrán dadas por

$$[x, y, z]^T = \mathbf{A}^{1T} \mathbf{r}_0^c, \quad (5.51)$$

donde \mathbf{A}^{1T} es la matriz de cambio entre los ejes inerciales y los rotatorios.

La figura 5.5 muestra la evolución con el tiempo de las coordenadas x (según \mathbf{e}_1) e y (según \mathbf{e}_2) del contactor, así como su trayectoria proyectada en el plano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, para una velocidad $\omega_{spin} = 1.31\omega_c$, donde $\omega_c^2 = \frac{EI_1}{m_d L^3}$ se definió en el

capítulo 3 para adimensionalizar las ecuaciones de Kirchhoff-Love del SET. De esta forma, teniendo en cuenta que la velocidad crítica será $\omega_{crit} = 1.14\omega_c$, estas figuras muestran cómo el contactor tiende hacia una flecha constante en los ejes móviles (solución periódica acotada en ejes inerciales) tras un periodo transitorio. Como se puede observar, la flecha final es muy alta, aun cuando la velocidad no excede demasiado la crítica, siendo su valor final del orden de 57 m, que representa más del 50 % de la longitud total del tether.

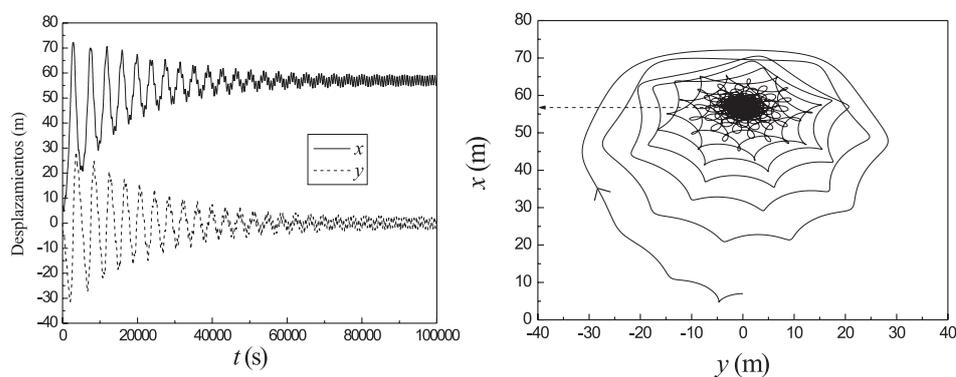


Figura 5.5: Evolución con el tiempo de la posición del contactor y trayectoria para $\omega_{spin} = 1.31\omega_c$.

La pequeña oscilación alrededor de la solución de flecha constante que muestra la figura 5.5, se atribuye a la propagación de errores numéricos por el largo tiempo de integración necesario para apreciar la evolución del sistema, que tendrá por tanto, unos tiempos característicos muy altos. Esta oscilación ha sido también observada en simulaciones para valores pequeños de la velocidad angular, $\omega_{spin} = 0.2\omega_c, 0.5\omega_c, 0.6\omega_c, 0.8\omega_c, 0.925\omega_c$, todos en la zona subcrítica. Esto indica que la oscilación no es debida a una solución periódica en los ejes móviles, ya que en este intervalo de velocidades este tipo de soluciones no es posible, como se vio en el capítulo 3.

La figura 5.6 muestra la evolución del contactor para una velocidad superior

a la anterior, del orden del doble de la velocidad crítica. En este caso, la flecha alcanza aproximadamente los 86.7 m, es decir, el tether se encuentra totalmente flectado y casi paralelo al eje e_1 móvil. Tanto esta solución como la anterior serían inadmisibles en condiciones de operación reales del SET.

Todos los resultados expuestos hasta el momento muestran la evolución del SET en ausencia de fuerzas de Lorentz de frenado, es decir, $F = 0$. En las figuras 5.7 y 5.8 se compara la evolución del contactor en los dos casos, con y sin fuerza de frenado. Como se puede observar, la diferencia entre ambas trayectorias es muy pequeña y además la fuerza de Lorentz no introduce ninguna alteración en la dinámica del sistema que sea apreciable, es decir, nuevos equilibrios u otros cambios en la topología de los resultados. Como se apuntó en la introducción, la fuerza de frenado es aproximadamente mil veces menor que las fuerzas centrífugas. Además, la frecuencia de las fuerzas de Lorentz, Ω , es mucho menor que la primera frecuencia natural de flexión del sistema tether-contactor, ω_n . Así, teniendo en cuenta la curva del factor dinámico de carga del sistema [25], la deflexión producida por la fuerza de Lorentz será del orden de la que produciría la misma fuerza aplicada de forma estática, es decir, muy pequeña. De esta forma, en principio, la no inclusión de

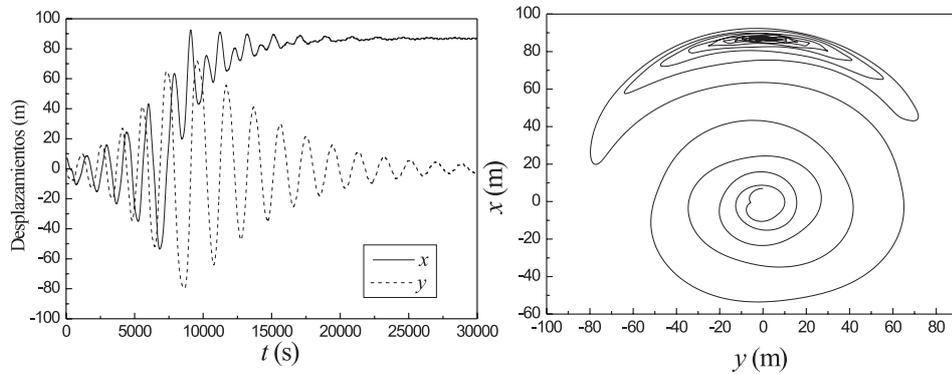


Figura 5.6: Evolución con el tiempo de la posición del contactor y trayectoria para $\omega_{spin} = 2.6\omega_c$.

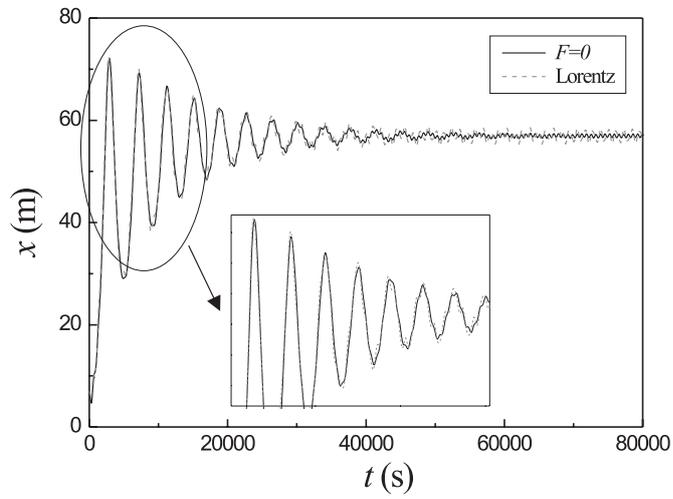


Figura 5.7: Evolución con el tiempo de la posición x del contactor para $\omega_{spin} = 1.31\omega_c$ con y sin fuerza de frenado de Lorentz.

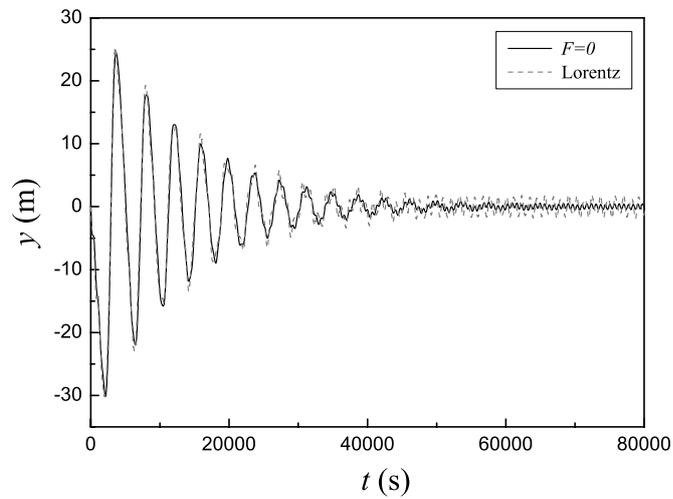


Figura 5.8: Evolución con el tiempo de la posición y del contactor para $\omega_{spin} = 1.31\omega_c$ con y sin fuerza de frenado de Lorentz.

estas fuerzas en el modelo de Cosserat del capítulo 3 está justificada.

En el capítulo 6, de comparación de resultados entre los distintos modelos presentados en esta tesis, se mostrarán más simulaciones llevadas a cabo con el modelo DSM de este capítulo. Finalmente a modo de recapitulación, se van a enumerar una serie de ideas y conclusiones sobre el modelo multicuerpo usado en este capítulo:

- Frente a otras formulaciones multicuerpo, como pueden ser las coordenadas nodales absolutas [56, 102], la barra 3D de Simo y Vu-Quoc [98, 99] o de G eradin y Cardona [101], todas ellas basadas en el MEF con coordenadas referidas a ejes globales, la formulación en coordenadas naturales con subestructuración ha resultado ser fácil de implementar, precisa (como se verá en el capítulo 6) y rápida desde el punto de vista computacional. Como es bien sabido en la comunidad de los sistemas multicuerpo, el hecho de describir mediante coordenadas globales tanto los grandes movimientos de sólido rígido como las deformaciones, que en muchos casos pueden ser de pequeña magnitud, presenta problemas en la integración numérica de las ecuaciones, que son altamente rígidas. Este fenómeno de rigidez numérica es evitado por la formulación usada en esta tesis, ya que las deformaciones y los movimientos de sólido rígido se describen de forma separada.
- La importancia de las simulaciones dinámicas es doble, ya que muestran la solución hacia la que tiende el sistema y además, como dicho sistema se aproxima a estas soluciones; es decir, muestran el transitorio del sistema, información que no se obtiene con el tratamiento paramétrico usado en el capítulo 3.
- Mediante las simulaciones dinámicas llevadas a cabo con este modelo, se ha comprobado que la no-linealidad rige la dinámica del sistema rotativo para velocidades supercríticas. Esta idea fue lanzada a finales de los 60 por Genin y Maybee [36, 37, 38], para un modelo muy simple de 2 grados de libertad,

el modelo de Jeffcott, que también ha sido usado en esta tesis. Mediante las simulaciones aquí mostradas, se ha extendido esta idea a un sistema mucho más complejo que el de Jeffcott. Esto indica que en cualquier sistema rotativo, ya sea sencillo o complejo, en principio habrá que tener en cuenta la importancia del amortiguamiento interno del material y su influencia, en posibles configuraciones inestables de dichos sistemas.

Capítulo 6

Comparación de resultados

A lo largo de esta tesis se han usado diferentes métodos, tanto para la simulación dinámica como para el análisis de estabilidad del SET. En este capítulo se van a comparar dichos métodos de forma que se podrá establecer la validez de los modelos más simplificados (modelo de Jeffcott) comparándolos con los modelos más exactos que se han llevado a cabo (modelos de Cosserat y DSM). Por otro lado, los modelos más exactos del SET que se han presentado, el modelo DSM y el de Cosserat, también pueden ser comparados en términos de posición final del tether, una vez que la simulación dinámica alcance la posición de equilibrio final. La coincidencia de las posiciones finales daría validez a ambos modelos, ya que se llegaría al mismo resultado por dos métodos bastante distintos.

6.1. Comparación de los diferentes diagramas de bifurcación y su estabilidad

En el capítulo 2 se obtuvieron diagramas de bifurcación y estabilidad del SET mediante el modelo simplificado de Jeffcott. Por otro lado, en el capítulo 3 se volvieron a generar dichos diagramas para un modelo del SET mucho más deta-

llado y exacto que el anterior, el modelo geoméricamente exacto de Cosserat. El modelo de Jeffcott, con tan sólo dos grados de libertad, se puede considerar válido aproximadamente, hasta el doble de su segunda frecuencia natural de flexión ($2\omega_{n2}$), cantidad hasta la cual se trazaron las ramas de equilibrios en las figuras presentadas en dicho capítulo. Además, el modelo elástico y de amortiguamiento geoméricamente no-lineal usado es válido para desplazamientos elásticos relativamente pequeños. En este apartado, se van a comparar los resultados obtenidos con ambos modelos en el rango de velocidades angulares en el que el modelo de Jeffcott se puede considerar válido. Para realizar dicha comparación, se va a usar un sistema cuya geometría está más cercana a la geometría real de un rotor desequilibrado que a la del SET. Esta geometría fue usada en Valverde et al. [86] y proporciona diagramas de bifurcación para el modelo de Jeffcott que se pueden comparar, desde un punto de vista cualitativo, con aquellos generados con el modelo de Cosserat. De esta forma, la longitud del eje será, $l = 25$ m, con sección rectangular de área, $A_s = 0.8 \times 0.7$ m², e inercias, $I_1 = 2.9866 \times 10^{-2}$ m⁴ e $I_2 = 2.2866 \times 10^{-2}$ m⁴, módulo de Young, $E = 1.32 \times 10^9$ N/m², y densidad, $\rho = 8245$ kg/m³. El disco tendrá una masa, $m_d = 1$ kg, radio, $R_d = 0.2$ m y espesor $e = 0.01$ m. Debido a la desviación inicial, el disco está a una distancia, $h = 7.5 \times 10^{-3}$ m = 0.03 % l , de la posición recta. Los valores de los parámetros adimensionales para ambos modelos vienen dados en la tablas 6.1 y 6.2. El rango de frecuencias de giro estudiado es $\omega \in [0, 2\omega_{n2}] \sim [0, 1.06]$ rad/s. En ambos modelos, para el caso en el que el eje está inicialmente recto, los puntos de bifurcación desde los que nacen las ramas de soluciones supercríticas coinciden, siendo BP1=0.455 rad/s y BP2=0.52 rad/s.

| | |
|----------------|-------------------------|
| R | 0.875 |
| q_{30} | 1.9016×10^{-2} |
| $\bar{\gamma}$ | 0.05 |
| $\bar{\omega}$ | 0-2 |

Tabla 6.1: Variables adimensionales para el modelo de Jeffcott.

| | |
|---------------------|-------------------------|
| P | 0.1015 |
| R | 0.766 |
| Q | 11719.01 |
| r_m | 115430 |
| r_1 | 1.6243×10^{-6} |
| r_2 | 2.03×10^{-5} |
| r_3 | 4.4644×10^{-5} |
| $\bar{\kappa}_{20}$ | 6×10^{-4} |

Tabla 6.2: Variables adimensionales para el modelo de Cosserat.

La figura 6.1, muestra los desplazamientos transversales adimensionales del contactor, x_1 y x_2 , según los ejes e_1 y e_2 del triedro móvil, respectivamente, frente a la frecuencia de giro ω para el modelo de Cosserat. La línea gruesa representa soluciones estables mientras que la línea delgada representa soluciones inestables. En dicha figura, se puede ver como para velocidades justo por encima de la velocidad crítica, los desplazamientos elásticos aumentan con gran rapidez para pequeños incrementos de la velocidad de giro.

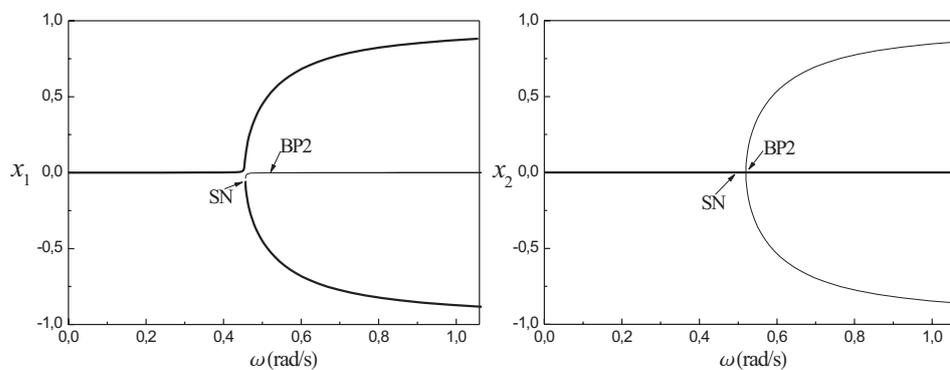


Figura 6.1: Ramas de equilibrios, modelo de Cosserat.

Por otro lado, la figura 6.2 muestra los desplazamientos transversales adimen-

sionales del disco, q_3 y q_4 , para el modelo de Jeffcott. Comparando ambas figuras, se puede observar como ambos modelos predicen el mismo comportamiento, tanto para velocidades subcríticas como supercríticas, siendo además la estabilidad de las ramas igual en ambos casos. En el modelo de Jeffcott, el carácter 3D de la rama que nace en BP2 se puede apreciar a simple vista, sin embargo, en el modelo de Cosserat la proyección de dicha rama en x_1 prácticamente se confunde con $x_1 = 0$ (rama de soluciones plana). En cualquier caso, se puede decir que el modelo de Jeffcott, desde un punto de vista cualitativo, describe el comportamiento del sistema de una forma correcta en el rango de velocidades de giro en el que se puede considerar válido.

Por otro lado, si se comparan los desplazamientos reales obtenidos con ambos modelos (ver figura 6.3), éstos coinciden con gran precisión en la zona subcrítica mientras que en la supercrítica la diferencia se dispara cuanto mayor es la velocidad. En la zona subcrítica, los términos lineales de las fuerzas elásticas son más importantes que los no-lineales. El modelo elástico de Jeffcott reproduce la parte lineal de las fuerzas elásticas con buena precisión, por lo que ambos modelos se comportan de forma muy similar en esta región. Sin embargo, cuando los términos no-lineales pasan a dominar el comportamiento del sistema, zona supercrítica, el

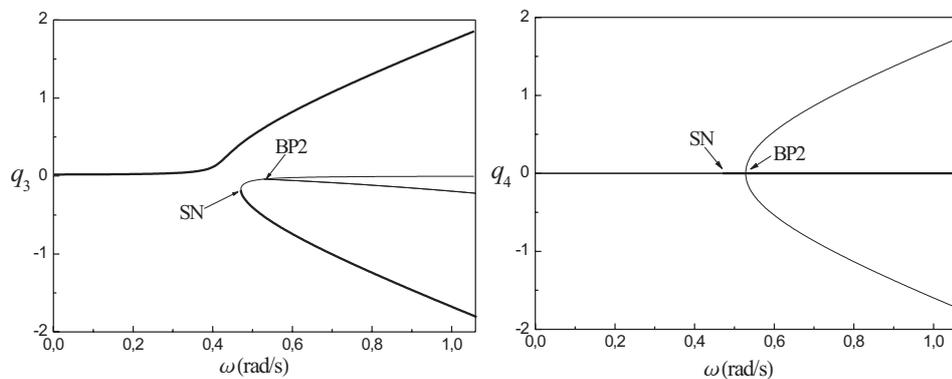


Figura 6.2: Ramas de equilibrios, modelo de Jeffcott.

modelo elástico de Jeffcott no es capaz de reproducir los resultados con exactitud, aunque sí muestra la tendencia que siguen las soluciones, como se puede observar comparando las figuras 6.1 y 6.2.

Por otro lado, hay que decir que cuanto más esbelta es la estructura, es decir, cuanto más se aleja de las dimensiones de un rotor y más se aproxima a las dimensiones del tether, más importancia cobran los términos no-lineales. En estas condiciones, la diferencia que existe entre los resultados que proporcionan ambos modelos en la zona supercrítica es mayor aún que la presentada en la figura 6.3, aunque de nuevo el modelo de Jeffcott capta los puntos BP1 y BP2 con exactitud.

6.2. Comparación de las diferentes simulaciones dinámicas

Como se dijo en la sección anterior, el modelo de Jeffcott funciona mejor cuanto más se asemeja la geometría del sistema a la de un rotor, es decir, eje menos

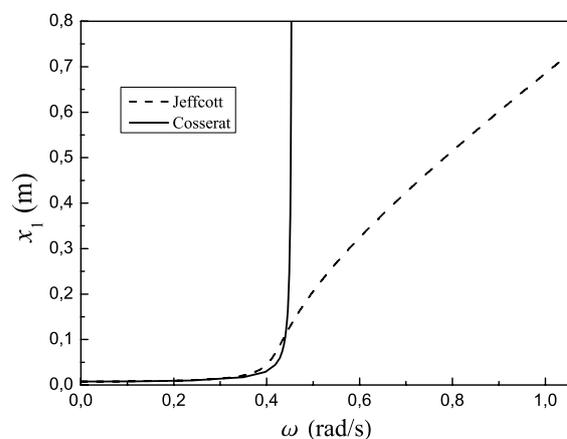


Figura 6.3: Comparación de los modelos de Jeffcott y Cosserat en términos de desplazamiento dimensional frente a la velocidad de giro.

esbelto, menor desviación inicial, etc. En esta sección se van a comparar las simulaciones dinámicas del modelo de Jeffcott frente a las obtenidas con el modelo DSM, del capítulo 5. Para ello, por tanto, se va a usar la misma geometría que en el apartado anterior. En las simulaciones dinámicas, la velocidad angular se aplica mediante una función rampa, que empieza desde el valor cero y alcanza la velocidad constante deseada, ω_{spin} , en un tiempo $t_r = 10$.

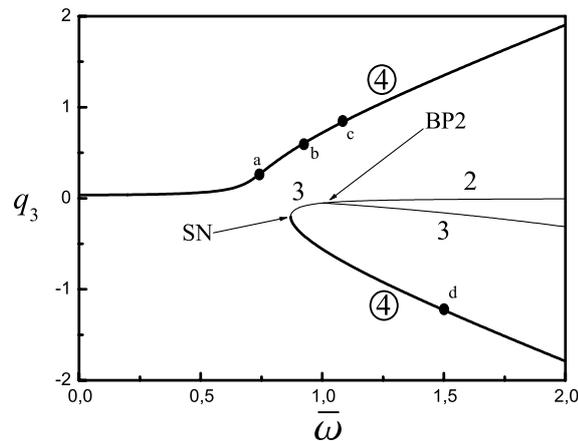


Figura 6.4: Velocidades de simulación para la comparación de los modelos de Jeffcott y DSM.

Se van a analizar diferentes casos, para diferentes velocidades de giro. Se han seleccionado estas velocidades de giro en zonas interesantes del diagrama de bifurcación del modelo de Jeffcott, dado en la figura 6.4, donde coexisten varias soluciones estables o inestables. Las simulaciones van a proporcionar información sobre el transitorio del sistema. Los diagramas de bifurcación no dan ese tipo de información, sin embargo, conociendo los autovalores de las soluciones y su estabilidad es posible predecir el comportamiento dinámico del sistema, por lo menos, cerca de dichas soluciones. En la figura 6.4, los números cercanos a las ramas representan la cantidad de autovalores con parte real negativa en dichas soluciones.

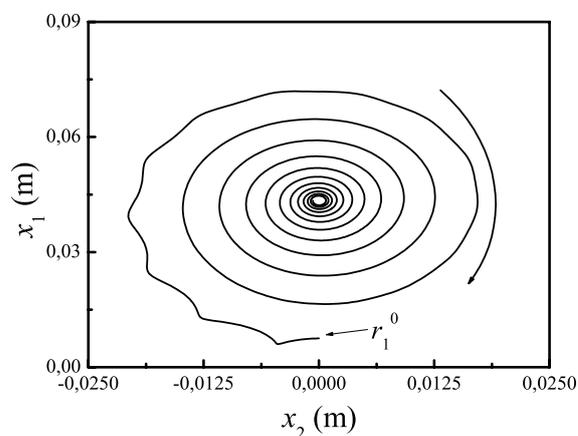
6.2.1. Caso A. Velocidad subcrítica, $\bar{\omega} = 0.8$ 

Figura 6.5: Simulación del modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.8$.

En este caso, la velocidad real de giro es $\omega_{spin} = 0.42192$ rad/s, siendo la velocidad crítica en este caso $\omega_{crit} = 0.4614 = R\omega_{n2}$. Tanto el modelo de Jeffcott como el de Cosserat, predicen una sola solución. Esta solución, que es estable, es bien conocida en la dinámica de rotores lineal [26, 27]. Dicha solución del modelo de Jeffcott, según el análisis llevado a cabo en el capítulo 2, tiene los 4 autovalores con parte real negativa. Como se puede ver en la figura 6.5, donde se representa la trayectoria del disco en los ejes móviles $\{e_1, e_2\}$ para el modelo de Jeffcott, la trayectoria parte de la condición inicial, r_1^0 , y viaja hacia el equilibrio estable siguiendo una espiral. Esto indica, que la dinámica está dominada por un par de autovalores conjugados, cuya parte imaginaria indica aproximadamente la frecuencia con la que la trayectoria describe los giros de la espiral.

La figura 6.6 muestra la trayectoria del contactor, de nuevo en los ejes móviles, para el modelo DSM. Como en el modelo de Jeffcott, la trayectoria tiende en forma de espiral hacia el único equilibrio estable de esta zona. Esto indica que aun siendo el modelo DSM mucho más detallado que el de Jeffcott, la dinámica que prevalece

(par de autovalores conjugados) es captada por ambos. Además, para este valor de la velocidad la flecha final alcanzada por el sistema en ambos modelos difiere en menos de un 4%. Observando de nuevo ambas figuras, se puede apreciar que sobre la espiral dominante se superpone una vibración. En el modelo de Jeffcott dicha vibración desaparece, sin embargo, en el modelo DSM la vibración permanece hasta que se alcanza el equilibrio final. Esto se puede atribuir a la influencia de los grados de libertad de rotación del disco en el modelo DSM y a la vibración longitudinal del tether, efectos que no están caracterizados en el modelo de Jeffcott.

La figura 6.7 muestra la evolución de las dos componentes de las fuerza elástica en el modelo de Jeffcott frente al desplazamiento relativo del disco según el eje móvil e_1 . Como se puede observar, la componente lineal de la fuerza domina sobre la componente no-lineal, lo que explica el buen comportamiento del modelo de Jeffcott en este rango de velocidades de giro. Como se dijo en el capítulo 2, el modelo elástico que describe la flexibilidad del eje en el modelo de Jeffcott es válido cuando las fuerzas lineales predominan sobre la no-lineales, ya que la descripción de la parte no-lineal es aproximada [69]. El límite de validez cuantitativa del modelo elástico, por tanto, será el punto en el que la fuerzas elásticas no-lineales sean

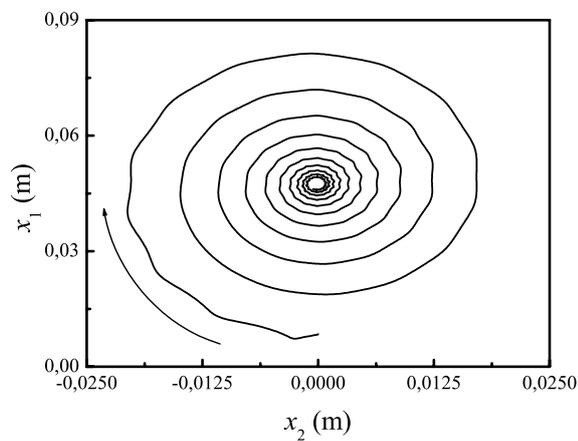


Figura 6.6: Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 0.8$.

dominantes. En cualquier caso, y como se verá a continuación, el modelo elástico proporciona soluciones válidas desde el punto de vista cualitativo, a pesar de fallar a la hora de dar valores admisibles de la fuerza (en comparación con los modelos más detallados, DSM y Cosserat).

6.2.2. Caso B. Velocidad supercrítica, $\bar{\omega} = 0.95$

En este caso, la velocidad real de giro es $\omega_{spin} = 0.501 \text{ rad/s} > \omega_{crit}$. Observando la figura 6.4, el modelo de Jeffcott predice tres equilibrios, de los cuales sólo uno de ellos es inestable. Este equilibrio tiene un autovalor con parte real positiva, el cual, determina el carácter de la inestabilidad de dicho equilibrio. Efectivamente, la condición inicial se encuentra próxima al equilibrio inestable, de forma que la trayectoria (ver figura 6.8), se escapa de esta condición inicial siguiendo la variedad inestable fijada por el autovalor de parte real positiva.

En el caso de la figura 6.8, la dinámica está gobernada por el equilibrio (autovalor) estable del semiplano x_1 -positivo, marcado con (b) en la figura 6.4. En

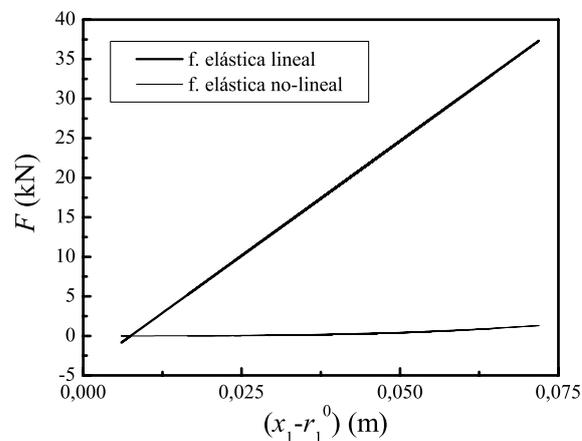


Figura 6.7: Fuerza elástica lineal y no-lineal según e_1 en el modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.8$.

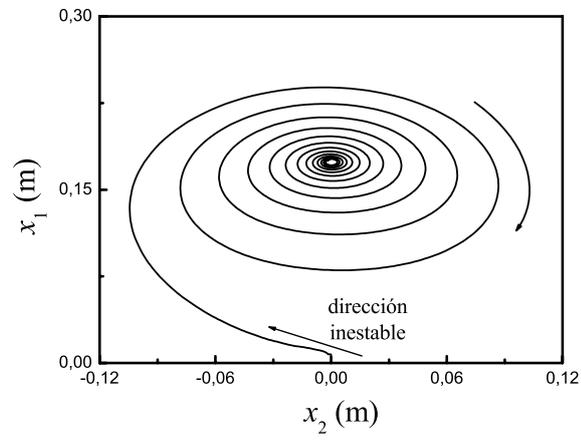


Figura 6.8: Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.95$.

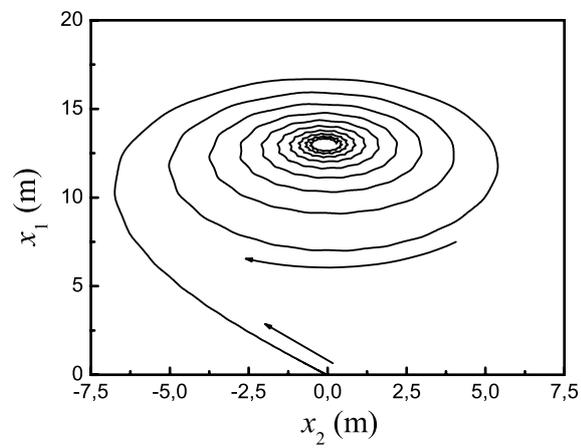


Figura 6.9: Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 0.95$.

algunos casos, dependiendo de como se aplique la rampa de velocidad angular, el sistema tenderá hacia el equilibrio estable de la rama que se encuentra en el semiplano x_1 -negativo. En el último de los casos que se va a analizar, el sistema se va a comportar de esta manera.

La figura 6.9 muestra la trayectoria del contactor para la simulación del modelo DSM. De nuevo, la similitud desde un punto de vista cualitativo de ambos modelos es notable, aunque el valor final de la flecha difiere en un 90%. En este caso, y en adelante, para todas las simulaciones en la región supercrítica, la parte no-lineal de las fuerzas elásticas predomina sobre la lineal, de ahí que la predicción obtenida con el modelo de Jeffcott sea bastante imprecisa. De esta forma, se puede afirmar que cuando el sistema presenta desplazamientos y rotaciones, por deformación, altas la relación desplazamientos-deformaciones usada en el modelo de Jeffcott es incorrecta aunque su estructura sea similar a la real, proporcionando un comportamiento dinámico parecido al que se obtiene con modelos más detallados.

6.2.3. Caso C. Velocidad supercrítica, $\bar{\omega} = 1.1$

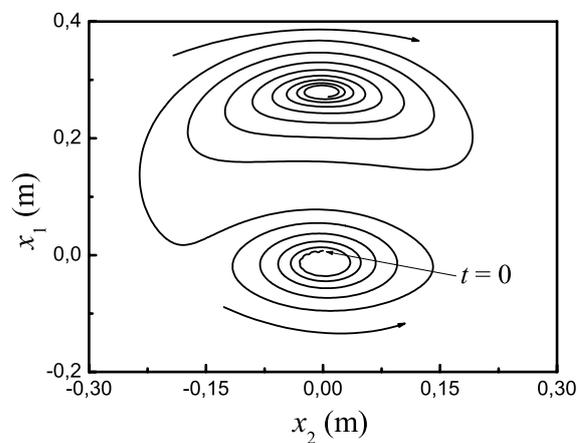


Figura 6.10: Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 1.1$.

Las figuras 6.10 y 6.11 muestran las simulaciones mediante los dos modelos para el caso marcado como (c) en la figura 6.4. La condición inicial se encuentra cerca del único equilibrio inestable, que en este caso tiene dos autovalores conjugados con parte real positiva. El carácter de estos autovalores determina la dinámica en las inmediaciones del equilibrio, siendo repelida la trayectoria en forma de espiral. La solución tiende finalmente al equilibrio estable del semiplano x_1 -positivo. De nuevo, ambos modelos presentan un comportamiento dinámico equivalente, aunque el valor final de la flecha es totalmente distinto. En este caso, la dinámica es más compleja que en los casos anteriores. Sin embargo, el modelo de Jeffcott responde de forma correcta en cuanto a descripción cualitativa de la evolución del sistema.

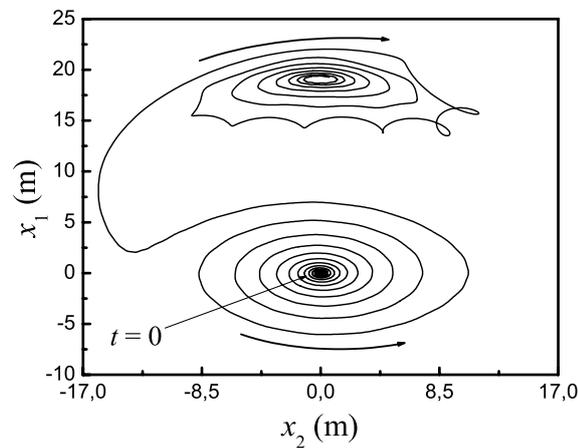


Figura 6.11: Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 1.1$.

La espiral de entrada al equilibrio estable en la simulación DSM presenta un aspecto diferente a la mostrada en la figura 6.10, correspondiente al modelo de Jeffcott. De nuevo existe una vibración superpuesta sobre la espiral que se atribuye a efectos como la vibración longitudinal de la barra, o los grados de libertad de giro del contactor, no representados en el modelo de Jeffcott.

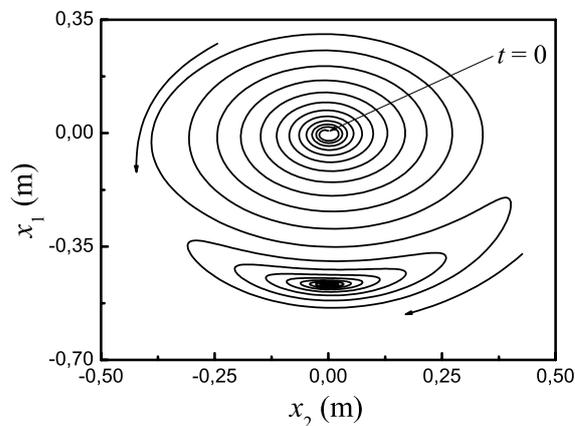
6.2.4. Caso D. Velocidad supercrítica, $\bar{\omega} = 1.5$ 

Figura 6.12: Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 1.5$.

En este caso, la topología del sistema es equivalente a la del ejemplo anterior, aunque para una velocidad más alta, $\omega_{spin} = 0.7911$ rad/s. Las figuras 6.12 y 6.13 muestran la evolución del contactor para ambos modelos. Se han variado los tiempos de aplicación de la rampa de velocidad angular, $t_r = 100$, de forma que el sistema tiende hacia el equilibrio estable que se encuentra en el semiplano x_1 -negativo. La similitud en el comportamiento transitorio de ambos modelos es de nuevo buena, aunque el modelo de Jeffcott vuelve a proporcionar un valor muy inferior de la flecha final.

A modo de recapitulación, se puede afirmar que el modelo de Jeffcott proporciona gran cantidad de información en su rango de validez, aun cuando la descripción del sistema rotativo se lleva a cabo sólo mediante dos grados de libertad. De ahí que en dinámica de rotores, se haya usado para estudiar gran cantidad de problemas tecnológicos [26, 27]. Por lo tanto, el modelo de Jeffcott geoméricamente no-lineal con amortiguamiento interno, propuesto en esta tesis, podría ser usado para el estudio de sistemas rotativos similares al SET, ya sean rotores o estructuras espaciales sometidas a rotación, como tethers o antenas estabilizadas

por spin [1].

6.3. Comparación entre el modelo geoméricamente exacto de Cosserat y el modelo DSM

El modelo geoméricamente exacto de Cosserat y el modelo DSM son las descripciones más detalladas que se han realizado del SET en esta tesis. En estos modelos, las simplificaciones sobre las relaciones deformación-desplazamientos elásticos del tether han sido mínimas o, cuanto menos, han respetado su carácter no-lineal. En el modelo de Cosserat, la línea media del tether está descrita como una curva tridimensional, de forma que no se realiza ninguna simplificación sobre los desplazamientos elásticos asociados a ella. Por lo tanto, las relaciones entre el campo de desplazamientos y las deformaciones de la barra son no-lineales. Por otro lado, en el modelo DSM se ha usado la técnica de subestructuración, lo que implica que se modela un cierto acoplamiento entre las deformaciones longitudinales y transversales del tether, y por tanto, una relación no-lineal entre los desplazamientos

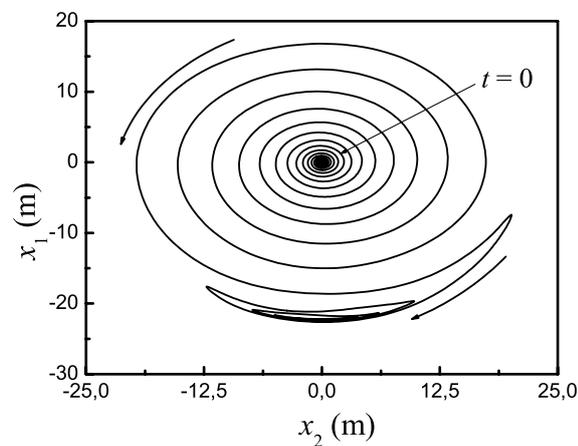


Figura 6.13: Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 1.5$.

6.3 Comparación modelo geoméricamente exacto de Cosserat y modelo DSM 249

y deformaciones de la estructura completa. En este apartado, se van a comparar ambos modelos. Se busca un acuerdo entre la flecha final que predice el modelo de Cosserat, según los diagramas de bifurcación mostrados en el capítulo 3, y la flecha hacia la que tienden las simulaciones DSM tras superar el periodo transitorio. Si se confirma este acuerdo, se validarían ambos modelos ya que se habría llegado a la misma solución por dos métodos, en principio, bastante diferentes.

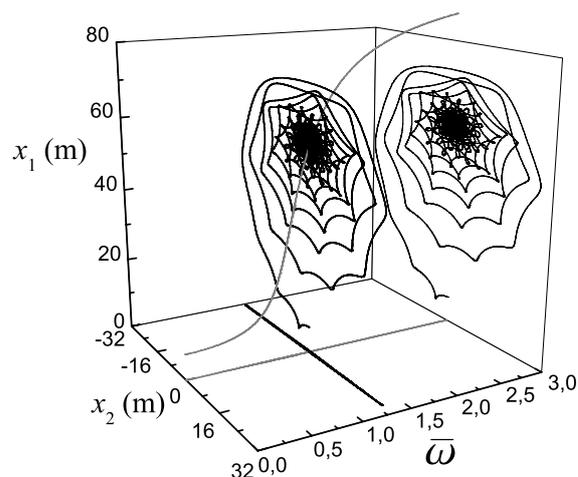


Figura 6.14: Simulación DSM y rama correspondiente del modelo de Cosserat, $\omega = 1.31\omega_c$.

La figura 6.14 muestra la evolución de la posición del contactor, según los ejes móviles $\{e_1, e_2\}$, para la simulación DSM frente a la correspondiente rama de equilibrios del diagrama de bifurcación, generado mediante el modelo de Cosserat para una velocidad supercrítica $\bar{\omega} = 1.31$. La velocidad de giro dimensional viene dada por $\omega = \bar{\omega}\omega_c$, siendo $\omega_c = \sqrt{\frac{EI_3}{m_d l^3}}$ la frecuencia que se usó para adimensionalizar las ecuaciones de Kirchhoff-Love del capítulo 3. La velocidad crítica adimensional es en este caso $\bar{\omega}_{crit} = 1.14$. La trayectoria parte de la condición inicial, justo antes del punto lp1 ($\bar{\omega} = 1.32$), donde comienza la rama del plano x_1 -negativo (ver figura 3.9). Para esta velocidad sólo existe una solución que, además, el modelo

de Cosserat predice como estable, rama $B1$. La dinámica en las proximidades de la rama $B1$ está gobernada por un par de autovalores conjugados con parte real negativa (ver figura 3.20). De esta forma, el sistema evoluciona describiendo una espiral hacia el equilibrio estable. La acción del segundo autovalor representado en la figura introduce parte de la vibración superpuesta sobre la espiral que se observa en la simulación (ver figura 6.14). Como se apuntó en la sección anterior, sobre las simulaciones del modelo de Jeffcott, estas vibraciones están asociadas a los grados de libertad de giro del disco alrededor de sus ejes diametrales y a la vibración longitudinal del tether. El valor final de la flecha para el modelo DSM es de 57 m, aproximadamente. Por su parte, el valor que se obtiene de la rama $B1$ es de 56 m, por lo que se tiene un error relativo del 1.75 %.

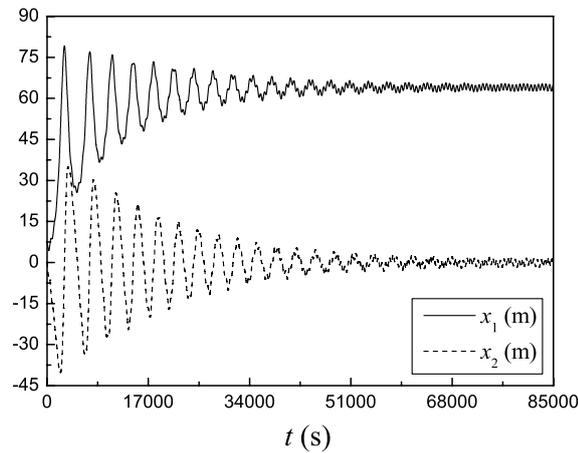


Figura 6.15: Simulación DSM para $\bar{\omega} = 1.42\omega_c$.

La figura 6.15 muestra las coordenadas del contactor $\{x_1, x_2\}$ frente al tiempo para la simulación DSM correspondiente a $\bar{\omega} = 1.42$. Para esta velocidad de giro, que se encuentra situada entre los puntos lp1 (1.32) y BP2 (1.55), existen tres posibles soluciones, dos estables y una inestable (ver figura 3.9). La condición inicial está cerca de la solución inestable, de forma que la trayectoria es repelida por

6.3 Comparación modelo geoméricamente exacto de Cosserat y modelo DSM 251

esta solución y en este caso se dirige hacia el equilibrio estable de la rama $B1$. La solución inestable, que se encuentra entre $lp1$ y $BP2$ tiene un único autovalor de parte real positiva (ver figura 3.25), por lo que la trayectoria evoluciona siguiendo la variedad inestable del equilibrio (ver figura 6.16). Finalmente, la trayectoria se aproxima al punto de equilibrio estable siguiendo una espiral gobernada por los autovalores más cercanos al eje imaginario, que definen la frecuencia de dicha espiral (ver figura 3.23). La flecha final alcanzada en la simulación DSM es de aproximadamente 65.4 m, despreciando la pequeña vibración alrededor del equilibrio, cuyo origen fue explicado en el capítulo 5. Por su parte, el modelo de Cosserat predice un desplazamiento final de 63 m, de forma que el error relativo es del 3.5%. Una flecha de estas magnitudes representa un 60% de la longitud total del tether, lo que indica que se están produciendo grandes desplazamientos y rotaciones por deformación.

La figura 6.17 muestra la trayectoria del contactor para una velocidad $\bar{\omega} = 2.25$, situada por encima del punto $BP2$ (1.55) de nacimiento de la rama 3D referida en el capítulo 3 como rama $2-\kappa_2^i$. En esta ocasión el equilibrio inestable, que nuevamente

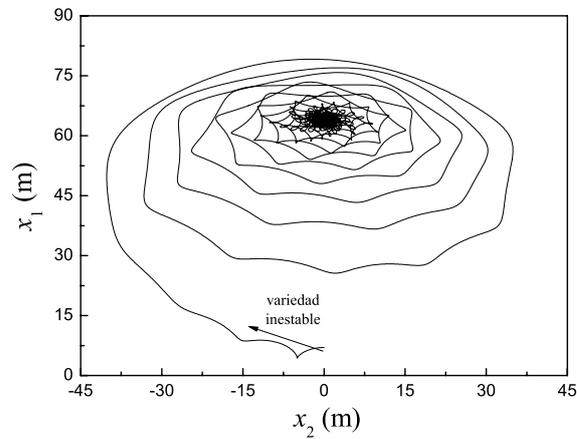


Figura 6.16: Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 1.42\omega_c$.

es el más cercano a la condición inicial, tiene un par de autovalores conjugados con parte real positiva (ver figura 3.25). Esto explica la espiral inestable que la trayectoria sigue justo al comenzar la simulación. Una vez el radio de la espiral es suficientemente grande como para entrar en el cuenca de influencia del equilibrio estable de la rama $B1$, la trayectoria se modifica pasando a seguir la espiral estable que se ve en la figura 6.17. El desplazamiento final es de aproximadamente 83.7 m, por 82 m que predice el modelo de Cosserat, lo que significa un error relativo del 2 %.

Las figuras 6.18 y 6.19 muestran la trayectoria y evolución de la coordenada x_1 frente al tiempo para una velocidad $\bar{\omega} = 2.6$, donde la flecha final es de aproximadamente 87 m frente a los 85 m que predice el modelo de Cosserat (error relativo del 2.35 %).

Finalmente, las figuras 6.20 y 6.21 muestran una simulación, $\bar{\omega} = 1.68$, en la que la trayectoria del contactor tiende hacia la zona estable de la rama $B2$. La flecha final ronda los -70 m, siendo la predicción del modelo de Cosserat -69 m, es decir, un error relativo del 1.5 %.

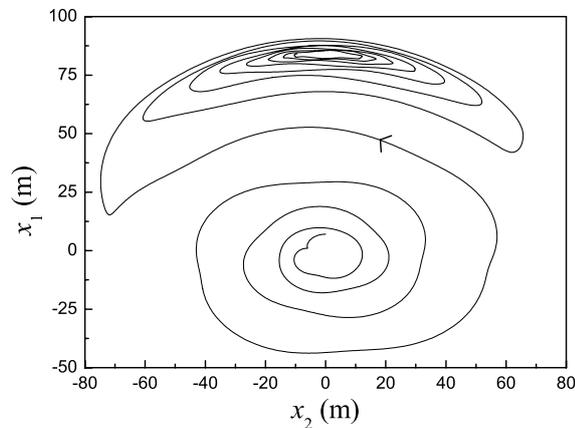


Figura 6.17: Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 2.25\omega_c$.

6.3 Comparación modelo geoméricamente exacto de Cosserat y modelo DSM 253

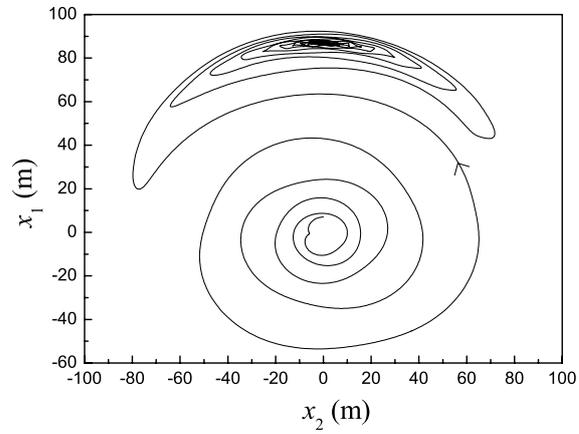


Figura 6.18: Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 2.6\omega_c$.

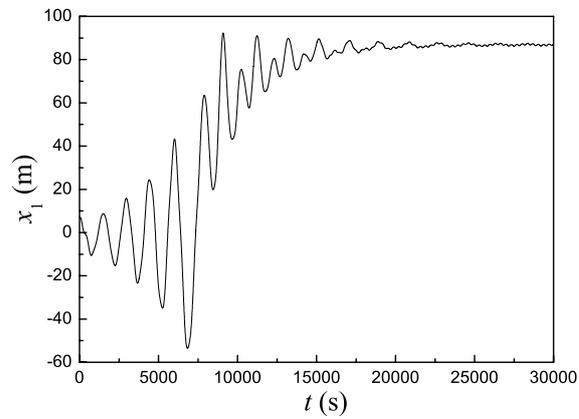


Figura 6.19: Evolución de la coordenada x_1 del contactor frente al tiempo, $\bar{\omega} = 2.6\omega_c$.

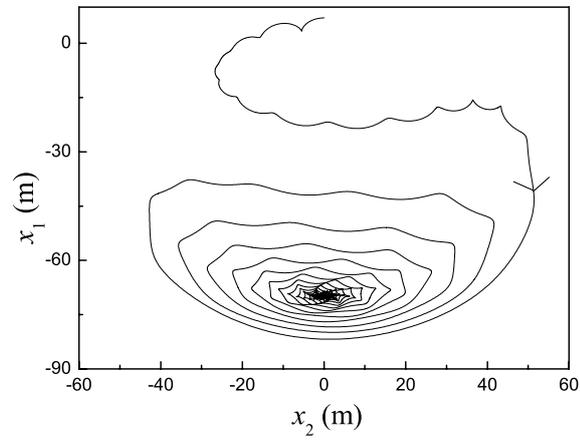


Figura 6.20: Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 1.68\omega_c$.

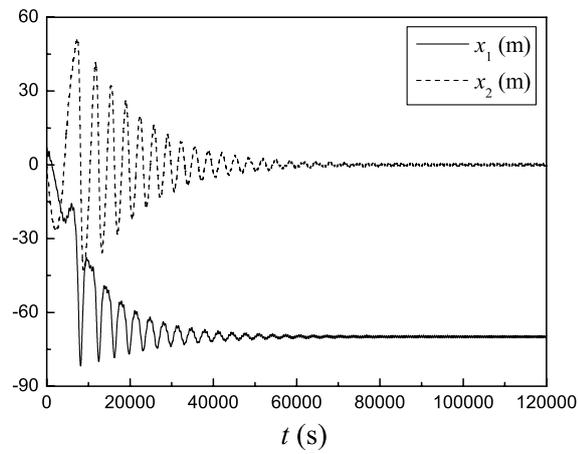


Figura 6.21: Evolución de las coordenadas x_1 y x_2 del contactor frente al tiempo, $\bar{\omega} = 1.68\omega_c$.

6.3 Comparación modelo geoméricamente exacto de Cosserat y modelo DSM 255

Como se ha visto a lo largo de todas las simulaciones mostradas en este apartado, el error relativo entre la solución del modelo DSM y la solución del modelo de Cosserat es siempre menor de un 3.5%. Considerando que ambas formulaciones son distintas tanto en planteamiento de las ecuaciones de movimiento del sistema, como en el método de resolución adoptado, este error relativo se puede considerar pequeño. De esta forma, el buen acuerdo encontrado entre ambas formulaciones hace pensar que las soluciones generadas mediante ambos métodos son realistas. Además, se puede decir que todas las soluciones que se han mostrado en este capítulo tienen sentido físico, pues muestran comportamientos acordes con los análisis de estabilidad de los equilibrios mostrados en los capítulos anteriores.

Capítulo 7

Conclusiones finales y futuras líneas de investigación

En esta tesis se han utilizado diferentes procedimientos para estudiar la dinámica del Short Electrodynamic Tether. Cada uno de estos procedimientos ha permitido conocer nuevos aspectos sobre el movimiento y la estabilidad del SET. Por lo tanto, se pueden extraer conclusiones interesantes de cada uno de ellos. Además, el uso de diferentes métodos permite comparar resultados, lo que da pie a extraer también conclusiones en cuanto a la idoneidad de dichos métodos y sus rangos de validez. A continuación se enumeran las conclusiones más interesantes que se extraen de este trabajo, desde el punto de vista de su autor:

- A la hora de simular el movimiento del sistema se ha usado un procedimiento clásico basado en el método de las referencias flotantes. En este entorno, la subestructuración permite describir sólidos con leyes deformaciones-desplazamientos geoméricamente no-lineales. Este procedimiento es concep-

tualmente muy sencillo y ha resultado ser más robusto y rápido que otros métodos específicamente diseñados para este tipo de problemas, como puede ser la formulación en coordenadas nodales absolutas (ANCF) [102]. Esta última fue testada durante la realización de esta tesis, resultando imposible realizar la integración numérica completa del sistema. Se podría decir, en consecuencia, que los métodos enfocados a la resolución de problemas dinámicos con grandes deformaciones [102, 110] no están lo suficientemente desarrollados, si se comparan, por ejemplo, con aquellos diseñados para problemas estáticos con grandes deformaciones, como el método de los elementos finitos [111]. Es importante resaltar que la formulación ANCF, por su reciente aparición, se encontraba en fase de desarrollo cuando fue utilizada en esta tesis. En los últimos tiempos, los elementos ANCF 3D han sido mejorados, de forma que los tiempos de integración y preproceso se han disminuido considerablemente [113, 114, 115].

- Abordar el problema de la estabilidad y obtener las soluciones del problema, como función de los parámetros de éste en forma de diagramas de bifurcación no es factible en la actualidad si se usan formulaciones basadas en DSM. En esta tesis se ha usado una formulación diferente de la DSM basada en las ecuaciones de Kirchhoff-Love de una viga 3D, para realizar el estudio paramétrico. Esta formulación se adapta más fácilmente a los programas de continuación numérica, como AUTO2000, que permite trazar ramas de soluciones en función de los parámetros del sistema. Principalmente, la presencia de restricciones en las formulaciones DSM hace difícil su uso en el software de continuación numérica.
- El estudio del modelo de Jeffcott modificado de rotor desequilibrado propuesto en esta tesis ha resultado de gran utilidad a la hora de comprender la dinámica de un sistema tan complejo como el SET. Siendo el de Jeffcott un modelo muy simplificado de rotor, sólo dos grados de libertad, su comportamiento dinámico es, dentro de su rango de validez, cualitativamente

correcto (ver secciones 6.1 y 6.2). Con este modelo se demostró la presencia de soluciones estables en la región de velocidades supercríticas para rotores en los que el amortiguamiento interno del material es dominante, como es el caso del SET. Esto incentivó un estudio más detallado de dicho fenómeno, formulándose los modelos de Cosserat y DSM. Además, en el campo de la dinámica de rotores, el estudio aquí realizado puede ser útil para otros investigadores que trabajen con maquinaria rotativa en la que el amortiguamiento interno sea la principal fuente de disipación de energía en el sistema.

- El modelo de Cosserat de una barra 3D sujeta a rotación de spin que se ha desarrollado en esta tesis ha permitido conocer de forma detallada el comportamiento postcrítico del sistema tether-contactor, que no es más que un rotor desequilibrado con ciertas características que lo hacen especial. Además de las soluciones de equilibrio y formas que adopta el tether en dichas configuraciones, se ha estudiado su estabilidad. Ésta es la primera vez que se usan las ecuaciones de Kirchhoff-Love en un problema dinámico, al mejor conocimiento del autor.
- Usando el modelo de Cosserat se ha estudiado la interacción del spinning tether con ciertas componentes perjudiciales del campo geomagnético. Se ha demostrado que el tether electrodinámico, por encima de cierto valor crítico de la corriente o la intensidad del campo magnético, adopta una forma cuasi-helicoidal, como se observó en varias misiones reales con tethers electrodinámicos como PGM y TSS-1R [2, 1]. Además, este estudio resulta útil para el análisis de las moléculas helicoidales de ADN, considerando éstas como conductores eléctricos orgánicos, y el estudio de su formación. De la misma forma, el estudio aquí realizado puede ayudar a comprender el comportamiento de nanocables de silicio y nanotubos de carbono en la fabricación de futuros componentes electrónicos de última generación [96, 97].
- En esta tesis se han usado diferentes métodos para el análisis dinámico del

SET. En el capítulo 6 se han comparado todos ellos, obteniéndose un buen acuerdo incluso en los casos en los que se comparaba modelos muy detallados, como DSM y Cosserat, con el modelo simplificado de Jeffcott. Estas comparaciones dan validez a los distintos modelos, ya que de otra forma y por la singularidad del problema (grandes deformaciones, etc.), sería difícil testarlos con resultados existentes en la bibliografía.

- Finalmente de los resultados obtenidos en esta tesis se puede concluir que el SET, con el diseño inicial (geometría y materiales) que se esbozó en los informes WP-200 [18, 9], no opera de forma correcta. Las flechas producidas en el sistema tether-contactor por la acción de la rotación de spin son demasiado grandes, de forma que el sistema no interacciona correctamente con el campo geomagnético. Al final del capítulo 3 se realizó un estudio paramétrico del SET de forma que, variando la geometría y materiales del tether, fuera posible reducir las grandes deformaciones del sistema y de esta forma hacerlo operativo.

Quedando esta tesis concluida, existen todavía bastantes frentes abiertos en los que se podría continuar el estudio que comenzó con el informe WP-200 [9] y que se continuó con el trabajo aquí expuesto. A continuación se enumeran posibles líneas de investigación con punto de partida en la presente tesis:

- Adaptación de los modelos DSM para el estudio paramétrico de sistemas dinámicos (continuación numérica y teoría de estabilidad y bifurcaciones).
- Mejora del esquema de perturbaciones usado en el análisis dinámico del modelo de Cosserat. Aumentando el grado de precisión de las perturbaciones hasta un grado superior, perturbación no-lineal, se podrían estudiar efectos dinámicos más complejos, como las soluciones doblemente periódicas que partirían de las bifurcaciones de Hopf de nuestro modelo.
- Resolución del sistema de EDP que se deriva del modelo de Cosserat mediante integración espacio-temporal. De esta forma, se tendrían simulaciones

dinámicas de estos modelos que se podrían comparar con las simulaciones dinámicas derivadas de los modelos DSM.

- Mejora del modelo de dos grados de libertad del rotor desequilibrado de Jeffcott, incluyendo nuevos grados de libertad de giro del disco y de deformación axial del eje, como se hace en el modelo de Stodola-Green [26].

Capítulo 8

Contribuciones originales y publicaciones derivadas de esta tesis

Las contribuciones originales de esta tesis, en opinión de su autor, son las siguientes:

- El modelo de Jeffcott geoméricamente no-lineal, de sección ortótropa e inicialmente desviado se ha estudiado por primera vez. Además de la determinación de las velocidades críticas, se ha caracterizado el comportamiento postcrítico del sistema, velocidad y radio de la precesión del eje. En este tema, se han publicado los siguientes trabajos:
 - J. Valverde, J.L. Escalona, J. Domínguez y E. Freire. “Stability and bifurcation analysis of a modified geometrically nonlinear orthotropic Jeffcott model with internal damping”. *Nonlinear Dynamics*, **42**, 137–163, 2005.
 - J. Valverde, J.L. Escalona, J. Domínguez y E. Freire, “Stability and

- dynamic analysis of the SET (Short Electrodynamics Tether)", Proceedings of the ASME DETC & CIE Conference (ISBN:0-7918-3698-3) 2-6 Septiembre, Chicago USA, 2003.
- M.A. Lago Hidalgo. "Estudio de estabilidad de un modelo geométricamente no-lineal de un rotor desequilibrado. Aplicación al problema del Short Electrodynamics Tether (Proyecto fin de carrera. Director: J. Valverde)". *Universidad de Sevilla*, P.3304, 2004.
- El modelo de Cosserat de la barra 3D sujeta a velocidad de spin y con las condiciones de contorno dinámicas derivadas de la unión tether-contacto se ha formulado por primera vez en esta tesis. Además, la resolución (estudio paramétrico mediante continuación numérica y posterior análisis de estabilidad mediante perturbación de la solución) de la ecuación dinámica de Kirchhoff-Love es otra aportación original de esta tesis. De estas ideas se han extraído las siguientes publicaciones:
- J. Valverde, J.L. Escalona, J. Domínguez y A.R. Champneys. "Stability and bifurcation analysis of a spinning space tether". *Journal of Nonlinear Science*, En imprenta.
 - J. Valverde, J.L. Escalona, J. Domínguez y A.R. Champneys. "Bifurcation analysis of a non-radial tethered system". Proceedings of the ASME DETC & CIE Conference (ISBN:0-7918-3766-1) 24-28 Septiembre, Long Beach USA, 2005.
 - J. Valverde, J.L. Escalona y J. Domínguez. "Stability analysis of a tethered system". Proceedings of the 21st ICTAM Conference, 15-21 Agosto, Varsovia Polonia, 2004.
- En el capítulo 4 de esta tesis, se estudió la influencia del campo geomagnético sobre el spinning tether. Este problema es similar a un problema clásico de electrodinámica propuesto por Woodson y Melcher [91]. Estos autores

mostraron de forma experimental como un filamento conductor de electricidad en el seno de un campo magnético paralelo al filamento indeformado pandea desde la posición recta hacia una configuración helicoidal. Varios modelos se han llevado a cabo a lo largo de los años para estudiar dicho efecto [92, 94, 95, 93]. Además, dicha configuración helicoidal se ha observado en misiones reales con tethers electrodinámicos. En esta tesis, se ha encontrado el valor crítico por encima del cual el filamento, o tether en este caso, pandea desde la configuración recta hasta la helicoidal, estando el filamento modelado como una barra. En esta dirección, se han realizado los siguientes trabajos:

- J. Valverde y G. van der Heijden. “Stability of a whirling conducting rod in the presence of a magnetic field. Application to the problem of space tethers”. Proceedings of the ASME DETC & CIE Conference (ISBN:0-7918-3766-1) 24-28 Septiembre, Long Beach USA, 2005.
 - G. van der Heijden y J. Valverde. “Instability of a whirling conducting rod in the presence of a magnetic field”. Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2005), Editores: D.H. van Campen and M.D. Lazurko and W.P.J.M. van den Oever, Eindhoven, Holanda, 2005.
 - J. Valverde y G. van der Heijden. “Stability and bifurcation analysis of a whirling conducting rod in the presence of a magnetic field. Application to space tethers”. En preparación.
- Para realizar las simulaciones dinámicas del SET se han usado técnicas de modelado de DSM y métodos de integración de las ecuaciones de movimiento de última generación. De esta forma, se creó una herramienta de simulación muy potente capaz de resolver un problema tan complejo como el del SET. En este problema, la geometría distorsionada de la barra y otras características propias del sistema introducen frecuencias muy dispares en la solución,

que dificultan en gran medida la integración numérica. El modelo, presentado en el capítulo 5 de esta tesis, es capaz de solventar estos problemas y presentar resultados de la simulación. Otra modelización, que no se ha presentado en este texto, basada en el método de las coordenadas nodales absolutas [102] no dio respuesta a los problemas numéricos aquí planteados. Ambas modelizaciones y la posterior obtención de resultados en un problema tan singular como el del SET dio lugar a las siguientes publicaciones:

- J. Valverde, J.L. Escalona, J. Mayo y J. Domínguez. “Dynamic analysis of a light structure in outer space: Short Electrodynamic Tether”. *Multibody System Dynamics*, **10**(1), 125–146, 2003.
- D. García-Vallejo, J. Valverde y J. Domínguez. “An internal damping model in the absolute nodal coordinate formulation”. *Nonlinear Dynamics*, En imprenta.
- J. Valverde, D. García-Vallejo y J. Domínguez. “Application of an internal damping model for multibody systems”. Proceedings of the ECCOMAS 2005 on Multibody Dynamics, 21-24 Junio, Madrid España, 2005.
- J. Valverde, J.L. Escalona, J. Mayo y J. Domínguez. “Análisis del movimiento y estabilidad de una estructura ligera en el espacio: Short Electrodynamic Tether”. V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, 3-6 Junio, Madrid España, 2002.
- J. Valverde. “Análisis dinámico de la rotación de una estructura desplegable en el espacio (Proyecto fin de carrera)”. *Universidad de Sevilla*, P.2503, 2001.

Apéndice A

(Capítulo 3)

Las matrices \mathbf{B}_i que aparecen en la ecuación (3.116) vienen dadas por

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2M_3^0}{P\Gamma(1+R)} & \frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \\ \frac{2M_3^0}{P\Gamma(1+R)} & 0 & -\frac{M_1^0}{P} \\ -\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i & \frac{M_1^0}{P} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \omega^2 \begin{pmatrix} d_{11}^0 & d_{12}^0 & 0 \\ d_{21}^0 & d_{22}^0 & 0 \\ d_{31}^0 & d_{32}^0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -F_3^0 & F_2^0 \\ F_3^0 & 0 & -F_1^0 \\ -F_2^0 & F_1^0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{2M_3^0 F_3^0}{P\Gamma(1+R)} - (\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i)F_2^0 & -(F_3^0)' + (\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i)F_1^0 & -(F_2^0)' + \frac{2M_3^0 F_1^0}{P\Gamma(1+R)} \\ (F_3^0)' + \frac{M_1^0 F_2^0}{P} & -\frac{2M_3^0 F_3^0}{P\Gamma(1+R)} - \frac{M_1^0 F_1^0}{P} & -(F_1^0)' + \frac{2M_3^0 F_2^0}{P\Gamma(1+R)} \\ -(F_2^0)' + \frac{M_1^0 F_3^0}{P} & (F_1^0)' + (\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i)F_3^0 & -\frac{M_1^0 F_1^0}{P} - (\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i)F_2^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} d_{11}^0 & d_{12}^0 & d_{13}^0 \\ d_{21}^0 & d_{22}^0 & d_{23}^0 \\ d_{31}^0 & d_{32}^0 & d_{33}^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_6 = 2\omega \begin{pmatrix} d_{12}^0 & -d_{11}^0 & 0 \\ d_{22}^0 & -d_{21}^0 & 0 \\ d_{32}^0 & -d_{31}^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices \mathbf{C}_i que aparecen en la ecuación (3.117) vienen dadas por

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{B}_1,$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -M_3^0 & M_2^0 \\ M_3^0 & 0 & -M_1^0 \\ -M_2^0 & M_1^0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} C_3^{11} & C_3^{12} & C_3^{13} \\ C_3^{21} & C_3^{22} & C_3^{23} \\ C_3^{31} & C_3^{32} & C_3^{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
C_2^{11} &= -\frac{2(M_3^0)^2}{P\Gamma(1+R)} - M_2^0 \left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \right) + R\omega^2 d_{23}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0) \\
&\quad + R\omega^2 d_{33}^0 (d_{22}^0 d_{11}^0 - d_{21}^0 d_{12}^0), \\
C_2^{12} &= -(M_3^0)' + \left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \right) M_1^0 - \omega^2 d_{13}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0), \\
C_2^{13} &= (M_2^0)' + \left(\frac{2M_3^0}{P\Gamma(1+R)} \right) M_1^0 + QF_1^0 + (1-R)\omega^2 d_{13}^0 (d_{22}^0 d_{11}^0 - d_{21}^0 d_{12}^0), \\
C_2^{21} &= (M_3^0)' + \frac{M_1^0 M_2^0}{P} + R\omega^2 d_{23}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0), \\
C_2^{22} &= -\frac{2(M_3^0)^2}{P\Gamma(1+R)} - \frac{(M_1^0)^2}{P} - \omega^2 d_{13}^0 (d_{32}^0 d_{21}^0 - d_{31}^0 d_{22}^0) \\
&\quad - \omega^2 d_{33}^0 (d_{12}^0 d_{21}^0 - d_{11}^0 d_{22}^0), \\
C_2^{23} &= -(M_1^0)' + \left(\frac{2M_3^0}{P\Gamma(1+R)} \right) M_2^0 + QF_2^0 + (1-R)\omega^2 d_{23}^0 (d_{12}^0 d_{21}^0 - d_{11}^0 d_{22}^0), \\
C_2^{31} &= -(M_2^0)' + \frac{M_1^0 M_3^0}{P} - QF_1^0 + R\omega^2 d_{33}^0 (d_{22}^0 d_{31}^0 - d_{21}^0 d_{32}^0), \\
C_2^{32} &= (M_1^0)' + \left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \right) M_3^0 - QF_2^0 - \omega^2 d_{33}^0 (d_{12}^0 d_{31}^0 - d_{11}^0 d_{32}^0), \\
C_2^{33} &= -\left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \right) M_2^0 - \frac{(M_1^0)^2}{P} + (1-R)\omega^2 d_{13}^0 (d_{22}^0 d_{31}^0 - d_{21}^0 d_{32}^0) \\
&\quad + (1-R)\omega^2 d_{23}^0 (d_{12}^0 d_{31}^0 - d_{11}^0 d_{32}^0).
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -Q & 0 \\ Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+R) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_6 = 2\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Rd_{23}^0 \\ 0 & 0 & d_{13}^0 \\ Rd_{23}^0 & -d_{13}^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices \mathbf{D}_i que aparecen en la ecuación (3.119) vienen dadas por

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & PR & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P\Gamma(1+R)}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -P \frac{2M_3^0}{P\Gamma(1+R)} & P \left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \right) \\ PR \frac{2M_3^0}{P\Gamma(1+R)} & 0 & -PR \frac{M_1^0}{P} \\ -\frac{P\Gamma(1+R)}{2} \left(\frac{M_2^0}{PR} + \kappa_2^i \right) & \frac{P\Gamma(1+R)}{2} \frac{M_1^0}{P} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_3 = -\gamma \mathbf{D}_2,$$

$$\mathbf{D}_4 = -\gamma \mathbf{D}_1.$$

Para las ecuaciones correspondientes a las condiciones de contorno dadas por (3.124) y (3.125), las matrices \mathbf{E}_i y \mathbf{F}_i vienen dadas por

$$\mathbf{E}_1 = -r_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = B_2,$$

$$\mathbf{E}_3 = -r_m B_3,$$

$$\mathbf{E}_4 = B_5,$$

$$\mathbf{E}_5 = 2\omega \begin{pmatrix} d_{12}^0 & -d_{11}^0 & 0 \\ d_{22}^0 & -d_{21}^0 & 0 \\ d_{32}^0 & -d_{31}^0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_1 = -r_2 \omega^2 \begin{pmatrix} (d_{12}^0 d_{33}^0 - d_{13}^0 d_{32}^0) (d_{13}^0 d_{31}^0 - d_{33}^0 d_{11}^0) & 0 \\ (d_{22}^0 d_{33}^0 - d_{23}^0 d_{32}^0) (d_{23}^0 d_{31}^0 - d_{33}^0 d_{21}^0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} F_2^{11} &= r_1 [-\omega^2 d_{23}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0) - \omega^2 d_{33}^0 (d_{22}^0 d_{11}^0 - d_{21}^0 d_{12}^0)] \\ &+ r_3 [\omega^2 d_{33}^0 (d_{22}^0 d_{11}^0 - d_{21}^0 d_{12}^0) + \omega^2 d_{23}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0)] \\ &+ r_2 [\omega^2 x_3^0 (d_{22}^0 d_{11}^0 - d_{21}^0 d_{12}^0) - \omega^2 (d_{11}^0 (d_{22}^0 x_3^0 - d_{32}^0 x_2^0) \\ &+ d_{12}^0 (d_{23}^0 x_1^0 - d_{21}^0 x_3^0) + d_{13}^0 (d_{21}^0 x_2^0 - d_{22}^0 x_1^0))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2^{12} &= r_1 [\omega^2 d_{13}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0)] + r_3 [-\omega^2 d_{13}^0 (d_{32}^0 d_{11}^0 - d_{31}^0 d_{12}^0)] - M_3^0 \\ &+ r_2 [\omega^2 (d_{11}^0 (d_{12}^0 x_3^0 - d_{13}^0 x_2^0) + d_{12}^0 (d_{31}^0 x_1^0 - d_{11}^0 x_3^0) + d_{13}^0 (d_{11}^0 x_2^0 - d_{12}^0 x_1^0))], \end{aligned}$$

$$F_2^{13} = M_2^0,$$

$$\begin{aligned} F_2^{21} &= r_1 [-\omega^2 d_{23}^0 (d_{32}^0 d_{21}^0 - d_{31}^0 d_{22}^0)] + r_3 [\omega^2 d_{23}^0 (d_{32}^0 d_{21}^0 - d_{31}^0 d_{22}^0)] + M_3^0 \\ &+ r_2 [-\omega^2 (d_{21}^0 (d_{22}^0 x_3^0 - d_{23}^0 x_2^0) + d_{22}^0 (d_{23}^0 x_1^0 - d_{21}^0 x_3^0) + d_{23}^0 (d_{21}^0 x_2^0 - d_{22}^0 x_1^0))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2^{22} &= r_1 [\omega^2 d_{13}^0 (d_{32}^0 d_{21}^0 - d_{31}^0 d_{22}^0) + \omega^2 d_{33}^0 (d_{12}^0 d_{21}^0 - d_{11}^0 d_{22}^0)] \\ &+ r_3 [-\omega^2 d_{33}^0 (d_{12}^0 d_{21}^0 - d_{11}^0 d_{22}^0) - \omega^2 d_{13}^0 (d_{32}^0 d_{21}^0 - d_{31}^0 d_{22}^0)] \\ &+ r_2 [-\omega^2 x_3^0 (d_{12}^0 d_{21}^0 - d_{11}^0 d_{22}^0) + \omega^2 (d_{21}^0 (d_{12}^0 x_3^0 - d_{13}^0 x_2^0) \\ &+ d_{22}^0 (d_{13}^0 x_1^0 - d_{11}^0 x_3^0) + d_{23}^0 (d_{11}^0 x_2^0 - d_{12}^0 x_1^0))], \end{aligned}$$

$$F_2^{23} = -M_1^0,$$

$$\begin{aligned} F_2^{31} &= r_1 [-\omega^2 d_{33}^0 (d_{22}^0 d_{31}^0 - d_{21}^0 d_{32}^0)] + r_3 [\omega^2 d_{33}^0 (d_{22}^0 d_{31}^0 - d_{21}^0 d_{32}^0)] - M_2^0 \\ &+ r_2 [-\omega^2 (d_{23}^0 (d_{32}^0 x_1^0 - d_{31}^0 x_2^0) + d_{33}^0 (d_{21}^0 x_2^0 - d_{22}^0 x_1^0))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2^{32} &= r_1 [\omega^2 d_{33}^0 (d_{12}^0 d_{31}^0 - d_{11}^0 d_{32}^0)] + r_3 [-\omega^2 d_{33}^0 (d_{12}^0 d_{31}^0 - d_{11}^0 d_{32}^0)] + M_1^0 \\ &+ r_2 [\omega^2 (d_{13}^0 (d_{32}^0 x_1^0 - d_{31}^0 x_2^0) + d_{33}^0 (d_{11}^0 x_2^0 - d_{12}^0 x_1^0))], \end{aligned}$$

$$F_2^{33} = 0.$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} F_2^{11} & F_2^{12} & F_2^{13} \\ F_2^{21} & F_2^{22} & F_2^{23} \\ F_2^{31} & F_2^{32} & F_2^{33} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F}_3 = -r_2 \begin{pmatrix} (d_{12}^0 d_{33}^0 - d_{13}^0 d_{32}^0) & (d_{13}^0 d_{31}^0 - d_{33}^0 d_{11}^0) & (d_{11}^0 d_{32}^0 - d_{12}^0 d_{31}^0) \\ (d_{22}^0 d_{33}^0 - d_{23}^0 d_{32}^0) & (d_{23}^0 d_{31}^0 - d_{33}^0 d_{21}^0) & (d_{21}^0 d_{32}^0 - d_{22}^0 d_{31}^0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_4 = -2r_2\omega \begin{pmatrix} (d_{13}^0 d_{31}^0 - d_{33}^0 d_{11}^0) & (d_{13}^0 d_{32}^0 - d_{33}^0 d_{12}^0) & 0 \\ (d_{23}^0 d_{31}^0 - d_{33}^0 d_{21}^0) & (d_{23}^0 d_{32}^0 - d_{33}^0 d_{22}^0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_5 = \begin{pmatrix} (r_1 + r_3) & 0 & 0 \\ 0 & (r_1 + r_3) & 0 \\ 0 & 0 & 2r_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_6 = \begin{pmatrix} 0 & -2r_3\omega d_{33}^0 & 2r_1\omega d_{23}^0 \\ 2r_3\omega d_{33}^0 & 0 & -2r_1\omega d_{13}^0 \\ -2r_1\omega d_{23}^0 & 2r_1\omega d_{13}^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la matriz \mathbf{G} de la ecuación de la tangente (3.121) viene dada por

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -d_{21}^0 & d_{11}^0 & 0 \\ -d_{22}^0 & d_{12}^0 & 0 \\ -d_{23}^0 & d_{13}^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bibliografía

- [1] V.V. BELETSKY Y E.M. LEVIN. Dynamics of space tether systems. tomo 83 de “Advances in the Astronautical Sciences”. American Astronautical Society, San Diego, USA (1993).
- [2] M.L. COSMO Y E.C. LORENZINI. Tethers in space handbook, third edition. Informe técnico, Smithsonian Astrophysical Observatory, NASA Marshall Space Flight Center, Cambridge, USA (1997).
- [3] D.D. LANG Y R.R. NOLTING. Operations with tethered space vehicles. En “Proceedings of the Gemini Summary Conference, NASA SP-138”, páginas 547–554, Houston, USA (1967).
- [4] J.R. SANMARTÍN, M. MARTÍNEZ-SÁNCHEZ Y E. AHEDO. Bare wire anodes for electrodynamic tethers. *Journal of Propulsion and Power* **9**(3), 353–360 (1993).
- [5] R.D. ESTES, J.R. SANMARTÍN Y M. MARTÍNEZ-SÁNCHEZ. Bare tethers for electrodynamic spacecraft propulsion. *Journal of Spacecrafts and Rockets* **37**(2), 197–204 (2000).
- [6] R.D. ESTES, E.C. LORENZINI, J.R. SANMARTÍN, J. PELÁEZ, M. MARTÍNEZ-SÁNCHEZ, C.L. JOHNSON Y I.E.VAS. Bare tethers for electrodynamic spacecraft propulsion. *Journal of Spacecrafts and Rockets* **37**(2), 205–211 (2000).

- [7] E. AHEDO Y J.R. SANMARTÍN. Analysis of bare-tether systems for deorbiting low-earth-orbit satellites. *Journal of Spacecrafts and Rockets* **39**(2), 198–205 (2002).
- [8] M. RUIZ DELGADO. “Análisis Dinámico de Cables Espaciales (Tethers): Aplicación a la Dinámica Orbital”. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, España (1998).
- [9] J. MAYO, J. MARTÍNEZ, J.L. ESCALONA Y J. DOMÍNGUEZ. Short Electrodynamics Tether WP-200, design and mechanism. Informe técnico, Dept. of Mechanical and Materials Engineering, University of Seville, Sevilla, España (1999).
- [10] J. PEARSON. Anchored lunar satellites for cislunar transportation and communication. *Journal of the Astronautical Sciences* **17**, 39–62 (1979).
- [11] V.A. CHOBOTOV. Gravity gradient excitation of a rotating cable-counterweight space station in orbit. *Journal of Applied Mechanics* **30**, 547–554 (1963).
- [12] J.B. JONES-OLIVEIRA. Configuration design of a closed-loop, pseudogravitational, environmental research facility in low earth orbit. *Space Solar Power Review* **3**(4), 317–325 (1982).
- [13] J.A. CARROL. Tether application in space transportation. *Acta Astronautica* **13**, 165–174 (1986).
- [14] I. BEKEY Y P.A. PENZO. Tether propulsion. *Aerospace America* **24**, 40–43 (1986).
- [15] I. BEKEY. Tethers open new space options. *Astronautics and Aeronautics* **21**, 32–40 (1983).

- [16] S.D. DRELL, H.L. FOLEY Y M.A. RUDERMAN. Drag and propulsion of large satellites in the ionosphere: an Alfvén propulsion engine in space. *Journal of Geophysical Research* **70**(13), 3131–3145 (1965).
- [17] E. LORENZINI Y J.R. SANMARTÍN. Electrodynamic tethers in space. *Scientific American* **7**, 34–41 (2004).
- [18] ESA. Research and development activities. Plasma environments, effects and experiments: Short Electrodynamic Tether. [Http://spaceenv.esa.int/RandD/Shorttether.html](http://spaceenv.esa.int/RandD/Shorttether.html) (1999).
- [19] M. AGUIRRE, P. BUREO, F. DEL CAMPO Y M. FUENTES. The CTM family of masts and the CTM engineering model. Informe técnico, SENER S.A. (1999).
- [20] P.C. HUGHES. “Spacecraft Attitude Dynamics”. Dover Publications, Nueva York, USA (1986).
- [21] V.A. CHOBOTOV. “Spacecraft Attitude Dynamics and Control”. Krieger Publishing Co., Malabar, USA (1991).
- [22] S.H. STROGATZ. “Nonlinear Dynamics and Chaos”. Perseus Books Publishing LLC, Cambridge, USA (1994).
- [23] F.R. GANTMÁJER. “Mecánica Analítica”. URSS, Moscú, Rusia (1996).
- [24] T.R. KANE, E.L. MARSH Y W.G. WILSON. Letter to the editor. *Journal of Astronautical Sciences* **9**, 108–109 (1962).
- [25] A.A. SHABANA. “Theory of Vibration. Volume II: Discrete and Continuous Systems”. Springer-Verlag, Nueva York, USA (1991).
- [26] D.W. CHILDS. “Turbomachinery Rotordynamics”. Wiley Interscience, Nueva York, USA (1993).

- [27] J.P. DEN HARTOG. “Mechanical Vibrations, 4th edition”. McGraw-Hill, Nueva York, USA (1972).
- [28] G. TYC, R.P.S. HAN, F.R. VIGNERON, A.M. JABLONSKI, V.J. MODI Y A.K. MISRA. Dynamics and stability of a spinning tethered spacecraft with flexible appendages. *Advances in the Astronautical Sciences* **85**(1), 877–896 (1993).
- [29] F.R. VIGNERON, A.M. JABLONSKI, R. CHANDRASHAKER Y G. TYC. Damped gyroscopic modes of spinning tethered space vehicles with flexible booms. *Journal of Spacecraft and Rockets* **34**(5), 662–669 (1997).
- [30] A.M. JABLONSKI, F.R. VIGNERON, G. TYC, D.A. STALEY, J.L. BERGMANS Y B.A. MCCLURE. The tether laboratory demonstration system (TE-LAB) for dynamics of OEDIPUS. En “Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference”, Victoria, B.C. (1993).
- [31] A.C.J. LUO, R.P.S. HAN, G. TYC, V.J. MODI Y A.K. MISRA. Analytical vibration and resonant motion of a stretched spinning nonlinear tether. *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **19**(5), 1162–1171 (1996).
- [32] B.N. MIN, A.K. MISRA Y V.J. MODI. Nonlinear free vibration of a spinning tether. *Journal of Astronautical Sciences* **47**(1), 1–23 (1999).
- [33] L. LIANGDONG Y P.M. BAINUM. Effect of tether flexibility on the tethered shuttle subsatellite stability and control. *Journal of Guidance Control and Dynamics* **12**, 866–873 (1989).
- [34] W. STEINER, J. ZEMANN, A. STEINDL Y H. TROGER. Numerical study of large amplitude oscillations of a two satellite continuous tether system with varying length. *Acta Astronautica* **35**(9-11), 607–621 (1995).
- [35] W. STEINER, A. STEINDL Y H. TROGER. Center manifold approach to the control of a tethered satellite system. *Applied Mathematics and Computation* **70**(2-3), 315–327 (1995).

- [36] J. GENIN Y J.S. MAYBEE. Stability in the three dimensional whirling problem. *International Journal of Non-linear Mechanics* **4**, 205–215 (1969).
- [37] J. GENIN Y J.S. MAYBEE. External and material damped three dimensional rotor system. *International Journal of Non-linear Mechanics* **5**, 287–297 (1970).
- [38] J. GENIN Y J.S. MAYBEE. The role of material damping in the stability of rotating systems. *Journal of Sound and Vibration* **21**(4), 399–404 (1971).
- [39] V.V. BOLOTIN. “Dynamic Stability of Elastic Systems”. Holden Day, San Francisco, USA (1964).
- [40] J. SHAW Y S.W. SHAW. Instabilities and bifurcations in a rotating shaft. *Journal of Sound and Vibration* **132**(2), 227–244 (1989).
- [41] C.O. CHANG Y J.W. CHENG. Non-linear dynamics and instability of a rotating shaft-disk system. *Journal of Sound and Vibration* **160**(3), 433–454 (1993).
- [42] A.S. SEKHAR Y J. KUMAR DEY. Effects of cracks on rotor system instability. *Mechanism and Machine Theory* **35**, 1657–1674 (2000).
- [43] G. VAN DER HEIJDEN. Mode-locking in non-linear rotordynamics. *Journal of Nonlinear Science* **5**, 257–283 (1995).
- [44] J. VALVERDE, J.L. ESCALONA, J. MAYO Y J. DOMÍNGUEZ. Dynamic analysis of a light structure in outer space: Short Electrodynamic Tether. *Multibody System Dynamics* **10**(1), 125–146 (2003).
- [45] J. VALVERDE, J.L. ESCALONA, J. DOMÍNGUEZ Y A.R. CHAMPNEYS. Stability and bifurcation analysis of a spinning space tether. *Journal of Nonlinear Science*. En imprenta.

- [46] J. VALVERDE, J.L. ESCALONA, J. DOMÍNGUEZ Y A.R. CHAMPNEYS. Bifurcation analysis of a non-radial tethered system. En “Proceedings of the ASME DETC and CIE Conference”, Long Beach, USA (2005).
- [47] J. VALVERDE Y G. VAN DER HEIJDEN. Stability and bifurcation analysis of a whirling conducting rod in the presence of a magnetic field. Application to space tethers. En preparación.
- [48] G. VAN DER HEIJDEN Y J. VALVERDE. Instability of a whirling conducting rod in the presence of a magnetic field. En “Proceedings of the Fifth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2005)”, Eindhoven, Holanda (2005).
- [49] J. VALVERDE Y G. VAN DER HEIJDEN. Stability of a whirling conducting rod in the presence of a magnetic field. Application to the problem of space tethers. En “Proceedings of the ASME DETC and CIE Conference”, Long Beach, USA (2005).
- [50] S.S. ANTMAN. “Nonlinear Problems of Elasticity”. Springer-Verlag, Berlín, Alemania (1995).
- [51] S. NEUKIRCH, G. VAN DER HEIJDEN Y J.M.T. THOMPSON. Writhing instabilities of twisted rods: from infinite to finite length. *J. Mech. Phys. Solids* **50**, 1175–1191 (2002).
- [52] A. GORIELY Y M. TABOR. Nonlinear dynamics of filaments I. Dynamical instabilities. *Physica D* **105**, 20–44 (1997).
- [53] W.B. FRASER Y D.M. STUMP. Yarn twist in the ring-spinning ballon. *Proc. R. Soc. Lond. A* **454**, 707–723 (1998).
- [54] G. VAN DER HEIJDEN, A.R. CHAMPNEYS Y J.M.T. THOMPSON. Spatially complex localization in twisted elastic rods constrained to a cylinder. *Int. J. Solids Struct.* **39**, 1863–1883 (2002).

- [55] A. GORIELY Y M. TABOR. Spontaneous helix hand reversal and tendril perversion in climbing plants. *Physical Review Letters* **80**(7), 1564–1567 (1998).
- [56] A.A.SHABANA. “Dynamics of multibody systems”. Wiley, Nueva York, USA (1998).
- [57] S. WU Y E.J. HAUG. Geometric non-linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **26**, 2211–2226 (1988).
- [58] J. GARCÍA DE JALÓN Y E. BAYO. “Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems-The Real Time Challenge”. Springer-Verlag, Nueva York, USA (1993).
- [59] J.M.T. THOMPSON Y H.B. STEWART. “Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometrical Methods for Engineers and Scientists”. Wiley, Chichester, UK (1986).
- [60] E.J. DOEDEL, H.B. KELLER Y J.P. KERNÉVEZ. Numerical analysis and control of bifurcation problems, Part I: Bifurcation in finite dimensions. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **1**(3), 493–520 (1991).
- [61] E.J. DOEDEL, H.B. KELLER Y J.P. KERNÉVEZ. Numerical analysis and control of bifurcation problems, Part II: Bifurcation in infinite dimensions. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **1**(4), 745–772 (1991).
- [62] Y.A. KUZNETSOV. “Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition”. Springer, Nueva York, USA (1997).
- [63] E.J. DOEDEL, R.C. PAFFENROTH, A.R. CHAMPNEYS, T. FAIRGRIEVE, Y.A. KUZNETSOV, B.E. OLDEMAN, B. SANDSTEDE Y X. WANG. AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential

- equations (with HomCont), reference manual. Informe técnico, Concordia University, Montreal, Canada (2000).
- [64] Y.A. KUZNETSOV. MATCONT and CL-MATCONT: Continuation software in Matlab. Internal Report: <http://allserv.rug.ac.be/~ajdhoo-ge/research.html>. Mathematisch Instituut, Utrecht (2004).
- [65] J.C. SNOWDON. “Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems”. Wiley, Nueva York, USA (1968).
- [66] H. ZIEGLER. Linear elastic stability. *Z. angew. Math. Phys* **IV**, 89–121 (1953).
- [67] B.J. TORBY. The effect of structural damping upon the whirling of rotors. *Journal of Applied Mechanics* **46**, 469–470 (1979).
- [68] S.L. HENDRICKS. The effect of viscoelasticity on the vibration of a rotor. *Transactions of the ASME* **53**, 412–416 (1986).
- [69] V.V. NOVOZHILOV. “Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity”. Dover Publications, Nueva York, USA (1953).
- [70] D. GARCÍA-VALLEJO, J. VALVERDE Y J. DOMÍNGUEZ. An internal damping model for the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics* **42**(4), 347–369 (2005).
- [71] A.D. NASHIF, D.I.G. JONES Y J.P.HENDERSON. “Vibration Damping”. John Wiley & Sons, Nueva York, USA (1985).
- [72] J.H. GINSBERG. “Mechanical and Structural Vibrations”. John Wiley & Sons, Nueva York, USA (2001).
- [73] M. ROSEAU. “Vibrations in Mechanical Systems”. Springer-Verlag, París, Francia (1984).

- [74] A.R. CHAMPNEYS, G.W. HUNT Y J.M.T. THOMPSON. En “Localization and Solitary Waves in Solid Mechanics”, tomo 12 de “Advanced series in nonlinear dynamics”. World Scientific, Londres, UK (1999).
- [75] B.D. COLEMAN, E.H. DILL, M. LEMBO, Z. LU Y I. TOBIAS. On the dynamics of rods in the theory of Kirchhoff and Clebsch. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **121**, 339–259 (1993).
- [76] U.M. ASCHER Y L.R. PETZOLD. “Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations”. SIAM, Philadelphia, USA (1998).
- [77] A.H. NAYFEH. “Introduction to Perturbation Techniques”. Wiley Interscience, Nueva York, USA (1981).
- [78] G. LEMON Y W.B. FRASER. Steady-state bifurcations and dynamical stability of a heavy whirling cable acted on by aerodynamic drag. *Proc. R. Soc. Lond. A* **457**, 1021–1041 (2001).
- [79] J.D. CLARKE, W.B. FRASER, C.D. RAHN Y A. RAJAMANI. Limit-cycle oscillations of a heavy whirling cable subject to aerodynamic drag. *Proc. R. Soc. Lond. A* **461**, 875–893 (2005).
- [80] D.M. STUMP Y W.B. FRASER. Dynamic bifurcation of the ring-spinning balloon. *Mathematical Engineering Journal* **5**, 161–186 (1995).
- [81] J. VALVERDE, J.L. ESCALONA Y J. DOMÍNGUEZ. Stability analysis of a tethered system. En “Proceedings of the 21st ICTAM Conference”, Varsovia, Polonia (2004).
- [82] A.E.H. LOVE. “A treatise on the mathematical theory of elasticity”. Dover Publications, Nueva York, USA (1944).
- [83] E.H. DILL. Kirchhoff’s theory of rods. *Arch. Hist. Exact. Sci.* **4**, 2–23 (1992).

- [84] S. TIMOSHENKO Y J.N. GOODIER. “Teoría de la elasticidad”. Ediciones Urmo, Bilbao, España (1968).
- [85] W.N. FINDLEY, J.S. LAI Y K. ONARAN. “Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials”. Dover Publications, Nueva York, USA (1976).
- [86] J. VALVERDE, J.L. ESCALONA, E. FREIRE Y J. DOMÍNGUEZ. Stability and bifurcation analysis of a modified geometrically nonlinear orthotropic Jeffcott model with internal damping. *Nonlinear Dynamics* **42**(2), 137–163 (2005).
- [87] J. VALVERDE, J.L. ESCALONA, J. DOMÍNGUEZ Y E. FREIRE. Stability and dynamic analysis of the SET (Short Electrodynamic Tether). En “Proceedings of the ASME DETC and CIE Conference”, Chicago, USA (2003).
- [88] A. GORIELY Y M. TABOR. Nonlinear dynamics of filaments II. Nonlinear analysis. *Physica D* **15**, 45–61 (1997).
- [89] R.B. LEHOUCQ, D.C. SORENSEN Y C. YANG. ARPACK User’s guide: Solution of large scale eigenvalues problems with implicit restarted Arnoldi methods. Informe técnico, Rice University, CAAM, Houston, USA (1997).
- [90] G.E. FORSYTHE Y W.R. WASOW. “Finite-difference Methods for Partial Differential Equations”. John Wiley and Sons, Nueva York, USA (1960).
- [91] H.H. WOODSON Y J.R. MELCHER. “Electromechanical Dynamics, Part II: Fields, Forces and Motion”. John Wiley and Sons, Nueva York, USA (1968).
- [92] P. WOLFE. Equilibrium states of an elastic conductor in a magnetic field: A paradigm of bifurcation theory. *Trans. Am. Math. Soc.* **278**, 377–387 (1983).
- [93] T.J. HEALEY. Large rotating states of a conducting elastic wire in a magnetic field: subtle symmetry and multiparameter bifurcation. *Journal of Elasticity* **24**, 211–227 (1990).

- [94] P. WOLFE. Rotating states of an elastic conductor. En J. LIGHTBOURNE Y S. RANKIN, editores, “Physical Mathematics and Nonlinear Partial Differential Equations”. Dekker, Nueva York, USA (1985).
- [95] P. WOLFE. Bifurcation theory of an elastic conducting rod in a magnetic field. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **41**(2), 265–279 (1988).
- [96] T. SCHEIBEL, R. PARTHASARATHY, G. SAWICKI, X.M. LIN, H. JAEGER Y S.L. LINDQUIST. Conducting nanowires built by controlled self-assembly of amyloid fibers and selective metal deposition. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **100**, 4527–4532 (2003).
- [97] B.G. MAIYA Y T. RAMASARMA. Dna, a molecular wire or not – the debate continues. *Current Science* **80**(12), 1523–1530 (2001).
- [98] J.C. SIMO Y L. VU-QUOC. On the dynamics of flexible beams under large overall motions-the plane case: Parts I & II. *ASME Journal of Applied Mechanics* **53**, 849–863 (1986).
- [99] J.C. SIMO Y L. VU-QUOC. On the dynamics in space of rods undergoing large motions - a geometrically exact approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **66**(2), 125–161 (1986).
- [100] J.C. SIMO Y L. VU-QUOC. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **38**, 1431–1473 (1995).
- [101] M. GÉRADIN Y A. CARDONA. “Flexible Multibody Dynamics-A Finite Element Approach”. John Wiley and Sons, Chichester, UK (2001).
- [102] A.A. SHABANA Y R.Y. YACoub. Three-dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: Theory. *ASME Journal of Mechanical Design* **123**, 606–613 (2001).

- [103] P.W. LINKINS. Modal method for the analysis of free rotations of spacecraft. *AIAA Journal* **5**(7), 1304–1308 (1967).
- [104] J. MAYO Y J. DOMÍNGUEZ. Geometrically non-linear formulation of flexible multibody systems in terms of beam elements: Geometric stiffness. *Computers and Structures* **59**(6), 1039–1050 (1996).
- [105] T.M. WASFY Y A.K. NOOR. Computational strategies for flexible multibody systems. *ASME Applied Mechanics Review* **56**(6), 553–613 (2003).
- [106] J. CUADRADO, J. CARDENAL Y J. GARCÍA DE JALÓN. Flexible mechanisms through natural coordinates and component mode synthesis: An approach fully compatible with the rigid case. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **39**, 3535–3551 (1996).
- [107] J. VALVERDE. Análisis dinámico de la rotación de una estructura desplegable en el espacio (proyecto fin de carrera). Informe técnico P.2503, Universidad de Sevilla, España (2001).
- [108] J. CUADRADO, R. GUTIÉRREZ, M.A. NAYA Y P. MORER. A comparison in terms of accuracy and efficiency between a MBS dynamic formulation with stress analysis and a non-linear FEA code. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **51**(9), 1033–1052 (2001).
- [109] J. CUADRADO, J. CARDENAL Y E. BAYO. Modeling and solution methods for efficient real-time simulation of multibody dynamics. *Multibody System Dynamics* **1**(3), 259–280 (1997).
- [110] A. AVELLO. “Simulación Dinámica Interactiva de Mecanismos Flexibles con Pequeñas Deformaciones”. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, España (2001).
- [111] K.J. BATHE. “Finite Element Procedures”. Prentice Hall, Nueva Jersey, USA (1996).

-
- [112] E. BAYO Y R. LEDESMA. Augmented lagrangian and mass-orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics. *Nonlinear Dynamics* **9**, 113–130 (1996).
- [113] D. GARCÍA-VALLEJO, J. MAYO, J.L. ESCALONA Y J. DOMÍNGUEZ. Efficient evaluation of the elastic forces and the jacobian in the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics* **35**, 313–329 (2004).
- [114] H. SUGIYAMA Y A. A. SHABANA. On the use of implicit integration methods and the absolute nodal coordinate formulation in the analysis of elastoplastic deformation problems. *Nonlinear Dynamics* **37**(3), 245–270 (2004).
- [115] K. DUFVA, J. SOPANEN Y A. MIKKOLA. Three-dimensional beam element based on a cross-sectional coordinate system approach. *Nonlinear Dynamics* (2005). In press.

Índice de tablas

| | |
|--|-----|
| 1.1. Características de la sección y material del tether. | 30 |
| 1.2. Velocidades de spin para estabilidad del SET en la posición horizontal. | 40 |
| 1.3. Valores característicos de las constantes del SET. | 46 |
| 2.1. Resumen de los equilibrios para el rotor no-lineal, ortótropo. . . . | 107 |
| 3.1. Valores de los parámetros del SET. | 151 |
| 3.2. Bifurcaciones en el caso $\kappa_2^i = 0$ | 158 |
| 3.3. Bifurcaciones en las ramas para $\kappa_2^i \neq 0$ | 160 |
| 4.1. Constantes características y parámetros adimensionales para el SET. | 193 |
| 6.1. Variables adimensionales para el modelo de Jeffcott. | 236 |
| 6.2. Variables adimensionales para el modelo de Cosserat. | 237 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Gravedad artificial creada por rotación. | 5 |
| 1.2. Sistema tether orientado radialmente por rotación síncrona. | 6 |
| 1.3. Cápsula experimental en capas altas de la atmósfera. | 8 |
| 1.4. Lanzamiento en órbita de un satélite. | 9 |
| 1.5. Estación-puerto, recepción mediante tether. | 10 |
| 1.6. Transporte de carga mediante el “escalador espacial”. | 10 |
| 1.7. “Escalador espacial lunar”. | 11 |
| 1.8. Tether electrodinámico. | 12 |
| 1.9. Modificación del periodo orbital. | 16 |
| 1.10. Estabilización gravitacional de un sistema tether en la posición radial. | 20 |
| 1.11. Interacción de un TE con el campo geomagnético. | 21 |
| 1.12. Campo geomagnético. Esquema de frenado y propulsión en tether radial. | 24 |
| 1.13. Campo geomagnético en los polos. Posición de un TE horizontal. | 26 |
| 1.14. Fuerzas resultantes sobre el tether en un TE horizontal. | 27 |
| 1.15. Sección del tether de la familia CTM de SENER S.A., almacenado y desplegado. | 29 |
| 1.16. Esquema de operación del SET. | 31 |
| 1.17. Esquema del SET en la posición estable por spin y sistemas coordenados usados. | 33 |

| | |
|--|-----|
| 2.1. Plano de fases y trayectoria. | 60 |
| 2.2. Pandeo en la viga de Euler. | 61 |
| 2.3. Esquema bifurcaciones, (a) pliegue, (b) transcítica. | 62 |
| 2.4. Esquema bifurcación de tridente, (a) supercrítica, (b) subcrítica. | 63 |
| 2.5. Curva de equilibrios, M | 64 |
| 2.6. Pseudo longitud de arco. | 68 |
| 2.7. Modelo de Jeffcott original. | 68 |
| 2.8. Modelo de Jeffcott modificado. | 70 |
| 2.9. Modelo de Jeffcott modificado, proyección $\{i, j\}$ | 71 |
| 2.10. Rotación síncrona del sistema | 72 |
| 2.11. Rotación asíncrona del sistema. | 73 |
| 2.12. Desplazamientos del eje en $\{e_1, e_2, e_3\}$ | 78 |
| 2.13. Modelado del amortiguamiento interno. (a) Ciclo de histéresis. (b) Problema unidimensional. (c) Modelo de amortiguamiento viscoso equivalente. | 81 |
| 2.14. Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente recto. | 93 |
| 2.15. Ramas de equilibrios, rotor no-lineal recto isótropo. | 94 |
| 2.16. Equilibrios para $\bar{\omega} < R$ | 96 |
| 2.17. Equilibrios para $1 > \bar{\omega} > R$ | 97 |
| 2.18. Lugar geométrico de los puntos SN y BP2 en el espacio de paráme- tros $\bar{\omega} - q_{30}$ para $R = 0.875$ | 103 |
| 2.19. Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30} < q_{30}^*$ | 104 |
| 2.20. Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30}^a > q_{30}^*$ | 105 |
| 2.21. Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30}^b >$ $q_{30}^a > q_{30}^*$ | 106 |
| 2.22. Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado, $q_{30}^c >$ $q_{30}^b > q_{30}^*$ | 106 |
| 2.23. Ramas de equilibrios, rotor no-lineal inicialmente desviado e isótropo. | 107 |
| 2.24. Simulación del modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.8$ | 110 |

2.25. Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 1.1$ 110

3.1. Triedros de Frenet y Cosserat asociados al elemento unidimensional. 113

3.2. Órbita y orientación del SET. Sistemas de referencia y sección del tether. 115

3.3. Barra 3D descrita por su línea media. Sección asociada y triedro director. 120

3.4. Tensiones y esfuerzos en la sección de la barra. 126

3.5. Equilibrio de fuerzas y momentos en el contactor. 134

3.6. Diagrama de bifurcación 3D para el SET simétrico con $\kappa_2^i = 0$. Rango de velocidades de operación $0 < \omega < 50$. Por claridad se han omitido las ramas que nacen de bifurcaciones para $\omega > 15$, que se representan en la figura 3.7 156

3.7. Zoom de la figura 3.6 mostrando las ramas que bifurcan de la solución trivial para $15 < \omega < 50$ 156

3.8. Proyección del diagrama de bifurcación de las figuras 3.6 y 3.7 sobre los planos: (a) $\{e_1, e_3\}$ y (b) $\{e_2, e_3\}$ 157

3.9. Continuación en ω para $\kappa_2^i \neq 0$ de las ramas $B1$ y $B2$. Proyección en el plano $\{e_1, e_3\}$ 160

3.10. (a) Proyección sobre $\{e_2, e_3\}$ de la rama $2-\kappa_2^i$. (b) ramas $B3$ y $4-\kappa_2^i$. (c) ramas $4-\kappa_2^i$, $4a-\kappa_2^i$ y $4b-\kappa_2^i$ sobre $\{e_2, e_3\}$. (d) ramas $4-\kappa_2^i$, $4a-\kappa_2^i$ y $4b-\kappa_2^i$ sobre $\{e_2, e_3\}$ 161

3.11. Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B1$ 162

3.12. Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B2$ 163

3.13. Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B2$ 164

3.14. Formas del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $B3$ 164

| | |
|--|-----|
| 3.15. Formas tridimensionales del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $2-\kappa_2^i$ | 165 |
| 3.16. Formas tridimensionales del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $4-\kappa_2^i$ | 166 |
| 3.17. Formas tridimensionales del tether para diferentes valores de ω a lo largo de la rama $4a-\kappa_2^i$ | 166 |
| 3.18. Evolución de los autovalores con mayor parte real a lo largo de la solución trivial para $\kappa_2^i = 0$ desde $\omega = 0$ a BP3. | 167 |
| 3.19. Evolución de los autovalores con mayor parte real a lo largo de la solución trivial para $\kappa_2^i = 0$ desde BP4 a BP6. | 170 |
| 3.20. Evolución de los cuatro autovalores con mayor parte real a lo largo de la rama 1. La línea de puntos, que representa la evolución de los autovalores al variar ω , es ficticia. | 171 |
| 3.21. Formas de las autofunciones para tres bifurcaciones de tridente consecutivas (BP1, BP3 y BP5) en el plano $\{e_1, e_3\}$ | 173 |
| 3.22. Modo de desestabilización de la solución trivial en BP1, desplazamientos en el plano $\{e_1, e_3\}$ | 173 |
| 3.23. Evolución con ω de los autovalores con parte real mayor a lo largo de la rama $B1$ | 175 |
| 3.24. Evolución con ω de los autovalores con parte real mayor a lo largo de la rama $B2$, bajo lp1. | 176 |
| 3.25. Evolución con ω de los autovalores con parte real mayor a lo largo de la rama $B2$, sobre lp1. | 177 |
| 3.26. Evolución de la flecha del contactor frente a P y formas del tether para $\omega = 43$ | 179 |
| 3.27. Evolución de la flecha del contactor frente a Q y formas del tether para $\omega = 43$ | 180 |
| 3.28. Evolución de la flecha del contactor frente a P y formas del tether para $\omega = 2$ | 181 |

3.29. Evolución de la flecha del contactor frente a Q y formas del tether para $\omega = 2$ 181

4.1. Montaje experimental del hilo conductor, Woodson y Melcher [91]. 184

4.2. Interacción de un TE con el campo geomagnético. 187

4.3. Diagrama de bifurcación para $\omega = 2\omega_c$ 194

4.4. Zoom diagrama de bifurcación para $\omega = 2\omega_c$ 195

4.5. Proyección de los tres primeros modos del tether en el plano $\{e_1, e_3\}$ para una valor de $z(0) = 0.4$. Valores de B : 4.448 (b1), 16.49 (b3) y 38.74 (b5). 196

4.6. Proyección de los tres primeros modos del tether en el plano $\{e_2, e_3\}$ para una valor de $z(0) = 0.4$. Valores de B : 4.448 (b1), 16.49 (b3) y 38.74 (b5). 197

4.7. Vista 3D de la solución $z(0) = 0.4$ y $B = 17.15$ de la rama b4. . . . 197

5.1. Subestructuración del tether y coordenadas naturales usadas en la modelización. 204

5.2. Modos estáticos de una subestructura. 208

5.3. Modos dinámicos de una subestructura. 210

5.4. Método Co-rotacional. Discretización campo desplazamientos locales y velocidades globales. 214

5.5. Evolución con el tiempo de la posición del contactor y trayectoria para $\omega_{spin} = 1.31\omega_c$ 229

5.6. Evolución con el tiempo de la posición del contactor y trayectoria para $\omega_{spin} = 2.6\omega_c$ 230

5.7. Evolución con el tiempo de la posición x del contactor para $\omega_{spin} = 1.31\omega_c$ con y sin fuerza de frenado de Lorentz. 231

5.8. Evolución con el tiempo de la posición x del contactor para $\omega_{spin} = 1.31\omega_c$ con y sin fuerza de frenado de Lorentz. 231

6.1. Ramas de equilibrios, modelo de Cosserat. 237

| | |
|---|-----|
| 6.2. Ramas de equilibrios, modelo de Jeffcott. | 238 |
| 6.3. Comparación de los modelos de Jeffcott y Cosserat en términos de desplazamiento dimensional frente a la velocidad de giro. | 239 |
| 6.4. Velocidades de simulación para la comparación de los modelos de Jeffcott y DSM. | 240 |
| 6.5. Simulación del modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.8$ | 241 |
| 6.6. Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 0.8$ | 242 |
| 6.7. Fuerza elástica lineal y no-lineal según e_1 en el modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.8$ | 243 |
| 6.8. Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 0.95$ | 244 |
| 6.9. Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 0.95$ | 244 |
| 6.10. Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 1.1$ | 245 |
| 6.11. Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 1.1$ | 246 |
| 6.12. Simulación modelo de Jeffcott, $\bar{\omega} = 1.5$ | 247 |
| 6.13. Simulación modelo DSM, $\bar{\omega} = 1.5$ | 248 |
| 6.14. Simulación DSM y rama correspondiente del modelo de Cosserat, $\omega = 1.31\omega_c$ | 249 |
| 6.15. Simulación DSM para $\bar{\omega} = 1.42\omega_c$ | 250 |
| 6.16. Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 1.42\omega_c$ | 251 |
| 6.17. Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 2.25\omega_c$ | 252 |
| 6.18. Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 2.6\omega_c$ | 253 |
| 6.19. Evolución de la coordenada x_1 del contactor frente al tiempo, $\bar{\omega} = 2.6\omega_c$ | 253 |
| 6.20. Trayectoria simulación DSM del contactor, plano móvil $\{e_1, e_2\}$, $\bar{\omega} = 1.68\omega_c$ | 254 |

| | |
|---|-----|
| 6.21. Evolución de las coordenadas x_1 y x_2 del contactor frente al tiempo, $\bar{\omega} = 1.68\omega_c$ | 254 |
|---|-----|