LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA: PUNTO DE ENCUENTRO DE LAS MATEMÁTICAS

Discurso pronunciado por el
Ilmo. Sr. D. LUIS NARVÁEZ MACARRO
en el Acto de su recepción como Académico Numerario
celebrado el día 1 de febrero de 2000

Excelentísimo Señor Presidente de la Real Academia Sevillana de Ciencias, Excelentísimas e Ilustrísimas Autoridades, Ilustrísimos Señores Académicos, queridos compañeros y amigos, Señoras y Señores:

No recuerdo haberme encontrado jamás en una situación como la de hoy. Me siento abrumado por haber sido elegido miembro de esta Corporación. Le agradezco que haya observado en mí méritos de los que se derive tal privilegio. Pero, tal como nos enseña la Física, siempre hay interacción entre observador y observable que se traduce en indeterminación. Creo que en este caso la indeterminación se ha resuelto claramente a mi favor, y sospecho también que la constante que rige la incertidumbre de tales observaciones es astronómicamente más grande que la constante de Planck de la Mecánica Cuántica.

Agradezco al Profesor José Luis Vicente Córdoba que, a través de la interacción, me haya enseñado y aconsejado y haya logrado que muchas veces me sienta satisfecho con mi labor. Él tiene mucho que ver con el excelente clima reinante en el Departamento de Álgebra al que pertenezco. Desde hace más de veinte años me enriquezco diariamente con la generosidad de mis compañeros y con sus facetas de maestros, colegas, consejeros o alumnos.

Y ahora querría hablarles de la Geometría Algebraica.

1. ¿QUÉ ES LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA?

Hoy por hoy, la Geometría Algebraica es uno de los campos científicos universalmente admitidos que sirven para clasificar las Matemáticas. Así lo encontramos en la parrilla de sesiones del último Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en Berlín en agosto de 1998, en compañía de otras 18 disciplinas, como son la Lógica, el Álgebra, la Teoría de Números, la Geometría Diferencial y el Análisis Global, la Topología, el Análisis, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y los Sistemas Dinámicos, las Ecuaciones en Derivadas Parciales, la Física Matemática, la Probabilidad y la

Estadística, la Combinatoria, los Aspectos Matemáticos de las Ciencias de la Computación, el Análisis Numérico y la Computación Científica, y la Teoría de Control y la Optimización entre otros. También aparece en la lista de campos científicos del Tercer Congreso Europeo de Matemáticas, que se celebrará en Barcelona en julio de este año, esta vez acompañada de otras 13 disciplinas que no difieren fundamentalmente de las anteriores.

En cierto sentido, la Geometría Algebraica es una más entre las otras, pero voy a tratar de explicarles alguna de sus características que en mi opinión le confieren luz propia.

Primero, y para fijar ideas, deberíamos comenzar por responder a la pregunta: ¿qué es la Geometría Algebraica? En Matemáticas tratamos de resolver problemas y de elaborar teorías en donde podamos relacionarlos entre sí y comprenderlos mejor, ya sea en sí mismos, ya sea con respecto a las cuestiones que los originaron, a menudo en otras Ciencias o en la Técnica. La Geometría Algebraica Clásica se ocupa de problemas planteables en términos de figuras determinadas por ecuaciones, *verbi gracia* por ecuaciones polinómicas.

Los primeros ejemplos de tales objetos son los que aparecen en el Álgebra Lineal y la Geometría que enseñamos a nuestros alumnos de Ciencias o de Escuelas Técnicas, o incluso de Bachillerato. Se trata de las rectas, los planos, las variedades lineales, así como las cónicas (elipses, parábolas e hipérbolas) y las superficies cuádricas del espacio. El caso de las variedades lineales es particularmente sencillo. Son objetos perfectamente homogéneos, es imposible distinguir intrínsecamente unos puntos de otros. La "geometría" de estos objetos es muy simple, pasa inadvertida. En el caso de las cónicas y las cuádricas, o de forma precisa, de las figuras dadas por ecuaciones de segundo grado, aparecen tímidamente nuevos fenómenos. Algunas veces obtenemos figuras tan homogéneas como puedan ser las rectas o los planos. Este es el caso de las circunferencias o de las esferas, de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ o $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ respectivamente. Sin embargo, si consideramos la figura de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, que corresponde a un cono de base una circunferencia, observamos que no todos sus puntos gozan de las mismas propiedades intrínsecas. Hay uno que se distingue claramente de todos los demás: el vértice, de coordenadas $x = y = z = 0$. En términos matemáticos decimos que es un *punto singular.*

También podemos preguntarnos qué ocurre cuando cortamos entre sí dos figuras de las mencionadas. El caso de las variedades lineales sigue siendo extremadamente simple: al cortar dos planos obtenemos una recta, y en general, al cortar dos variedades lineales obtenemos de nuevo una variedad lineal. Para distinguir variedades lineales entre sí es suficiente considerar su dimensión: las de dimensión cero son los puntos, las de dimensión uno son las rectas, las de dimensión dos son los planos, etc. Sin embargo, si cortamos dos conos, o más generalmente, dos figuras dadas por ecuaciones de segundo grado, es probable que tengamos problemas para imaginarnos lo que ocurre dependiendo de su posición. De hecho, sabemos que pueden ocurrir exactamente 13 posibilidades y en cada una de ellas la intersección es una curva que queda determinada por propiedades muy peculiares. Ahora bien, para llegar a esta conclusión hemos de utilizar una cierta artillería de herramientas y métodos algebraicos de los que pueden dar buena cuenta los alumnos que cursaron la asignatura Geometría II del antiguo plan de estudios de Matemáticas de Sevilla, y podemos adivinar que la cuestión es mucho más complicada si en lugar de considerar el corte de dos figuras dadas por ecuaciones de segundo grado, nos interesamos por la intersección de tres o más figuras de ecuaciones de grado arbitrario. Esta es justamente, y en primera aproximación, el objetivo de la Geometría Algebraica Clásica.

La aparición de los puntos singulares aludidos anteriormente es uno de los ingredientes que motivan la introducción de métodos específicos y que justifican el apellido "algebraica", y es quizá una de las principales causas por la que la Geometría Algebraica llega a constituirse en especialidad con nombre propio, interaccionando a continuación de forma intensa con el resto de las Matemáticas. Es más, podemos pensar que la Geometría Algebraica no es otra cosa que el estudio de las singularidades, pues toda la información geométrica contenida en cualquier figura, aunque sea de naturaleza global, queda automáticamente reflejada en el vértice del cono que la tiene como base.

Es probable que muchos de los presentes recuerden, aunque sea vagamente, el problema puramente práctico de despejar una de las incógnitas dentro de una ecuación. Una respuesta parcial a tal problema se encuentra en el llamado "teorema de la función implícita", muy popular entre los estudiantes de los primeros cursos de cualquier carrera científico-técnica. Las condiciones de aplicabilidad de dicho teorema, o como decimos en Matemáticas, las *hipótesis,* incluyen una que, en términos geométricos, exige la ausencia de singularidades. Los puntos singulares aparecen pues en el origen de algunas complicaciones.

A un nivel más avanzado encontramos algo similar cuando estudiamos las soluciones de ecuaciones diferenciales. En un primer contacto con el problema presuponemos la ausencia de singularidades, pero si miramos con atención las ecuaciones que nos interesan, muchas provenientes de las Ciencias Experimentales o de la Economía, observamos la presencia de singularidades, y no resulta difícil sospechar que es justamente allí donde radica la enjundia del problema que las origina. Incluso a un nivel mucho más práctico, allí donde la Ciencia o la Técnica se contentan con soluciones aproximadas y donde la dificultad imposibilita un conocimiento teórico completo, es muy útil disponer de información cualitativa y cuantitativa acerca de las singularidades. Ello permite con frecuencia mejorar la eficacia de los métodos numéricos de aproximación.

Existen otros muchos ejemplos donde la presencia de "singularidades" condiciona nuestro trabajo científico, y algunos los podemos encontrar hasta en los medios de comunicación de masas: el *caos,* el *big bang,* etc.. Pero una vez constatada la expansión del fenómeno de las singularidades a lo largo y ancho de las Matemáticas y del resto de las Ciencias, no me gustaría pasar la página sin ilustrar el papel de la Geometría Algebraica por medio de un ejemplo que considero fundamental: el de la noción de *multiplicidad* de un punto singular.

Tomemos un cono y hagamos pasar una recta arbitraria por su vértice. Si movemos un poco nuestra recta de manera que ya no pase por el vértice, pero que siga cortando al cono, observamos que, salvo posiciones excepcionales de tangencia, la recta cortará al cono exactamente en dos puntos, y que además éste es el número máximo posible de puntos de corte. Este número de puntos puede considerarse una característica cuantitativa de la singularidad que el cono tiene en su vértice, y lo resumimos diciendo que la *multiplicidad* del vértice de un cono es 2. De hecho, lo que ocurre en este ejemplo ocurre siempre. Si tomamos un punto cualquiera de una superficie dada por ecuaciones y hacemos pasar por él una recta, al moverla ligeramente observamos que hay un número máximo de puntos de corte posibles en el entorno de dicho punto, y que además dicho número máximo se alcanza "casi siempre", salvo en posiciones excepcionales. Este resultado de naturaleza experimental puede ser demostrado rigurosamente no sólo para superficies, sino para objetos en dimensión arbitraria, aunque la prueba no es completamente elemental y requiere una cierta maestría con los "ε" y los "δ" del Cálculo.

De esta forma asociamos a cada punto de una figura geométrica dada por ecuaciones un número, que llamamos *multiplicidad,* y que mide en primera instancia la complejidad de la singularidad. Así, los puntos cuya multiplicidad es igual a 1 son exactamente aquellos que no son singulares. Pero aún no hemos terminado: una cosa es haber demostrado que un cierto número existe, o tiene sentido, y otra bien distinta es poder calcularlo a partir de los datos iniciales, es decir, de las ecuaciones que determinan nuestra figura. Es aquí donde los métodos algebraicos intervienen creando toda una teoría de *anillos locales, polinomios de Hilbert,* etc. que conducen al estudio del número anterior, a su interpretación en términos combinatorios, –por tanto computables–, a su afinamiento y mejora hasta extremos insospechados –la multiplicidad no es más que la punta visible de un iceberg de números que también miden a la singularidad y que antes estaban escondidos–, y a lo que quizá llama más la atención de los matemáticos: su extensión a otras situaciones abstractas y extremadamente generales en las que no disponemos a priori de las herramientas del Cálculo, como por ejemplo, multitud de cuestiones surgidas de la Teoría de Números. Este ejemplo sirve también para ilustrar cómo la Geometría Algebraica hace las veces de puente entre distintas ramas de las Matemáticas y es capaz de trasvasar ideas, métodos y técnicas entre ellas.

Para llegar a la noción algebraica de multiplicidad que acabamos de comentar han sido necesarios, cómo no, muchos años, incluso siglos, y de hecho la versión que actualmente utilizamos es relativamente reciente: data del período 1935-55 y se debe principalmente al recientemente desaparecido André Weil y a Pierre Samuel. Nos surge así la cuestión fundamental de la evolución de la Ciencia.

2. BREVES NOTAS SOBRE LA EVOLUCIÓN DE LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA Y DE LAS MATEMÁTICAS

La Geometría Algebraica que conocemos en la actualidad, al igual que las Matemáticas en general, es fruto de una larga sucesión de observaciones y descubrimientos, de reflexiones y de intuiciones que se ha visto acelerada en el siglo XX. Aunque no soy en absoluto, y muy a mi pesar, un experto conocedor de la Historia de las Matemáticas, sí quisiera referirme breve y sucintamente al paralelismo, con un cierto desfase temporal, entre la evolución de la Geometría Algebraica y la evolución de las Matemáticas.

Las Matemáticas, cuyo nacimiento como ciencia fijamos en la época griega a través de la Geometría Axiomática y la Aritmética, se han desarrollado bajo la influencia de dos acontecimientos fundamentales: el descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por Leibniz y Newton en el siglo XVII, y la crisis de fundamentos de finales del siglo XIX y principios del XX, iniciada con las *Geometrías no euclídeas* de Riemann, y engrosada con las paradojas y patologías ligadas al concepto de *Infinito*.

En la primera época, desde sus orígenes hasta el Cálculo Infinitesimal, los avances más significativos corresponden al desarrollo del *Álgebra,* pero su alcance es muy limitado y pueden enmarcarse en el estado general de la Ciencia en la Edad Media. A partir del descubrimiento del Cálculo Infinitesimal se produce una verdadera revolución. Técnicas y conceptos completamente nuevos inundan las Matemáticas y la ligan estrechamente con las Ciencias de la Naturaleza, en especial con la Física (Mecánica, Astronomía). Es más, este hecho, al promover la transición de lo descriptivo a lo deductivo, no es ajeno a la constitución de ésta última como ciencia propiamente dicha. Se produce un trasvase continuo de ideas entre ambas ciencias, y casi una identificación, de manera que no existe una frontera clara entre matemáticos y físicos. La idea preponderante desde los griegos, pasando por Galileo, de que las Matemáticas no son una invención humana, sino la clave de las leyes de la Naturaleza, se ve fortalecida. Pero este crecimiento espectacular llevó inexorablemente a una época de crisis: la aparición de nuevas axiomáticas en Geometría, relativizando en primera instancia la validez de las Matemáticas respecto del mundo físico, y las paradojas ligadas al uso indiscriminado del *Infinito* abrieron una brecha que cuestionaba profundamente la exactitud y certidumbre de las Matemáticas. Era necesario hacer un alto en el camino y examinar con extremo cuidado los fundamentos en los que se apoyaban los conceptos y argumentos matemáticos. Es en este momento, hace alrededor de un siglo, cuando nacen las llamadas *Matemáticas Modernas,* estructuradas por la *Teoría de Conjuntos y* el *método axiomático.* Es un período donde las Matemáticas se miran su propio ombligo, distanciando sus objetivos de los del resto de las Ciencias. Quizá es aquí donde empieza a crearse la dicotomía entre *Matemáticas Puras y Matemáticas Aplicadas.*

En el "haber" de esta época se encuentran la creación de un lenguaje extremadamente preciso y algunos éxitos indiscutibles, entre los que no quiero olvidar la demostración del *Teorema de Incompletitud* de Gödel, en 1931, algo así como el "principio de incertidumbre de las Matemáticas". Puesto que las Matemáticas se dedican a demostrar resultados, es necesario precisar el propio concepto de *demostración,* de manera que una demostración sea intemporal e incuestionable desde el punto de vista de la Lógica. Esta cualidad es ya implícita y caracteriza a las Matemáticas desde sus orígenes, pero es en esta época de crisis cuando realmente la cuestión queda zanjada. Ahora bien, después de todo avance viene una nueva pregunta, a menudo más difícil, haciendo verdad aquello de que los conocimientos humanos son como una esfera que a medida que crece aumenta el contacto con lo desconocido. Ahora se trata de saber si toda cuestión que surja dentro de las Matemáticas admite una respuesta mediante una demostración, con independencia de que seamos capaces de encontrarla. Pues bien, Kurt Gödel demostró, e insisto en la palabra "demostró" (recordemos la intemporalidad e incuestionabilidad del concepto) que en Matemáticas existen enunciados imposibles de probar y al mismo tiempo imposibles de refutar. Surge así una limitación intrínseca y no prevista de las Matemáticas, y puede que desde un punto de vista filosófico sea exponente de una limitación general del conocimiento humano. Pero lo que más nos enorgullece a los matemáticos es que dicha limitación no ha sido puesta de manifiesto por el mundo que nos rodea, sino por la propia Matemática, y que se trata de una limitación cuya naturaleza nos resulta perfectamente comprensible y acotada, y con la que hemos logrado convivir en armonía.

En el "debe" de esta época de crisis encontramos algunas "facturas" que aún estamos pagando:

- la sofisticación del lenguaje matemático,
- la divergencia respecto de las Ciencias de la Naturaleza,
- el cisma entre las Matemáticas Puras y las Matemáticas Aplicadas, con una inicial preponderancia, e incluso prepotencia, por parte de las primeras.

A partir de los (19)50 se observa una inflexión importante, en especial en relación a este último punto. El mundo de la Economía y las Finanzas, la previsión del futuro y la toma de decisiones, la aparición de los ordenadores y, por supuesto, la guerra, han ofrecido a la Matemática Aplicada una cierta revancha. Pensemos que si la Primera Guerra Mundial se asocia con los avances de la Química y la Segunda Guerra Mundial con los avances de la Física, la posibilidad o imposibilidad de una Tercera Guerra Mundial aparece íntimamente ligada al desarrollo del tándem Matemática-ordenadores.

Volviendo nuestra atención hacia la Geometría Algebraica, podemos fijar su origen en la Geometría Analítica de Descartes y Fermat en el siglo XVII, donde se descubre la posibilidad de estudiar las figuras geométricas directamente a partir de las ecuaciones que las determinan, en contraposición con el método axiomático de la Geometría griega. A partir de ahí, y aprovechando el desarrollo que también tuvo el Álgebra a la sombra de la revolución del Cálculo Infinitesimal, y bajo el influjo de la obra colosal de Riemann, se constituyó la Geometría Algebraica Clásica, que tuvo su apogeo en la escuela italiana de finales del siglo XIX. Aquí también observamos la irrupción de una crisis de fundamentos y la ausencia de los estándares de rigor que ya impregnaban las Matemáticas en su conjunto por aquella época. La tarea de la formalización y de la creación de un lenguaje preciso es compartida por matemáticos cuyos nombres inundan nuestros libros de textos: Dedekind, Weber, Max Noether, Schubert, Van der Waerden, Krull, y el propio Hilbert entre otros, pero es quizá la obra de Zariski, heredero directo de la escuela italiana, el colofón de este período. Esta tarea se intensificó con los trabajos de Weil en los años (19)40 y de Serre en los (19)50, quienes gracias a sus estrechas relaciones con otras disciplinas, como el Análisis, la Topología, la Teoría de Números y la Geometría Diferencial, lograron dotar a la Geometría Algebraica de una presentación formalmente análoga a la de la Geometría Diferencial y la enriquecieron de manera fundamental con los métodos cohomológicos y la *teoría de haces,* a los que me referiré más tarde.

Pero la gran revolución se produjo con la puesta en práctica del programa esbozado por Grothendieck a finales de los (19)50 [23, 24], y que se extendió al menos hasta principios de los (19)70 [37, 31, 32, 33, 34, 25, 35, 36], [29, 27, 16, 14, 15, 2, 18, 4, 30]. Este matemático contemporáneo dio un impulso espectacular e inimaginable a la Geometría Algebraica, creando un marco común que puede englobar a la propia Geometría Algebraica, la Geometría Diferencial, la Teoría de Números, la Teoría de Singularidades y el Álgebra Conmutativa. Es quizá algo difícil de comprender para el no especialista, y en todo caso es difícil de explicar, pero me gusta pensar que esta creación tiene una repercusión relativa similar a la que en Física tendría la unificación de las fuerzas de la Naturaleza. Grothendieck propone como objeto básico de estudio la noción de esquema, concepto que abarca simultáneamente la noción geométrica de *variedad* y la noción algebraica de *anillo,* y que marca el nacimiento de la Geometría Algebraica moderna. De esta forma, la relación entre el Álgebra y la Geometría se equilibra. No sólo es el Álgebra la que proporciona precisión y método a la Geometría, sino que ésta también sirve de modelo heurístico a aquélla y le permite incorporar sus fecundas ideas y técnicas. Es curioso, pero justamente este hecho pone en tela de juicio la frase "Abajo Euclides" del que fuera entusiasta colaborador de Grothendieck en la vasta tarea fundacional, Alexandre Dieudonné.

Al igual que en la evolución de las Matemáticas durante el siglo XX, la de la Geometría Algebraica ha tenido consecuencias fundamentales de naturaleza muy dispar. Por una parte, la obra de Grothendieck y su escuela produjo una sofisticación mayor si cabe que la que antes había tenido lugar en las Matemáticas, con la consiguiente separación, y casi ruptura, con otras ramas de las mismas. Al igual que a principios del siglo XX los derroteros por los que caminaban las Matemáticas la hacían incomprensible para la mayor parte del resto de los científicos, algo parecido ocurrió con la Geometría Algebraica de Grothendieck respecto del resto de los matemáticos, e incluso diría que con respecto de muchos de los geómetras algebristas clásicos. Por otra parte, la Geometría Algebraica moderna se ha mostrado indispensable en la resolución de cuestiones muy profundas y difíciles, de las que son una excelente muestra la resolución de las *conjeturas de Weil* a mediados de los (19)70 por Pierre Deligne, la resolución de la *conjetura de Mordell* a principios de los (19)80 por Gerd Faltings, y hace tan sólo unos años, la tan esperada demostración de un famoso problema planteado hace más de 300 años: el *Teorema de Fermat,* por Andrew Wiles.

3. EL ESTUDIO ALGEBRO-GEOMÉTRICO DE LOS SISTEMA LINEALES DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

A finales de los (19)60 se produce otro hecho importante del que *a posteriori* he podido participar más directamente. El profesor Sato y su escuela de Kyoto fueron pioneros en la introducción de los métodos cohomológicos dentro de la Teoría de los

Sistemas de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Uno de sus principales productos es la *Teoría de Hiperfunciones* [78, 79] . Al igual que para extraer la raíz cuadrada de un número negativo no bastan los números *reales,* sino que necesitamos ampliarlos a los números *complejos,* algo parecido, pero mucho más complicado, ocurre cuando tratamos de resolver sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. A menudo, y en especial allí donde topamos con las ya famosas singularidades, dichos sistemas no poseen soluciones en el sentido clásico de la palabra, es decir, soluciones que sean funciones. En los años (19)50, Laurent Schwartz revolucionó de nuevo la escena matemática con la introducción de la *Teoría de Distribuciones.* Las funciones en el sentido clásico son distribuciones, pero hay muchas más distribuciones que funciones, y de hecho resulta mucho más natural buscar las soluciones distribucionales de nuestros sistemas que las clásicas. Pues bien, las *hiperfunciones* de Sato son unos objetos que engloban a las distribuciones de Schwartz, y su construcción es fruto de una magistral interacción entre el Análisis Complejo y los métodos cohomológicos.

Pero, ¿qué son los métodos cohomológicos? Puede que aún recordemos aquella fórmula que explicaban alrededor del cuarto año de Bachillerato, hace ya algún tiempo, y que decía que el número de caras menos el número de aristas más el número de vértices de cualquiera de los poliedros regulares es siempre igual a 2. En realidad dicha fórmula es válida para cualquier *triangulación, o* descomposición en triángulos, que se nos ocurra dibujar sobre la superficie de una esfera. Si en lugar de trabajar con una esfera lo hiciéramos con otra superficie, por ejemplo un "donut", encontraríamos una fórmula del mismo tipo pero en lugar de 2 obtendríamos otro número entero. Este número es pues una característica de nuestra superficie, y no depende de la triangulación que estemos considerando. Es lo que en Matemáticas llamamos un *invariante.* Hoy por hoy, la técnica que conduce a la obtención y estudio de dichos invariantes es lo que ha venido a llamarse *Álgebra Homológica.* Tradicionalmente su campo de aplicación se centraba en cuestiones topológicas, como es el caso de las superficies que acabamos de comentar, pero a partir de los años (19)50 su uso se extendió por la Teoría de Funciones de Varias Variables Complejas, y por supuesto por la Geometría Algebraica y el Álgebra abstracta, abriendo una nueva brecha entre las Matemáticas que usaban los métodos cohomológicos y las que no.

La escuela del profesor Sato, liderada más tarde por Kashiwara, sistematizó el uso del Álgebra Homológica y la *Teoría de Haces* en el estudio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales en Derivadas Parciales con coeficientes analíticos. Como consecuencia se introdujo la noción de *soluciones superiores* de un SELDP y se obtuvieron los consiguientes teoremas de finitud, generalizando hasta extremos insospechados los resultados clásicos de Cauchy, Frobenius y Kowalevskaya. También se dió una formulación precisa de las técnicas *microlocales,* que ya aparecían con Hörmander en la teoría clásica. Pero lo que quizá tuvo más trascendencia fue la aparición en escena de una verdadera Teoría de Singularidades para los SELDP en el más puro estilo de la Geometría Algebraica de Grothendieck, sólo que en el caso de las ecuaciones en derivadas parciales, las singularidades no son exclusivamente puntos, sino puntos acompañados de determinadas (co)direcciones, o dicho de otro modo, un mismo punto puede ser singular en una dirección y no serlo en otra, lo que justifica el adjetivo *microlocal*. Todo esto se resume con la noción de *variedad característica* de un SELDP dentro del fibrado cotangente, generalizando el caso clásico de una sola ecuación, aunque como ocurre en la Geometría Algebraica Clásica, las singularidades de un sistema de ecuaciones no son ni mucho menos la superposición de las singularidades de cada una de las ecuaciones: se producen interacciones de naturaleza algebro-geométrica que la teoría clásica no detecta.

Se propició así una convergencia entre los desarrollos de la escuela del Profesor Sato y los de la Geometría Algebraica, por lo que a la teoría resultante él mismo la bautizó como *Análisis Algebraico*. Todo ello nos lleva a aquellos que, de una forma u otra, trabajamos dentro de la teoría iniciada por Sato a sentirnos cómodamente instalados dentro de la Geometría Algebraica.

Durante la década de los 70 se tienden los puentes entre el Análisis Algebraico y la Geometría Algebraica:

- I.N. Bernstein, movido por la resolución de una conjetura de Gelfand a propósito del problema de la división de las distribuciones, inaugura el uso de la teoría de multiplicidades aludida anteriormente en el estudio de los SELDP y obtiene la existencia de un polinomio que lleva su nombre, y al que me referiré más tarde [3].
- Masaki Kashiwara descubre la formulación exacta de las operaciones geométricas (proyectar y cortar) sobre los SELDP y demuestra los teoremas básicos de finitud para las mismas [40, 45, 41, 42, 43]. También descubre, junto con T. Oshima, la formulación microlocal de la noción clásica de *puntos singulares regulares* de Fuchs [46].
- Zoghman Mebkhout obtiene unos teoremas de dualidad sobre las soluciones superiores de los SELDP, en el más puro espíritu de la Topología y Geometría Algebraicas [51, 55].
- Bernard Malgrange descubre una relación absolutamente precisa entre un tipo especial de SELDP, los denominados de *Gauss-Manin,* y los puntos singulares de hipersuperficies (recordemos el caso de los conos expuesto al principio) [48, 49, 50].

Pero es en la reformulación del clásico problema de Riemann-Hilbert y en su posterior demostración por Mebkhout [52, 54, 53, 57, 56] y Kashiwara [44, 47] en 1980 donde la teoría capta la atención del mundo matemático. A grosso modo, el problema de Riemann-Hilbert generalizado consiste en determinar hasta qué punto las soluciones de un SELDP en un número arbitrario de variables determinan al propio sistema. Esto no debe verse en absoluto como un puro desafío intelectual. No hemos de olvidar que el proceso de resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales es a menudo una tarea ardua. Aunque en el propio sistema están encerradas todas las propiedades de sus soluciones, la complejidad de estas últimas suele ser mucho mayor que la del propio sistema. Por ejemplo, la ecuación diferencial que determina a la función exponencial es sencillamente "$y' - y = 0$", que formalmente es mucho más simple que la propia función exponencial. A veces, la resolución explícita no nos ayuda a detectar las propiedades de las soluciones. En este sentido podemos pensar que la ecuación, o el sistema de ecuaciones en su caso, codifica eficazmente la información de sus soluciones, y por tanto el problema de Riemann-Hilbert no es más que aprender los mecanismos de esta codificación sin pasar necesariamente por la resolución.

En la década de los (19)80, y yo diría que hasta nuestros días, el Análisis Algebraico, también llamado Teoría algebro-geométrica de los SELDP, o simplemente *Teoría de D-módulos* (la letra "D" representa al anillo de los operadores diferenciales), no ha cesado de ampliar su campo de aplicación en el estudio y clasificación de los puntos singulares de variedades, en la Teoría de Representaciones de Grupos, en el estudio de los puntos singulares irregulares, las integrales de Feynman, etc.

4. APORTACIONES

Mi primer contacto con esta apasionante rama de las Matemáticas o, si se quiere, de la Geometría Algebraica, se llevó a cabo durante los años 1981 y 1982. Fue el Profesor Vicente Córdoba el que me inició, junto con mis compañeros Emilio Briales y Francisco Castro, en el terreno de la Geometría Algebraica y del Álgebra Conmutativa y el que me impulsó a proseguir mi formación en el seno del grupo de singularistas de la Escuela Politécnica de París. Allí, a través primero del Profesor Lê Dũng Tráng, y más tarde a través del propio Profesor Mebkhout, y de los Profesores Teissier y Verdier, Francisco Castro y yo aprendimos las claves de la teoría y dimos nuestros primeros pasos investigadores.

En aquellos momentos el resultado estrella era la resolución del problema de Riemann-Hilbert antes aludido. Sin entrar en demasiados detalles, dicha resolución se apoyaba en dos pilares:

- Primero: una formulación cohomológica de la noción clásica de punto singular regular de un SELDP en dimensión arbitraria, y
- Segundo: la introducción, por vía axiomática, de unos objetos de naturaleza topológica que, por razones largas de explicar y quizá poco justificadas, fueron bautizados con el nombre de *haces perversos* (el lector puede consultar más detalles en [76]).

La resolución del problema de Riemann-Hilbert consiste en demostrar que, al tomar soluciones "superiores", se establece una equivalencia entre los SELDP con *singularidades regulares y* los haces perversos, de manera que estas soluciones determinan unívocamente a los sistemas, a condición de que estos tengan singularidades regulares. Piénsese que si nos limitásemos a considerar las soluciones en el sentido clásico, ya sean funciones o distribuciones, el problema de Riemann-Hilbert tendría una respuesta negativa. Si cerramos nuestros ojos a las soluciones superiores nos estamos privando pues de una información preciosa que está escondida en nuestras ecuaciones, y es justamente el Álgebra Homológica la encargada de desvelarla.

Tenemos así un puente entre dos mundos alejados *a priori:* el Álgebra y el Análisis de un lado, representados por los SELDP, y la Topología de variedades de otro, representada por los susodichos haces perversos. Este puente permite trasladar cualquier avance o conocimiento de una de las orillas a la otra.

No obstante, a pesar de constituir un logro de primera magnitud, la resolución del problema de Riemann-Hilbert adolecía de una escasa aplicabilidad directa en las cuestiones que surgen en el día a día de la Geometría Algebraica y las Singularidades.

El tema de mi tesis doctoral, que me fue propuesto en 1982 por el Profesor Lê Dũng Tráng, y que realicé bajo la codirección del profesor Mebkhout, consistía en describir explícita y localmente los SELDP holónomos regulares en dos variables, con singularidades a lo largo de un tipo de curva plana singular, llamada *cúspide* ($x^2 - y^3 = 0$). Utilizando la propia equivalencia de Riemann-Hilbert, el problema se reducía a un estudio pormenorizado de la topología local de las curvas planas. Mediante la teoría de Deligne de los *ciclos evanescentes* pude obtener dicha descripción no sólo en el caso de la cúspide, sino en el de una curva arbitraria con una sola rama [67, 69, 68, 70].

Algunos años más tarde, tuve la ocasión de completar los resultados anteriores para el caso de las curvas planas sin limitación en el número de ramas [74]. En todos estos resultados, los aspectos topológicos fueron los protagonistas.

Casi simultáneamente con la tesis doctoral, trabajé en una simplificación en la resolución del problema de Riemann-Hilbert para el caso global de la dimensión 1, es decir, de las superficies de Riemann [71].

Tras la finalización de la tesis doctoral, y a nuestra vuelta a la Universidad de Sevilla en el año 1984, Francisco Castro y yo comenzamos a colaborar en la realización del libro del profesor Mebkhout titulado "Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les Dx-modules cohérents" [58]. A raíz de este proyecto, el profesor Mebkhout y yo nos interesamos por la prueba original de la existencia del polinomio de Bernstein que antes comenté, y obtuvimos una unificación de todos los casos conocidos hasta la fecha, así como nuevos casos muy generales conectados con el Análisis p-ádico y la Teoría de Números [63, 61, 64]. He de destacar que, con motivo de este trabajo, constaté la solidez de la formación algebraica que el profesor Vicente Córdoba nos había proporcionado algunos años atrás.

Como subproducto de esta época "algebraica" de mi carrera investigadora, realicé un trabajo en donde se da un control explícito de los cuerpos de coeficientes de Cohen por medio de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden [72]. Dentro de la evolución natural de dicho trabajo, Magdalena Fernández y yo nos interesamos actualmente por su extensión al caso de la característica positiva [19, 20].

El libro del profesor Mebkhout hizo también que analizáramos el importante Teorema de Constructibilidad de Kashiwara. Dicho teorema es a las soluciones superiores de los sistemas con singularidades lo que el Teorema de Cauchy-Frobenius es a las soluciones clásicas de los sistemas no singulares. La prueba original [41] dependía de resultados muy finos de Oshima sobre la propagación de singularidades de las soluciones de ciertos sistemas elípticos. El profesor Mebkhout y yo descubrimos una prueba que, mediante operaciones geométricas (proyectar y cortar), reducía la cuestión al elemental y clásico Teorema de Cauchy [60, 65]. En palabras del profesor Mebkhout, dicha prueba es también el punto de partida de su reciente demostración de la finitud de la cohomologia p-ádica [59, pág. 1027], problema planteado desde finales de los (19)60. Una vez más, las Matemáticas nos sorprenden y nos muestran una unidad que en ocasiones nos empeñamos en ignorar.

Desde principios de los (19)90, me intereso por dos aspectos, en principio alejados, pero unidos por la cohomología de De Rham: las singularidades que aparecen como discriminantes de aplicaciones estables y el uso de la cohomología p-ádica en la Geometría Algebraica Aritmética. El primero de ellos fue fruto de la estancia en nuestro Departamento del profesor Mond de la Universidad de Warwick. Dicho profesor, el profesor Castro y yo mismo demostramos que, en la línea del Teorema de Comparación de Grothendieck, la cohomología singular del complementario de las citadas singularidades se calcula mediante el complejo de De Rham logarítmico asociado [10, 11]. Los objetos y las técnicas empleadas en este resultado siguen acaparando nuestra atención en la actualidad. Una muestra de ello se encuentra en la tesis del profesor Calderón, realizada bajo mi dirección [5, 6, 7], y la del profesor Ucha, realizada bajo la dirección del profesor Castro [80], así como en otros trabajos recientes o en curso de realización [9, 8].

El interés de la cohomología p-ádica y, por ende, de las ecuaciones diferenciales p-ádicas en las cuestiones aritméticas fue puesto de manifiesto por Dwork y Grothendieck hace más de treinta años [28]. El Análisis Algebraico al que me he venido refiriendo ha ofrecido un modo preciso de cómo adaptar nuestra intuición geométrica al caso p-ádico. Este hecho ha constituido uno de los hilos conductores en la colaboración que mantengo con el profesor Mebkhout desde hace más de diez años. Mis resultados en este sentido, unas veces en solitario y otras como coautor, consisten en la prueba de diversos teoremas de división de operadores diferenciales p-ádicos de orden Infinito [75], la construcción de una teoría p-ádica de SELDP [62] y la extensión de los ciclos evanescentes de Deligne a ciertas situaciones geométricas p-ádicas sencillas como primer paso de una teoría general [22].

Pero en Matemáticas, los avances y descubrimientos llevados a cabo en el marco de las teorías modernas rara vez reemplazan o cuestionan a las teorías clásicas. Más bien las enriquecen, o sencillamente las absorben generalizándolas o simplificándolas.

Así, los anillos de operadores diferenciales p-ádicos nos han hecho reflexionar sobre los anillos "clásicos", es decir, sobre los anillos de operadores diferenciales con coeficientes holomorfos. En un trabajo de larga gestación y aparecido recientemente, el profesor Mebkhout y yo hemos introducido una estructura canónica localmente convexa y nuclear en dichos anillos clásicos, y hemos demostrado que la división de Briançon-Castro-Maisonobe es continua con respecto a dicha estructura [73, 66, 39, 77]. En el desarrollo de una de las aplicaciones más notables de este resultado, me ví abocado a la generalización del conocido Teorema de Laurent al caso de varias variables complejas. Concretamente demostré que cualquier función de varias variables complejas con singularidades esenciales a lo largo de una hipersuperficie singular arbitraria, admite una forma normal de Weierstrass [66, § 5]. Todos estos resultados me han dejado una agradable sensación: la de haber utilizado de manera ineludible muchos de los conocimientos de Análisis Funcional que durante los estudios de Licenciatura nos enseñó el profesor Juan Arias. Aún a riesgo de repetirme, he podido sentir una vez más la unidad de las Matemáticas.

En la actualidad, tratamos de resolver algunas cuestiones que me surgieron cuando estudiaba la descripción explícita de los SELDP y que, por una razón u otra, han recobrado interés entre los especialistas. Por ejemplo, Félix Gudiel y yo estamos inmersos en una construcción general que nos permita trabajar de una forma más efectiva con los haces perversos [38].

Por otro lado, Francisco Castro y yo hemos estudiado nuevos procedimientos que mejoran la efectividad de ciertos cálculos complejos con operadores diferenciales [12].

5. *¿HACIA DÓNDE VAMOS?*

Es difícil conocer con precisión hacia dónde se encaminan las Matemáticas en la actualidad. No tenemos la suficiente perspectiva, pero aún así me gustaría hacer una reflexión sobre la evolución reciente que afecta a tres niveles distintos: el de las propias Matemáticas, el de la Geometría Algebraica y el de la Teoría de D-módulos o Análisis Algebraico. En todos ellos observamos un factor externo que sin lugar a dudas está teniendo consecuencias importantes, y yo diría que fundamentales: la omnipresencia de los ordenadores y de los programas de cálculo científico. A finales de los (19)50 ya existían programas de cálculo que revolucionaron la aplicabilidad de las Matemáticas a la Técnica y a otras Ciencias, pero dichos programas se limitaban casi exclusivamente a la realización de las operaciones aritméticas de los algoritmos numéricos de aproximación. A partir de los (19)70, los avances en el diseño de microprocesadores fueron convirtiendo al ordenador en una herramienta flexible, cómoda y accesible, posibilitando la creación de lenguajes más cercanos al propio lenguaje matemático. Ya no sólo los programas eran capaces de manipular datos numéricos, sino polinomios u otras expresiones simbólicas, estructuras como grupos, anillos *o álgebras de Lie,* o incluso superestructuras, como las *categorías.* En este sentido se produce un fenómeno muy interesante del que hasta el momento tan sólo hemos sido testigos de sus primeras consecuencias: un ente eminentemente práctico, como es el ordenador, que sirvió de apoyo a las Matemáticas Aplicadas en su particular "revancha" sobre las Matemáticas Puras, se revela como un instrumento revitalizador de estas últimas, las acerca al mundo de lo palpable y compensa los efectos negativos de su abstracción. Independientemente de toda discusión o polémica acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos (cf. [13]), parece claro que éstos cobran una realidad indiscutible cuando los ordenadores son capaces de manipularlos. Hoy por hoy no está más cerca de los sentidos la estructura de un átomo de hidrógeno, o la de un cromosoma, que la del anillo de los polinomios en varias variables con coeficientes racionales, la de una curva elíptica, la de un complejo simplicial de dimensión arbitraria o la de un SELDP con coeficientes polinómicos.

No obstante, podría parecer que el influjo del ordenador sobre las Matemáticas actuales corrige y cuestiona la sofisticación a la que ya nos hemos referido, pero en mi opinión no es así. Por ejemplo, incluso en la filosofía imperante en la obra de Grothendieck, paradigma de abstracción, observamos esfuerzos plenamente compatibles con la *computerización* de las Matemáticas (y perdónenme por semejante barbarismo). Si disponemos de una subvariedad diferenciable del espacio afín dada por ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros, podemos preguntarnos acerca de sus números de Betti, que también son números enteros. El camino normal pasaría por la consideración de la topología euclídea y por el manejo de triangulaciones, todos ellos de naturaleza poco efectiva, en contraste con la naturaleza concreta de los datos de partida –ecuaciones polinómicas– y de los datos de salida –números de Betti–. El problema que Grothendieck resuelve con su teorema de comparación [26] puede interpretarse justamente como un procedimiento efectivo de cálculo. En lugar de considerar la topología euclídea, podemos limitarnos a la topología de Zariski que, a pesar de su aparente carácter patológico, es computable. Después hemos de trabajar con el complejo de De Rham algebraico, objeto también computable. En resumen, el teorema de Grothendieck nos brinda una receta de cálculo que puede encomendarse a un ordenador.

El que hoy existan potentes programas de cálculo simbólico en Geometría Algebraica y Singularidades ha sido posible, en gran parte, gracias a ese inmenso trabajo fundacional llevado a cabo en la década de los (19)60. Tan sólo existe una diferencia de matiz en la palabra "calcular": para que hoy un programa sea capaz de calcular de forma efectiva, y casi rutinaria, la multiplicidad de un punto singular a partir de las ecuaciones, ha sido obviamente necesario el desarrollo previo de una teoría algebraica capaz de calcularlas teóricamente.

No creo que estemos en una época de "restar" en lugar de "sumar". Tampoco creo que nadie trate de prescindir de ninguno de los enormes desarrollos habidos en las Matemáticas del siglo XX. Más bien es tiempo de darlos a conocer al resto de las Ciencias y corregir así la divergencia habida. Tenemos por delante una enorme tarea didáctica y divulgativa de alto nivel, y al mismo tiempo los matemáticos hemos de ser mucho más permeables a las demandas externas. Esto también servirá para equilibrar la relación entre las Matemáticas Puras y las Aplicadas, o como muchos preferimos expresar (cf. [17]), entre las Matemáticas y sus Aplicaciones. Convenzámosnos: ni las Aplicaciones de las Matemáticas existen por sí mismas, ni las Matemáticas deben desarrollarse independientemente del resto de las Ciencias. Lo primero nos llevaría a una banalización, a la "alquimia". De producirse o haberse producido lo segundo, nos habríamos visto privados de gran parte de nuestro patrimonio: desde el Cálculo Infinitesimal hace casi cuatro siglos, inconcebible sin la intuición de la Mecánica, hasta los grupos cuánticos, el polinomio de Jones, la simetría "espejo" o los invariantes de Gromov-Seiberg-Witten de la cohomología cuántica, en las últimas dos o tres décadas.

Pero esta tarea no concierne sólo a los matemáticos. El resto de los científicos han de ser conscientes de que las Matemáticas que usan normalmente tienen más de un siglo y que por tanto pueden estar ignorando avances muy importantes que podrían serles de gran utilidad (recomiendo al respecto la lectura del artículo [21], de uno de los más destacados físico-matemáticos de nuestro país, el profesor Alberto Galindo). Al mismo tiempo, los matemáticos hemos de esforzarnos en paliar nuestra ignorancia en las Ciencias de la Naturaleza, la Economía, etc. Debería pues emprenderse una vasta operación de actualización y divulgación, que es especialmente acuciante en nuestro país.

A pesar de que las Matemáticas españolas hayan alcanzado en los últimos años el noveno puesto mundial en lo que a investigación se refiere, con el 4 por ciento de la producción total (ver [1]), y a pesar de haber superado en cifras relativas a otras ciencias tradicionalmente más implantadas, creo que los matemáticos, ni deberíamos sentirnos muy satisfechos, ni deberíamos creer que ya circulamos por la senda correcta. La necesaria interacción con el resto de las Ciencias ha de asentarse en el contacto profundo entre las distintas especialidades. En nuestro país, a las dificultades normales ligadas a la coexistencia de diversos "dialectos" del lenguaje matemático hemos de añadir las figuras administrativas de las áreas de conocimiento. Es paradójico observar cómo cualquier miembro de una determinada área tiene vedada la actividad dentro de cualquier otra, con independencia de la manera en que sus trabajos o intereses científicos encajen en el listado existente. La paradoja roza lo ridículo cuando constatamos que, al cruzar las fronteras administrativas, que no científicas, desaparecen muchas etiquetas, y de pronto podemos impartir prácticamente cualquier materia de nuestro interés en cualquier Universidad de un país desarrollado que no sea el nuestro.

Hablamos a menudo del fomento de la interdisciplinariedad en las Matemáticas, y es explicable. No creo que muchas de las medallas Fields, consideradas como el "Premio Nobel de las Matemáticas", pudieran encasillarse en ninguna de las áreas de conocimiento de que disponemos en nuestro país. Tampoco creo que la gran mayoría de los grupos de investigación con más proyección mundial pudieran hacerlo. Modestamente creo que sobre este punto deberíamos reflexionar.

Para terminar estas palabras, quisiera hacerlo con una reivindicación. Reivindicación que me es particularmente grato hacer aquí, en el seno de esta Corporación, y ahora, en el año 2000, Año Mundial de las Matemáticas: la de la unidad de las mismas.

Muchas gracias

REFERENCIAS

[1] C. ANDRADAS and E. ZUAZUA. *La investigación matemática en España en el periodo 1990-1999.* Real Sociedad Matemática Española, Madrid, 2002. (http://defalla.upc.es/umi/report.pdf).

[2] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, and J. L. VERDIER. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas,* volume 269, 270, 305 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algebrique du BoisMarie 1963-1964 (SGA 4). Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.

[3] J. BERNSTEIN. The analytic continuation of generalizad functions with respect to a parameter. *Funz. Anal. Appl.,* 6:26-40, 1972.

[4] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, and L. ILLUSIE. *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch,* volarme 225 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971.

[5] F.J. CALDERÓN MORENO. Quelques propriétés de la V-filtration relative a un diviseur libre. C. *R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* 323(4):377-381, 1996.

[6] F.J. CALDERÓN MORENO. Operadores diferenciales logarítmicos con respecto a un divisor libre. Univ. Sevilla, July 1997. Ph. D. Thesis.

[7] F.J. CALDERÓN-MORENO. Logarithmic differential operators and logarithmic de Rham complexes relative to a free divisor. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 32(5):701-714, 1999.

[8] F.J. CALDERÓN MORENO and L. NARVÁEZ MACARRO. The module $\mathscr{D}f^s$ for locally quasi-homogeneous free divisor. Compositio Math. 134 (2002), 59-74.

[9] F.J. CALDERÓN MORENO and L. NARVÁEZ MACARRO. Locally quasihomogeneous free divisors are Koszul free. Proc. Steklov Inst. Math., 238 (2002), 72-77.

[10] F.J. CASTRO-JIMÉNEZ, D. MOND, and L. NARVÁEZ-MACARRO. Cohomologie du complémentaire d'un diviseur libre. C. *R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.,* 320:55-58, 1995.

[11] F.J. CASTRO-JIMÉNEZ, D. MOND, and L. NARVÁEZ-MACARRO. Cohomology of the complement of a free divisor. *Trans. A.M.S.,* 348:3037-3049, 1996.

[12] F.J. CASTRO-JIMÉNEZ and L. NARVÁEZ-MACARRO. Homogeneising differential operators, Jane 1997. Preprint Fac. Matemáticas, 36, Univ. of Sevilla (http: / /www.us.es/da/prepubli/prepub36.pdf).

[13] P.J. DAVIS and R. HERSH. *Experiencia matemática.* Labor, Barcelona, 1981.

[14] M. DEMAZURE and A. GROTHENDIECK. *Schémas en groupes. II: Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux,* volume 152 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.

[15] M. DEMAZURE and A. GROTHENDIECK. *Schémas en groupes. III: Structure des schémas en groupes réductifs,* volume 153 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.

[16] M. DEMAZURE and A. GROTHENDIECK. *Schémas en groupes. I: Propriétés générales des schémas en groupes,* volume 151 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[17] J. DIEUDONNÉ. *En honor del espíritu humano: las matemáticas hoy,* volume 611 of *Alianza Universidad. Ciencias.* Alianza, Madrid, 1989.

[18] L. ILLUSIE (Ed.). *Cohomologie l-adique et fonctions L.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie 1965-1966 (SGA 5), Edité par Luc Illusie, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589.

[19] M. FERNÁNDEZ LEBRÓN. Diferenciaciones y cuerpos de coeficientes: Una generalizacion de un resultado de H. Matsumara, Septiembre 1993. (Tesis de Licenciatura, Univ. de Sevilla).

[20] M. FERNÁNDEZ LEBRÓN. Derivaciones de Hasse-Schmidt, cuerpos de coeficientes y extensión de escalares en característica positiva. Univ. Sevilla, 2002. Ph.D. Thesis.

[21] A. GALINDO. Dios aritmetiza. In *Horizonte Científico de España,* pp. 252-275. Círculo de Lectores, Barcelona.

[22] MICHEL GROS and LUIS NARVÁEZ-MACARRO. Cohomologie évanescente adique: calculs locaux. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* 104:71-90, 2000.

[23] A. GROTHENDIECK. The cohomology theory of abstract algebraic varieties. In *Proc. Int. Cong. Math., Edimburg,* pp. 103-118, 1958.

[24] A. GROTHENDIECK. *Fondements de la Géométrie Algébrique Sém. Bourbaki 1957/62).* Fac. de Scienc. de Paris, Sec. Mathématique, Paris, 1962.

[25] A. GROTHENDIECK. Éléments de géométrie algébrique IV: Étude locale des schémas et de morphismes de schémas (secunde partie). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.,* 24:231, 1965.

[26] A. GROTHENDIECK. On the de Rham cohomulogy of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.,* 29:95-105, 1966.

[27] A. GROTHENDIECK. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théoremes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*. NorthHolland Publishing Co., Amsterdam, 1968. Augmenté d'un exposé par Michele Raynaud, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1962, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 2.

[28] A. GROTHENDIECK. *Crystals and the De Rham cohomology of schemes*, pagas 306 358. North Holland, Amsterdam, 1968. (notes by I. Coates and O. Jussila).

[29] A. GROTHENDIECK. *Revetements Etales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, volume 224 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971.

[30] A. GROTHENDIECK. *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du BoisMarie 1967-1969 (SGA 7 I), avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288.

[31] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ. *Éléments de Géométrie Algébrique II: Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, volume 8 of *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Press Univ. de France, Paris, 1961.

[32] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ. *Éléments de Géométrie Algébrique III: Étude cohomologique des faisceaux cohérents (Première Partie)*, volume 11 of *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Press Univ. de France, Paris, 1961.

[33] A. GROTHENDIECK and J. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algebrique III: Étude cohomologique des foisceaux cohérents (Deuxieme Partie)*, volarme 11 of *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Press Univ. de France, Paris, 1963.

[34] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ. *Éléments de Géométrie Algébrique IV: Étude locale des schémas et de morphismes de schémas (Première Partie)*, volume 20 of *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Press Univ. de France, Paris, 1964.

[35] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ. *Éléments de Géométrie Algébrique IV: Étude locale des schémas et de morphismes de schémas (Troisième Partie)*, volume 28 of *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Press Univ. de France, Paris, 1966.

[36] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ. *Éléments de Géométrie Algébrique IV: Étude locale des schémas et de morphismes de schémas (Quatrième Partie)*, volume 32 of *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* Press Univ. de France, Paris, 1967.

[37] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ. *Éléments de Géométrie Algébrique I*, volume 166 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971.

[38] F. GUDIEL RODRÍGUEZ. Descripción explícita de t-estructuras sobre espacios estratificados. Univ. Sevilla, February 2001. Ph.D. Thesis.

[39] H. HAUSER and L. NARVÁEZ-MACARRO. Continuous division of differential operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(3):769 778, 2001.

[40] M. KASHIWARA. Algebraic study of systems of linear differential equations. Master's thesis, Univ. de Kyoto, 1971. (in Japanese).

[41] M. KASHIWARA. On the maximally overdetermined systems of differential equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 10:563-579, 1975.

[42] M. KASHIWARA. b-functions and holonomic systems. *Invent. Math.*, 38:33-53, 1976.

[43] M. KASHIWARA. On the holonomic systems of linear differential equations II. *Invent. Math.*, 49:121-135, 1978.

[44] M. KASHIWARA. Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles linéaires à points singuliers réguliers. In *Séminaire Goulaouix-Schwartz, 1979-1980 (French)*, pp. Exp. No. 19, 7. École Polytech., Palaiseau, 1980.

[45] M. KASHIWARA. Algebraic study of systems of partial differential equations. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (63):xiv+72, 1995. (English translation of [40]).

[46] M. KASHIWARA and T. OSHIMA. Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. *Ann. Math. (2)*, 106(1):145-200, 1977.

[47] MASAKI KASHIWARA. The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems. *Publ. Res. Inst. Math. Sci*, 20(2):319 365, 1984.

[48] B. MALGRANGE. Sur les polynomes de Bernstein. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 29:8188, 1974.

[49] B. MALGRANGE. Le polynome de I.N. Bernstein d'une singularité isolée. *Notes in Math.*, 459:98-119, 1976.

[50] B. MALGRANGE. Le polynome de Bernstein-Sato et cohomologie. *Astérisque*, 101-102: 233-267, 1983.

[51] Z. MEBKHOUT. Théorèmes de dualité pour les $\mathscr{D}_x$-modules cohérents. C. *R. Atad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 287:785-787, 1977.

[52] Z. MEBKHOUT. Cohomologie locale des espaces analytiques complexes. Univ. Paris VII, Février 1979. (Thèse d'Etat).

[53] Z. MEBKHOUT. Sur le problema de Riemann-Hilbert. In *Proc. Les Houches*, pp. 90-110. Lect. Notes in Phys., 126, Springer-Verlag, 1980, Berlin Heidelberg, 1979.

[54] Z. MEBKHOUT. Sur le problème de Riemann-Hilbert. C. *R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 290:415-417, 1980.

[55] Z. MEBKHOUT. Théoremes de dualité pour les Dx-modules cohérents. *Math. Stand.*, 59:25-43, 1982.

[56] Z. MEBKHOUT. Une autre équivalence de catégories. *Comp. Math.*, 51:63-88, 1984.

[57] Z. MEBKHOUT. Une équivalence de catégories. *Comp. Math.*, 51:51-62, 1984.

[58] Z. MEBKHOUT. *Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les* D_x*-modules cohérents*, volume 35 of *Travaux en cours*. Hermann, Paris, 1989.

[59] Z. MEBKHOUT. Sur le théoreme de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singuliere. *Amer. J. Math.*, 119:1027-1082, 1997.

[60] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ MACARRO. *Démonstration géométrique du théoreme de constructibilité*, pagas 251-257. Hermann, 1989.

[61] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ MACARRO. *Stabilité de la catégorie* $D^b(\mathscr{D}_x)$ *par* $\mathbf{R}\Gamma_{y,alg}$, pp. 98-107. Hermann, 1989.

[62] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ-MACARRO. Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques. In F. Baldassarri, S. Bosch, and B.Dwork, editors, *Conference on p-adic analysis*, pp. 267-308, IYento, 1989. Lect. Notes in Math., 1454, Springer-Verlag, 1990, Berlin-Heidelberg.

[63] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ MACARRO. *Théorème de dualité locale: Cas des k-algèbres noethériennes régulières*, pp. 42-55. Hermann, 1989.

[64] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ-MACARRO. La théorie du polynôme de Bernstein-Sato pour les algèbres de Tate et de Dwork-Monsky-Washnitzer. *Ann. Sci. E.N.S.*, 24:227-256, 1991.

[65] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ-MACARRO. Le théoreme de constructibilité de Kashiwara. In Ph. Maisonobe and C. Sabbah, editors, *Images directes et constructibilité (Éléments de la théorie des systèmes différentils, val. II), Summer school at CIMPA, Nice, 1990*, volume 46 of *Travaux en cours*, pagas 47-98, Paris, 1993. Hermann.

[66] Z. MEBKHOUT and L. NARVÁEZ-MACARRO. Le théoreme de continuité de la division dans les anneaux d'opérateurs différentiels. *J. reine u. angew. Math.*, 503:193-236, 1998.

[67] L. NARVÁEZ-MACARRO. *Faisceaux pervers dont le .support singulier est le germe d 'une courbe plana irréductible.* PhD thesis, Univ. Paris VII, October 1984.

[68] L. NARVÁEZ MACARRO. Un calcul de cycles évanescents par rapport aux courbes planes irréductibles. Applications aux faisceaux pervers. C. R. *Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 301(5):197-200, 1985.

[69] L. NARVÁEZ-MACARRO. Une description explicite de la catégorie des faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane, June 1985. (Conferencia en Algebraische Theorie der Systeme partieller Differential gleichungen, Oberwolfach, R.F.A., 1985).

[70] L. NARVÁEZ-MACARRO. Cycles évanescents et faisceaux pervers: cas des courbes planes irréductibles. *Comp. Math.*, 65:321-347, 1988.

[71] L. NARVÁEZ-MACARRO. Systemes différentiels linéaires sur une surface de Riemann. In Lê Dũng Tráng, editor, *Introduction a la théorie algébrique des systèmes différentiels,* volume 34 of Travaux *en cours,* pp. 50 96. Hermann, Paris, 1988.

[72] L. NARVÁEZ-MACARRO. A note on the behaviour under ground field extension of quasi-coefficient fields. *J. London Math. Soc.*, 43:12-22, 1991.

[73] L. NARVÁEZ-MACARRO. Sobre algunas propiedades de finitud del anillo de los operadores diferenciales de orden Infinito, 1993. Preprint.

[74] L. NARVÁEZ-MACARRO. Cycles évanescents et faisceaux pervers. II. Cas des courbes planes réductibles. In J.P. Brasselet, editor, *Singularities (Lille, 1991),* volarme 201 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pp. 285-323. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[75] L. NARVÁEZ MACARRO. Division theorem over the Dwork-Monsky-Washnitzer completion of polynomial rings and Weyl algebras. In *Rings, Hopf algebras, and Brauer groups (Antwerp/ Brussels, 1996),* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., pp. 175-191. Dekker, New York, 1998.

[76] L. NARVÁEZ MACARRO. La teoría algebraica de los sistemas diferenciales lineales. In E. Briales Morales *et al.*, editor, *Actas del Encuentro de Matemáticos Andaluces, Noviembre 2000,* volarme I, pagas 143-184. Univ. Sevilla, 2001.

[77] A. ROJAS LEÓN. Sobre la continuidad de la división en anillos de operadores diferenciales, 2001. (Trabajo de investigación, Programa de Doctorado "Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología" de la Universidad de Sevilla).

[78] M. SATO. Hyperfunctions and partial differential equations. In *Proc. Int. Conf. on Functionnal Analysis, Tolcyo, 1969,* pp. 91-96, Tokyo, 1970. Tokyo Univ. Press.

[79] M. SATO, T. KAWAI, and M. KASHIWARA. Microfunctions and pseudodifferential equations. *Lect. Notes in Math.*, 287:265-529, 1973.

[80] J.M. UCHA ENRÍQUEZ. Métodos constructivos en álgebras de operadores diferenciales. Univ. Sevilla, September 1999. Ph.D.