Deducción y generación de modelos de cardinalidad finita

Ángel Nepomuceno Fernández[1], Fernando Soler Toscano[1], and Francisco J. Salguero Lamillar[2]

[1] Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla,
C/ Camilo José Cela s/n, 41018 Sevilla
{nepomuce, fsoler}@us.es
[2] Dpto. de Lengua Española y Lingüística, Universidad de Sevilla,
C/ Palos de la Frontera s/n, 41004 Sevilla
salguero@us.es

Resumen Presentamos un procedimiento de tablas semánticas distinto de las estándar en el tratamiento dado a las sentencias de la clase δ, proponiendo modificaciones de esta regla que eviten la generacíón de ramas infinitas. Las nuevas tablas se revelan útiles para el estudio de lenguajes lógico-formales con semántica finitaria, en particular como procedimiento para definir modelos finitos de sentencias satisfacibles. Mostramos también la aplicabilidad de estos resultados al análisis de la ambigüedad y otros fenómenos en la interpretación del discurso.

1. Introducción

Aunque el procedimiento de las tablas semánticas en primer orden, iniciado en [2], es semidecidible, si consideramos únicamente modelos finitos, mediante ciertas tablas cabe determinar de manera efectiva si una sentencia es o no satisfacible por modelos de cardinal finito $n \geq 1$. Este tipo de tablas surge, principalmente en [3] y [4], para abordar el problema de la generación de tablas infinitas de sentencias satisfacibles en dominios finitos y se desarrolla –en [10]– para hacer más eficientes los correspondientes algoritmos de refutación en modelos finitos. El método de tablas ha sido aplicado en ámbitos diversos, que van desde el estudio del razonamiento basado en modelos –ejemplo, [9]– hasta el tratamiento de problemas lingüísticos –como en [6] y en [8]–.

Tomando las aplicaciones al campo lingüístico como horizonte y con objeto de estudiar ciertos fenómenos en la interpretación del discurso, generalizamos el procedimiento de tablas modificadas, lo que permite examinar relaciones de consecuencia de carácter "supraclásico", así como método de obtención de modelos mínimos a partir de sentencias finitamente satisfacibles. Para ello partimos de un lenguaje formal de predicados de primer orden y en el siguiente apartado establecemos las principales nociones semánticas en términos de la teoría de modelos finitos, continuamos con un estudio de las propias tablas semánticas, estándar y modificadas, para concluir, en el último apartado, con una muestra resumida de apalicación en interpretación del discurso.

Así pues, L representa el lenguaje formal, sin identidad ni functores, que posee un conjunto numerable de constantes individuales, de variables –ambos forman el conjunto de los términos– y de signos predicativos para cada aridad. Haremos uso de las nociones habituales de la sintaxis de estos lenguajes, tales como ocurrencia libre o ligada de variables, alcance de los signos lógicos, sustitución, etc. $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \exists, \forall\}$ es el conjunto de las constantes lógicas. L_{SEN} representa el conjunto de las sentencias de L. Para indicar que A es una fórmula, anotaremos $A \in L$, si es una sentencia, $A \in L_{SEN}$ y si Γ es un conjunto de fórmulas de L, $\Gamma \subseteq L$, en su caso, $\Gamma \subseteq L_{SEN}$. Si $A \in L$, $A(x/t)$ representa la fórmula resultante de sustituir en A cada ocurrencia libre de la variable x por el término t, siempre que éste no sea sufijo de un cuantificador bajo cuyo alcance ocurra x; así pues, $A(x/t) \in L$, en su caso $A(x/t) \in L_{SEN}$.

La semántica de L se establece a partir de estructuras adecuadas a L, o L-estructuras, constan de un universo de discurso –o dominio– no vacío y una función interpretación para definir las denotaciones de constantes y signos predicativos como es habitual. $MOD(L)$ representa la clase de todas las L-estructuras. Las variables carecen de valores semánticos y sólo a las sentencias se asignará un valor de verdad del conjunto $\{0, 1\}$. Si $A \in L_{SEN}$ y $M \in MOD(L)$, mediante $M \vDash A$ o $M(A) = 1$ se indica que M satisface A. Dadas las L-estructuras $M = \langle D, \Im \rangle$ y $M' = \langle D, \Im' \rangle$, donde $D \neq \emptyset$ es el dominio –en este caso, el mismo para las dos–, e $\Im$ e $\Im'$ las funciones interpretación, si M y M' difieren a lo sumo en cuanto a la interpretación de una constante b, es decir, si para cada constante $c \neq b$, $\Im(c) = \Im'(c)$ y para todo signo predicativo R, $\Im(R) \neq \Im'(R)$, mientras que $\Im(b)$ e $\Im'(b)$ pueden coincidir o tener distinto valor, ello lo expresaremos como $M =_b M'$; así, para $M \in MOD(L)$

1. $M(\forall x A) = 1$ si y sólo si –en adelante, syss– para toda $M' =_b M$, se verifica que $M(A(x/b)) = 1$
2. $M(\exists x A) = 1$ syss existe al menos una $M' =_b M$, $M(A(x/b)) = 1$.

2. Relaciones semánticas

Para la semántica nos interesan dominios finitos –una teoría de modelos finitos se presenta en [5]–. Para cada sentencia $A \in L$, diremos que A es *finitamente satisfacible* syss existe $M \in MOD(L)$ tal que su dominio es de cardinal n finito –menor que el de los números naturales, en símbolos, $n < \omega_0$– y $M \vDash A$. Si $M = \langle D, \Im \rangle$ y el cardinal de D es $n \geq 1$, se indicará $|D| = n$, o bien $|M| = n$. La siguiente noción permite probar una versión del conocido teorema de Löwenheim-Skolem.

Definición 1. *$A \in L_{SEN}$ es n-satisfacible, para $n < \omega_0$ syss existe una L-estructura M, tal que $|M| = n$ y $M \vDash A$. Para indicar que M tiene cardinal n y satisface A, anotaremos $M \vDash_n A$.*

Teorema 1. *Si $A \in L_{SEN}$ es n-satisfacible, $1 \leq n < \omega_0$, entonces A es m-satisfacible, para cada m tal que $n \leq m < \omega$.*

Demostración. Se procede por inducción sobre el grado de complejidad de A. Si A es $Rb_1...b_k$, $k \geq 1$, $M \vDash A$ y $|M| = n$, entonces, por definición, si $M = \langle D, \Im \rangle$, $\mid D \mid = n$ e $\langle \Im(b_1), ..., \Im(b_k) \rangle \in \Im(R)$; sea ahora D^* tal que $D \subset D^*$ y $|D^*| = m > n$, definiendo $\Im^*$ de manera que, para cada constante b_i que ocurra en la sentencia, $\Im^*(b_i) = \Im(b_i)$, además, $\Im(R) \subseteq \Im^*(R)$; una vez establecida $\Im^*$, sea $M^* = \langle D^*, \Im^* \rangle$, como, por definición, $\langle \Im^*(b_1), ..., \Im^*(b_k) \rangle \in \Im^*(R)$, se verifica que $M^* \vDash A$. Tomando como hipótesis de inducción que para cada sentencia de grado de complejidad $k \geq 1$, si es n-satisfacible, entonces también es m-satisfacible, para $m > n$, hemos de probar que ello se verifica para sentencias de grado de complejidad $k + 1$. Para abreviar, sólo nos referimos a los signos lógicos $\neg$, $\vee$ y $\exists$. Dado el supuesto, sea A de la forma $\neg B$, grado de B igual a $k \geq 1$; si existe M tal que $|M| = n$ y $M \vDash B$, entonces existe M^* tal que $|M^*| = m$, $m > n$ y $M^* \vDash B$; si $M = \langle D, \Im \rangle$, sea $M' = \langle D, \Im' \rangle$ de manera que $\Im'$ sea inversa de $\Im$, es decir, que para cada signo predicativo R de aridad $k \geq 1$, $\Im'(R)$ sea justo complementario de $\Im(R)$; así, $M' \nvDash \beta$, entonces $M' \vDash \neg\beta$; asimismo, si $M^* = \langle D^*, \Im^* \rangle$, sea $M'^* = \langle D^*, \Im'^* \rangle$ tal que $M'^* \nvDash \beta$, de donde $M'^* \vDash \neg B$, pero $|M'| = n$ y $|M'^*| = m$. Consideremos que A de la forma $B \vee C$, y la suma de los grados de B y de C es k; existe M tal que $|M| = n$ y $M \vDash B$ o $M \vDash C$; naturalmente, $M \vDash B \vee C$; por otra parte, existe M^* tal que $|M^*| = m$, $M^* \vDash B$ o $M^* \vDash C$; por evaluación de $\vee$, en efecto, $M^* \vDash A$ (cuyo grado es $k+1$). Por último, sea A de la forma $\exists x B$, $k \geq 1$ es el grado de $B(x/b)$; si existe M tal que $|M| = n$ y $M \vDash B(x/b)$, entonces existe M' tal que $|M'| = m$, $m > n$ y $M' \vDash B(x/b)$; sea $M^* =_b M$ tal que $M^* \vDash \exists x B$ y sea $M'^* =_b M'$, tal que $M'^* \vDash \exists x B$, lo que es factible por evaluación de $\exists$, pero $|M^*| = n$ y $|M'^*| = m$.

Para cada conjunto de sentencias $\Gamma \subseteq L_{SEN}$ y cada sentencia $A \in L_{SEN}$, es conocida la relación de *consecuencia lógica*, en sentido clásico, como subconjunto de $\wp(L_{SEN}) \times L_{SEN}$, según la siguiente

Definición 2. *$\Gamma \vDash A$ syss se verifica que para toda $M \in MOD(L)$, si $M \vDash \Gamma$, entonces $M \vDash A$.*

Esta relación verifica las conocidas reglas estructurales de *reflexividad, permutación, contracción, monotonía* y *transitividad (o corte)* –las características de la relación clásica, así como las de otras relaciones que definen las llamadas *lógicas subestructurales*, se estudian tanto en [7] como en [12]–. Cualquier relación definida como subconjunto de $\wp(L_{SEN}) \times L_{SEN}$ que verifique reflexividad, monotonía y transitividad, se dice que es *supraclásica*. Por otra parte, la relación clásica $\vDash$ verifica también compacidad, es decir, que, para cada conjunto $\Gamma \subseteq L_{SEN}$ y $A \in L_{SEN}$, si $\Gamma \vDash A$, entonces existe $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que su cardinal es menor que el cardinal de los naturales –en símbolos, $|\Delta| < \omega_0$– y $\Delta \vDash A$.

Definimos ahora otras nociones a partir de las precedentes.

Definición 3. *Para $1 \leq n < \omega_0$, para cada $\Gamma \subseteq L_{SEN}$ y $A \in L_{SEN}$, A es n-consecuencia de Γ syss para cada $M \in MOD(L)$ tal que $|M| \leq n$, si $M \vDash \Gamma$, entonces $M \vDash A$. Simbólicamente, lo representamos como $\Gamma \vDash_n A$.*

Definición 4. *Para cada $\Theta \subseteq L_{SEN}$, $A \in L_{SEN}$, y $M \in MOD(L)$, M satisface A módulo Θ —en símbolos, $M \vDash_{\Theta} A$— syss $M \vDash \Theta \cup \{A\}$. En ralación con la cardinalidad $n < \omega_0$, M satisface A módulo Θ —en símbolos, $M \vDash_{\Theta/n} A$— syss $\mid M \mid = n$ y $M \vDash_{\Theta} A$.*

Definición 5. *Para cada $\Gamma, \Theta \subseteq L_{SEN}$, $A \in L_{SEN}$, A es consecuencia lógica de Γ módulo Θ syss $\Gamma, \Theta \vDash A$. Simbólicamente, $\Gamma \vDash_{\Theta} A$ syss $\Gamma, \Theta \vDash A$. En cuanto a la cardinalidad $n < \omega_0$, A es consecuencia lógica de Γ módulo Θ limitada a un número $n \geq 1$, en símbolos $\Gamma \vDash_{\Theta/n} A$, syss $\Gamma, \Theta \vDash_n A$.*

Así pues, estas relaciones vienen definidas a partir de las nociones de n-satisfacibilidad, consecuencia módulo un conjunto de sentencias y n-consecuencia módulo un conjunto de sentencias.

Teorema 2. *Las relaciones $\vDash_n$, $\vDash_{\Theta}$ y $\vDash_{\Theta/n}$ son supraclásicas.*

Demostración. Para simplificar, escribimos $\Gamma, \Delta \vDash A$ en lugar de $\Gamma \cup \Delta \vDash A$ y $\Gamma, A \vDash B$ en lugar de $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$. Hemos de comprobar que verifican reflexividad, monotonía y transitividad. En efecto

$$\text{si } A \in \Gamma, \text{ entonces } \Gamma \vDash_n A, \ \Gamma \vDash_{\Theta} A \text{ y } \Gamma \vDash_{\Theta/n} A.$$

Por otra parte,

$$\frac{\Gamma \vDash_n A}{\Gamma, \Delta \vDash_n A}; \ \frac{\Gamma \vDash_{\Theta} A}{\Gamma, \Delta \vDash_{\Theta} A}; \ \frac{\Gamma \vDash_{\Theta/n} A}{\Gamma, \Delta \vDash_{\Theta/n} A},$$

dado que, en cuanto a $\vDash_n$, si toda $M \in MOD(L)$, $\mid M \mid = n$, si $M \vDash \Gamma$, entonces $M \vDash A$, si $M \vDash \Gamma \cup \Delta$, entonces $M \vDash A$. En cuanto a las otras dos, teniendo en cuenta cómo se definen, se verifica

$$\frac{\Gamma, \Theta \vDash A}{\Gamma, \Delta, \Theta \vDash A}; \ \frac{\Gamma, \Theta \vDash_n A}{\Gamma, \Delta, \Theta \vDash_n A},$$

respectivamente. Por último, de acuerdo con las definiciones, claramente se verifica

$$\frac{\Gamma, A \vDash_n B; \ \Gamma, B \vDash_n C}{\Gamma, A \vDash_n C};$$

y, dado que la relación clásica es transitiva,

$$\frac{\Gamma, \Theta, A \vDash B; \ \Gamma, \Theta, B \vDash C}{\Gamma, \Theta, A \vDash C},$$

también se verifica

$$\frac{\Gamma, A \vDash_{\Theta} B; \ \Gamma, B \vDash_{\Theta} C}{\Gamma, A \vDash_{\Theta} C}.$$

3. Tablas semánticas

Las reglas (clásicas) permiten generar, a partir de un conjunto finito de sentencias llamado *raíz*, al menos una de las cuales no es un literal, un conjunto de sucesiones de sentencias llamadas *ramas*; cada rama se va construyendo hasta que aparece un par de contradicción (dos literales complementarios) –sería rama cerrada–, o bien hasta que en cada sentencia no literal de la rama se haya ejecutado plenamente la regla correspondiente –sería rama abierta–. Una tabla es abierta si al menos una de sus ramas es abierta y cerrada en otro caso. Las reglas son las siguientes

1. Doble negación:
$$\frac{\neg\neg A}{A},$$
la rama continúa incorporando A.
2. Regla α:
$$\frac{A_1 \wedge A_2}{A_1,\, A_2};\ \frac{\neg(A_1 \vee A_2)}{\neg A_1,\, \neg A_2};\ \frac{\neg(A_1 \rightarrow A_2)}{A_1,\, \neg A_2},$$
la rama continúa con cada uno de los componentes: A_1 y A_2 etc.
3. Regla β:
$$\frac{A_1 \vee A_2}{A_1 \mid A_2};\ \frac{\neg(A_1 \wedge A_2)}{\neg A_1 \mid \neg A_2};\ \frac{A_1 \rightarrow A_2}{\neg A_1 \mid A_2},$$
en este caso, la rama se subdivide en dos, lo que se indica mediante "|", continuando cada una con uno de los componentes,
4. Regla γ:
$$\frac{\forall x B}{B(x/b_1), B(x/b_2), ..., B(x/b_n)},$$
$B(x/b_i)$ es la sentencia resultante de sustituir en la fórmula B cada ocurrencia de la variable libre x por la constante b_i, para $i \leq n$; $b_1, ..., b_n$ son todas las constantes que ocurren en sentencias de la rama
5. Regla δ:
$$\frac{\exists x B}{B(x/b_{n+1})},$$
donde b_{n+1} es la primera constante que no ocurría en la rama.

La propiedad fundamental de las tablas para lógica clásica, que podemos denominar *estándar*, se expresa en el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración para abreviar –versiones del mismo aparecen en [2] y en trabajos editados en [1]–.

Teorema 3. *Un conjunto (finito) $\Gamma \subseteq L_{SEN}$ es satisfacible syss la tabla semántica de raíz Γ, abreviadamente $T(\Gamma)$, es abierta.*

Corolario 1. *Un conjunto (finito) $\Gamma \subseteq L_{SEN}$ es no satisfacible syss $T(\Gamma)$ es cerrada.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 3 por simple contraposición.

Teorema 4. *Para cada conjunto finito $\Gamma \subseteq L_{SEN}$, $A \in L_{SEN}$, $\Gamma \vDash A$ syss $T(\Gamma \cup \{\neg A\})$ es cerrada.*

Demostración. $\Gamma \vDash A$ syss $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es no satisfacible syss $T(\Gamma \cup \{\neg A\})$ es cerrada, de acuerdo con teorema 1.

Con objeto de aplicar el procedimiento a problemas relativos a otras relaciones de consecuencia supraclásicas, definimos modificaciones de la regla δ, de acuerdo con lo sugerido en [3] y [4], así como de la regla γ:

6. Regla $\delta^{[+]}$:

$$\frac{\exists x B}{B(x/t_1) \mid B(x/t_2) \mid, ..., \mid B(x/t_n) \mid B(x/t_{n+1})},$$

   siendo $t_1, ..., t_n$ las constantes que ocurrían en la rama hasta llegar a $\exists x B$ mientras que t_{n+1} es una constante nueva.
7. Regla $\delta^{[n]}$:

$$\frac{\exists x B}{B(x/t_1) \mid B(x/t_2) \mid, ..., \mid B(x/t_n)},$$

   $t_1, ..., t_n$ son $n \geq 1$ constantes de L, siempre que el número de constantes de la rama sea $m \leq n$, de manera que si éstas son $b_k, ..., b_{k+t}$, donde $t+1 = m$, entonces t_i es b_{k+i-1} para cada $i \leq m$. En caso de que $m > n$, entonces no es aplicable la regla.
8. Regla $\gamma^{[n]}$:

$$\frac{\forall x B}{B(x/t_1),\ B(x/t_2),\ ...,\ B(x/t_n)},$$

   con la misma restricción que en el caso anterior.

Definición 6. *Dada una raíz $\Gamma \subseteq L_{SEN}$, $\Delta^{+}(\Gamma)$ es la tabla construida con las reglas de doble negación, α, β, γ y $\delta^{[+]}$. Decimos que $\Delta^{+}(\Gamma)$ es una tabla Δ^{+} o, para abreviar, $+$-tabla. Si en Γ no ocurre ninguna sentencia de la clase δ, entonces $\Delta^{+}(\Gamma) = T(\Gamma)$.*

Definición 7. *Dada una raíz $\Gamma \subseteq L_{SEN}$, $\Delta^{n}(\Gamma)$ es la tabla construida con las reglas de doble negación, α, β, $\gamma^{[n]}$ y $\delta^{[n]}$, siempre que 1) en Γ el número de constantes sea $m \leq n$ y 2) si en Γ no ocurre ninguna sentencia cuantificacional, entonces se añade a la raíz la clausura existencial de las sentencias de Γ. Decimos, en este caso, que se trata de una tabla Δ^{n} o, para abreviar, que es una n-tabla.*

Definición 8. *Dada una tabla (estándar, $+$-tabla o n-tabla) de raíz Γ, cada rama abierta Φ define una interpretación o modelo canónico $M^c = \langle D, \Im^c \rangle$ tal que*

(1) D es un universo Herbrand; es decir, los elementos de D son todas las

constantes t_i tales que $i \leq m$ y t_1, ..., t_m ocurren en Φ, $m \geq 1$.

(2) Para cada $b_i \in D$, $\Im^c(t_i) = t_i$, $i \leq m$.

(3) Para cada signo predicativo k-ádico R que ocurra en sentencias de Φ, y cada k-pla $\langle t_1, ..., t_k\rangle$ de elementos de D,

$$\langle t_1, ..., t_k\rangle \in \Im^c(R) \text{ syss } Rt_1, ..., t_k \in \Phi.$$

Se pueden establecer algunos resultados. Para mayor comodidad, si $A \in L_{SEN}$ y $\{A\}$ es la raíz de una tabla, anotaremos $T(A)$, $\Delta^+(A)$ y $\Delta^n(A)$ en lugar de $T(\{A\})$, $\Delta^+(\{A\})$ y $\Delta^n(\{A\})$, respectivamente. Por otra parte, dada una rama Φ de una tabla, el resultado de añadir una sentencia A a la rama lo representamos como $\Phi + A$.

Teorema 5. *Para cada conjunto finito $\Gamma \subseteq L_{SEN}$, $T(\Gamma) \subseteq \Delta^+(\Gamma)$.*

Demostración. En efecto, sea Φ una rama de $T(\Gamma)$ en la que todavía no se haya aplicado la regla δ; podemos iniciar $\Delta^+(\Gamma)$ siguiendo el mismo orden de aplicación de las reglas, entonces tendremos una rama Φ' tal que $\Phi = \Phi'$; al aplicar la regla δ, Φ continúa con $B(x/b_{n+1})$, se obtiene, pues, $\Phi + B(x/b_{n+1})$, siendo b_n la constante de mayor subíndice que ocurre en Φ; al aplicar la regla $\delta^{[+]}$, se obtienen las siguientes ramas $\Phi' + B(x/b_1)$, $\Phi' + B(x/b_2)$, ..., $\Phi' + B(x/b_{n+1})$, pero $\Phi' + B(x/b_{n+1}) = \Phi + B(x/b_{n+1})$. Iterando el proceso, siempre hallaremos una rama de $T(\Gamma)$ en $\Delta^+(\Gamma)$, por lo que $T(\Gamma) \subseteq \Delta^+(\Gamma)$.

Corolario 2. *Un conjunto finito $\Gamma \subseteq L_{SEN}$ es satisfacible syss $\Delta^+(\Gamma)$ es abierta.*

Demostración. Consecuencia inmediata de los teoremas 3 y 5.

Teorema 6. *$A \in L_{SEN}$ es n-satisfacible, $1 \leq n < \omega_0$, syss $\Delta^n(A)$ posee una rama abierta con las constantes $b_1, ..., b_n$.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que $\Delta^n(A)$ es abierta: una rama Φ es abierta. Cada aplicación de $\delta^{[n]}$ produce n bifurcaciones y el número de constantes en Φ es n. Sea M^c el correspondiente modelo canónico. Por inducción sobre el modo de obtener la sentencia $B \in \Phi$, comprobamos que M^c satisface todas las sentencias de Φ y, por tanto, a la raíz A. En la base, si B es atómica, entonces es $Rt_1, ..., t_k$, por lo que $\langle \Im(t_1), ..., \Im(t_k)\rangle \in \Im(R)$, así que $M^c \vDash B$. Hipótesis de inducción: $M^c \vDash C$, para cada sentencia C consecuente de una regla de la n-tabla hasta cierto grado. Si la regla es la de doble negación, entonces $M^c \vDash \neg\neg C$. Si se trata de la regla α, entonces el antecedente sería $C \wedge C'$, $\neg(D \vee C')$ o $\neg(C \rightarrow C')$ —en el segundo caso, $C = \neg D$—, pero dado que $C' \in \Phi$, en el primer caso, o $\neg C' \in \Phi$ en el segundo y el tercero, $M^c \vDash C'$ o $M^c \vDash \neg C'$, respectivamente; basta con evaluar los signos lógicos correspondientes y tendremos que $M^c \vDash C \wedge C'$, o $M^c \vDash \neg(D \vee C')$ o $M^c \vDash \neg(C \rightarrow C')$. De manera análoga se comprueba si se trata del antecedente de la regla β. En cuanto a la regla γ, si B es $C(x/b_k)$, para algún $k \leq n$, también estarán en Φ todas las sentencias que constituyen el consecuente de la regla: $C(x/b_1), ..., C(x/b_n)$, y como $M^c \vDash C(x/b_i)$ para todo $i \leq n$, por evaluación de $\forall$, $M^c \vDash \forall xC$. Por último, si se trata de la regla $\delta^{[n]}$, B tiene la forma $C(x/b_k)$, para algún $k \leq n$; si $M^c \vDash C(x/b_k)$, entonces $M^c \vDash \exists xC$. Así pues, M^c satisface cada literal de Φ, y cada sentencia es consecuente de alguna regla, de manera que M^c satisface todas las sentencias de Φ, por tanto, $M^c \vDash B$.

$\Rightarrow$) Supongamos que A es n-satisfacible: existe $M \in MOD(L)$, $M \vDash_n A$. Se construye $\Delta^n(A)$ y hacemos inducción sobre el número de veces de aplicación de las reglas. Como base 0, aplicaciones; en ese momento la rama $\Phi = \{A\}$ y, por hipótesis, $M \vDash_n A$. Supuesto inductivo: se han hecho $k \geq 1$ aplicaciones y obtenido la rama Φ tal que $M \vDash_n \Phi$; en la aplicación $k+1$ la sentencia es X, tenemos las siguientes posibilidades de obtener Φ':

1. X es $\neg\neg B$ y $\Phi' = \Phi + B$,
2. X es $A_1 \wedge A_2$, $\neg(A_1 \vee A_2)$ o $\neg(A_1 \rightarrow A_2)$; Φ' será $\Phi + A_1 + A_2$, $\Phi + \neg A_1 + \neg A_2$ o $\Phi + A_1 + \neg A_2$, respectivamente,
3. X es $A_1 \vee A_2$, $\neg(A_1 \wedge A_2)$ o $A_1 \rightarrow A_2$; Φ' será $\Phi + A_1$ o $\Phi + A_2$, $\Phi + \neg A_1$ o $\Phi + \neg A_2$, o $\Phi + \neg A_1$ o $\Phi + A_2$, respectivamente,
4. X es $\forall xB$ y $\Phi' = \Phi + B(x/b_1) + ... + B(x/b_n)$,
5. X es $\exists xB$ y Φ' es $\Phi + B(x/b_1)$ o $\Phi + B(x/b_2)$ o ... o $\Phi + B(x/b_n)$.

Se comprueba (omitimos detalles para abreviar) que en alguna de las formas de Φ', $M \vDash_n \Phi'$, de donde Φ' es abierta –para que fuese cerrada habría de contener C y $\neg C$, pero $M \nvDash_n C \wedge \neg C$–. Hay pues una rama acabada y abierta. Por otra parte, en esta rama ocurren las constantes $b_1, ..., b_n$, ya sea porque ocurrían en A, porque apareciera en algún momento en la rama una sentencia de la forma $\exists xB$ o se introdujera, de acuerdo con la definición de $\Delta^n(A)$.

Corolario 3. *$A \in L_{SEN}$ no es n-satisfacible, $1 \leq n < \omega_0$, syss $\Delta^n(A)$ es cerrada. También podemos decir en este caso que A es n-insatisfacible.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema 6 por contraposición.

Corolario 4. *Para cada conjunto finito $\Gamma \subseteq L_{SEN}$, $A \in L_{SEN}$, $\Gamma \vDash_n A$ syss $\Delta^n(\Gamma \cup \{\neg A\})$ es cerrada.*

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema 3 y de las definiciones 1 y 4.

Corolario 5. *Para los conjuntos finitos $\Gamma, \Theta \subseteq L_{SEN}$, $A \in L_{SEN}$, $\Gamma \vDash_{\Theta/n} A$ syss $\Delta^n(\Gamma \cup \Theta \cup \{\neg A\})$ es cerrada.*

Demostración. Consecuencia inmediata del corolario 4 y de la definición 4.

3.1. Generación de modelos

Así pues, las tablas modificadas constituyen un procedimiento para estudiar las relaciones de consecuencia antes indicadas; asimismo permiten la obtención de modelos de sentencias satisfacibles en dominios finitos. Una cuestión que se plantea para el caso de sentencias finitamente satisfacibles es hallar su modelo mínimo (la L-estructura de menor cardinal que la satisface).

Definición 9. *Dada una sentencia $A \in L_{SEN}$, $M \in MOD(L)$ es un modelo mínimo de A syss $M \vDash A$, y para cada $M' \in MOD(L)$ tal que $|M'| < |M|$, $M' \nvDash A$.*

Teorema 7. *Si el conjunto finito $\mathit{\Gamma} \subseteq L_{SEN}$ es finitamente satisfacible, entonces $\mathit{\Delta}^{+}(\mathit{\Gamma})$ posee una rama abierta que define un representante de la clase de sus modelos mínimos.*

Demostración. Teniendo en cuenta la propiedad fundamental de las tablas estándar (teorema 3) y el corolario 2, existe al menos una rama acabada abierta. Sea $\mathit{\Phi}$ la primera rama no cerrada de $\mathit{\Delta}^{+}(\mathit{\Gamma})$ en la que ocurren $n \geq 1$ constantes; y sean éstas $b_1, ..., b_n$. Naturalmente es definible un modelo canónico M^c, $|M^c| = n$, el cual satisface todas las sentencias de $\mathit{\Phi}$, por tanto a $\mathit{\Gamma}$; si $\mathit{\Gamma}$ fuera m-satisfacible para algún $m < n$, entonces sería definible un modelo canónico a partir de las constantes $b_1, ..., b_m$, lo cual es imposible, ya que ninguna rama con m constantes es abierta.

Teorema 8. *Si el conjunto finito $\mathit{\Gamma} \subseteq L_{SEN}$ es finitamente satisfacible, entonces existe $n \geq 1$, tal que $\mathit{\Delta}^{n}(\mathit{\Gamma})$ es abierta y cada modelo mínimo de $\mathit{\Gamma}$ es de cardinal n.*

Demostración. Si $\mathit{\Gamma}$ es finitamente satisfacible, existe M tal que $M \vDash \mathit{\Gamma}$, $|M| = n < \omega_0$ y M es un modelo mínimo. Ello equivale a que $\mathit{\Delta}^{n}(\mathit{\Gamma})$ sea abierta. Se puede hallar n mediante $\mathit{\Delta}^{1}(\mathit{\Gamma})$, $\mathit{\Delta}^{2}(\mathit{\Gamma})$, ..., $\mathit{\Delta}^{n-1}(\mathit{\Gamma})$, todas ellas cerradas, hasta alcanzar la primera $\mathit{\Delta}^{n}(\mathit{\Gamma})$ abierta.

Así pues, si un conjunto finito de sentencias es satisfacible, mediante las tablas $\mathit{\Delta}^{n}$ podemos obtener modelos canónicos de cardinal n, siempre que los modelos mínimos sean de cardinalidad $m \leq n$. Estos modelos se definen a partir de los literales de cada rama abierta de la tabla, por ello diremos que los conjuntos de tales literales "inducen tal o cual modelo".

Definición 10. *Si $\mathit{\Phi}$ es una rama finita de una tabla (estándar, +-tabla o n-tabla) de raíz $\mathit{\Gamma}$, con $m \geq 1$ constantes, diremos que el conjunto de sus literales es una base de $\mathit{\Phi}$. Si $B(\mathit{\Phi})$ es una base de $\mathit{\Phi}$, $\overline{B(\mathit{\Phi})}$ representa un conjunto de cierre de $\mathit{\Phi}$ y se define*

$$\overline{B(\mathit{\Phi})} = \{\sim A / A \in B(\mathit{\Phi})\},$$

donde $\sim A$ representa el literal complementario de A.

Teorema 9. *Una rama finita Φ de una tabla (estándar, +-tabla o n-tabla) es abierta syss* $B(\Phi) \cap \overline{B(\Phi)} = \emptyset$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición 10: al ser Φ abierta, en $B(\Phi)$ no ocurren literales complementarios. En caso de que $B(\Phi) \cap \overline{B(\Phi)} \neq \emptyset$, tendría que haber algún literal $A \in B(\Phi)$ y $A \in \overline{B(\Phi)}$, con lo que $\sim A \in B(\Phi)$ y $\sim A \in \overline{B(\Phi)}$, contra la hipótesis de que Φ es abierta.

Corolario 6. *Para cada $\Gamma, \Theta \subseteq L_{SEN}$, tales que Φ y Φ' son ramas abiertas de sus respectivas n-tablas, $n < \omega_0$, entonces es definible M inducida por $B(\Phi+\Phi')$, tal que $M \vDash_{\Theta/n} \Gamma$, syss*

$$B(\Phi + \Phi') \cap \overline{B(\Phi + \Phi')} = \emptyset.$$

Demostración. Dado que $M \vDash_{\Theta/n} \Gamma$, por definición $M \vDash_n \Theta \cup \Gamma$, de manera que $\Delta^n(\Gamma \cup \Theta)$ tiene alguna rama abierta con n constantes, sea, por ejemplo, Φ^*. Entonces

$$\Phi^* = \gamma_1 + ... + \gamma_m + \theta_1 + ... + \theta_k + (\Phi - \Gamma) + (\Phi' - \Theta),$$

pero Φ^* y $\Phi + \Phi'$ contienen los mismos literales, así que $B(\Phi^*) = B(\Phi + \Phi')$, además, como Φ^* es abierta, se verifica que $B(\Phi+\Phi') \cap \overline{B(\Phi + \Phi')} = \emptyset$. Recíprocamente, si $B(\Phi + \Phi') \cap \overline{B(\Phi + \Phi')} = \emptyset$, para un número $n \geq 1$ de constantes, entonces es definible M tal que $M \vDash_n \Theta \cup \Gamma$, por lo que $M \vDash_{\Theta/n} \Gamma$.

Hemos de tener en cuenta que, de acuerdo con la notación adoptada, si $B(\Phi) = B_1$ y $B(\Phi') = B_2$, podemos abreviar $B(\Phi + \Phi')$ como $B_1 + B_2$.

4. Una aplicación lingüística

Estudiamos brevemente un ejemplo; sea la frase «*Una mujer encontró un gato en el jardín. Le gustó*». La estructura lógica de ésta, en la que aparece la expresión anafórica pronominal "le", además de la anáfora pronominal relacionada con el pronombre elidido que realiza la función de sujeto morfosintáctico del verbo "gustar", aunque también sea su objeto lógico, se puede representar como la sentencia

$$\exists x, y, z(mujer(x) \wedge gato(y) \wedge jard\acute{\imath}n(z) \wedge encontr\acute{o}(x, y, z)) \wedge \exists x, y(gust\acute{o}(y, x)),$$

a la que llamaremos A. Esta sentencia es satisfacible, pero mediante tablas modificadas obtenemos sus modelos mínimos: es 1-satisfacible, por tanto, también 2- y 3-satisfacible. Aunque por limitacionos de espacio omitimos detalles, mediante aplicación del método hallamos que la 3-tabla tiene varias ramas abiertas. Así pues, veamos sólo las bases de algunas de ellas, las que combinan la primera constante que aparece en la tabla con las demás:

$$B_1 = \{mujer(b_1), gato(b_2), jard\acute{\imath}n(b_3), encontr\acute{o}(b_1, b_2, b_3), gust\acute{o}(b_1, b_1)\},$$

$B_2 = \{mujer(b_1), gato(b_2), jardín(b_3), encontró(b_1, b_2, b_3), gustó(b_2, b_1)\}$,

$B_3 = \{mujer(b_1), gato(b_2), jardín(b_3), encontró(b_1, b_2, b_3), gustó(b_3, b_1)\}$.

Como puede observarse, en los tres casos se resuelve la anáfora introducida por el pronombre "le" relacionando su valor semántico con la interpretación de alguna de las constantes anteriores en la tabla. El hecho de mantener fija la interpretación de b_1 se debe sólo a la simplificación que hacemos del análisis oracional para no entrar aquí en la discusión del valor del pronombre elidido, por las peculiares características sintáctico-semánticas del verbo "gustar" en español.

¿Por qué no optar por el modelo que nos proporciona la primera clase? En realidad la tabla da lugar a 3 bases que permiten definir otros tantos modelos de la sentencia, pero si consideramos $\Theta = \{\forall x \neg gustó(x, x)\}$, y hacemos su 3-tabla, hallamos la siguiente base de su única rama abierta:

$$B' = \{\neg gustó(b_1, b_1), \neg gustó(b_2, b_2), \neg gustó(b_3, b_3)\}.$$

Es evidente que desde $B_1 + B'$ el modelo contiene dos literales complementarios, $gustó(b_1, b_1)$ y $\neg gustó(b_1, b_1)$, los cuales también pertenecen a $\overline{B_1 + B'}$, así que no es definible M inducida por $B_1 + B'$ tal que $M \vDash_{\Theta/3} A$; sin embargo, desde $B_2 + B'$ y desde $B_3 + B'$ son definibles sendas M' y M'' tales que $M' \vDash_{\Theta/3} A$ y $M'' \vDash_{\Theta/3} A$, pues en ambos casos estamos ante bases sin literales complementarios. La ampliación de Θ añadiendo sentencias que representan cierto conocimiento lingüístico como, por ejemplo, acerca de preferencias de argumentos en las relaciones correspondientes, podría dar lugar a nuevas L-estructuras: sea Θ' una ampliación tal, entonces aplicando el método de tablas se podría obtener M tal que $|M| = 3$ y $M \vDash_{\Theta'/3} A$. En estas consideraciones no hemos tenido en cuenta la relación triádica $encontró(x, y, z)$, pero en alguna de las tablas ocurriría con el mismo argumento; precisamente una sentencia del tipo $\forall x, y(\neg encontró(x, x, y) \wedge \neg encontró(x, y, x) \wedge \neg encontró(y, x, x))$ vendría a incrementar conocimiento lingüístico y al añadirla a Θ, obteniendo así Θ', haría descartar los casos de repetición de argumentos, además, establecida la prioridad de casos en que el primer argumento coincida con el de $mujer(x)$, podrá arrojar luz sobre las preferencias para la otra relación (diádica) presente (finalmente se llegaría a M tal que $M \vDash_{\Theta'/3} A$).

Este procedimiento nos permite obtener modelos estáticos, si bien la sucesiva aplicación de las n-tablas permite ampliar modelos que satisfacen ciertas sentencias iniciales. Estas últimas podrían representar un mayor conocimiento del mundo a la hora de aplicar el procedimiento a la explicación de determinados fenómenos lingüísticos, como la resolución de expresiones anafóricas pronominales en las que se da una presuposición de existencia, o bien, como se ha sugerido más arriba, podrían representar un conocimiento lingüístico ligado a un mayor conocimiento del mundo, lo que vendrá a determinar la interpretación que se adopte. Este conocimiento "extra", no codificado gramaticalmente en la oración, forma parte del contexto o la situación en la que la sentencia A debe ser interpretada. Las diferentes configuraciones que puede tomar Θ, por tanto, dan lugar a una interpretación dinámica de la sentencia A. Estas posibles configuraciones de Θ deben estar sujetas a reglas de selección de las constantes a utilizar en la resolución de las expresiones anafóricas (v. gr.: orden de aparición en la n-tabla o cualquier otro tipo de relación de orden que pueda ser definida).

Por último, señalamos algunas líneas de investigación. De un lado, la determinación de un contexto, a partir de una información inicial, puede abordarse como el estudio de un proceso abductivo; se han presentado métodos para la resolución de problemas abductivos: hallar sentencias, mediante tablas, que junto con una teoría expliquen (de manera no trivial) la sentencia representativa de un hecho dado –por ejemplo, en [9] y en [11]–. De otro, la construcción de modelos basados en una perspectiva dinámica –como, por ejemplo, en [8]– admite un replanteamiento en términos de n-tablas, con las modificaciones pertinentes para poder tratar fórmulas con variables libres. Asimismo, resultará de interés la comparación de estos procedimientos con la aplicáción en semántica formal de la lógica de predicados dinámica, especialmente el estudio de las relaciones anafóricas, etc.

Referencias

1. D'Agostino, M.; Gabbay, D. M.; Hähnle, R.; Possega, J.: *Handbook of Tableau Methods,* Dordrecth/Boston/London, Kluwer Academic Press (1999)
2. Beth, E.W.: Semantic entailment and formal derivability. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wentenschappen, Proceedings of the Section of Sciences **18** (1955) 309–342
3. Boolos, G.: Trees and finite satsifactibility. Notre Dame Journal of Formal Logic (25) (1984) 110–115
4. Díaz Estévez, E.: Árboles semánticos y modelos mínimos. In: Actas del I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España, Universidad Complutense de Madrid (1993) 40
5. Ebbinnghaus, H. D.; Flum, G.: *Finite Model Theory.* Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York (1999)
6. Kohlhase, M.: Model Generation for Discourse Representation Theory ECAI (2000).
7. Makinson, D.: Bridges from Classical to Nonmonotonic Logic. King's College, London (2005).
8. Monz, C., de Rijke, M.: A Tableau Calculus for Pronoun Resolution. In Murray, N.V. (ed): Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods (TABLEAUX'99). Springer (1999) 247-262
9. Nepomuceno, A.: Scientific explanation and modified semantic tableaux. In Magnani, L., Nerssessian, N., Pizzi, C., eds.: Logical and Computational Aspects of Model-Based Reasoning. Applied Logic Series. Kluwer Academic Publishers (2002) 181–198
10. Peltier, N.: A More Efficient Tableaux Procedures for Simultaneous Search for Refutations and Finite Models. IJCAI (2003)
11. Reyes-Cabello, L., Aliseda-Llera, A., Nepomuceno-Fernández, A.: Towards abductive reasoning in first order logic. Logic Journal of the IGPL, 14, 2 (2006)
12. Schroeder-Heister, P., Dośen, K. (eds.): *Substructural Logics.* Oxford Science Publications. Oxford (1999)