CAPÍTULO I

Juegos matriciales escalares

F. R. Fernández J. Puerto

1. Introducción a los juegos matriciales

Comenzamos estudiando aquellas situaciones que pueden modelizarse a través de juegos con dos jugadores (o agentes), juegos bipersonales y que fácilmente pueden generalizarse a juegos con cualquier número de jugadores siguiendo la línea clásica ofrecida por von Neumann y Morgenstern (1944). Proceder de este modo evita, en un primer acercamiento al problema real, tener presente la formación de coaliciones para obtener mejores resultados individuales a través de ellas, aunque los resultados obtenidos en juegos bipersonales pueden emplearse en la teoría general de formación de coaliciones en juegos de n personas.

Supondremos que en estas situaciones se permite a los jugadores sólo un número finito de movimientos, cuando se plantea el juego en su forma desarrollada o extendida, con lo que podremos llevar el modelo a un juego, en su forma reducida o normal, en el que cada jugador escoge una *estrategia* (pura) *de un conjunto finito de ellas*, y que cada una de ellas representa a uno de los posibles planes de movimientos que este jugador realizaría a lo largo del desarrollo del juego.

Representaremos por $I_i, 1 \leq i \leq n$, las estrategias puras del jugador I, y por $II_j, 1 \leq j \leq m$, las estrategias puras del jugador II. El juego permite determinar la valoración que ocasiona el que cada jugador utilice una de sus estrategias, por lo que representamos por $v(i,j)$, la valoración de las consecuencias del empleo de la estrategia I_i por el primer jugador y la estrategia II_j por parte del segundo. Al variar i y j en sus respectivos campos, se tiene una estructura de matriz, aunque los valores no sean números reales, por lo que a estos juegos se les denomina *juegos matriciales*. Estas valoraciones pueden ser interpretadas de muy diversas formas por los jugadores que intervienen en el juego.

Ejemplo 1.1 *O.G. Haywood (1954) [47]. En el desembarco aliado, en agosto de 1944, se ha abierto una brecha por mar en Avranches (Francia). La cabeza de playa ha expuesto el flanco oeste del noveno ejercito alemán, mandado por el general von Kluge. Este tiene dos posibles formas de actuar: (1) Atacar hacia el oeste para llegar al mar, asegurándose su flanco occidental y dividir a las fuerzas americanas. (2) Retirarse hacia el este para llegar a una mejor posición defensiva cerca del río Sena. El general americano Bradley tiene al primer ejercito americano conteniendo al ejercito alemán desde la cabeza de playa, y más al interior tiene al tercer ejército, bajo las órdenes del general Patton, en reserva, haciendo misiones de limpieza del terreno hacia el este, sur y oeste. Bradley consideró tres posibilidades: (1) Ordenar a la reserva volver a defender la brecha abierta. (2) Enviar la reserva hacia el este para intentar cortar la retirada del noveno ejercito alemán. (3) Mantener las reservas en sus posición durante un día y decidir después si ordenar ayudar a la cabeza de playa si era atacada o enviarlas hacia el este.*

El análisis completo de la situación le llevó a valorar los diferentes resultados de acuerdo con la tabla siguiente, en la que las filas representan las estrategias del general Bradley, y las columnas las estrategias del general von Kluge.

	1. Atacar	*2. Retirarse*
1. Reforzar	*Se mantiene la brecha*	*Débil presión sobre la retirada alemana*
2. Mover	*Se produce el corte alemán*	*Fuerte presión en la retirada alemana*
3. Esperar	*Se mantiene la brecha y los alemanes son rodeados*	*Moderada presión en la retirada alemana*

Lógicamente, la resolución del conflicto dependerá de la valoración de los resultados $v(i,j)$, $i = 1,2,3$ *y* $j = 1,2$. *El orden de preferencias de mejor a peor según la doctrina del ejercito americano era*

$$v(3,1) > v(2,2) > v(3,2) > v(1,2) > v(1,1) > v(2,1),$$

por lo que al buscar la estrategia menos mala, maximin, el general Bradley escogió la tercera estrategia. Las valoraciones alemanas debían ser similares, pues el general von Kluge decidió retirarse, pero nunca ejecutó su decisión. Hitler, a cientos de kilómetros del campo de batalla, debió tener otras valoraciones del conflicto y ordenó atacar y cerrar la brecha.

El resultado fue que Bradley resistió el ataque alemán, y mantuvo la reserva en el sur, lo que permitió enviarla el segundo día hacia el este; los alemanes comenzaron la retirada, siendo rodeados por las armadas americana y francesa, lo que llevó al suicidio al general alemán.

Cada jugador puede ordenar las valoraciones y dar valores númericos a las consecuencias

$$v(i,j) \equiv (v_I(i,j), v_{II}(i,j))$$

En el caso de que las valoraciones se consideren de forma totalmente opuesta por los jugadores, para uno supone ganancias y para el otro implique pérdidas, éstas pueden expresarse $v_I(i,j) = -v_{II}(i,j)$, se dice que la situación corresponde a un *juego de suma nula.* Cuando esto no ocurre, la valoración del juego vendrá dada para cada resultado por dos números, no necesariamente relacionados pues suponen el reflejo de dos valoraciones independientes, llamándose a estos juegos, por oposición a los anteriores, *juegos de suma no nula*.

En otras ocasiones las valoraciones no pueden ordenarse, e incluso al valorar las estrategias pueden tenerse en cuenta diferentes aspectos. En el ejemplo 1.1, los generales podían valorar los resultados no sólo dependiendo del curso de la guerra, sino también del impacto que se podría producir en la población civil y su entorno.

De hecho, muchos modelos se consideran con objetivos escalares debido a la dificultad de resolver el modelo con objetivos múltiples. Hay situaciones en las que una misma estrategia debe ser empleada en diferentes escenarios, por ejemplo, las políticas de producción de dos empresas que compiten en un mercado pueden valorarse escalarmente, pero si compiten simultáneamente en varios mercados debe emplearse la valoración vectorial.

Ejemplo 1.2 *Morton D. Davis (1971) [27].*

En un año electoral los dos principales partidos políticos se encuentran en el proceso de redacción de sus programas. Hay una disputa entre las comunidades X e Y relativa a ciertos derechos de aguas, y cada partido decide si favorecer a X, a Y o soslayar la cuestión.

Los ciudadanos de las restantes comunidades no son indiferentes a la cuestión, lo que nos lleva a un juego matricial vectorial, no pudiéndose sumar los resultados de las diversas comunidades, ya que los votos repercuten localmente por comunidad, aunque la elección del programa sea para todas las comunidades. En la siguiente tabla se representan por filas las estrategias del programa A, y por columnas las estrategias del programa B.

	1. Favorecer X	2. Favorecer Y	3. Soslayar
1. Favorecer X	$v(1,1)$	$v(1,2)$	$v(1,3)$
2. Favorecer Y	$v(2,1)$	$v(2,2)$	$v(2,3)$
3. Soslayar	$v(3,1)$	$v(3,2)$	$v(3,3)$

En este caso $v(i,j)$ es un vector que nos indica en cada componente el porcentaje de votos que se va a obtener en la comunidad correspondiente a esa componente. Nótese que como las diferentes comunidades tendrán diferentes sensibilidades frente al problema, dicho vector númerico no podrá reducirse a un solo número, por lo que se trata de un *juego con pagos vectoriales* o *juego multicriterio.* En el caso en que las valoraciones en cada comunidad sean complementarias para ambos partidos, el juego será de suma nula, si sólo representan aportaciones subjetivas no relacionadas será de suma no nula.

Estos ejemplos ponen de manifiesto que al analizar los juegos matriciales debemos de comenzar por los juegos bipersonales de suma nula escalares, ya que en ellos la valoración de las estrategias es más simple.

Comenzaremos haciendo una breve descripción de los mismos, ya que éstos han sido los juegos más estudiados de toda la teoría de juegos, véase por ejemplo Owen (1982) [71] y Thomas (1984) [91], para un tratamiento más general. Describimos los elementos básicos y necesarios para su extensión en situaciones más generales, en especial el concepto de nivel de seguridad, y la interpretación del valor de un juego cuando éste va a desarrollarse una sola vez, ya que en este caso puede ser más interesante considerar la probabilidad de obtener un cierto pago, lo que llamamos juegos por objetivos.

Posteriormente analizamos los juegos de suma nula con pagos vectoriales, donde la dificultad de su análisis nace del hecho de que la limitación entre los pagos de los jugadores que el teorema minimax establece para juegos escalares no ocurre necesariamente, por lo que es aconsejable recurrir a diferentes conceptos de solución. Introducimos la valoración de las estrategias basándonos en el concepto de nivel de seguridad, de forma similar al caso de juegos escalares.

El resultado principal de la sección se relaciona con la determinación de las estrategias de seguridad no dominadas a través de la programación lineal múltiple, con lo que conseguimos un paralelismo con el empleo de la programación lineal en el caso escalar. Dado que la solución a este modelo viene dada en forma de un conjunto de puntos no dominados, la aproximación que hacemos al problema a través de los juegos multicriterio por objetivos nos permite un análisis más rico en estos juegos matriciales, en especial al desear destacar alguna solución no dominada por ponderaciones entre las diversas valoraciones del juego. Vemos también como los teoremas clásicos sobre juegos continuos cóncavos convexos pueden extenderse a juegos con pagos vectoriales.

2. Juegos de suma nula con pagos escalares

Los elementos que aparecen en la formulación del juego en forma normal son los siguientes:

1. Un conjunto finito de estrategias puras $E_1 = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, para el jugador I, y un conjunto finito de estrategias puras para el jugador II, $E_2 = \{II_1, II_2, \ldots, II_m\}$.

2. Una matriz real de orden $n \times m$, $A = (a_{ij})$. Cada elemento de esta matriz a_{ij} es el pago para el jugador I cuando elige la estrategia I_i y el jugador II escoge la estrategia II_j. El pago para el jugador II en estas circunstancias es $-a_{ij}$.

Una solución de estos juegos especifica las estrategias óptimas que jugadores racionales usarán y el pago que se obtiene con ellas.

La solución o soluciones de un juego bipersonal de suma nula pueden caracterizarse de dos formas: mediante las estrategias de seguridad y con el concepto de punto de equilibrio.

2.1. Estrategias de seguridad

En los juegos de suma nula cuando un jugador intenta maximizar su pago, a la vez está intentando minimizar el pago de su oponente. Cada jugador considera el peor resultado que puede conseguir con cada una de sus estrategias y después escoge la estrategia que le proporciona el mejor de los peores resultados.

Definición 1.1 *Para cada estrategia pura $I_i \in E_1$, el nivel de seguridad del jugador I es el pago que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador II.*

$$v_I(I_i) = \min_j a_{ij}$$

Para cada estrategia pura $II_j \in E_2$, el nivel de seguridad del jugador II es el pago que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador I.

$$v_{II}(II_j) = \max_i a_{ij}$$

Definición 1.2 *El valor maximin (o valor inferior del juego) del jugador I es*

$$v_I = \max_i v_I(I_i) = \max_i \min_j a_{ij}$$

Una estrategia de seguridad o estrategia maximin es la que proporciona al jugador su valor maximin. El valor minimax (o valor superior del juego) del jugador II es

$$v_{II} = \min_j v_{II}(II_j) = \min_j \max_i a_{ij}$$

Una estrategia de seguridad o estrategia minimax es la que proporciona al jugador su valor minimax.

Teorema 1.1 *Para cada juego matricial de matriz $A = (a_{ij})$ se verifica:*

1. *Los valores v_I y v_{II} son únicos.*

2. *Existe al menos una estrategia de seguridad para cada jugador.*

3. $v_I \leq v_{II}$.

Definición 1.3 *Un juego matricial de matriz $A = (a_{ij})$ tiene un punto de silla en estrategias puras cuando se verifica que:*

$$v_I = v_{II}.$$

Este valor común se llama valor del juego y es el menor elemento de su fila y el máximo de su columna. Se denota por v.

Definición 1.4 *Un punto de silla, si existe, es el pago correspondiente a una pareja de estrategias de seguridad. Dichas estrategias, junto con el valor del juego, constituyen una solución del juego.*

Ejemplo 1.3 *M. Shubik (1955) [85]. Supongamos que dos empresas disponen, cada una de ellas, de 1 millón de unidades monetarias (u.m.) para realizar publicidad de sus productos en una determinada área de mercado. Para su campaña pueden utilizar radio, televisión y prensa. El efecto esperado que producirán las distintas posibilidades de publicidad viene recogido en la siguiente tabla.*

	Radio	*T.V.*	*Prensa*	*No publ.*
Radio	*0*	*-0.5*	*0*	*2.5*
T.V.	*2*	*0*	*1.5*	*5*
Prensa	*1*	*-0.5*	*0*	*3.5*
No publ.	*-2*	*-4*	*-3*	*0*

Si las empresas pueden invertir en un solo medio publicitario, se observa que el juego tiene un punto de silla, correspondiente a las estrategias consistentes en hacer publicidad en televisión. En este caso, el resultado neto que consiguen ambas empresas es el mismo que conseguirían si no hiciesen publicidad ninguna de las dos. Sin embargo, ninguna puede arriesgarse a elegir esta estrategia pues en el caso de que su oponente no la escoja, saldría perjudicada.

Las estrategias que proporcionan los puntos de silla no tienen porqué ser únicas. Si existen más de una pareja son equivalentes, es decir, proporcionan el mismo valor del juego.

No todos los juegos de suma nula poseen un punto de silla en estrategias puras como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4 *M. Shubik (1955) [85]. Supongamos que las empresas del ejemplo anterior pueden gastar su dinero en diferentes programas en los que se utiliza más de un medio publicitario. Si pueden elegir entre tres programas diferentes, los efectos de las decisiones de ambas empresas vienen recogidos en la siguiente tabla*

	Programa 1	*Programa 2*	*Programa 3*
Programa 1	*2*	*4*	*-2*
Programa 2	*4*	*2*	*-2*
Programa 3	*-2*	*-2*	*3*

En este caso no hay punto de silla, ya que el valor maximin del juego, v_I, es -2 y el valor minimax v_{II} es 3.

En los juegos sin punto de silla, si un jugador descubre la estrategia elegida por el otro, este último puede salir perjudicado. Por ello, lo ideal es mantener la elección de las estrategias a seguir, fuera del alcance del oponente. Una forma de conseguir esto consiste en seleccionar las estrategias al azar. Es decir, mezclar las estrategias de acuerdo con alguna distribución de probabilidad en el conjunto de las estrategias puras del jugador.

Definición 1.5 *Una estrategia mixta para un jugador es una distribución de probabilidad en el conjunto de sus estrategias puras.*

En general, si un jugador tiene n estrategias puras, una estrategia mixta para él, es una n-tupla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1$, donde x_i indica la probabilidad con que el jugador seleccionará su i-ésima estrategia pura.

El conjunto de estrategias mixtas siempre incluye a todas las estrategias puras porque estas últimas, pueden considerarse como un caso especial de estrategia mixta en que la correspondiente estrategia pura se juega con probabilidad 1 y todas las demás con probabilidad cero.

Sea $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, la matriz de pagos del juego, X e Y los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores I y II respectivamente.

$$
\begin{aligned}
X &= \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\, x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\} \\
Y &= \{y \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^{m} y_j = 1,\, y_j \geq 0,\, j = 1, \ldots, m\}
\end{aligned}
$$

Para analizar el resultado del juego cuando uno o ambos jugadores utilizan estrategias mixtas, podemos utilizar el concepto de valor esperado. En este caso la función de pagos del juego es

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j, \quad x \in X,\ y \in Y$$

que es el valor esperado de conseguir los pagos del juego con la combinación de estrategias mixtas $x \in X$, $y \in Y$.

Los distintos conceptos estudiados en estrategias puras pueden extenderse al caso de las estrategias mixtas.

Definición 1.6 *Para cada estrategia mixta $x \in X$, el nivel de seguridad del jugador I es el valor esperado que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador II.*

$$v_I(x) = \min_{y \in Y} v(x, y)$$

Para cada estrategia mixta $y \in Y$, el nivel de seguridad del jugador II es el valor esperado que puede asegurarse con esa estrategia, prescindiendo de las acciones del jugador I.

$$v_{II}(y) = \max_{x \in X} v(x, y)$$

Definición 1.7 *El valor maximin en estrategias mixtas del jugador I es*

$$v_I^M = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} v(x, y)$$

Una estrategia de seguridad o estrategia maximin es la que proporciona al jugador su valor maximin.

El valor minimax en estrategias mixtas del jugador II es

$$v_{II}^M = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} v(x, y)$$

Una estrategia de seguridad o estrategia minmax es la que proporciona al jugador su valor minimax.

Teorema 1.2 *En un juego matricial de suma nula se verifica:*

1. *Los valores v_I^M y v_{II}^M son únicos.*

2. *Al menos existe una estrategia mixta de seguridad para cada jugador.*

3. *Los niveles de seguridad en estrategias puras y mixtas verifican: $v_I \leq v_I^M$ y $v_{II}^M \leq v_{II}$.*

Definición 1.8 *Las estrategias mixtas $x^* \in X$, $y^* \in Y$ son óptimas para los jugadores I y II, respectivamente si*

$$v_I^M = \min_{y \in Y} v(x^*, y) = \min_{y \in Y} x^{*t} A y, \qquad v_{II}^M = \max_{x \in X} v(x, y^*) = \max_{x \in X} x^t A y^*$$

El nivel de seguridad para una estrategia mixta $\hat{x} \in X$ viene dado por $v_I(\hat{x}) = \min_{y \in Y} \hat{x}^t A y$, cuya valoración puede obtenerse por medio del problema dual del anterior

$$\begin{array}{ll} \max & \lambda(\hat{x}) \\ \text{s.a.} & e\lambda(\hat{x}) \leq \hat{x}^t A \\ & \hat{x} \in X,\ \lambda(\hat{x}) \in \mathbb{R} \end{array}$$

siendo $e = (1, \ldots, 1)^t$. Las estrategias que proporcionan los mejores niveles de seguridad son las que verifican

$$v_I^M = \max_{x \in X} v_I(x)$$

Estas estrategias, así como el valor del juego, pueden obtenerse a través del siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \max & v_I \\ \text{s.a.} & e\, v_I \leq x^t A \\ & x \in X \end{array}$$

Podemos realizar el mismo razonamiento para el segundo jugador. Al tratar de minimizar su nivel de seguridad de forma que limite al otro jugador, llegamos a otro problema de programación lineal de la forma

$$\begin{array}{ll} \min & v_{II} \\ \text{s.a.} & Ay \leq v_{II}\, e \\ & y \in Y \end{array}$$

Si comparamos estos dos problemas vemos que son duales, por lo que si ambos tienen soluciones óptimas x^*, y^* entonces $v_I^* = v_{II}^*$, es decir, las estrategias óptimas se autolimitan en lo que se conoce como teorema minimax.

Teorema 1.3 (Teorema Minimax) *En todo juego bipersonal finito de suma cero, existen estrategias mixtas óptimas $x^* \in X$, $y^* \in Y$, para cada jugador y se verifica $v_I^M = v_{II}^M = v^*$, siendo v^* el valor del juego.*

Este resultado pone de manifiesto que las estrategias de seguridad óptimas no sólo optimizan los niveles de seguridad de cada jugador, sino que limitan los pagos del oponente.

El teorema minimax fue demostrado por von Neumann en 1928, y posteriormente se han establecido diversas demostraciones entre las que destaca la de Kakutani de 1941, empleando el teorema del punto fijo de Brouwer. Por medio de la teoría de la dualidad de la programación lineal, como se ha indicado anteriormente, y a través del método del simplex se obtienen las estrategias óptimas de cada jugador y el valor del juego de forma rápida.

Ejemplo 1.5 *M. Shubik (1955) [85]. Consideremos el juego descrito en el ejemplo 1.4. Para encontrar las estrategias óptimas, el jugador I debe resolver el siguiente problema lineal:*

$$\begin{array}{ll} \max & v \\ s.a. & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq v \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq v \\ & -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Mediante el método del simplex obtenemos la estrategia óptima del jugador I $x = (1/4, 1/4, 1/2)$ *y el valor del juego* $v = 1/2$*. La estrategia consiste en utilizar la primera estrategia pura con probabilidad 1/4, la segunda estrategia pura con probabilidad 1/4, y la tercera con probabilidad 1/2. Con esta estrategia se obtiene un pago esperado de 1/2.*

A veces, las estrategias de uno o más jugadores están sometidas a restricciones adicionales, dando lugar a los denominados juegos restringidos. Este tipo de juegos permiten una formulación más realista y práctica de ciertos problemas de decisión bajo incertidumbre. Así, un jugador puede incorporar al conjunto de sus estrategias restricciones que representen limitaciones de recursos, relaciones técnicas, o considerar la posible información que un jugador posea acerca de la frecuencia relativa con que su oponente utiliza sus estrategias.

Charnes (1963) [24] estableció la equivalencia entre ciertos problemas lineales y los juegos matriciales en los que las estrategias mixtas están sometidas a restricciones lineales. En algunos casos particulares interesantes, el conjunto de restricciones adicionales puede representarse en función de sus puntos extremos, lo que permite el tratamiento del problema en términos de un juego transformado (Monroy, 1996 [61]), como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6 *Consideremos el juego bipersonal de suma nula cuya matriz de pagos es:*

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas, el jugador I se obtienen a partir del problema lineal

$$\begin{array}{ll} \max & v \\ s.a. & 4x_1 + 6x_2 \geq v \\ & 6x_1 + 4x_2 \geq v \\ & 5x_3 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3. \end{array}$$

La estrategia óptima para el jugador I es $x = (1/4, 1/4, 1/2)$ *y el valor del juego* $v = 2.5$.

Supongamos que la distribución de probabilidad sobre el conjunto de las estrategias puras del jugador I, está sometida a la siguiente ordenación

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$$

y la distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras del jugador II, está ordenada de la forma

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0$$

Los jugadores I y II deben determinar respectivamente

$$\max_{x \in S} \min_{y \in T} x^t A y \qquad\qquad \min_{y \in T} \max_{x \in S} x^t A y$$

siendo

$$S = \{x \in X : x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\}$$

$$T = \{y \in Y : y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq 0\}$$

Los conjuntos de estrategias S y T pueden representarse en función de sus puntos extremos como

$$S = \{x \in X : x = P\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^3,\ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3\}$$

$$T = \{y \in Y : y = P\beta,\ \beta \in \mathbb{R}^3,\ \sum_{j=1}^{3} \beta_j = 1, \beta_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 3\}$$

siendo P la matriz de puntos extremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

El problema se transforma en un juego sin restringir cuya matriz de pagos es $P^t AP$, dada por

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 10/3 \\ 5 & 5 & 10/3 \\ 10/3 & 10/3 & 25/9 \end{pmatrix}$$

Las estrategias óptimas de este juego transformado son

$$\alpha^* = (1,0,0)^t \qquad \beta^* = (0,0,1)^t$$

por lo que las estrategias optimas del juego restringido se obtienen como

$$x^* = P\alpha^* = (1,0,0) \qquad y^* = P\beta^* = (1/3, 1/3, 1/3)$$

y el valor del juego es $v^* = 10/3$.

2.2. Puntos de equilibrio

Una de las propiedades más interesantes de las estrategias óptimas en los juegos matriciales, es que cuando ambos jugadores las utilizan, ninguno de ellos se beneficia si cambia a otra estrategia, mientras que el contrario se mantiene en la óptima.

Supongamos que los jugadores I y II juegan sus estrategias óptimas x^*, y^*, respectivamente. Si el jugador II sigue jugando y^* y el jugador I cambia a otra estrategia x, no obtendrá más ganancias que si continúa jugando x^*, y recíprocamente. Estas estrategias forman en cierto modo, un equilibrio. Establezcamos formalmente la definición de par de estrategias en equilibrio.

Definición 1.9 *Un par de estrategias $x^* \in X$, $y^* \in Y$ es un punto de equilibrio para un juego matricial de matriz A si:*

$$v(x, y^*) \leq v(x^*, y^*) \leq v(x^*, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

o bien:

$$x^t A y^* \leq x^{*t} A y^* \leq x^{*t} A y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

La primera desigualdad establece que x^* es la mejor respuesta del jugador I a la estrategia y^* del jugador II, y la segunda establece que y^* es la mejor respuesta del jugador II a la estrategia x^* del jugador I.

Puede ocurrir que un juego matricial tenga más de un punto de equilibrio, pero en este caso son intercambiables y equivalentes, es decir, pueden combinarse entre sí para formar un nuevo punto de equilibrio y además todos proporcionan el mismo pago.

En los juegos de suma nula los conceptos de solución considerados, estrategias óptimas y puntos de equilibrio, son equivalentes

Teorema 1.4 *Sean $x^* \in X$, $y^* \in Y$, un par de estrategias de un juego matricial, (x^*, y^*) es un punto de equilibrio del juego si y sólo si (x^*, y^*, v^*) es una solución del juego.*

Este resultado establece que las estrategias óptimas forman pares de estrategias en equilibrio y son los únicos puntos de equilibrio. El teorema 1.4, puede reinterpretarse en términos de solución de un juego como:

Corolario 1.1 *Si un juego matricial tiene más de una solución, todas proporcionan el mismo valor del juego.*

Ejemplo 1.7 *Una empresa tiene dos compañías, A y B, que, en media, pagan a Hacienda anualmente 4.000.000 u.m. y 12.000.000 u.m. respectivamente. Para cada una de las compañías, la empresa puede declarar sus ingresos reales y pagar los impuestos correspondientes, o bien falsificar su contabilidad y evitar el pago de impuestos. El servicio de inspección de Hacienda sólo tiene medios para investigar una compañía cada año. Si investiga una compañía con ingresos falsos, descubrirán el fraude, y la compañía tendrá que pagar los impuestos correspondientes más una multa que será el doble de lo defraudado. Se desea obtener la estrategia óptima para la inspección de Hacienda, si ésta desea maximizar los ingresos.*

Las estrategias de Hacienda son:

I_1*: Investigar la compañía A.*

I_2*: Investigar la compañía B.*

Las estrategias de la empresa son:

II_1*: Declarar los ingresos reales de A y B.*

II_2*: Declarar ingresos reales de A y falsos de B.*

II_3*: Declarar ingresos reales de B y falsos de A.*

II_4*: Declarar ingresos falsos para A y B.*

La matriz de pagos en millones de u.m. es

	II_1	II_2	II_3	II_4
I_1	16	4	24	12
I_2	16	40	12	36

El valor del juego es $v = 16$ *y corresponde a las estrategias óptimas* $x^* = (\alpha, 1-\alpha)$, $1/3 \leq \alpha \leq 2/3$, $y^* = (1,0,0,0)$, *es decir* $y^* = II_1$.

Cuando se generalizan estos resultados, bien a juegos de n personas, con $n > 2$, o bien a juegos de suma no nula, las propiedades de las estrategias en equilibrio, de ser equivalentes e intercambiables se pierden. Es decir, un par de estrategias maximin no tiene que ser necesariamente un par de estrategias en equilibrio, o viceversa. Todos los puntos de equilibrio no proporcionan necesariamente el mismo pago, por lo que no hay un concepto único de solución del juego.

3. Juegos continuos escalares

En este apartado abordaremos el estudio de los juegos bipersonales continuos. En estos juegos cada jugador dispone de un continuo de estrategias puras. Usualmente se las suele asociar con el intervalo $[0,1]$. Obviamente, es cierto que existe una biyección entre todo conjunto con la cardinalidad del continuo y el intervalo $[0,1]$. Sin embargo, también es cierto que con esta transformación muchas de las propiedades de las funciones de pago del juego original pueden perderse. Por ello a veces es más razonable mantener la estructura del conjunto original de estrategias y estudiar los juegos continuos en sus espacios originales. De cualquier forma, el análisis detallado de la problemática de estas transformaciones está fuera del alcance de este libro y en lo que sigue nos reduciremos a considerar los juegos continuos sobre sus espacios originales.

Consideremos dos espacios de estrategias puras X e Y respectivamente para los jugadores I y II. Supongamos que para todo par de estrategias puras $(x,y) \in X \times Y$ tenemos definida una función de pago $K(x,y)$, usualmente llamada núcleo. Una estrategia mixta en este juego será una medida normalizada (probabilidad) sobre el conjunto de estrategias puras. Supongamos que F (respectivamente G) es una probabilidad sobre X (respectivamente Y), conjunto de estrategias puras del jugador I (respectivamente II).

Si el jugador I juega su estrategia pura x y el jugador II su estrategia mixta G el valor esperado del juego será

$$E(x,G) = \int_Y K(x,y)dG(y)$$

donde estamos integrando en el sentido de Lebesgue-Stieltjes con respecto a la medida inducida por G.

Si el jugador II juega su estrategia pura y y el jugador I su estrategia mixta F el valor esperado del juego será

$$E(F,y) = \int_X K(x,y)dF(x).$$

Por lo tanto, si el jugador I juega según F y el jugador II según G, el valor esperado del juego vendrá dado por:

$$E(F,G) = \int_{X \times Y} K(x,y) d(F \times G)$$

donde $F \times G$ es la medida producto de las medidas F y G definidas sobre los conjuntos de estrategias puras de cada jugador.

Ahora siguiendo el mismo tratamiento que en el caso con un número finito de estrategias puras podremos definir el valor del juego como el único valor (caso de existir) que verifica:

$$v_I = v_{II}$$

siendo:

$$\begin{aligned} v_I &= \sup_F \inf_y E(F,y) \\ v_{II} &= \inf_G \sup_x E(x,G). \end{aligned}$$

La pregunta lógica es cuándo estos juegos tienen valor y más aún cuándo existe una estrategia óptima. Esto es, establecer cuando existen valores para los cuales los ínfimos y supremos anteriores se alcancen. A ambas cuestiones es fácil darle respuesta. En este sentido puede probarse el siguiente teorema (véase Owen 1982 [71]).

Teorema 1.5 *Si los conjuntos de estrategias puras de ambos jugadores son conjuntos compactos y el núcleo K es una función continua, entonces:*

1. $v_I = v_{II}$
2. *Los operadores* $\inf \sup$ *y* $\sup \inf$ *pueden sustituirse por* $\min \max$ *y* $\max \min$.

Adicionalmente, es posible cuestionarse bajo que condiciones puede alcanzarse el valor del juego en estrategias puras. Esta pregunta se responde introduciendo el concepto de juego cóncavo-convexo.

Definición 1.10 *Un juego continuo es cóncavo-convexo si su núcleo $K(x,y)$ es una función convexa en x para cada y fijo y cóncava en y para cada x.*

Para este tipo de juegos, admitiendo además alguna hipótesis adicional de continuidad es posible asegurar la existencia de estrategias óptimas en estrategias puras.

Teorema 1.6 *Todo juego cóncavo-convexo con núcleo K continuo sobre conjuntos de estrategias puras convexos y compactos alcanza el valor del juego en estrategias puras.*

4. Juegos por objetivos

Un problema que surge inmediatamente con respecto al concepto de estrategia mixta es su relevancia cuando el juego se juega una sola vez. Esto deriva del hecho de que la noción de pago esperado, es decir, la cantidad que un jugador racional desea maximizar, parece sólo aplicable a un juego repetido varias veces. Pero en un juego que se juega una sola vez puede no tener sentido escoger una estrategia, de acuerdo con la distribución de probabilidad asociada. Una estrategia mixta x proporciona al jugador un valor esperado $v(x)$ que es una media ponderada y puede aceptarse si dicha estrategia se usa un gran número de veces. Sin embargo, si se utiliza una sola vez la posibilidad de que el jugador obtenga un valor menor que $v(x)$ puede ser grande. Si con una estrategia pura I_i se obtiene un valor $v(I_i)$ muy próximo a $v(x)$ no parece razonable que el jugador se arriesgue tanto en obtener valores inferiores a uno que tiene seguro, $v(I_i)$, por aumentar su nivel de seguridad, ya que al realizar el juego una única vez es posible que salga perdiendo.

Parece, pues, un poco arriesgado el criterio de escoger entre las estrategias mixtas. Sería más adecuado que el jugador hiciera crecer su nivel de seguridad, pero asegurándose una ganancia real cada vez que realice el juego.

Nosotros proponemos un nuevo enfoque en el estudio de los juegos, que complementa al estudio tradicional, pues podremos asegurar la consecución de objetivos en una situación conflictiva con una cierta probabilidad. Esta perspectiva mejora el desarrollo clásico que se apoya en la repetición de las situaciones, que nunca suelen ser las mismas, ya que los conflictos suelen cambiar cuando cambian las situaciones. Cuando se conoce la probabilidad con que puede ocurrir un resultado, se consigue que los objetivos que se marquen las partes en conflicto sean más realistas.

4.1. Juegos matriciales por objetivos

Consideremos un juego bipersonal, finito de suma nula, en forma normal. Sea $A = (a_{ij}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, la matriz de pagos del juego y X e Y los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores I, y II, respectivamente.

Analizamos el problema desde el punto de vista del jugador I. Sea $P \in \mathbb{R}$ un objetivo establecido por dicho jugador. Para determinar las estrategias basadas en la probabilidad de conseguir el objetivo P, formulamos un juego de suma nula llamado juego matricial por objetivos.

Definición 1.11 *La función de pagos del juego por objetivos para cada par de estrategias $x \in X$, $y \in Y$, viene dada por*

$$v(x, y) = x^t A_P y$$

donde

$$A_P = (\delta_{ij}) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ a_{ij} \geq P \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$v(x, y)$ es la probabilidad de obtener al menos P en el juego original cuando el jugador I juega su estrategia $x \in X$ y el jugador II juega su estrategia $y \in Y$.

Como $v(x, y)$ depende de la estrategia que juegue el jugador II, consideraremos el peor de los casos, es decir, supondremos que el jugador II escogerá una estrategia $y \in Y$ que proporcione el valor mínimo de $v(x, y)$. Por ello, para cada $x \in X$, el jugador I obtendrá:

$$v(x) = \min_{y \in Y} v(x, y) = \min_{y \in Y} x^t A_P y = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij}$$

Definición 1.12 *El nivel de seguridad del juego por objetivos para el jugador I es la máxima probabilidad de obtener el objetivo P que el jugador I puede asegurarse prescindiendo de las acciones de el jugador II.*

Viene dado por:

$$v = \max_{x \in X} v(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} v(x,y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^t A_P y$$

Definición 1.13 *Una estrategia $x \in X$ es una estrategia de seguridad de nivel P para el jugador I, si $v = \min_{y \in Y} x^t A_P y$*

El siguiente resultado caracteriza a las estrategias de seguridad de nivel P y proporciona un procedimiento para resolver los juegos de suma nula por objetivos.

Teorema 1.7 *Las estrategias de seguridad de nivel P y la máxima probabilidad de obtener al menos el objetivo P vienen dadas por la solución del juego bipersonal de suma nula cuya matriz de pagos es A_P.*

Demostración: Para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in Y$, el valor esperado del juego de suma nula de matriz A_P es:

$$v(x,y) = x^t A_P y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \delta_{ij}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ sea Y_i la suma de las y_j en las columnas que tienen un elemento igual a 1 en la fila i-ésima, es decir,

$$\mathrm{Y}_i = \sum_{j=1}^{m} y_j \delta_{ij} \quad i = 1, \ldots, n$$

La probabilidad de obtener un pago mayor o igual que P cuando los jugadores utilizan las estrategias x e y es:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{Y}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \delta_{ij} = v(x,y)$$

□

Observación: Si existe un i tal que $\delta_{ij} = 1$, para $j = 1, \ldots, m$, entonces utilizando la estrategia pura i-ésima de el jugador I, la probabilidad de conseguir al menos el objetivo P es 1. Si existe j tal que $\delta_{ij} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces la probabilidad de conseguir al menos el objetivo P es 0, porque la estrategia pura j-ésima del jugador II impide al jugador I obtener más de este valor.

Ejemplo 1.8 *Consideremos el juego bipersonal de suma nula con matriz de pagos*

$$\begin{pmatrix} 2 & 15 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 10 & 7 \\ 7 & 14 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Supongamos que el jugador I desea conocer la probabilidad de obtener el objetivo $P = 6$, y las estrategias para lograrlo. La matriz A_p inducida por $P = 6$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el problema que hemos de resolver es:

$$\begin{array}{ll} \max & v \\ s.a. & x_2 + x_3 + x_4 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_4 \geq v \\ & x_1 + x_3 \geq v \\ & x_2 + x_3 + x_4 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{array}$$

cuya solución es $v = 2/3$ y $x^* = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$, es decir, la probabilidad de conseguir al menos el objetivo $P = 6$ es 2/3, y la estrategia de nivel de seguridad P es $x^* = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$. El valor esperado de este juego es $v = 7,67619$ que se conseguiría con una probabilidad de 1/2.

4.2. Descomposición del espacio de objetivos

Hasta ahora hemos estudiado el problema para un objetivo conocido P, pero podemos realizar un análisis global cuando no disponemos de ninguna información sobre el objetivo que el jugador quiere alcanzar. Los posibles objetivos que el jugador puede obtener se encuentran entre el menor y el mayor elemento de la matriz de pagos A. A este segmento lo llamamos *espacio de objetivos*.

A su vez el espacio de objetivos puede particionarse, de forma que todos los objetivos que pertenenecen al mismo segmento se alcanzan con la misma probabilidad. Para determinar estas probabilidades en cada uno de los segmentos de la partición, aplicamos el teorema 1.7 de forma ordenada y consideramos análisis de sensibilidad de programación lineal.

Supongamos que la matriz A tiene r elementos distintos. Dichos elementos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, se ordenan de manera creciente. Los conjuntos que forman la partición del espacio de objetivos son

$$(\alpha_{i-1},\, \alpha_i] \quad i = 2, \ldots, r$$

y el punto α_1.

4.3. Proceso secuencial de resolución

Consideramos la matriz A_P para el objetivo $P = \alpha_r$, y resolvemos el juego bipersonal de suma nula con matriz de pagos A_P. El valor de este juego es la probabilidad de que el jugador I obtenga un pago de al menos P en el juego original, para cualquier $P \in (\alpha_{r-1}, \alpha_r]$.

En el siguiente paso, consideramos la matriz A_P para el objetivo $P = \alpha_{r-1}$. Usando la información obtenida en el paso anterior, (base óptima), resolvemos el juego bipersonal de suma nula con esta matriz de pagos. El valor del juego es la probabilidad de que el jugador I obtenga al menos el objetivo P en el juego original, para cualquier $P \in (\alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}]$. Si obtenemos la misma solución que en el paso anterior, los dos segmentos, $(\alpha_{r-1}, \alpha_r]$ y $(\alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}]$, pueden colapsarse en uno solo, $(\alpha_{r-2}, \alpha_r]$.

El procedimiento continúa hasta la primera vez que se obtenga una matriz A_P con todos los elementos de una fila igual a 1. Si esto ocurre para el objetivo $P = \alpha_s$, entonces la probabilidad de alcanzar cualquier objetivo P tal que $P \leq \alpha_s$ es igual a 1.

El algoritmo siguiente proporciona los valores de estas probabilidades.

Algoritmo

Paso 1: Inicializar todos los elementos de A_P a cero.

Paso 2: Determinar la posición $(i\,j)$ correspondiente al mayor elemento en la matriz A aún no considerado. Poner un 1 en la posición $(i\,j)$ de la matriz A_P.

Paso 3: ¿ Tiene A_P alguna columna con todos los elementos igual a 0?

Si: ir al paso 2

No: ir al paso 4

Paso 4: Resolver el juego de suma nula de matriz A_P. Escribir la solución.

Paso 5: ¿ Tiene A_P alguna fila con todos sus elementos igual a 1?

Si: ir al paso 6

No: ir al paso 2.

Paso 6: Fin.

Con este procedimiento obtenemos el conjunto de soluciones para todos los objetivos posibles P, y el jugador I escogerá entre ellos según el riesgo que quiera asumir.

Ejemplo 1.9 : *Consideremos el juego bipersonal de suma nula del ejemplo anterior, cuya matriz de pagos es*

$$\begin{pmatrix} 2 & 15 & 8 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 10 & 7 \\ 7 & 14 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

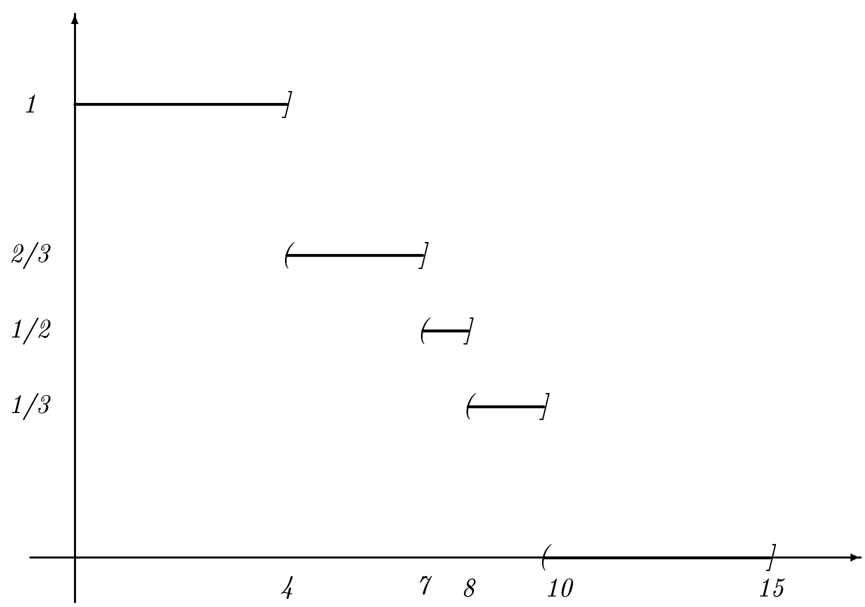
Los segmentos que forman la partición del espacio de objetivos son

2, (2,4], (4,7], (7,8], (8,10], (10,11], (11,14], (14,15]

Las probabilidades de obtener los objetivos que pertenecen a cada segmento y el correspondiente conjunto de estrategias de seguridad de nivel P son:

Segmento	*Probabilidad*	*Conjunto*
2	*1*	*X*
(2,4]	*1*	conv{*(0,0,1,0),(0,0,0,1)*}
(4,7]	*2/3*	conv{*(1/3,1/3,1/3,0),(1/3,0,1/3,1/3)*}
(7,8]	*1/2*	{*(0,0,1/2,1/2)*}
(8,10]	*1/3*	{*(0,1/3,1/3,1/3)*}
(10,11]	*0*	*X*
(11,14]	*0*	*X*
(14,15]	*0*	*X*

donde conv{*a,b*} *es el cierre convexo de los vectores a,b. Gráficamente*



Observemos que el jugador I obtendrá al menos el objetivo $P = 7$ *con probabilidad* $2/3$, $\forall x \in \mathrm{conv}\{(1/3,1/3,1/3,0),(1/3,0,1/3,1/3)\}$, $\forall y \in Y$.

Sin embargo, la probabilidad de conseguir el objetivo $P = 9$ *es* $1/3$ *con* $x = (0, 1/3, 1/3, 1/3)$, $\forall y \in Y$.

Nótese que para los juegos con núcleo continuo tratados en la sección 3 también sería posible definir objetivos y su correspondiente análisis como juego por objetivos. Todos los argumentos expuestos anteriormente serían válidos sin más que definir para un objetivo P un nuevo núcleo K^P a través de la expresión:

$$K^P(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad K(x,y) < P \\ 1 & \text{si} \quad K(x,y) \geq P. \end{cases}$$

Sin embargo, ahora no es posible asegurar el teorema minimax, ni tan siquiera la existencia de estrategias óptimas puesto que con esta definición el nuevo núcleo deja de ser continuo y no podríamos aplicar los resultados expuestos previamente en esta sección. Es por tanto una cuestión interesante el estudio de los juegos continuos por objetivos.