

TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DOCTOR POR LA  
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

# Nuevas formulaciones numéricas para el estudio de propagación de ondas en fluidos

Autor:

**Antonio Cerrato Casado**

Director:

**José Ángel González Pérez**

Profesor Titular

Codirector:

**Luis Rodríguez-Tembleque Solano**

Profesor Contratado Doctor

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

2016



Tesis Doctoral: Nuevas formulaciones numéricas para el estudio de propagación de ondas en fluidos

Autor: Antonio Cerrato Casado  
Director: José Ángel González Pérez  
Codirector: Luis Rodríguez-Tembleque Solano

El tribunal nombrado para juzgar la Tesis arriba indicada, compuesto por los siguientes doctores:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



*A mis padres,  
ellos se merecen esta línea más que nadie.*



# Agradecimientos

---

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis doctoral, José Ángel González, por su tiempo, dedicación, apoyo y cercanía. Igualmente agradecer al codirector de la misma, Luis Rodríguez de Tembleque, su disponibilidad en todo momento, consejos y, cómo no, también el apoyo prestado.

Esta andadura la comencé gracias a Ramón Abascal, al cual agradezco a título póstumo la ayuda en los primeros pasos del camino.

He de expresar mi más sincero agradecimiento al Profesor M.H. Ferri Aliabadi por haberme acogido en el *Department of Aeronautics of Imperial College (London)*. Sin duda, una experiencia que siempre recordaré con mucho cariño.

Quisiera expresar mi gratitud a Andrés Sáez, Director del Departamento, por su disponibilidad, accesibilidad y por haberme permitido hacer uso del departamento en todo momento.

Este agradecimiento es extensible a todos aquellos con los que he compartido lugar de trabajo durante estos años. A Antonio y a Gabriel, con los que he compartido muchas horas en el despacho. A los profesores Héctor, Pedro, Mario, Antonio y Fernando. También a Reyes, a M<sup>a</sup> José, a Manolo y al resto de personas con las que he coincidido en el departamento.

Gracias a mis amigos, por todo su apoyo y cariño. Incluido Hamdy, el cual, por suerte, apareció un día para arreglar un entuerto que hice.

Pero sobre todo, quisiera agradecer a mis padres, Antonio y M<sup>a</sup> Manuela, su inmenso apoyo incondicional, al que he recurrido en innumerables ocasiones y sin el cual esta tesis nunca se habría escrito. Por supuesto también quiero dar las gracias a mis hermanos, Manuel y Ana, pues siempre he podido contar con ellos.

*Antonio Cerrato Casado  
Sevilla, 2016*





# Resumen

---

En esta tesis se estudian diferentes problemas de propagación de ondas lineales en fluidos desde el punto de vista numérico. La tesis está compuesta por tres artículos donde se abordan dos temas fundamentalmente: la propagación de oleaje sobre batimetrías variables aplicando el Método de los Elementos de Contorno (MEC), el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos Espectrales (MEE). También se tratan problemas de interacción fluido-estructura en acústica mediante formulaciones particionadas no-simétricas MEC-MEF.

Para el tratamiento del problema de propagación de oleaje mediante el MEC, se presenta en esta tesis una solución fundamental que permite resolver el problema para profundidad variable en una dirección. Esta morfología de batimetría es especialmente relevante, pues está presente en un gran número de problemas reales en ingeniería. Además, se propone un acoplamiento MEC-MEF, incorporando una discretización en ambos métodos basada en elementos espectrales. Mediante dicha discretización, problemas con batimetrías complejas y con condiciones de contorno de dominio abierto pueden ser resueltos de forma precisa y eficiente, evitando reflexiones indeseadas en el contorno exterior y reduciendo extremadamente el error de polución en la solución.

Debido a diversos motivos, en el problema de interacción fluido-estructura, las mallas no tienen por qué coincidir en la interfase. Además, en ocasiones resulta de interés resolver ambos dominios mediante métodos diferentes y por computación en paralelo. El problema acústico de interacción fluido-estructura es tratado en esta tesis mediante un acoplamiento MEC-MEF; donde el MEC es utilizado para modelar el fluido y el MEF para la estructura. Para el acoplamiento se estudian y comparan dos estrategias diferentes que permiten una resolución particionada del problema: una basada en el método Mortar y otra en los Multiplicadores de Lagrange Localizados. Esta última es por primera vez utilizada este tipo de problemas.



# Abstract and conclusions

---

## Abstract

In this thesis, some aspects of the numerical treatment of linear waves propagation in fluids have been treated. The main contributions are presented in the three publications contained in the appendices.

The first paper presents a numerical fundamental solution for water-waves propagating over bathymetries of arbitrary variation in one direction. This fundamental solution is based on a Fourier inversion scheme, where the integrals are treated by means of the FFT and IFFT algorithms and analytical approximations of the far field of the transformed problem. The fundamental solution is also introduced in a boundary element code to solve some interior and exterior problems, including a water wave propagation example with bathymetry changes in the two directions, requiring a coupled boundary element-finite element formulation.

Following the research line of the first paper, the second paper proposes a coupled boundary-finite element formulation for linear water-waves with spectral elements. These high order elements are based on a pseudo-spectral approximation of the variables, providing an exponential convergence of the solution. This work also provides a detailed semi-analytical procedure for the computation of the singular integrals of the Boundary Spectral Element Method. The convergence of the coupled method is analysed in three reference problems and compared with some available experimental data.

Finally, the third publication herein investigates two Boundary Element Method (BEM)-Finite Element Method (FEM) coupling formulations for acoustic fluid-structure interaction problems. These two formulations, described on the paper, are the Mortar method, based on the classical Lagrange Multipliers, and the Localized Lagrange Multipliers method. These two partitioned solution strategies allow to use the BEM for the fluid domain, which is specially interesting for exterior problems, and the FEM for the structural domain. A comparison between the localized methodology and the Mortar method in highly non conforming interface meshes is presented. Furthermore, the Biconjugate gradient stabilized method (BiCGSTAB) is used to solve the resulting linear systems of equations, demonstrating very good scalability properties for this kind of problems.

## Conclusions

The main conclusion of this thesis is that some limitations on the numerical modelisation of linear waves in fluids have been successfully overcome.

Despite of the advantages of the BEM, specially for infinity domains, the modelization of realistic water-waves propagation problems is limited by the local character of the bathymetry. To palliate this deficiency of the BEM, a complete fundamental solution has been derived for water-waves propagating over arbitrary variable bathymetries in one direction. This case is of great importance, being common in deep and intermediate depth areas near to the shoreline. More precisely, the proposed BEM formulation solves the mild-slope equation (MSE), which is able to reproduce at the same time the refraction, diffraction, shoaling and reflection. This numerical model has been successfully proved in several examples, showing an excellent agreement compared to other numerical formulations and experimental data.

The numerical dispersion and the pollution error in the solution of wave propagation problems is well known and has been studied by many authors. This problem is treated in this thesis by introducing a spectral element discretization in the boundary and finite element formulations of the MSE problem. The combination of the boundary integral equation and spectral elements is denominated Boundary Spectral Element Method (BSEM), while the FEM approach with this discretization is known in the existing literature as Spectral Element Method (SEM). In this thesis, the BSEM is also coupled with the SEM in order to solve accurately water-wave propagation problems over unbounded domains with variable bathymetry. In this coupled method, the SEM is used to model the *inner* region, where the bathymetry can change in any direction, and the BSEM is used for the infinite *outer* region, allowing the model to reproduce the effects of a bathymetry composed by straight and parallel iso-depth lines fulfilling accurately the Sommerfeld radiation condition. Three benchmark problems have been solved, where the BSEM exhibited spectral convergence and the coupled BSEM-SEM proved to be accurate, efficient and versatile, being the pollution error extremely small.

Fluid-structure interaction appears in many engineering problems. Due to the different different physics, the domains could require dissimilar meshes and different methods to solve them with acceptable accuracy. In this thesis, a non symmetrical Boundary Element-Finite Element Tearing and Interconnecting (nsBE-FETI) formulation based on the Localized Lagrange Multipliers (LLM) method is proposed and compared to the same formulation but using classical Lagrange multipliers. Several examples have been used to compare the solution of both methodologies, showing that the formulation based on the LLM presents better agreement on the displacement field. Moreover, the leading system of linear equations of the nsBE-FETI formulations has been solved with the projected BiCGSTAB iterative solution algorithm, presenting good scalability properties for the solution of acoustic FSI problems.

# Índice Abreviado

---

<i>Resumen</i>	V
<i>Abstract and conclusions</i>	VII
<i>Índice Abreviado</i>	IX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción	1
1.2. Motivación y revisión histórica	1
1.3. Solución numérica de la ecuación de onda	3
1.4. Objetivos de la tesis	8
1.5. Contenido de la tesis	9
<b>2. Propagación de ondas</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción y ecuaciones básicas	11
2.2. El problema acústico	12
2.3. Propagación del oleaje	14
<b>3. Aproximaciones numéricas</b>	<b>27</b>
3.1. Método de los Elementos Finitos	27
3.2. Método de los Elementos de Contorno	29
3.3. Aproximación mediante elementos espectrales	44
3.4. Métodos de acoplamiento	54
<b>4. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>65</b>
4.1. Resumen y conclusiones	65
4.2. Trabajos futuros	68
<i>Bibliografía</i>	69
<b>Apéndice A. Artículo I</b>	<b>83</b>
<b>Apéndice B. Artículo II</b>	<b>123</b>

<b>Apéndice C. Artículo III</b>	<b>159</b>
<i>Índice de Figuras</i>	193
<i>Índice alfabético</i>	195
<i>Glosario</i>	195

# Índice

---

<i>Resumen</i>	V
<i>Abstract and conclusions</i>	VII
<i>Índice Abreviado</i>	IX
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción	1
1.2. Motivación y revisión histórica	1
1.2.1. El problema acústico	1
1.2.2. Propagación del oleaje	2
1.3. Solución numérica de la ecuación de onda	3
1.3.1. El Método de las Diferencias Finitas	4
1.3.2. El Método de los Elementos Finitos	4
1.3.3. El Método de los Elementos de Contorno	5
1.3.4. Métodos Espectrales	6
1.3.5. Estrategias particionadas de acoplamiento fluido-estructura para el problema acústico	7
1.4. Objetivos de la tesis	8
1.5. Contenido de la tesis	9
<b>2. Propagación de ondas</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción y ecuaciones básicas	11
2.2. El problema acústico	12
2.3. Propagación del oleaje	14
2.3.1. Ecuaciones de gobierno para el fenómeno del oleaje	15
2.3.2. Condiciones de contorno	16
Condiciones de contorno cinemáticas	16
Condición de contorno dinámica	17
Resumen del problema no lineal de propagación de oleaje	17
2.3.3. Linealización de las condiciones de contorno	17
2.3.4. El problema lineal	18

2.3.5.	Propagación de ondas armónicas y dispersión	19
2.3.6.	Derivación de la ecuación de pendiente suave	21
2.3.7.	Cambio de variable: ecuación de Helmholtz	26
<b>3.</b>	<b>Aproximaciones numéricas</b>	<b>27</b>
3.1.	Método de los Elementos Finitos	27
3.1.1.	Discretización del dominio	28
3.2.	Método de los Elementos de Contorno	29
3.2.1.	Introducción	29
3.2.2.	Aplicación del Método de los Elementos de Contorno (MEC) a la ecuación de Helmholtz bidimensional	30
	Ecuación integral de contorno	30
	Discretización de la ecuación integral de contorno	31
3.2.3.	Solución fundamental de la ecuación de Helmholtz	32
3.2.4.	Solución fundamental para número de onda variable	32
	El problema transformado en el espacio de Fourier	34
	Integración en el plano complejo	35
	Análisis del comportamiento de la función de Green en el espacio transformado	38
	Solución en el espacio real	39
3.2.5.	Resumen	40
3.3.	Aproximación mediante elementos espectrales	44
3.3.1.	Introducción	44
3.3.2.	Polinomios de Legendre	46
3.3.3.	Cuadratura de Legendre-Gauss-Lobatto (LGL)	47
3.3.4.	Aproximación polinomial óptima	49
3.3.5.	Aproximación pseudoespectral: Elementos de referencia	50
	Elemento espectral 1-D	51
	Elemento espectral 2-D	52
3.3.6.	Integración numérica en los elementos espectrales	52
3.3.7.	Resumen	53
3.4.	Métodos de acoplamiento	54
3.4.1.	Introducción	54
3.4.2.	Interacción Fluido-Estructura. Problema variacional	54
3.4.3.	Interacción fluido-estructura mediante el Método Mortar	56
	Formulación variacional continua del problema de acoplamiento	56
	Formulación variacional discreta	56
	Ecuaciones del problema de acoplamiento fluido-estructura	58
3.4.4.	Método de los Multiplicadores de Lagrange Localizados (MLL)	59
	Formulación variacional continua	59
	Formulación variacional discreta	60
	Resolución del problema de interacción fluido-estructura	61
	Localización de los nodos del marco de acoplamiento: Regla del momento nulo	62



---

3.4.5. Resumen	63
<b>4. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>65</b>
4.1. Resumen y conclusiones	65
4.2. Trabajos futuros	68
<i>Bibliografía</i>	69
<b>Apéndice A. Artículo I</b>	<b>83</b>
<b>Apéndice B. Artículo II</b>	<b>123</b>
<b>Apéndice C. Artículo III</b>	<b>159</b>
<i>Índice de Figuras</i>	193
<i>Índice alfabético</i>	195
<i>Glosario</i>	195



# 1 Introducción

---

## 1.1 Introducción

Esta tesis aborda el problema de la propagación de ondas lineales en fluidos desde el punto de vista numérico. El estudio de la propagación de ondas armónicas es de primordial interés en un gran número de problemas prácticos en campos tan diversos como la elastomecánica, la sismología, el electromagnetismo, técnicas de radar y sonar, espectrometría atómica, la acústica o la propagación de oleaje. Esta tesis se centra especialmente en estas dos últimas disciplinas, donde el fenómeno de propagación se puede modelar de forma linealizada en el dominio de la frecuencia mediante la ecuación de Helmholtz.

## 1.2 Motivación y revisión histórica

### 1.2.1 El problema acústico

El interés por la creación y la propagación del sonido ha acompañado a la humanidad desde el inicio de su existencia, pues el sonido forma parte del entorno en el que vivimos. Ya en la antigua Grecia, matemáticos como Pitágoras o Aristóteles se preocuparon por la física del problema desde el punto de vista de la concepción musical. En el siglo I a.C. aparece el primer trabajo conocido en cuyo contenido se trata la propagación del sonido desde un punto de vista físico e ingenieril. En él, aparecen recomendaciones a tener en cuenta para el diseño de anfiteatros con el fin de conseguir una buena acústica en el recinto. La obra se titulaba *De Architectura libri decem* y su autor fue el arquitecto romano Marco Vitruvio Polión.

Fue en el siglo XVIII cuando la acústica empezó a desarrollarse como ciencia en sí misma. Joseph Sauveur (1653-1716), físico francés, fue el que acuñó el término *Acústica* para designar a todo lo referente al sentido del oído. Durante dicho siglo, grandes físicos y matemáticos como Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716) Euler (1707-1783),

d'Alembert (1717-1783) o Lagrange (1736-1813), por citar algunos, estudiaron el movimiento oscilatorio en problemas de la mecánica clásica, aportando los fundamentos necesarios para el posterior desarrollo teórico de la acústica.

El siglo XIX estuvo marcado por los avances en la comprensión de la electricidad y el electromagnetismo, destacando Faraday, Maxwell o Hertz; pero también por la teoría de la elasticidad con Navier, Cauchy, Stokes etc.. Ambas áreas de estudio contribuyeron de manera esencial a la comprensión de la física de la propagación del sonido. Este fenómeno fue ampliamente estudiado por Hermann von Helmholtz (1824-1894), de quien, entre otros trabajos, cabe destacar sus teoría sobre resonancia y su obra: *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*. También son de enorme importancia en esta disciplina las aportaciones de Lord Rayleigh (1842-1919), en su obra: *Theory of Sound*. Para una revisión histórica más detallada sobre la acústica el lector puede consultar [147, 110].

En la actualidad, la Ingeniería Acústica tiene una notable relevancia por su carácter multidisciplinar y sus importantes aplicaciones en muchos ámbitos de la ciencia y la ingeniería. Los diferentes campos de investigación y de interés práctico son muchos: ruido ambiental, ruido industrial y laboral, acústica arquitectónica, tecnología sonar, ultrasonidos, ecografía, acústica submarina, bioacústica, instrumentación acústica, etc. En general, la acústica está presente en infinidad de ámbitos de la actividad humana, lo que explica el interés de su estudio.

### 1.2.2 Propagación del oleaje

El estudio del comportamiento del oleaje es uno de los principales pilares de la ingeniería marítima y la oceanografía. El conocimiento sobre su mecanismo de propagación juega un importante papel como factor de diseño de actuaciones costeras, mantenimiento de puertos y playas y el estudio de transporte de sedimentos. Durante muchos siglos, el fenómeno físico de propagación del oleaje ha interesado a muchos e importantes autores. Entre todos ellos se podrían destacar los trabajos de Airy [2] y Stokes [151], que describieron modelos para la propagación de oleaje lineal y no lineal respectivamente, o los de Boussinesq [26] y Lamb [97]. En su trabajo, Boussinesq desarrolló una teoría de propagación no lineal en aguas someras [26], y Lamb (discípulo de Stokes y Maxwell), propuso el modelo de *long-wave* para propagación de olas en su obra *Hydrodynamics*.

La modelización numérica del problema de propagación puede ser complicada y requerir un gran coste computacional dependiendo de las hipótesis consideradas en la formulación. Sin embargo, son muchos los casos en los que los modelos lineales pueden ser considerados como una buena aproximación del fenómeno real o, en cualquier caso, ser considerados el punto de partida para estudios más complejos. Los modelos lineales pueden proporcionar la obtención de una estimación *a priori* que nos permita acotar las zonas de estudio que requieran el empleo de modelos no-lineales. En general, los modelos lineales pueden ser válidos por sí solos cuando la altura de ola ( $H$ ) es pequeña en comparación con la longitud de la onda ( $L$ ), es decir:  $H/L \ll 1$ .

El modelo lineal de propagación de oleaje más extendido por su simplicidad y fidelidad con la física real del problema fue presentado por W. Berkhoff en los años 70 [18, 19]. Este modelo, conocido como *mild-slope equation* o Ecuación de Pendiente Suave (EPS),

es capaz de reproducir los efectos de asomeramiento, refracción, difracción y reflexión y, como su propio nombre indica, es sólo conveniente para pendientes pequeñas, es decir, cuando  $\nabla h/kh \ll 1$ , donde  $h$  es la profundidad y  $k$  es el número de onda. Históricamente, fue Eckart a principios de los 50 quien propuso un modelo muy parecido a la EPS [50], sin embargo, el área de aplicación de este modelo estaba limitada a aguas someras. En la década de los 70 aparecen también otras aproximaciones similares a la de Berkhoff, como la de Ito y Tanimoto [87] que, a diferencia de la EPS, fueron formuladas en el dominio del tiempo. Schönfeld [140], de manera contemporánea a Berkhoff, también deriva la EPS, pero de forma diferente y menos compacta. Smith y Sprink derivan también la EPS en 1975 en [148], donde hacen una comparación entre esta teoría y la de Eckart.

Muchos trabajos han seguido ampliando y analizando la formulación presentada por Berkhoff, ya sea en su forma elíptica o parabólica, como el trabajo publicado por Radder [131]. Booij, presentó en su tesis, a principios de los ochenta, una formulación basada también en la versión parabólica de la EPS en la que se incluía el efecto de las corrientes [23]. Más tarde, publicó un trabajo complementario a la EPS donde concluía que el modelo era válido para pendientes en la batimetría de hasta 1:3. Algo después Kirby también presentó una extensión de la EPS en el dominio del tiempo [91], donde resuelve problemas de propagación sobre fondos ondulados. Otros de sus trabajos relacionados con la forma parabólica de la EPS son [93, 92].

Por otro lado, Massel propuso en [112] una extensión del modelo de Berkhoff que incorpora términos de orden superior de la forma del fondo, incluyendo los proporcionales a la curvatura, y los modos evanescentes.

Chamberlain y Porter, presentaron a mediados de los noventa la *modified mild-slope equation* [35]. Esta formulación es probablemente la que más ha prevalecido sobre otras extensiones, en ella se conservan los términos de segundo orden que en un primer momento fueron despreciados por Berkhoff. Otras extensiones posteriores de la EPS, parecidas a la anterior, pueden ser encontradas en [152, 36]. Lee *et al.* [100], siguiendo los trabajos de Copeland [43] y Massel [112], presentaron una versión hiperbólica de la EPS extendida. Esta formulación es esencialmente como la de Copeland, salvo que retiene los términos de orden superior de la variación del fondo. Otros trabajos interesantes que incluyen variaciones sobre la EPS original son [103, 79, 80, 78].

### 1.3 Solución numérica de la ecuación de onda

Determinados fenómenos físicos de propagación de ondas en fluidos, como es el caso de la acústica lineal o la propagación de oleaje de pequeña amplitud, pueden ser reproducidos matemáticamente mediante la ecuación de Helmholtz.

La ecuación de Helmholtz puede tratarse de forma analítica o numérica. En el campo analítico encontramos métodos como el de las imágenes [119], el de separación de variables, expansión en series de autovalores, transformadas de Fourier, etc. [53]. Sin embargo las soluciones analíticas son por lo general difíciles de hallar y están reservadas a casos específicos con geometrías simples. Los métodos numéricos son, en cambio, mucho más versátiles y permiten resolver gran cantidad geometrías, inhomogeneidades y condiciones de contorno diferentes.

El desarrollo de los métodos numéricos ha venido de la mano del desarrollo de los ordenadores modernos desde la segunda mitad del siglo pasado. En general, los métodos numéricos convierten el problema diferencial inicial en un problema discreto, obteniendo así un valor estimado de la solución en un número finito de puntos del dominio de estudio. A pesar de no ser exactos llegan a conseguir una aproximación de la solución lo suficientemente buena como para satisfacer las necesidades requeridas para la mayor parte de los problemas físicos o de ingeniería actuales.

Dos han sido los principales métodos numéricos usados para la solución de las ecuaciones elípticas o *problemas de contorno*: el Método de las Diferencias Finitas (MDF) y el Método de los Elementos Finitos (MEF). En ambos métodos los sistemas de ecuaciones lineales resultantes de su aplicación están formados por matrices dispersas. El MEC, aunque ha recibido menos atención en la literatura [41], también ha sido ampliamente utilizado en este tipo de problemas, pues ofrece ventajas como la reducción de la malla necesaria o el cumplimiento de la condición de radiación en el infinito. Otro importante grupo de métodos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales que ha tenido un relevante papel son los Métodos Espectrales (MMEE), de los que hablaremos más adelante.

### **1.3.1 El Método de las Diferencias Finitas**

En el MDF el problema diferencial es tratado en su forma fuerte. En este método, las derivadas de las variables son aproximadas mediante operadores diferenciales basados en desarrollos en serie y los valores de la solución son obtenidos en una serie de puntos colocados en forma de rejilla sobre el dominio. El MDF es, en general, fácil de implementar y ofrece una buena convergencia en la solución tanto al refinar la malla como al aumentar el orden de los operadores diferenciales. Además, las matrices que contienen los coeficientes de los sistemas de ecuaciones a los que da lugar son dispersas. Algunos trabajos destacables, en cuanto a la ecuación de Helmholtz se refiere, son los de Harari y Turkel [71] o Turkel et al. [156]. Un aspecto negativo del MDF es que, debido a la topología de la malla, el modelo no se puede adaptar a cualquier contorno, dificultando una correcta aproximación geométrica del dominio.

### **1.3.2 El Método de los Elementos Finitos**

Originalmente el MEF fue una herramienta desarrollada por ingenieros que se planteó para la resolución de problemas estructurales en la década de los 50 [157], sin embargo, rápidamente se convirtió en el método general para resolver ecuaciones diferenciales, aplicándose a todos los ámbitos de la ciencia y la ingeniería. El MEF se deriva a partir de la forma variacional del problema, dividiéndose el dominio en un número finito de subregiones donde la solución se interpola mediante un conjunto de funciones de aproximación a partir de los valores nodales. Al contrario que con el MDF, el MEF, se puede adaptar fácilmente a la geometría del dominio en el que se requiere encontrar la solución.

Tanto el MEF como el MDF han sido ampliamente usados para resolver el problema acústico o de propagación de oleaje. Sin embargo, ambos comparten algunas deficiencias, como son el alto número de grados de libertad requeridos en comparación con el MEC, el error de polución o la correcta aproximación de las condiciones de contorno, especialmente en dominios abiertos. El error de polución será tratado con más detalle en el Capítulo 3.

Muchos han sido los trabajos que han abordado la condición de contorno necesaria para modelizar dominios abiertos, donde se ha de cumplir la condición de radiación en el infinito (o condición de radiación de Sommerfeld), desde la década de los 70. Bettess y Zienkiewicz [20], y posteriormente Lau y Ji [99], implementaron los elementos infinitos para lidiar con este problema. Berkhoff [19] y Tsay y Liu [154], se sirvieron del Método de los Elementos Híbridos que originalmente propuso Mei [115]. En esta línea continuaron Houston [77] Chen [37] y Tsay *et al.* [155]. Chen y Mei [38], propusieron también una solución de la condición de contorno abierta a través de una expansión analítica de autovalores. Posteriormente este trabajo fue continuado por Houston [77] entre otros. Algo posterior son las condiciones de contorno de tipo *Dirichlet to Neumann* (DtN) presentadas por Keller y Givoli [89], esta técnica consiste en un procedimiento analítico que reproduce de forma exacta la condición de radiación de Sommerfeld para algunos casos particulares de geometría sencilla [60, 59]. El método fue aplicado en el problema acústico por Harari y Huges [70] y Harari [70]. Continuando en esta línea, Bonet y Givoli presentaron la condición de contorno tipo *Discrete Non Local* (DNL), basadas en la DtN.

Otra técnica para simular dominios abiertos, y una de las más relevantes, es el uso de los *Perfectly Matched Layers* (PMLs), presentados en [14] para el modelado bidimensional de propagación de ondas electromagnéticas mediante el MEF. Desde entonces esta técnica ha sido ampliamente utilizada para problemas de propagación de ondas en el dominio de la frecuencia en todos los ámbitos; en acústica y oleaje podemos destacar [113, 10, 11, 118]. Además de todos los métodos mencionados anteriormente, existen otros menos sofisticados basados en los métodos iterativos. Algunos trabajos en los que estos métodos son utilizados son [13, 12, 150, 39, 108].

### 1.3.3 El Método de los Elementos de Contorno

Se puede considerar el MEC como una técnica numérica basada en el método de los residuos ponderados [41], como el MEF, exceptuando que como función de ponderación se elige la función de Green del problema con el fin de eliminar la necesidad de discretizar el interior del dominio [28]. O también puede ser visto como una implementación numérica de la Ecuación Integral de Contorno, donde el concepto de *elemento* proveniente del MEF es introducido [96].

Es difícil definir el origen del MEC, y ni mucho menos es un objetivo de esta tesis, pero uno de los trabajos que se pueden destacar es de principios de los 60, cuya autoría pertenece a Jawsone [88]. En este trabajo se utiliza la aproximación más simple posible en el MEC, que son los elementos constantes. Cuatro años después Rizzo extendió la formulación de Jawsone a la teoría de la elasticidad [134], iniciando un periodo fecundo para el MEC. Una aportación que puede considerarse clave es la de Lachat y Watson [96], que incorporaron los métodos de discretización y las funciones de aproximación que se venían utilizando en el MEF, dando lugar a una versión del MEC más actual. Otros trabajos destacables de los inicios del método son los llevados a cabo por Hess [75], extendiendo la aplicación a problemas tridimensionales de fluidos, o Banerjee y Daviles [7], que para problemas de cimentaciones por pilotaje aplicó lo que más adelante se llamaría el método indirecto. Para una extensa revisión histórica del método se refiere al lector a [41].

La ecuación de Helmholtz ha sido ampliamente tratada mediante el MEC. Algunos trabajos destacables en el ámbito de la acústica son los de Seznec [141], De Lacerda *et al.* [45, 46], donde se trata la difracción producida por barreras acústicas mediante el MEC. Li *et al.* [104] utilizan el MEC para resolver el problema acústico en el semi-espacio teniendo en cuenta un plano reflejante de impedancia arbitraria. Harari y Hughes presentan en [68] un estudio comparativo del coste computacional requerido por el MEC y el MEF para el problema acústico. El MEC también ha sido empleado para resolver problemas de Control Activo de Sonido (CAS), como en los trabajos de Bai y Chang [6] o Bracanti *et al.* [27].

El MEC también ha sido utilizado para resolver problemas de propagación de oleaje, sin embargo, su aplicación es más difícil que en otros campos como la acústica o el electromagnetismo. Esto es debido a que la propagación del oleaje se produce sobre un medio no homogéneo (debido a los cambios de profundidad). Es por esto que, los modelos basados en el MEC se ven limitados a zonas *off-shore* o interior de puertos, donde en muchos casos la batimetría puede ser considerada constante. Algunos trabajos destacables en este campo son los de Hauguel [72] y Shaw y Falby [142], a finales de los 70, donde el MEC es acoplado al MEF para satisfacer la condición de contorno de dominio abierto. Issacson y Qu [86] y Hamanaka [82] propusieron sendos modelos basados en el MEC con el fin de reproducir la propagación del oleaje en puertos, donde la profundidad se puede asumir constante, teniendo en cuenta diferentes coeficientes de reflexión en la línea de costa. Más tarde, Lee y Williams [101] tratan el mismo problema teniendo en cuenta la variabilidad del espectro de oleaje.

A pesar de esta limitación, el problema de propagación del oleaje puede ser tratado mediante el MEC recurriendo a técnicas especiales, como el Método de Elementos de Contorno de Reciprocidad Dual (DRBEM), utilizado por Zhu [169], Zhu *et al.* [170] o Liu [107]. En este método es necesario recurrir a integrales de dominio con el fin de incluir la inhomogeneidad del medio. Otra posible alternativa es utilizar una solución fundamental que permita modelar mediante el MEC problemas que incluyan batimetría variable sin necesidad de recurrir a ninguna otra técnica, como es el caso de Cerrato *et al.* [32], donde se resuelven problemas para batimetría variable en una dirección. La solución fundamental propuesta en dicho trabajo está basada en la función de Green propuesta por Belibassakis [9] para este tipo de problemas.

### 1.3.4 Métodos Espectrales

Los MMEE están basados en una aproximación de la solución de la ecuación diferencial mediante una familia de funciones ortogonales, lo que confiere al método una rápida convergencia comparado con otras técnicas numéricas. Aunque se pueden encontrar trabajos relacionados con el tema ya en los años treinta [98] los MMEE recibieron una especial atención a finales de los 60 y durante los 70, en paralelo con el desarrollo de las transformadas rápidas. Algunas referencias destacables son las de Fox y Parker [95] y Gottlieb y Orszag [44]. Dentro de la familia de los MMEE encontramos también los pseudo-espectrales, que reciben este nombre cuando la interpolación de la solución se realiza a través de valores nodales y no de los coeficientes que acompañan al espectro de funciones ortogonales [145].



Los MMEE y pseudo-espectrales constituyen una importante alternativa a los métodos anteriormente descritos a la hora de resolver ecuaciones en derivadas parciales elípticas como la de Helmholtz o la EPS. Sus principales ventajas son su rápida convergencia y la derivabilidad de sus soluciones.

En los MMEE, las técnicas más utilizadas son el Método de Colocación, el Método de Galerkin y el Método Tau. El Método de Colocación se deriva directamente a partir de la formulación fuerte del problema, como ocurre en el MDF. Los operadores diferenciales se obtienen derivando las funciones de aproximación nodales. El Método Galerkin Espectral, consiste al igual que en el MEF, en forzar la ortogonalidad del residuo con respecto a todas las funciones de aproximación de la solución. A diferencia del MEF, el espacio no es dividido en subregiones y la solución y la función de ponderación se aproximan mediante la familia de polinomios ortogonales elegida y sus respectivos coeficientes. El Método Tau se deriva de la formulación débil del problema y puede ser visto como un caso particular del Método de Petrov-Galerkin. Su uso es adecuado para problemas con condiciones de contorno no periódicas sin embargo, en problemas con coeficientes no constantes no es tan eficiente como el método de colocación. En general es un método poco utilizado.

Una explicación detallada sobre estos métodos, su evolución, su funcionamiento e implementación puede ser encontrada en los trabajos de Gottlieb [44] o Canuto *et al.* [30, 34, 31] entre otros.

La aproximación mediante elementos espectrales fue propuesta por Patera en 1984 [127] para la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles. El Método de los Elementos Espectrales (MEE), como Patera lo denominó, consiste en una combinación del MEF con los MMEE. Las funciones de aproximación que propuso originalmente Patera estaban asociadas a valores nodales, por lo que se trata de un método pseudo-espectral, sin embargo, existen otras funciones de aproximación de tipo espectral aptas para el MEE como son las *modal boundary-adapted basis* [34, 143]. Este método híbrido cuenta una convergencia exponencial a medida que aumenta el orden de la aproximación, al mismo tiempo que se beneficia de la flexibilidad del MEF para adaptarse a geometrías complicadas.

El MEE se ha utilizado para resolver la ecuación de Helmholtz en combinación con las PMLs por Mehdizadeh y Paraschivoiu en [113], estudiando con detenimiento la convergencia del método. Le ha seguido trabajos como el de Rong y Xu [135] o el de Shen y Wang [144] para números de onda elevados.

Recientemente, el MEE ha despertado un fuerte interés en diversas disciplinas para la resolución de problemas de propagación de ondas. Uno de los trabajos más recientes es el de He *et al.* y [73], donde se utiliza el método para resolver la ecuación de Helmholtz en medios estratificados y se combina con técnicas similares a las condiciones de contorno DtN para conseguir condiciones de contorno transparentes.

### 1.3.5 Estrategias particionadas de acoplamiento fluido-estructura para el problema acústico

La interacción dinámica entre fluido y estructura es un problema presente en muchas y variadas disciplinas de la ingeniería, por ejemplo la acústica. Encontrar métodos eficientes que permitan calcular este tipo de problemas es de suma importancia y actualidad, pues

estos problemas suelen requerir un gran coste computacional y cada día las exigencias sobre control de ruido y vibraciones son mayores.

Las técnicas de formulación particionada permiten el tratamiento de los diferentes dominios que interactúan en el problema de forma independiente, usando el método y la malla más convenientes según la física del problema. Además, de esta forma, el proceso de cálculo puede ser llevado a cabo mediante paralelización, mejorando la eficiencia en la resolución del problema.

A finales de los 70, Wilton [164], propuso un acoplamiento mediante mallas conformes para el problema de interacción fluido-estructura en acústica. En este trabajo el dominio sólido era modelado mediante el MEF y el fluido mediante el MEC, aprovechando las ventajas de este en el problema externo. Esta línea fue seguida por Everstine y Henderson en 1990 [54], donde aprovechaban herramientas potentes de cálculo mediante el MEF como NASTRAM para modelar la estructura. Más tarde, Chen *et al.* [40], estudiaron el mismo problema pero modelando el dominio fluido mediante el MEC Galerkin simétrico. Rajakumar y Ali [132] estudian problemas de autovalores considerando una metodología similar y centrándose en el estudio de cavidades. Más en la línea de esta tesis está el trabajo de Fischer y Gaul [57] en 2005, donde se estudia el problema mediante un acoplamiento tipo mortar en la interfase de ambos métodos. En 2008 Schneider [139] presenta un trabajo donde el fluido se modela mediante el MEC *fast-multipole*, mejorando así la eficiencia del método. Más reciente es el trabajo de He *et al.* [74] donde la atención se centra más en el dominio sólido, incorporando nuevas técnicas a la formulación MEF.

En esta tesis los acoplamientos estudiados están basados en los multiplicadores de Lagrange clásicos [57] y en los Multiplicadores de Lagrange Localizados (MLL), siendo estos últimos utilizados por primera vez para un acoplamiento MEC-MEF en acústica. El método de los MLL fue propuesto por Park y Felippa [122, 123, 125] a finales de los 90, con el objetivo de desarrollar formulaciones particionadas para la resolución de problemas de mecánica de sólidos.

El método de los MLL incluye un marco de acoplamiento en la interfase fluido-estructura que cuenta con su propio campo de desplazamientos. Este método ha sido estudiado en elastoestática por González *et al.* [64] y en problemas de interacción fluido estructura mediante el MEF por Park *et al.* [124]. Ross *et al.* lo estudió posteriormente para el problema de Hemholtz [136, 137], estudiando el comportamiento de presas ante la acción del oleaje. Park *et al.* estudian en [126] la interacción fluido-estructuras flexibles para oleaje, empleando modelos más complejos tanto para el fluido como para la estructura. En esta línea también es destacable el trabajo de González *et al.* [65] o González y Park [63], donde se presenta una formulación particionada fluido-estructura para problemas de vibraciones.

## 1.4 Objetivos de la tesis

El principal objetivo de esta tesis es aportar nuevas formulaciones numéricas para la resolución del problema de propagación de ondas lineales en fluidos. En concreto, se persiguen tres objetivos:

- conseguir una solución fundamental para número de onda variable que permita utilizar el MEC cuando el medio es no-homogéneo,
- reducir los efectos de dispersión numérica y polución en la solución numérica de la ecuación de Helmholtz y la EPS y,
- por último, desarrollar y analizar técnicas de acoplamiento eficientes para el problema de interacción fluido-estructura en acústica.

La aplicación del MEC para resolver la ecuación de Helmholtz presenta indudables ventajas, como son la reducción de los grados de libertad necesarios con respecto a otros métodos y el aumento de la precisión en la solución. Sin embargo, una de sus limitaciones más importantes es la dificultad para tratar problemas no-homogéneos, pues la aplicabilidad de este método está sujeta a las soluciones fundamentales disponibles. En este sentido, el artículo contenido en el Anexo A presenta la formulación de una solución fundamental completa para el problema de Helmholtz 2D con número de onda variable en una dirección. La formulación de esta solución fundamental tiene como objetivo resolver problemas de propagación de oleaje mediante el MEC en zonas con fondo variable.

Uno de los principales problemas que presentan las soluciones numéricas de la ecuación de Helmholtz o la EPS, obtenidas mediante el MDF, MEF o el MEC clásico, es el de la dispersión numérica y el error de polución. El objetivo del artículo contenido en el Anexo B es reducir estos errores numéricos. Para ello se ha presentado una formulación MEC basada en elementos espectrales de alto orden que, posteriormente, ha sido acoplada con una formulación MEF basada en una discretización similar. La formulación permite, además, resolver problemas de EPS en una región con batimetría variable en cualquier dirección, con la única condición de que el contorno que cierra a dicho dominio ha de estar situado sobre una zona con batimetría recta y paralela.

Por último, también es objetivo de este trabajo encontrar estrategias adecuadas de acoplamiento fluido-estructura en problemas de acústica. Para ello, en el artículo contenido en el Anexo C, se presenta una nueva formulación de acoplamiento basada en los MLL que es comparada con el Método Mortar. Además, se analiza el número de iteraciones requeridas para resolver el sistema de ecuaciones resultante al utilizar el método Bigradiente Conjugado Estabilizado (BiCGSTAB). El método propuesto resulta no sólo ser preciso si no también ser escalable.

En general, las técnicas aquí propuestas, intentan dar solución a tres problemas relacionados con la solución numérica de la ecuación de Helmholtz: resolver problemas no-homogéneos mediante el MEC, mejorar la precisión de los resultados reduciendo el error de polución y, por último, resolver el problema de propagación teniendo en cuenta las propiedades mecánicas de los elementos estructurales colindantes a la región de estudio en el problema acústico.

## 1.5 Contenido de la tesis

La tesis se ha organizado en cuatro capítulos más tres apéndices. Este primer capítulo contiene la introducción, donde se pone en contexto el trabajo llevado a cabo. El segundo capítulo incluye la derivación de las ecuaciones que gobiernan los problemas resueltos

en esta tesis, que son la ecuación de Helmholtz y la EPS. El tercer capítulo sirve como introducción teórica a los tres artículos contenidos en los Apéndices A, B y C, presentando las diferentes técnicas numéricas utilizadas en los artículos y también aportando algunos detalles complementarios que ayuden a la mejor comprensión de estos. Finalmente, en los apéndices se incluyen tres artículos publicados en revistas internacionales.

## 2 Propagación de ondas

---

### 2.1 Introducción y ecuaciones básicas

En este capítulo se realiza una descripción de las hipótesis de partida y de las ecuaciones que gobiernan el problema acústico y de propagación del oleaje. Ambos procesos consisten en formas mecánicas de propagación de energía a través de un fluido en las que se intercambia energía cinética y potencial. La diferencia entre ambas se encuentra en el origen de la fuerza restauradora, proviniendo de las propiedades elásticas del medio de propagación en el caso de la acústica y de la gravedad más la tensión superficial en el caso de la propagación de oleaje [55].

A pesar de constituir dos procesos mecánicos diferentes, las ecuaciones de partida de ambos son las mismas: la ecuación de continuidad y la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. A continuación se hace una breve descripción de cada una de ellas, teniendo en cuenta que en los fluidos aquí considerados, agua y aire, los términos viscosos pueden ser despreciados. Se considera, además, que los dos procesos de propagación se producen a temperatura constante,

- 1. Ecuación de continuidad:** En un volumen de control determinado ( $V$ ) debe cumplirse en todo momento que la variación de la masa en su interior sea igual al flujo neto que atraviesa su superficie ( $S$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad del medio,  $\mathbf{v}$  es la velocidad del fluido y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie. Aplicando el teorema de la divergencia, la expresión anterior puede reescribirse mediante integrales de volumen únicamente, resultando:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0, \quad (2.2)$$

que ha de cumplirse para cualquier volumen arbitrario. Por tanto, la ecuación de continuidad puede expresarse de manera diferencial de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.3)$$

que es conocida como forma Euleriana de la ecuación de continuidad.

- 2. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:** Al igual que para la ecuación de continuidad, en un volumen de control determinado también ha de cumplirse la segunda ley de Newton. Por lo tanto, la variación temporal de la cantidad de movimiento dentro del volumen más el flujo de éste a través de su superficie, ha de ser igual a la resultante de las fuerzas volumétricas ( $\mathbf{b}$ ) y de superficie ( $P$ ). Siguiendo la notación anterior, esto se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV + \int_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{b} \rho dV - \int_S P dS. \quad (2.4)$$

Aplicando el teorema de Gauss a las integrales de superficie y tras algunas operaciones se obtiene:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \right) \mathbf{v} dV + \int_V \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) dV + \int_V \nabla P dV = \int_V \rho \mathbf{b} dV, \quad (2.5)$$

donde la primera integral se corresponde con la ecuación de continuidad (2.3), cuyo valor es nulo. La ecuación anterior debe cumplirse para cualquier volumen arbitrario, por lo que podemos escribirla de manera diferencial. Ordenando términos, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento queda pues:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \mathbf{b}, \quad (2.6)$$

expresión que es conocida como ecuación de Euler, una de las más importantes en mecánica de fluidos debido a que las hipótesis adoptadas son válidas en un gran número de problemas reales.

## 2.2 El problema acústico

Para derivar la ecuación que rige la acústica lineal es necesario introducir la ecuación constitutiva del medio a través del cual la onda se propaga. Para ello, se definen primero las variables de estado como una composición de su estado en reposo ( $\rho_0, P_0, \mathbf{v}_0$ ) y de la

perturbación que produce la onda al pasar  $(\rho', P', \mathbf{v}')$ , siendo:

$$\rho = \rho_o + \rho', \quad (2.7)$$

$$P = P_o + P' \quad (2.8)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}'. \quad (2.9)$$

En el caso de un gas ideal, la relación entre la presión y la densidad está determinada por la ecuación de estado, que relaciona las variables termodinámicas. Viene dada por la expresión:

$$P = R\rho T, \quad (2.10)$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta y  $R$  es la constante universal de los gases ideales. En general, considerando un proceso isentrópico, la relación entre la presión y la densidad del fluido viene dada por:

$$\frac{P}{P_o} = \left( \frac{\rho}{\rho_o} \right)^\gamma, \quad (2.11)$$

donde  $\gamma$  es el coeficiente de dilatación adiabática. Teniendo en cuenta que la perturbación en la densidad es pequeña, siendo  $\rho'/\rho_o = P'/\gamma P_o \ll 1$ , la ecuación anterior puede ser linealizada y escrita en términos de su variación en torno a  $\rho_o$  [120, 21]:

$$P' = c_o^2 \rho' + \mathcal{O}(\rho'^2), \quad (2.12)$$

donde  $c_o$  es la velocidad de propagación correspondiente al estado en reposo ( $c_o^2 = \gamma P_o / \rho_o$ ) y los términos de orden superior pueden ser despreciados. La ecuación (2.12) proporciona pues, la relación lineal constitutiva necesaria.

Suponiendo que el fluido se encuentra en reposo antes de la perturbación y que  $\mathbf{v}'/c_o \ll 1$ , la ecuación de continuidad (2.3) se simplifica, quedando de la forma:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (2.13)$$

que en combinación con la relación constitutiva linealizada (2.12) resulta:

$$\frac{\partial P'}{\partial t} + \rho_o c_o^2 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (2.14)$$

quedando la variación de la densidad fuera de la ecuación. Para más detalles sobre las magnitudes de los términos contenidos en las ecuaciones anteriores se puede consultar [61, 129].

De la misma manera la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se puede simplificar bajo estas hipótesis, resultando:

$$\rho_o \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla P' = 0, \quad (2.15)$$

donde los términos de orden superior han sido despreciados.

Derivando (2.16) con respecto al tiempo y haciendo uso de la ecuación (2.15), se obtiene la ecuación clásica de onda:

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - c_o^2 \nabla^2 P' = 0. \quad (2.16)$$

La solución de esta expresión puede ser obtenida mediante el método de separación de variables, comprobándose que es de tipo armónica. Considerando que la perturbación se producen con una frecuencia  $\omega$ , las variaciones de presión y velocidad pueden ser representadas de la siguiente manera:

$$P' = p e^{i\omega t} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} e^{i\omega t} \quad (2.18)$$

donde  $p$  y  $\mathbf{v}$  son las distribuciones (complejas) espaciales de la presión y velocidad. Por simplicidad en la notación se ha reutilizado el término  $\mathbf{v}$ .

Introduciendo (2.17) en la ecuación (2.16) se obtiene la conocida ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0, \quad (2.19)$$

donde  $k$  es el número de onda  $k = \omega/c_o$  y el operador  $\nabla^2$  el operador Laplaciano. El campo de velocidades puede ser extraído a partir de las presiones, utilizando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (2.15):

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \nabla p, \quad (2.20)$$

pudiendo aproximarse la velocidad normal al contorno como:

$$v_n = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \nabla p \cdot \mathbf{n}, \quad (2.21)$$

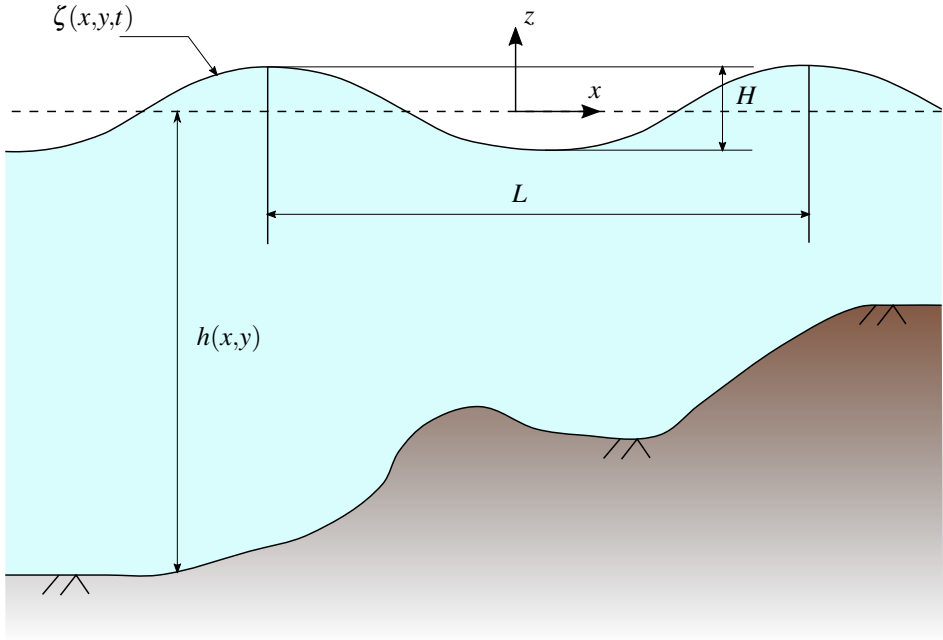
donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie. Esta relación permite aplicar condiciones de contorno de tipo Neumann o Robin a la ecuación (2.19).

## 2.3 Propagación del oleaje

En esta sección se deriva la EPS, presentada por Berkhoff en 1972 en [18] y que cuatro años más tarde detalló en su tesis doctoral [19]. Este modelo lineal asume las hipótesis de fluido homogéneo, no viscoso, incompresible y flujo irrotacional. Esta ecuación es válida para olas de bajo peralte propagándose en zonas dispersivas con pendientes en la batimetría de hasta 1:3, como expuso Booij en 1983 [24]. La EPS también es conocida con el nombre con el que se presentó inicialmente: "Modelo de Refracción-Difracción", pero no sólo es capaz de captar estos efectos, pues también capta el efecto de asomeramiento y la reflexión producida por obstáculos.

Para la obtención de la EPS en esta sección se ha seguido la tesis de Berkhoff [19]. Existe sin embargo otra forma de derivar la ecuación de pendiente suave, en la que se





**Figura 2.1** Sección esquemática en el plano  $x - z$  de olas propagándose sobre un fondo variable.

procede de una forma variacional o Hamiltoniana de la que se pueden encontrar más detalles en [48].

El esquema del problema de propagación sobre un fondo variable se muestra en la Figura 2.1, donde además se definen algunas de las variables que se utilizarán a continuación para la derivación de la EPS. La elevación de la superficie del agua viene dada por  $\zeta(x,y,t)$ , siendo  $H$  y  $L$  la amplitud y la longitud de onda, respectivamente. Por último, la cota cero del sistema de referencia se sitúa sobre la superficie media del agua y la profundidad se denomina como  $h(x,y)$ .

### 2.3.1 Ecuaciones de gobierno para el fenómeno del oleaje

Bajo la hipótesis de irrotacionalidad, la velocidad de las partículas en un fluido se puede expresar como el gradiente de un potencial de velocidad,

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi, \quad (2.22)$$

convirtiendo la ecuación de conservación de la masa (2.3) en la ecuación de Laplace si consideramos un fluido incompresible:

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.23)$$

La ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento es, bajo estas hipótesis, la ecuación de Bernoulli,

$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2} (\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = \frac{1}{\rho} P + C, \quad (2.24)$$

donde  $P(x,y,z,t)$  es la presión en el fluido,  $C$  es una función escalar de cuyo gradiente son obtenidas las fuerzas de volumen y  $\Phi_{,t}$  es la derivada temporal del potencial. Por simplicidad en la notación, de aquí en adelante de escribirá así la derivada.

### 2.3.2 Condiciones de contorno

La solución del problema tridimensional descrito por la ecuación de Laplace (2.23) y la de Bernoulli (2.24) en términos del potencial de velocidad y la presión, requieren de la aplicación de las condiciones de contorno tanto en el fondo como en la superficie libre. Estas condiciones de contorno son de dos tipos: las cinemáticas, que afectan al movimiento de las partículas, y las dinámicas, donde la restricción se ejerce mediante la distribución de presiones.

En la superficie del fondo y en la superficie libre, se ha de exigir que la trayectoria de las partículas del fluido no tengan una componente normal a dicha superficie, es decir, su trayectoria sea tangente. El incumplimiento de esta condición implicaría la transferencia de masa a través de los contornos. Estas restricciones son conocidas como condiciones de contorno cinemáticas.

Por otro lado, la presión que actúa sobre la superficie libre es la presión atmosférica ( $P_a$ ), esta condición de contorno dinámica permitirá establecer una relación directa entre la energía cinética y potencial en la superficie.

#### Condiciones de contorno cinemáticas

Si se considera un fondo impermeable tal que podamos considerar que la velocidad de las partículas en la dirección normal a su superficie sea nula, el producto escalar de la normal a la superficie y la velocidad de las partículas ha de ser nulo:

$$\Phi_{,x} h_{,x} + \Phi_{,y} h_{,y} + \Phi_{,z} = 0; \quad \text{en } z = -h(x,y), \quad (2.25)$$

proporcionándose así la expresión que representa la condición cinemática en el fondo.

La condición cinemática en la superficie se obtiene imponiendo la no transferencia de masa a través de la interfase agua-aire. Esto implica que las partículas localizadas en la superficie habrán de seguir su movimiento, permaneciendo en la superficie en todo momento.

Siguiendo el esquema presentado en la Figura 2.1, la superficie libre viene dada por  $z = \zeta(x,y,t)$ . Por lo tanto, para cualquier partícula localizada en la superficie, su velocidad en la dirección vertical vendrá dada por:

$$z_{,t} = \zeta_{,t} + \zeta_{,x} x_{,t} + \zeta_{,y} y_{,t} \quad \text{en } z = \zeta, \quad (2.26)$$

expresión en la que introduciendo (2.22) se obtiene:

$$\zeta_{,t} + \Phi_{,x} \zeta_{,x} + \Phi_{,y} \zeta_{,y} = \Phi_{,z} \quad \text{en } z = \zeta, \quad (2.27)$$

que es la condición de contorno cinemática en la superficie.

### Condición de contorno dinámica

La condición de contorno dinámica se obtiene introduciendo en la ecuación de Bernouilli (2.24) la presión atmosférica en la superficie, por lo que:

$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + g\zeta = \frac{P_a}{\rho}, \quad (2.28)$$

donde el potencial  $C$  toma el valor  $g\zeta$ . Si además consideramos  $P_a$  la presión de referencia de forma que en la superficie podamos considerar presión nula, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + g\zeta = 0. \quad (2.29)$$

### Resumen del problema no lineal de propagación de oleaje

Recapitulando las ecuaciones obtenidas anteriormente, el problema de propagación se puede resumir en que la ecuación de gobierno del problema es la ecuación de Laplace (2.23), a la que es necesario imponer las condiciones de contorno cinemáticas en el fondo (2.25) y en la superficie (2.27) y la condición de contorno dinámica en la superficie. El problema completo es, por tanto:

$$\nabla^2\Phi = 0; \quad -h(x,y) \leq z \leq \zeta(x,y,t); \quad (2.30)$$

$$\zeta_{,t} + \Phi_{,x}\zeta_{,x} + \Phi_{,y}\zeta_{,y} - \Phi_{,z} = 0; \quad z = \zeta(x,y,t), \quad (2.31)$$

$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + g\zeta = 0; \quad z = \zeta(x,y,t), \quad (2.32)$$

$$\Phi_{,z} + \Phi_{,x}h_{,x} + \Phi_{,y}h_{,y} = 0; \quad z = -h(x,y), \quad (2.33)$$

que es un problema no lineal en el que el contorno  $z = \zeta(x,y,t)$  está en continuo movimiento.

#### 2.3.3 Linealización de las condiciones de contorno

A pesar de que el conjunto de ecuaciones (2.30-2.33) constituye un problema no lineal, se pueden aplicar ciertas restricciones adicionales que simplifiquen las condiciones de contorno, permitiendo así la linealización del problema.

Para simplificar este proceso, las variables son adimensionalizadas utilizando las siguientes transformaciones [114]:

$$\begin{cases} \Phi = \frac{H\omega L}{2\pi}\Phi', \\ (x,y,z,h) = \frac{L}{2\pi}(x',y',z',h'), \\ t = \frac{1}{\omega}t', \\ \zeta = H\zeta'; \end{cases} \quad (2.34)$$

donde  $H = |\zeta|$ ,  $L$  y  $\omega$  la longitud de onda y frecuencia angular respectivamente. Introduciendo estas nuevas variables el conjunto de ecuaciones (2.30)-(2.33) se reescribe de

manera adimensional como:

$$\nabla'^2 \Phi' = 0; \quad -h(x,y) \leq z \leq \zeta(x,y,t); \quad (2.35)$$

$$\zeta'_{,t'} + \varepsilon \left( \Phi'_{,x'} \zeta'_{,x'} + \Phi'_{,y'} \zeta'_{,y'} \right) = \Phi'_{,z'}; \quad z' = \varepsilon \zeta'(x',y',t'), \quad (2.36)$$

$$\Phi'_{,t'} + \frac{1}{2} \varepsilon (\nabla' \Phi')^2 + \kappa \zeta' = 0; \quad z' = \varepsilon \zeta'(x',y',t'), \quad (2.37)$$

$$\Phi'_{,z'} + \Phi'_{,x'} h'_{,x'} + \Phi'_{,y'} h'_{,y'} = 0; \quad z' = -h'(x,y), \quad (2.38)$$

siendo  $\varepsilon = 2\pi H/L$  y  $\kappa = 2\pi g/(\omega^2 L)$ . Además, el potencial de velocidad  $\Phi'$  en la superficie  $z' = \varepsilon \zeta'$  puede ser aproximado mediante un desarrollo en serie de Taylor en torno a  $z' = 0$ :

$$\Phi'(x',y',\varepsilon \zeta',t') = \Phi'|_{z'=0} + \varepsilon \zeta' \Phi'_{,z'}|_{z'=0} + O(\varepsilon^2), \quad (2.39)$$

lo que permite despreciar aquellos términos de la serie multiplicados por  $\varepsilon$  si las olas poseen un peralte bajo ( $H/L \ll 1$ ). Si introducimos esta aproximación en (2.36) y en (2.37) las ecuaciones pueden ser reescritas como:

$$\zeta'_{,t'} = \Phi'_{,z'}; \quad z' = 0, \quad (2.40)$$

$$\Phi'_{,t'} + \kappa \zeta' = 0; \quad z' = 0, \quad (2.41)$$

donde ahora las condiciones de contorno quedan impuestas sobre el plano medio de la superficie, convirtiendo ambas ecuaciones en ecuaciones lineales. Derivando (2.40) con respecto al tiempo podemos combinarla con (2.41), resultando la expresión:

$$\Phi'_{,t't'} + \kappa \Phi'_{,z'} = 0, \quad \text{en } z' = 0. \quad (2.42)$$

La elevación de la superficie queda ligada al potencial de velocidad de manera proporcional en  $z = 0$  como:

$$\zeta(x,y,t) = -\frac{1}{g} \Phi_{,t}, \quad (2.43)$$

relación que proviene de la versión linealizada de la ecuación de contorno dinámica en la superficie del agua (2.41).

### 2.3.4 El problema lineal

Recapitulando las ecuaciones (2.35-2.43) y volviendo a las variables originales del problema de potencial, el sistema no lineal (2.30-2.33) queda simplificado de la forma:

$$\nabla_H^2 \Phi + \Phi_{,zz} = 0; \quad -h(x,y) \leq z \leq 0, \quad (2.44)$$

$$\Phi_{,z} + \frac{1}{g} \Phi_{,tt} = 0; \quad z = 0, \quad (2.45)$$

$$\Phi_{,z} + \Phi_{,x} h_{,x} + \Phi_{,y} h_{,y} = 0; \quad z = -h(x,y), \quad (2.46)$$

donde  $\nabla_H^2 = (\partial_{,xx} + \partial_{,yy})$ . La introducción de este operador servirá para facilitar la notación en los apartados siguientes.

### 2.3.5 Propagación de ondas armónicas y dispersión

A pesar de ser un problema tridimensional, la propagación del oleaje se produce en el plano horizontal preferencialmente. A partir del problema de propagación linealizado (2.44-2.46) es posible eliminar la dependencia de la variable espacial  $z$ , quedando un problema bidimensional en el plano  $x - y$ . Para llevar a cabo tal propósito se haya la solución del sistema de ecuaciones mediante el método de separación de variables, de forma que:

$$\Phi(x,y,z,t) = Z(h,z)\phi(x,y)T(t), \quad (2.47)$$

donde  $Z(h,z)$  representa el perfil que adopta el potencial a lo largo de dicha coordenada,  $\phi(x,y)$  es el potencial de velocidad en el plano  $x - y$  y  $T(t)$  es la función temporal.

Si introducimos esta aproximación de  $\Phi$  en (2.44) y asumimos que  $T(t) \neq 0$  se obtiene:

$$\frac{1}{\phi} \nabla_H^2 \phi = -\frac{1}{Z} Z_{,zz}; \quad (2.48)$$

siendo ambos lados de la ecuación igual a una constante,  $-k^2$ . La solución para la ecuación unidimensional

$$\frac{1}{Z} Z_{,zz} = k^2 \quad (2.49)$$

será de la forma

$$Z(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (2.50)$$

siempre y cuando  $k^2 > 0$ . Si suponemos puntualmente un fondo plano, la condición de contorno (2.46) pasará a ser

$$Z_{,z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h, \quad (2.51)$$

que aplicada a la solución (2.50) resulta que:

$$Ae^{-kh} - Be^{kh} = 0. \quad (2.52)$$

Asignando  $\Gamma/2 = Ae^{-kh} = Be^{kh}$  e introduciéndolo en (2.49), obtenemos, tras tener en cuenta algunas relaciones trigonométricas:

$$Z(h,z) = \Gamma \cosh(k(z+h)). \quad (2.53)$$

Introduciendo la aproximación del potencial descrita en (2.47), incluyendo la solución obtenida para  $Z(h,z)$ , dentro de la condición de contorno linealizada de la superficie libre (2.42) se obtiene:

$$T_{,tt} + gk \tanh(kh)T = 0, \quad (2.54)$$

ecuación que presenta una solución del tipo:

$$T(t) = Qe^{i\omega t}, \quad (2.55)$$

donde  $Q$  es una constante que por conveniencia tomará valor unidad. Introduciendo (2.55) en (2.54) resulta:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad (2.56)$$

que es la conocida como *Ecuación de Dispersión*. Esta expresión implica que olas con diferente periodo viajarán a diferente velocidad para una misma profundidad confiriéndole un carácter dispersivo a la propagación. La *Ecuación de Dispersión* tiene como solución una sola raíz real y positiva e infinitas complejas. Sin embargo, en esta tesis se considera únicamente la raíz real al igual que Berkhoff [19]. Las soluciones complejas de la ecuación componen el conjunto de los llamados modos evanescentes (para más detalles véase [48]). Estos modos pueden ser usados para obtener una mejor aproximación del problema, como por ejemplo la Ecuación de Pendiente Suave Extendida (EPSE) [112, 130] o la versión de Belibassakis en [10], donde se presenta un modelo de ecuaciones acopladas que incluyen además un modo asociado a la pendiente del fondo.

La velocidad de propagación del oleaje ( $c$ ) puede ser obtenida de la *Ecuación de Dispersión*:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (2.57)$$

que se aproxima en los límites de  $kh$  como:

$$c = (gh)^{1/2}, \quad kh \ll 1, \quad (2.58)$$

$$c = (g/k)^{1/2}, \quad kh \gg 1. \quad (2.59)$$

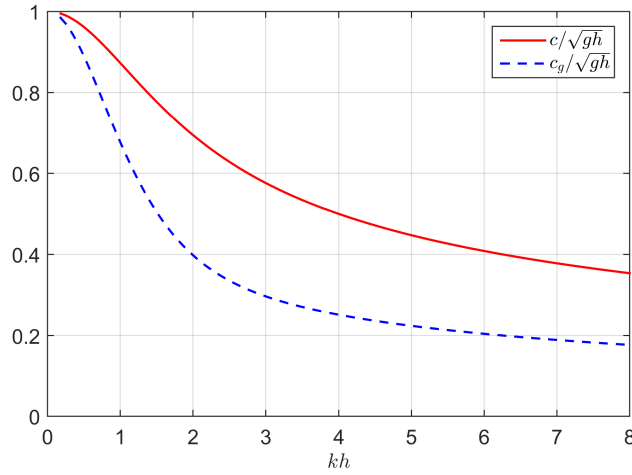
Analizando estas expresiones se observa que la velocidad de propagación del oleaje depende de la gravedad y de la profundidad cuando la longitud de onda es grande y la profundidad es pequeña ( $kh \ll 1$ ). Lo cual quiere decir que en estas circunstancias la propagación pierde su carácter dispersivo. Por otro lado, cuando se trata de *mar de fondo* u oleaje en aguas profundas ( $kh \gg 1$ ), la velocidad de propagación depende del número de onda y por lo tanto del periodo, adquiriendo el carácter dispersivo mencionado.

Un concepto importante que conviene introducir es la velocidad de grupo ( $c_g$ ), que se define como  $c_g = d\omega/dk$ . Para fondo plano puede ser obtenida derivando la *Ecuación de Dispersión*:

$$c_g = \frac{c}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right). \quad (2.60)$$

La importancia de la velocidad de grupo radica en que indica la velocidad a la que se propaga la energía. El comportamiento dispersivo de la velocidad y de la velocidad de grupo se muestra en la Figura 2.2, donde se aprecia como la razón entre ambas es la unidad en aguas profundas ( $kh \ll 1$ ), mientras que en aguas someras ( $kh \gg 1$ ) la velocidad de grupo tiende a la mitad de la velocidad de fase. Para una explicación más extensa sobre el tema se refiere al lector a [116].

Puesto que la solución de (2.49) se cumple para cualquier valor de su constante  $\Gamma$  esta se selecciona de forma que  $Z(0) = 1$ , recayendo así el valor de la amplitud de la onda en



**Figura 2.2** Curvas de dispersión para una onda propagándose sobre un fondo de profundidad variable.

la superficie  $z = 0$  sobre el valor de la amplitud de la función  $\phi(x,y)$ , por lo tanto:

$$\Gamma = \frac{1}{\cosh(kh)}, \tag{2.61}$$

resultando que

$$\Phi(x,y,z,t) = \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \phi(x,y) e^{i\omega t}. \tag{2.62}$$

### 2.3.6 Derivación de la ecuación de pendiente suave

La EPS es una aproximación del fenómeno de propagación de ondas siempre y cuando los efectos no lineales no sean significativos y que la propagación se produzca en zonas donde la reflexión producida por los cambios de profundidad sea igualmente despreciable. Esto último se traduce cuantitativamente en que la relación entre la profundidad y el número de onda ha de ser tal que:

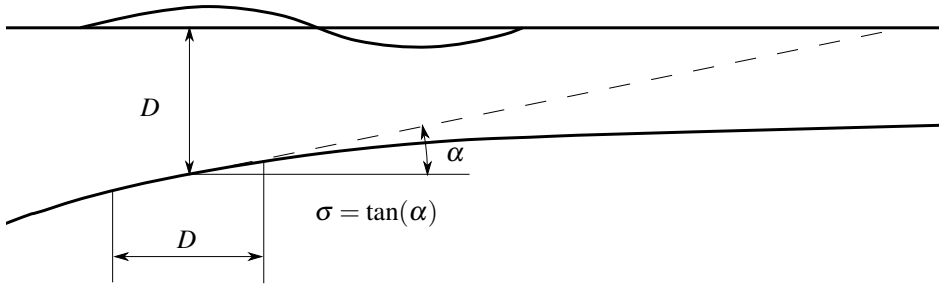
$$\frac{\nabla_H h}{kh} \ll 1. \tag{2.63}$$

Las ecuaciones que reproducen el fenómeno de propagación, incluyendo todos los efectos son:

$$\nabla^2 \varphi = 0; \quad -h(x,y) \leq z \leq 0; \tag{2.64}$$

$$\varphi_{,z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi = 0; \quad z = 0, \tag{2.65}$$

$$\varphi_{,z} + \varphi_{,x} h_{,x} + \varphi_{,y} h_{,y} = 0; \quad z = -h(x,y), \tag{2.66}$$



**Figura 2.3** Definición de los parámetros utilizados para la adimensionalización del problema.

que son las ecuaciones lineales (2.44)-(2.46) considerando la solución armónica obtenida en (2.62) y donde  $\varphi = Z(h,z)\phi(x,y)$ . En esta sección se siguen los pasos descritos por Berkhoff en su tesis, sin embargo, existen otras derivaciones como las de Smith y Spring [148] o la de Dingemans [48].

Las magnitudes espaciales se pueden adimensionalizar mediante la longitud característica  $l_o = g/\omega^2$ , que posee un valor del orden de la longitud de onda en la superficie para el periodo estudiado. Este cambio de variable permite eliminar los coeficientes presentes en la condición de contorno en la superficie. Las nuevas variables consideradas son:

$$(x',y',z',h') = \frac{1}{l_o}(x,y,z,h), \quad (2.67)$$

y por lo tanto,

$$\nabla\varphi = \frac{1}{l_o}\nabla'\varphi. \quad (2.68)$$

La EPS se plantea para pequeñas variaciones en la pendiente del fondo, como su propio nombre indica, por lo que el gradiente de la profundidad con respecto a las coordenadas globales  $(x,y)$  será, bajo estas condiciones, despreciable. Para adimensionalizar y al mismo tiempo expresar este gradiente como un valor en torno a la unidad, se introducen las nuevas variables adimensionales  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , con valores:

$$(\hat{x},\hat{y}) = \frac{\sigma}{D}(x,y); \quad (2.69)$$

donde  $D$  es la profundidad media y  $\sigma$  es la pendiente media en una zona de longitud  $D$  (véase Figura 2.3). Teniendo en cuenta estas nuevas variables el gradiente de la profundidad adimensional se podrá expresar como:

$$\nabla h' = \frac{\sigma}{D}l_o\hat{\nabla}h'. \quad (2.70)$$



Introduciendo los nuevos operadores adimensionales en las ecuaciones (2.64)-(2.66) se obtiene:

$$\nabla_H^2 \varphi + \varphi_{,z'z'} = 0; \quad -h'(x,y) \leq z' \leq 0, \quad (2.71)$$

$$\varphi_{,z'} - \varphi = 0; \quad z' = 0, \quad (2.72)$$

$$\varphi_{,z'} + \varepsilon (\varphi_{,x'} h'_{,x} + \varphi_{,y'} h'_{,y}) = 0; \quad z' = -h'(x,y), \quad (2.73)$$

donde  $\varepsilon = \sigma/\mu$  y  $\mu = D/l_o$  y de nuevo se utiliza el subíndice  $H$  para denotar el plano horizontal.

Por simplicidad y para una mejor comprensión, se reescribe el conjunto de ecuaciones anterior eliminando las primas:

$$\nabla_H^2 \varphi + \varphi_{,zz} = 0; \quad -h(x,y) \leq z \leq 0, \quad (2.74)$$

$$\varphi_{,z} - \varphi = 0; \quad z = 0, \quad (2.75)$$

$$\varphi_{,z} + \varepsilon (\varphi_{,x} h_{,x} + \varphi_{,y} h_{,y}) = 0; \quad z = -h(x,y). \quad (2.76)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en la Sección 2.3.5, la solución del potencial de velocidades  $\varphi$  se expresa nuevamente mediante el producto de dos funciones, en este caso dependientes de las variables adimensionales introducidas:

$$\varphi = Z(h,z)\phi(x,y,z) \quad (2.77)$$

con

$$Z(z) = \frac{\cosh(\kappa(h+z))}{\cosh(\kappa h)}, \quad (2.78)$$

donde la variable  $\kappa$ , o número de onda adimensional, puede ser obtenida de la ecuación de dispersión

$$1 = \kappa \tanh(\kappa h). \quad (2.79)$$

Es en este punto que la derivación de la EPS diverge del modelo de refracción-asomeramiento y del de difracción puro. En el modelo de refracción el potencial se aproxima como  $\varphi = H e^{iS}$ , donde  $H(z,y,z)$  es la función asociada a la amplitud del potencial y  $S(x,y)$  la fase. Este procedimiento da lugar a prescindir del gradiente horizontal del perfil vertical de velocidades  $Z(h,z)$ , lo que conduce a dos ecuaciones desacopladas. Por otro lado, el modelo de difracción puro está basado en la asunción de fondo plano, dando lugar a la ecuación de Helmholtz.

Sustituyendo (2.77) en el sistema (2.74-2.76) resulta:

$$Z \nabla^2 \phi + 2 \nabla Z \cdot \nabla \phi + \phi \nabla^2 Z + \phi Z_{,zz} + 2 Z_{,z} \phi_{,z} + Z \phi_{,zz} = 0; \quad -h(x,y) \leq z \leq 0, \quad (2.80)$$

$$\phi_{,z} = 0; \quad z = 0, \quad (2.81)$$

$$Z \phi_{,z} + \varepsilon \left[ (\nabla Z \cdot \hat{\nabla} h) \phi + Z (\nabla \phi \cdot \hat{\nabla} h) \right] = 0; \quad z = -h, \quad (2.82)$$

donde se ha suprimido el subíndice  $H$  del operador  $\nabla$  por simplicidad. En el conjunto de ecuaciones anterior, el gradiente en el plano  $x-y$  de la función  $Z(h,z)$  puede reescribirse

de la forma:

$$\nabla Z = \varepsilon Z_{,h} \hat{\nabla} h \quad (2.83)$$

y su Laplaciano como:

$$\nabla^2 Z = \varepsilon^2 \left( Z_{,hh} (\hat{\nabla} h)^2 + Z_{,h} \hat{\nabla}^2 h \right). \quad (2.84)$$

Introduciendo las expresiones (2.83-2.84) en el conjunto de ecuaciones (2.80-2.82) se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left[ \phi \left( (\hat{\nabla} h)^2 + Z_{,h} \hat{\nabla}^2 h \right) \right] + \varepsilon \left[ 2Z_{,h} (\hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi) \right] & -h(x,y) \leq z \leq 0, \quad (2.85) \\ + Z \nabla^2 \phi + \kappa^2 Z \phi + 2Z_{,z} \phi_{,z} + Z \phi_{,zz} & = 0; \end{aligned}$$

$$\phi_{,z} = 0; \quad z = 0, \quad (2.86)$$

$$\varepsilon^2 \left[ Z_{,h} (\hat{\nabla} h)^2 \phi \right] + \varepsilon \left[ Z (\nabla \phi \cdot \hat{\nabla} h) \right] + Z \phi_{,z} = 0; \quad z = -h, \quad (2.87)$$

donde además se ha tenido en cuenta la relación  $Z_{,zz} = \kappa^2 Z$ , equivalente a (2.49).

La ecuación (2.85) se puede reducir de tres a dos dimensiones multiplicándola por la función  $Z(h,z)$  e integrándola a lo largo de la columna de agua. Introduciendo además las condiciones de contorno (2.86-2.87) se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left[ \int_{-h}^0 Z \left( Z_{,hh} (\hat{\nabla} h)^2 + Z_{,h} \hat{\nabla}^2 h \right) \phi dz \right] + \varepsilon \left[ \int_{-h}^0 Z_{,h}^2 (\hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi) dz \right] & (2.88) \\ + \int_{-h}^0 Z^2 (\nabla^2 \phi + \kappa^2 \phi) dz + \varepsilon \left[ Z^2 (\hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi) \right]_{z=-h} + \varepsilon^2 \left[ ZZ_{,h} (\hat{\nabla} h)^2 \right]_{z=-h} & = 0. \end{aligned}$$

Con el fin de simplificar la ecuación anterior, es posible asumir que la variación del potencial  $\phi(x,y,z)$  en la dirección vertical se encuentra ampliamente tenida en cuenta en  $Z(h,z)$ , por lo que la variación en la dirección vertical de  $\phi(x,y,z)$  será pequeña. Bajo esta hipótesis y teniendo en cuenta la condición de simetría (2.86), el potencial  $\phi(x,y,z)$  se puede aproximar mediante su desarrollo en serie de Taylor en la coordenada  $\sigma z$ :

$$\phi(z,y,z) = \phi_0(x,y) + (\sigma z)^2 \phi_1(x,y) + \mathcal{O}((\sigma z)^4). \quad (2.89)$$

Esta aproximación se introduce en (2.88), resultando:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \phi_0 \left[ (\hat{\nabla} h)^2 \int_{-h}^0 ZZ_{,hh} dz + \hat{\nabla}^2 h \int_{-h}^0 \frac{1}{2} Z_{,hh} dz \right] & \\ + \varepsilon \hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi_0 \int_{-h}^0 Z_{,h}^2 dz + (\nabla^2 \phi_0 + \kappa^2 \phi_0) \int_{-h}^0 Z^2 dz & \\ + \left[ \varepsilon \hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi_0 Z^2 \right]_{z=-h} + \left[ \varepsilon^2 \phi_0 (\hat{\nabla} h)^2 \frac{1}{2} Z_{,h}^2 \right]_{z=-h} + \mathcal{O}(\varepsilon^m \sigma z^n), & (2.90) \end{aligned}$$

donde  $m \geq 0$  y  $n \geq 2$ .

Despreciando los términos de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  y  $\mathcal{O}(\varepsilon^m \sigma z^n)$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$\varepsilon \hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi_0 \int_{-h}^0 Z_{,h}^2 dz + \varepsilon \left[ \hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi_0 Z^2 \right]_{z=-h} + (\nabla^2 \phi_0 + \kappa^2 \phi_0) \int_{-h}^0 Z^2 dz, \quad (2.91)$$

donde la integral sobre el término  $Z_{,h}^2$  puede ser aproximada mediante la Regla de Leibniz de la siguiente manera:

$$\int_{-h}^0 Z_{,h}^2 dz = \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 Z^2 dz - Z^2 \Big|_{z=-h}. \quad (2.92)$$

Por lo tanto, el primer integrando de la ecuación (2.91) será:

$$\varepsilon \hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi_0 \int_{-h}^0 Z_{,h}^2 dz = \nabla \phi_0 \cdot \varepsilon \hat{\nabla} h \frac{\partial}{\partial h} \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right] - \left[ \varepsilon (\hat{\nabla} h \cdot \nabla \phi_0) Z^2 \right]_{z=-h}. \quad (2.93)$$

Además, recordando que  $\nabla(\bullet) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial h}(\bullet) \hat{\nabla} h$ , la ecuación (2.91) podrá reescribirse como:

$$\nabla \cdot \left( \int_{-h}^0 Z^2 dz \nabla \phi_0 \right) + \kappa^2 \phi_0 \int_{-h}^0 Z^2 dz = 0. \quad (2.94)$$

donde se conserva el término  $\nabla \left[ \int_{-h}^0 Z^2 dz \right]$ , de orden  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . La preservación de este orden de aproximación es la principal diferencia con el modelo de refracción-asomeramiento puro, puesto que la dependencia de la función  $Z(h, z)$  de las variables  $x$  e  $y$  dada a través de la profundidad es lo que evita que la ecuación se desacople como ocurre en el caso del modelo de refracción-asomeramiento puro. Para más detalles sobre este modelo el lector puede consultar [19, 158]).

La ecuación (2.94) todavía contiene una integral, cuya solución es:

$$\int_{-h}^0 Z^2 dz = \frac{cc_g}{g}. \quad (2.95)$$

Se puede encontrar una explicación minuciosa de la solución de esta integral en [158]. Finalmente, recuperando las variables originales, la ecuación (2.94) a la que se había reducido el problema queda:

$$\nabla(cc_g \nabla \phi_0) + \omega^2 \frac{c_g}{c} \phi_0 = 0, \quad (2.96)$$

que es la conocida como EPS. Se trata de una ecuación elíptica cuya solución requiere la imposición de unas condiciones determinadas en todo el contorno del dominio. En los casos particulares en el que el oleaje se propaga sobre fondo es constante o en aguas profundas, la EPS se convierte en el modelo de difracción puro (ecuación de Helmholtz).

**2.3.7 Cambio de variable: ecuación de Helmholtz**

La EPS puede ser reformulada como la ecuación de Helmholtz para un medio no-homogéneo mediante el cambio de variable

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{cc_g}} \tilde{\phi}, \quad (2.97)$$

propuesto por Bergmann [15], resultando:

$$\nabla^2 \tilde{\phi} + \tilde{k}^2 \tilde{\phi} = 0, \quad (2.98)$$

donde

$$\tilde{k}^2 = \left[ k^2 - \frac{\nabla^2(\sqrt{cc_g})}{\sqrt{cc_g}} \right]. \quad (2.99)$$

La transformación de la EPS en la ecuación de Helmholtz es necesaria en esta tesis para la resolución del problema mediante una formulación MEC, como se verá el siguiente capítulo.

# 3 Aproximaciones numéricas

---

Este capítulo tiene como objetivo presentar los fundamentos teóricos básicos de los artículos incluidos en los Anexos A,B y C, a partir de ahora referidos como **Artículos I, II y III**, respectivamente. En primer lugar, se hace una breve introducción al MEF particularizado para el problema de Helmholtz, que ha sido utilizado en los **Artículos I y II**. En segundo lugar se presenta el MEC, proporcionando algunos detalles importantes sobre la solución fundamental derivada en el **Artículo I**. La tercera sección de este capítulo se centra en la aproximación mediante elementos espectrales, tema principal del **Artículo II**, explicando algunos detalles y fundamentos sobre las ventajas que ofrece este tipo de aproximación. Por último, la cuarta sección se dedica a los problemas de acoplamiento fluido-estructura mediante el Método Mortar y los Multiplicadores de Lagrange Localizados, utilizados en el **Artículo III**.

## 3.1 Método de los Elementos Finitos

El MEF es la herramienta más utilizada para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales en prácticamente todos los ámbitos de la ingeniería. Su versatilidad, adaptabilidad al problema y su fácil implementación, lo convierten en una opción muy atractiva a la hora de seleccionar un método numérico para resolver un problema.

Aplicando el método de los residuos ponderados, la ecuación de Helmholtz puede ser escrita en forma débil, multiplicando por la función de peso  $\mu$  e integrando en el dominio de interés  $\Omega$ , en la forma:

$$\int_{\Omega} \mu (\nabla^2 \phi + k^2 \phi + f) d\Omega = 0, \quad (3.1)$$

relajando así las exigencias de la formulación fuerte del problema (2.98). En la expresión anterior se ha incluido el término  $f$  en representación de las fuerzas volumétricas. Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación anterior, resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla \mu \nabla \phi d\Omega - \int_{\Omega} k^2 \mu \phi d\Omega - \int_{\Gamma} \mu q d\Gamma = \int_{\Omega} \mu f d\Omega, \quad (3.2)$$

donde  $q = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$  es el flujo normal y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al contorno  $\Gamma$  que encierra al dominio de interés  $\Omega$ . En problemas de propagación de ondas donde existen contornos abiertos o parcialmente reflejantes no es posible conocer a priori el ángulo de incidencia de la onda sobre el contorno, por lo que el producto escalar de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{n}$  es difícil de aproximar. La solución más común para este problema es suponer que la onda incide perpendicularmente al contorno, de manera que  $q = ik\phi$ . Sin embargo, bajo esta hipótesis, se condiciona la geometría del modelo. Con el fin de que las ondas reflejadas del área de estudio lleguen lo más perpendicularmente posible al contorno exterior, este habrá de encontrarse alejado del área de estudio y tener una forma aproximadamente circular. En los trabajos realizados a lo largo de esta tesis, el MEF ha sido acoplado con el MEC, por lo que no es necesario hacer una aproximación del flujo y se mantendrá aquí como variable.

### 3.1.1 Discretización del dominio

Para resolver la forma variacional planteada en (3.2), se puede dividir el dominio  $\Omega$  en  $n_e$  subregiones o elementos de geometría simple, estas subregiones han de cumplir que

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e \quad \text{y} \quad \bigcap_{e=1}^{n_e} \Omega_e = \emptyset. \quad (3.3)$$

El potencial y la función de ponderación pueden ser aproximados dentro de los elementos mediante unas funciones de forma a partir de los valores nodales. En los trabajos presentados en esta tesis se emplea una formulación de tipo Galerkin, es decir, las funciones de aproximación empleadas para el potencial y para la función de ponderación son las mismas. De esta forma, dentro de cada elemento:

$$\phi(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^{n_n} N_j(\xi, \zeta) \phi_j, \quad (3.4)$$

$$\mu(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^{n_n} N_j(\xi, \zeta) \mu_j, \quad (3.5)$$

donde  $n_n$  es el número de nodos,  $N_j$  son las funciones de aproximación y  $\xi$  y  $\eta$  son las coordenadas naturales del elemento. Los valores nodales del potencial y de la función de ponderación vienen dados por  $\phi_j$  y por  $\mu_j$  respectivamente. El flujo puede ser aproximado de la misma manera a lo largo del contorno del elemento, resultando:

$$q(\xi) = \sum_{j=1}^{n_c} l_j(\xi) q_j, \quad (3.6)$$

donde  $n_c$  es el número de nodos situados en la cara del elemento,  $\xi$  es la coordenada natural del elemento y  $l_j$  son las funciones de aproximación unidimensionales.

Tras introducir la discretización descrita en la formulación débil del problema (3.2), se obtiene un sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (3.7)$$

donde los vectores  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\mathbf{q}$  contienen los valores nodales del potencial de velocidad y del flujo respectivamente. Las matrices de coeficiente  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$ , así como el vector de cargas  $\mathbf{f}$ , se obtienen ensamblando las matrices elementales de cada subregión, que vienen dadas por:

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} (\nabla N_i \nabla N_j - k^2 N_i N_j) d\Omega, \quad (3.8)$$

$$C_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} l_i l_j d\Gamma, \quad (3.9)$$

$$f_i^e = \int_{\Omega_e} l_i f d\Omega, \quad (3.10)$$

siendo estas integrales fácilmente evaluables numéricamente mediante una cuadratura gaussiana.

## 3.2 Método de los Elementos de Contorno

### 3.2.1 Introducción

El objetivo de hacer esta sección sobre el MEC es fundamentalmente poner en contexto el trabajo llevado a cabo en el **Artículo I**, en el que se ha desarrollado una solución fundamental para el problema de Helmholtz bidimensional con número de onda variable en una dirección, además de aportar algunas nociones básicas que sirvan para una mejor comprensión tanto del **Artículo I** como del **Artículo III**.

El MEC es un método clásico de resolución de ecuaciones en derivadas parciales que proviene del proceso de discretización de la ecuación integral de contorno del problema considerado. El MEC presenta importantes ventajas frente a otros métodos como el MEF y el MDF, siendo las principales:

- Solamente es necesario discretizar el contorno del dominio de interés, reduciendo drásticamente el número de grados de libertad necesarios para obtener una correcta aproximación de la solución.
- La condición de contorno de radiación en el infinito (o condición de radiación de Sommerfeld) se cumple automáticamente en problemas en los que se tratan dominios infinitos o semi-infinitos, no requiriendo ningún tratamiento especial como ocurre en el MEF o MDF. Estos casos son numerosos en ingeniería, siendo claros ejemplos los problemas de acústica exterior o de propagación de oleaje.
- La solución y su derivada se calculan con el mismo grado de aproximación en la superficie del dominio, por lo que ofrece mejores soluciones que otros métodos en flujos o tensiones sobre el contorno para un mismo grado de aproximación. Esta característica del MEC hace que su uso sea ventajoso para algunas aplicaciones, como por ejemplo los problemas de interacción fluido-estructura en acústica tratados en esta tesis. El MEC también ofrece mejores aproximaciones que otros métodos cuando la solución del problema es un campo singular.

Sin embargo también son patentes algunas importantes desventajas frente a otros métodos. La modelización mediante el MEC de un problema regido por una ecuación diferencial determinada requiere el uso de la solución fundamental para dicho problema, aunque desafortunadamente las soluciones fundamentales conocidas son limitadas y en su mayoría, se restringen a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Consecuentemente problemas no lineales o con inhomogeneidades suelen quedar fuera del ámbito de aplicación del MEC a no ser que se use algún tipo de tratamiento especial.

Otra desventaja del MEC es que el sistema de ecuaciones resultante de su aplicación es no-simétrico y lleno, lo cual aumenta considerablemente el coste computacional del proceso de resolución. Sin embargo, en muchas ocasiones esto se ve sobradamente compensado con el menor esfuerzo requerido en la generación de la malla y el reducido número de incógnitas resultantes.

### 3.2.2 Aplicación del MEC a la ecuación de Helmholtz bidimensional

El problema de Helmholtz es uno de los principales marcos de aplicación del MEC, puesto que se trata de un problema de condición de frontera o contorno. Su descripción puede ser encontrada en cualquier libro de referencia, como lo son [29, 49], existiendo libros especializados como [166, 94], dedicados a la aplicación del MEC a la acústica lineal.

#### Ecuación integral de contorno

Si la ecuación de Helmholtz se cumple en un dominio  $\Omega$ , entonces, integrando en dicho dominio la ecuación completa multiplicada por una función  $\psi(\mathbf{x})$  y definida en el mismo dominio resultará que

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) \psi d\Omega = 0, \quad (3.11)$$

relajando las exigencias del problema. Suponiendo ahora una función de ponderación  $\psi(\mathbf{x})$  que también cumple la ecuación diferencial y aplicando dos veces el teorema de Gauss convenientemente, se obtiene la *Segunda identidad de Green* o *Teorema de Reciprocidad*, punto de partida del MEC:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \psi + k^2 \psi) \phi d\Omega + \int_{\Gamma} \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) \psi d\Omega + \int_{\Gamma} \nabla \psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad (3.12)$$

expresión para la que de momento sólo se ha exigido que la función de ponderación cumpla la ecuación diferencial. Sin embargo, si se considera que dicha función es la función de Green del problema, la ecuación anterior podrá reescribirse en el contorno como

$$C(\mathbf{x}') \phi(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} (\nabla \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}) \phi(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (3.13)$$

en ausencia de fuentes internas o sumideros. La ecuación anterior contiene el término libre  $C(\mathbf{x}')$ , que depende de la localización del punto de colocación  $\mathbf{x}'$ , siendo  $\mathbf{x}$  el punto de observación. Para más detalles sobre la obtención del término libre se refiere al lector a la basta bibliografía existente sobre el MEC, por ejemplo [29]. Los valores que toma el término libre en el problema bidimensional son:  $C(\mathbf{x}') = 1$  para  $\mathbf{x}'$  situado en el interior del dominio,  $C(\mathbf{x}') = 1/2$  cuando  $\mathbf{x}'$  está situado sobre el contorno  $\Gamma$  y éste tiene una forma



suave y  $C(\mathbf{x}') = \theta/(2\pi)$  cuando  $\mathbf{x}'$  además de estar situado sobre el contorno está sobre un vértice del mismo, siendo  $\theta$  el ángulo interior.

En el caso de que existan fuentes internas la ecuación integral (3.12) quedará de la forma:

$$C(\mathbf{x}')\phi(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma} (\nabla \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \mathbf{n}) \phi(\mathbf{x}) d\Gamma = \psi(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \quad (3.14)$$

donde  $\psi(\mathbf{x}', \mathbf{y})$  es la función de Green simulando una fuente posicionada en  $\mathbf{y}$  y evaluada en el punto de colocación  $\mathbf{x}'$ . En el caso de tratarse de un problema de *scattering* en un dominio abierto, el término  $\psi(\mathbf{x}', \mathbf{y})$  tomará el valor de la onda incidente [166].

### Discretización de la ecuación integral de contorno

Para la resolución numérica de la ecuación integral de contorno (3.14) el dominio es dividido en un número finito de elementos de forma que

$$\Gamma = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Gamma_e, \quad \bigcap_{e=1}^{n_e} \Gamma_e = \emptyset, \quad (3.15)$$

siendo  $n_e$  el número de elementos. Las variables  $\phi$  y  $q$  son aproximadas mediante unas funciones de interpolación a partir de los valores nodales:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n_n} N_i \phi_i, \quad q = \sum_{i=1}^{n_n} N_i q_i, \quad (3.16)$$

donde  $N_i$  es la función interpolante correspondiente a cada nodo  $i$  y  $n_n$  es el número de nodos existente el contorno.

Introduciendo (3.15) y (3.16) en la ecuación (3.14), ésta puede ser reescrita en su forma discreta:

$$C_i \delta_{ij} \phi_j + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} N_j \phi_j d\Gamma_e - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') N_j q_j d\Gamma_e = \psi_i, \quad (3.17)$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker. De forma más compacta, la expresión anterior puede ser representada en su forma matricial:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \boldsymbol{\phi}_{in}, \quad (3.18)$$

donde los coeficientes de las matrices  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{G}$  vienen dados por:

$$H_{ij} = C_i \delta_{ij} + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n} N_j \phi_j d\Gamma_e, \quad (3.19)$$

$$G_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') N_j q_j d\Gamma_e, \quad (3.20)$$

y el vector  $\boldsymbol{\phi}_{in}$  contiene los valores del potencial incidente sobre el contorno.

### 3.2.3 Solución fundamental de la ecuación de Helmholtz

La solución fundamental para la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones se obtiene de la solución de la ecuación:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi + \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.21)$$

donde  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  es la función Delta de Dirac aplicada en el punto  $\mathbf{x}'$ . La condición de contorno del problema es la condición de radiación en el infinito o condición de radiación de Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0. \quad (3.22)$$

La solución de (3.21) puede ser encontrada en una extensa bibliografía, como por ejemplo [29, 166] o [102, 163], donde se obtiene con más detalle. La función de Green viene dada por:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad (3.23)$$

donde  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  y  $H_0^{(1)}$  es la función de Hankel de primera especie y de orden zero. La derivada de esta función de Green en dirección radial es

$$\psi_{,r}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{i}{4} k H_1^{(1)}(kr), \quad (3.24)$$

siendo  $H_1^{(1)}$  la función de Hankel de primera especie de orden uno. El conjunto de las dos expresiones anteriores, (3.23) y (3.24), conforman la solución fundamental necesaria para la formulación MEC del problema de Helmholtz en un medio homogéneo. Para más detalles sobre su obtención nos referimos aquí a [166].

### 3.2.4 Solución fundamental para número de onda variable

En el **Artículo I** anejo a esta tesis se ha propuesto una solución fundamental para el problema de propagación de oleaje sobre zonas con batimetría variable, ampliando así la aplicación del MEC a problemas más complejos. Esta solución fundamental está basada en la función de Green propuesta por Belibassakis en [9] y es válida no sólo para la ecuación *mild-slope*, sino también para la *mild-slope* modificada [35] o para cualquier ecuación diferencial que pueda ser reescrita como la ecuación de Helmholtz con número de onda variable. Además, esta solución fundamental se ha introducido en una formulación MEC y se han resuelto varios ejemplos para validarla.

Las principales contribuciones de Belibassakis en [9] fueron la obtención de una solución numérica de la función de Green  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  para batimetría variable en una dirección y el estudio de su comportamiento asintótico en el campo lejano. Su desarrollo estaba enfocado a ampliar la gama de problemas que podían ser resueltos mediante formulaciones como la de Berkhoff [16, 19], en las que se trata el problema de difracción del oleaje provocado por una región con una batimetría irregular sobre un fondo plano, o como la de Xu [167] donde se trata el problema de difracción en acústica cuando existe una zona inhomogénea no-estratificada en un medio estratificado. El interés por una función de Green de estas

características es patente y se pueden encontrar algunas soluciones para casos particulares para dos y tres dimensiones en [102, 76, 105, 111].

Al ser la función de Green propuesta por Belibassakis válida para cualquier perfil batimétrico, el trabajo se sitúa como un excelente punto de partida para una formulación MEC del problema de propagación de oleaje. Sin embargo, Belibassakis en su trabajo no obtuvo las derivadas de la función, dejando incompleta la solución fundamental necesaria para la formulación MEC del problema. El principal aporte del **Artículo I** es la obtención de dichas derivadas, siendo casi inmediata su obtención en la dirección en la que cambia la batimetría pero complicándose en muchos aspectos en la dirección paralela a las isóbatas.

Si bien es cierto que la solución fundamental propuesta está limitada a batimetrías compuestas por isóbatas rectas y paralelas, una formulación MEC que permita resolver problemas con este tipo de inhomogeneidad sigue siendo de enorme importancia, puesto que se está resolviendo una forma batimétrica de lo más común en problemas de propagación de oleaje en zonas costeras [121]. Gracias a esta aportación, el MEC puede ser usado por sí solo como una herramienta precisa y eficiente para la realización de modelos de propagación de oleaje. Para problemas más complejos, en los que el interés se centrara en zonas con una batimetría más compleja, el MEC puede ser acoplado con un modelo basado en el MEF que reproduzca esta zona de manera más precisa, aportando una mejora significativa en las condiciones de contorno.

Considerando que la dirección en la que cambia el número de onda es  $x$ , la función de Green  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  ha de satisfacer:

$$\nabla^2 \psi + \hat{k}(x)^2 \psi + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 \quad (3.25)$$

donde el número de onda es obtenido mediante la ecuación de dispersión (2.56) a partir de la profundidad y del periodo del oleaje. El perfil a lo largo de  $x$  varía de la forma:

$$\hat{k}(x) = \begin{cases} \hat{k}_a, & x < a, \\ \hat{k}(x), & a \leq x \leq b, \\ \hat{k}_b, & x > b, \end{cases} \quad (3.26)$$

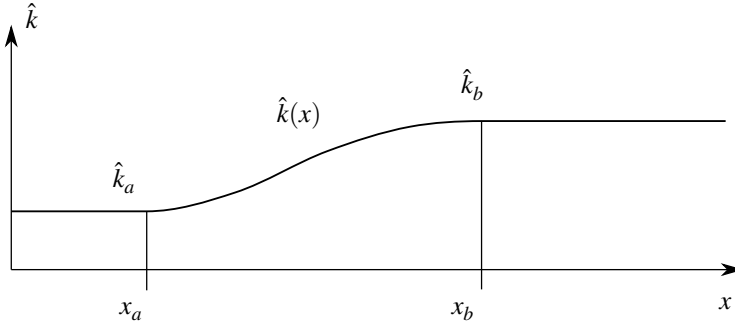
siendo  $\hat{k}_a$  y  $\hat{k}_b$  constantes, lo cual permitirá que la condición de Sommerfeld sea satisfecha exactamente, como veremos más adelante. El perfil tipo utilizado, descrito en (3.26) se muestra en la Figura 3.1. La ecuación (3.25) puede ser transformada en una familia de problemas unidimensionales mediante la transformada de Fourier en el eje  $y$ . La relación entre el potencial original y su transformado viene dada por:

$$\Psi(x, x'; \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}) e^{-iy\xi} dy \quad (3.27)$$

y

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi, \quad (3.28)$$

quedando definida la transformada de Fourier ( $\mathcal{F}(\bullet)$ ) en (3.27) y la antitransformada ( $\mathcal{F}^{-1}(\bullet)$ ) en (3.28) y donde el potencial transformado está representado por  $\Psi(x, x'; \xi)$ . A partir de la expresión integral del potencial dada en la ecuación anterior, las expresiones



**Figura 3.1** Variación del número de onda con la distancia  $x$ .

de las derivadas en ambas direcciones físicas,  $x$  e  $y$ , son fácilmente obtenidas, quedando:

$$\Psi_{,x}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{,x}(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi, \quad (3.29)$$

$$\Psi_{,y}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi. \quad (3.30)$$

La función de Green (3.28) y sus derivadas completan la solución fundamental de forma que pueda ser introducida en una formulación MEC.

### El problema transformado en el espacio de Fourier

Introduciendo (3.28) en (3.25) y teniendo en cuenta la condición de radiación en el infinito (3.22), se obtiene la familia de problemas unidimensionales:

$$\Psi_{,xx} + \kappa^2(x)\Psi + \delta(x - x') = 0 \quad \text{para } x \in [a, b], \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \Psi_{,x} + i\alpha(\xi)\Psi = 0 & \text{en } x = a, \\ \Psi_{,x} - i\beta(\xi)\Psi = 0 & \text{en } x = b, \end{cases} \quad (3.32)$$

donde

$$\kappa^2(x) = \hat{k}_c^2(x) - \xi^2 \quad (3.33)$$

y los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son  $\alpha(\xi) = (\hat{k}_a^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$  y  $\beta(\xi) = (\hat{k}_b^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$  respectivamente. La solución en los intervalos semi-infinitos  $(-\infty, a]$  y  $[b, \infty)$  puede ser obtenida mediante la solución del problema para número de onda constante una vez ha sido calculada la

solución en el intervalo  $(a, b)$ :

$$\Psi(x, x', \xi) = \Psi(x_a, x', \xi) e^{-i\alpha|x-x_a|}, x \leq a, \quad (3.34)$$

$$\Psi(x, x', \xi) = \Psi(x_b, x', \xi) e^{i\beta|x-x_b|}, x \geq b. \quad (3.35)$$

Con el fin de obtener de nuevo el potencial original  $\psi$ , la familia de problemas (3.31, 3.32) ha de ser resuelta para todo valor de  $\xi \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, es conocido que la solución presenta cuatro polos situados sobre el eje real, simétricos respecto al origen, localizados en  $\pm \hat{k}_a$ , y  $\pm \hat{k}_b$  [9], que obligan a recurrir a la integración en el plano complejo para poder evaluar la integral de la antitransformada.

En vista de lo anterior, existen dos cuestiones principales a las que hacer frente:

- Cómo resolver el problema unidimensional descrito en (3.31) y (3.32).
- Cuál es el camino de integración en el plano complejo más adecuado para llevar a cabo la antitransformada de Fourier.

La primera cuestión no será abordada en este capítulo. La solución del problema unidimensional puede ser hallada como lo hizo Belibassakis [9], mediante un esquema MDF, o como se ha resuelto en el **Artículo I**, donde la solución se obtiene mediante el MEF. La elección del camino de integración se basa fundamentalmente en tres criterios: la simetría y el comportamiento asintótico de la solución del problema unidimensional, la posibilidad de usar el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) y el criterio de signos elegido para el sentido positivo de la propagación.

### Integración en el plano complejo

El camino de integración de las expresiones (3.28-3.30) en el plano complejo ( $\xi \in \mathbb{C} \mid \xi = \xi_1 + i\xi_2$ ) puede ser expresado como la diferencia entre un contorno cerrado y parte del mismo, de forma que

$$\int_{C_S} \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi = \oint_{\gamma} \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi - \int_{C_R} \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi, \quad (3.36)$$

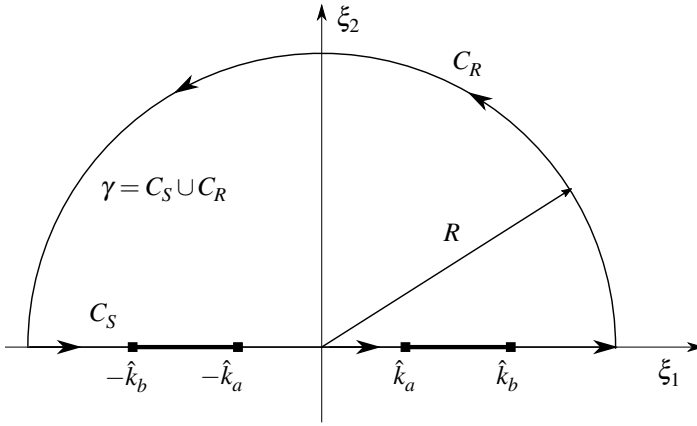
siendo el contorno  $\gamma = C_S \cup C_R$ , donde  $C_S \equiv \{\xi = [-R, R]\}$  y  $C_R \equiv \{\xi = Re^{i\theta}, \forall \theta \in [0, \pi]\}$ , tal y como se muestra en la Figura 3.2. Según el lema de Jordan, haciendo el límite cuando  $R$  tiende a infinito, la integral sobre el contorno semicircular se hace nula:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi = 0, \quad (3.37)$$

por lo que

$$\oint_{\gamma} \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_S} \Psi(x, x'; \xi) e^{iy\xi} d\xi. \quad (3.38)$$

La importancia que tiene escribirlo de esta manera es que se puede aplicar el teorema de Cauchy a la integral en el contorno cerrado  $\gamma$  permitiendo desviar el camino de integración, situado en el eje real, al plano complejo.



**Figura 3.2** Camino de integración cerrado en el plano complejo.

En este punto es importante introducir algunas propiedades de la solución en el espacio transformado de Fourier. De (3.31) y (3.33) se deduce que la solución es simétrica con respecto a  $\xi$ , resultando

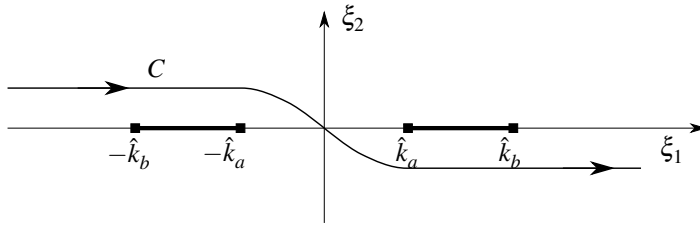
$$\Psi(x, x'; \xi_1 + i\xi_2) = \Psi(x, x'; -\xi_1 - i\xi_2), \tag{3.39}$$

por lo que, en caso de considerar un camino de integración simétrico, será suficiente con calcular la solución del problema unidimensional en el semiplano correspondiente a la parte positiva real de  $\xi$ . Por otro lado se observa que cuando  $\xi \gg \hat{k}(x)$  la solución del problema unidimensional con número de onda variable tiende a la solución del problema con coeficiente constante, siendo por tanto,

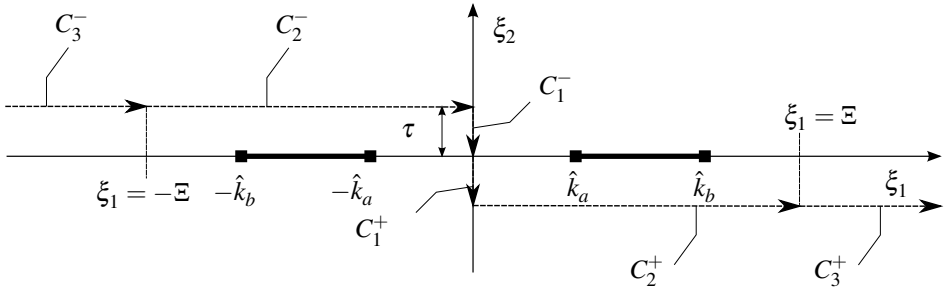
$$\Psi(x, x'; \xi) \simeq \frac{i}{2\kappa(x')} e^{i\kappa(x')|x-x'|}, \quad \xi \gg \hat{k}(x'), \tag{3.40}$$

definiendo el comportamiento asintótico de la solución.

Teniendo en cuenta (3.39), es razonable escoger un camino de integración simétrico con respecto al origen como el mostrado en la Figura 3.3. La razón de bordear los polos por el segundo y cuarto cuadrante se debe a la física del problema y a la consecuente elección del criterio de signos para el sentido positivo de la propagación. Tomando  $C$  como camino de integración, el intervalo  $[\hat{k}_a, \hat{k}_b]$  queda dentro del contorno  $\gamma$  y el resultado al llevar a cabo la antitransformada es una onda irradiada desde la fuente. Sin embargo, si se integrara dejando el intervalo del eje real  $[-\hat{k}_b, -\hat{k}_a]$  dentro del contorno  $\gamma$ , el resultado es una onda que se dirige desde el infinito hasta el punto de la fuente, o sumidero en este caso. La diferencia entre incluir una pareja de polos o la otra proviene de la elección en el criterio de signos para la solución del problema unidimensional. En este trabajo un argumento positivo de la función exponencial en (3.40) supone una onda irradiada desde la fuente. Para una descripción más detallada el lector puede consultar [102, 163].



**Figura 3.3** Camino de integración simétrico respecto al origen. Los intervalos del eje real en los que la solución del problema unidimensional es singular son evitados pasando por el segundo y el cuarto cuadrante.



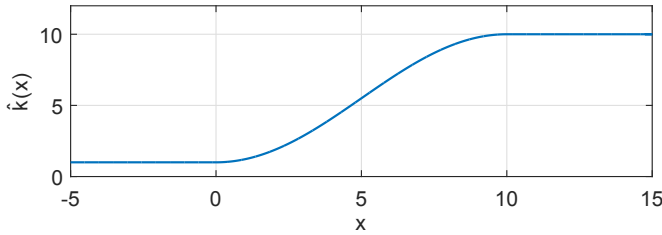
**Figura 3.4** Camino de integración por tramos para resolver de forma numérica.

Para la evaluación numérica de la inversa de la transformada necesaria para recuperar el potencial original, la curva de integración  $C$  se puede descomponer en los seis tramos rectos que aparecen en la Figura 3.4:

$$\begin{aligned}
 C_3^- &= \{\xi \mid \xi_1 \in (-\infty, -\Xi), \xi_2 = \tau\}, \\
 C_2^- &= \{\xi \mid \xi_1 \in [-\Xi, 0), \xi_2 = \tau\}, \\
 C_1^- &= \{\xi \mid \xi_1 = 0, \xi_2 \in [\tau, 0]\}, \\
 C_1^+ &= \{\xi \mid \xi_1 = 0, \xi_2 \in (0, -\tau]\}, \\
 C_2^+ &= \{\xi \mid \xi_1 \in (0, \Xi], \xi_2 = -\tau\}, \\
 C_3^+ &= \{\xi \mid \xi_1 \in (\Xi, \infty), \xi_2 = -\tau\},
 \end{aligned}$$

facilitando así las operaciones necesarias. Para valores de  $\tau \ll \hat{k}_a$  y  $\Xi \gg \hat{k}_b$ , el comportamiento asintótico de la solución descrito en (3.40) decae exponencialmente, pudiendo ser aproximada la solución como:

$$\Psi(x, x'; \xi) \simeq \frac{1}{2\xi} e^{-\xi|x-x'|}, \quad \xi \longrightarrow \infty, \tag{3.41}$$



**Figura 3.5** Función  $\hat{k}(x)$  utilizada para el caso práctico.

y su derivada como

$$\Psi_{,x}(x, x'; \xi) \simeq -\frac{1}{2} e^{-\xi|x-x'|}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (3.42)$$

lo que permite un tratamiento analítico de las integrales sobre los tramos  $C_3^-$  y  $C_3^+$ .

#### **Análisis del comportamiento de la función de Green en el espacio transformado**

Con el fin de ilustrar el comportamiento de la función de Green en el espacio transformado de Fourier se resuelve aquí la familia de problemas unidimensionales (3.31, 3.32) para la función  $\hat{k}(x)$ :

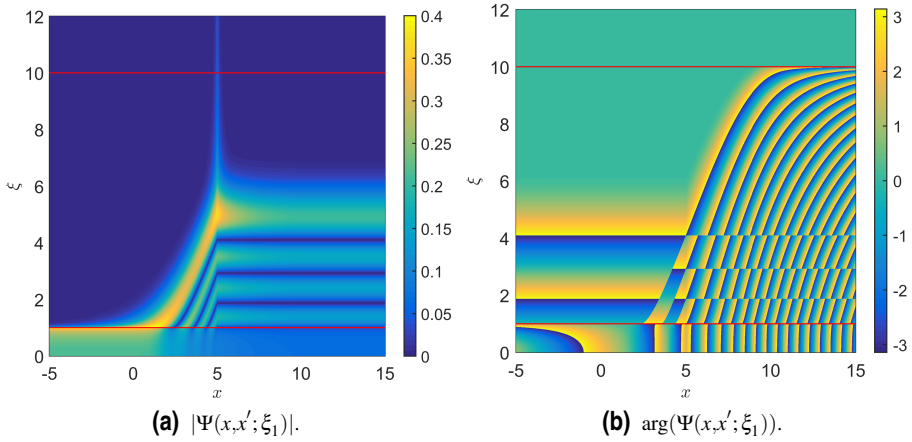
$$\hat{k}(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 5.5 \cos(\pi(1-x)/10), & 0 \leq x \leq 10, \\ 10, & x > 10, \end{cases} \quad (3.43)$$

cuyo perfil está representado en la Figura 3.5. La fuente se sitúa en el punto medio del perfil,  $x = 5$ . El esquema utilizado para hallar la solución del problema es el MEF descrito en el **Artículo I**, utilizando 20 elementos lineales por longitud de onda.

En primera instancia se resuelve para  $\xi \equiv \{\xi_1 \in [0, 12], \xi_2 = 0\}$ . El resultado se muestra en la Figura 3.6, donde se puede ver el valor absoluto que toma el potencial transformado  $\Psi(x, x', \xi)$  (a) y su fase (b). Los polos, situados en  $\xi = 1$  y  $\xi = 10$ , están marcados con sendas líneas rojas. Una de las dificultades que afectan a la integración en la dirección  $\xi_1$  es que la función  $\Psi(x, x'; \xi_1 - i\tau)$  se vuelve altamente oscilatoria en la zona cercana a los polos para valores de  $x$  alejados de la fuente, tal y como se aprecia en la Figura 3.6(b). Para valores de  $\xi_1 > \hat{k}(x)$  se observa como el potencial transformado decae exponencialmente para todo  $x$  menos en  $x'$ , de ahí la importancia del estudio asintótico de la solución, puesto que esta zona la integral sobre los caminos  $C_3^-$  y  $C_3^+$  no será en ningún caso despreciable.

Con el fin de evitar polos y discontinuidades en la derivada, se toma un camino por el plano complejo como el mostrado en la Figura 3.4. El camino de integración se adentra por el plano complejo una distancia  $\xi_2 = -\tau$ , siendo  $\tau = 6\hat{k}(x')/1024$ . La elección de este valor no es arbitraria, si no que está elegida acorde a los criterios presentes en [9] y [32]. El valor del potencial transformado  $\Psi(x, x'; \xi_1 - i\tau)$  para valores de  $\xi_1 \in [0, 12]$  se muestra en la Figura 3.7, donde en (a) se representa su valor absoluto y en (b) la fase. Como se puede apreciar, al recorrer la solución por el camino  $C_2^+$  y  $C_3^+$  con un valor de  $\tau$  pequeño, la solución tiene una forma parecida, pero sin embargo se suaviza y se evitan las singularidades, facilitando así la integración numérica.





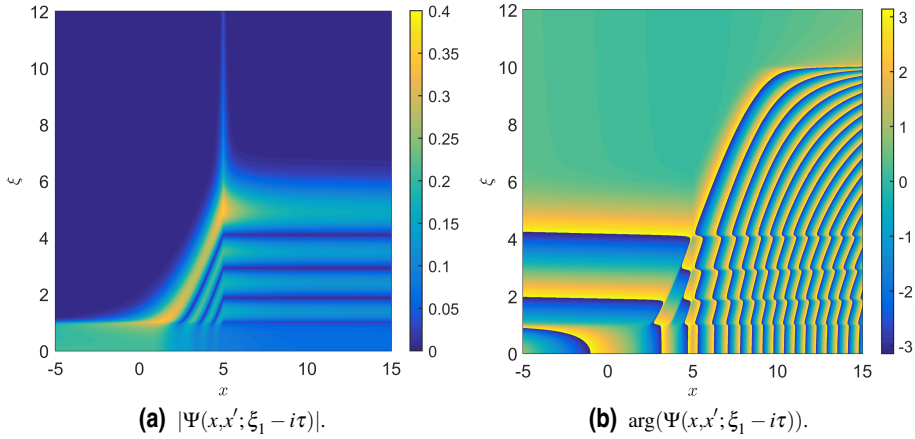
**Figura 3.6** Solución del potencial transformado  $\Psi(x, x', \xi)$  para el conjunto de puntos  $\xi \equiv \{\xi_1 \in [0, 12], \xi_2 = 0\}$ . En (a) se muestra el valor absoluto del potencial, siendo su fase representada en (b). Los polos situados en  $\xi = 1, 10$  están marcados con líneas rojas.

**Solución en el espacio real**

Una vez que la solución del potencial en el espacio transformado ha sido obtenida, la función de Green y sus derivadas en las direcciones  $x$  e  $y$  pueden ser recuperadas mediante el procedimiento de integración descrito en el **Artículo I**, donde las antitransformadas (3.28-3.30) son llevadas a cabo con la ayuda de la Transformada Rápida de Fourier Inversa (IFFT), la FFT y las propiedades asintóticas del problema unidimensional. La descripción detallada del proceso necesario para realizar las transformadas y antitransformadas está explicado con detalle en el **Artículo I**, centrándose esta sección en aportar simplemente una descripción gráfica de la solución del campo potencial y una breve discusión sobre ella.

La función de Green del problema de Helmholtz para una distribución del número de onda según (3.43) es representada en la Figura 3.8. La amplitud del campo potencial generado por una fuente puntual situada en  $(x = 5, y = 0)$  se muestra en (a), apreciándose la acumulación de energía en unas ramas con forma parabólica. La Figura 3.8(b) muestra la fase del campo, dejando patente el efecto de refracción. Si bien en un medio homogéneo la isolíneas de fase hubieran sido concéntricas, en este caso la dirección de propagación cambia tanto que prácticamente llegan a ponerse perpendiculares a la dirección en la que cambia el número de onda. Finalmente en la Figura 3.8(c) se representa una perspectiva tridimensional de la parte real del campo potencial. Esta perspectiva ofrece una visión más comprensible del comportamiento de la solución.

La derivada en la dirección  $x$  del campo potencial  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k})$  se muestra en la Figura 3.9.



**Figura 3.7** Solución del potencial transformado  $\Psi(x, x', \xi)$  para el conjunto de puntos  $\xi \equiv \{\xi_1 \in [0, 12], \xi_2 = -\tau\}$ . En (a) se muestra el valor absoluto del potencial, siendo su fase representada en (b). Los polos situados en  $\xi = \hat{k}_{a,c}$  están marcados con líneas rojas.

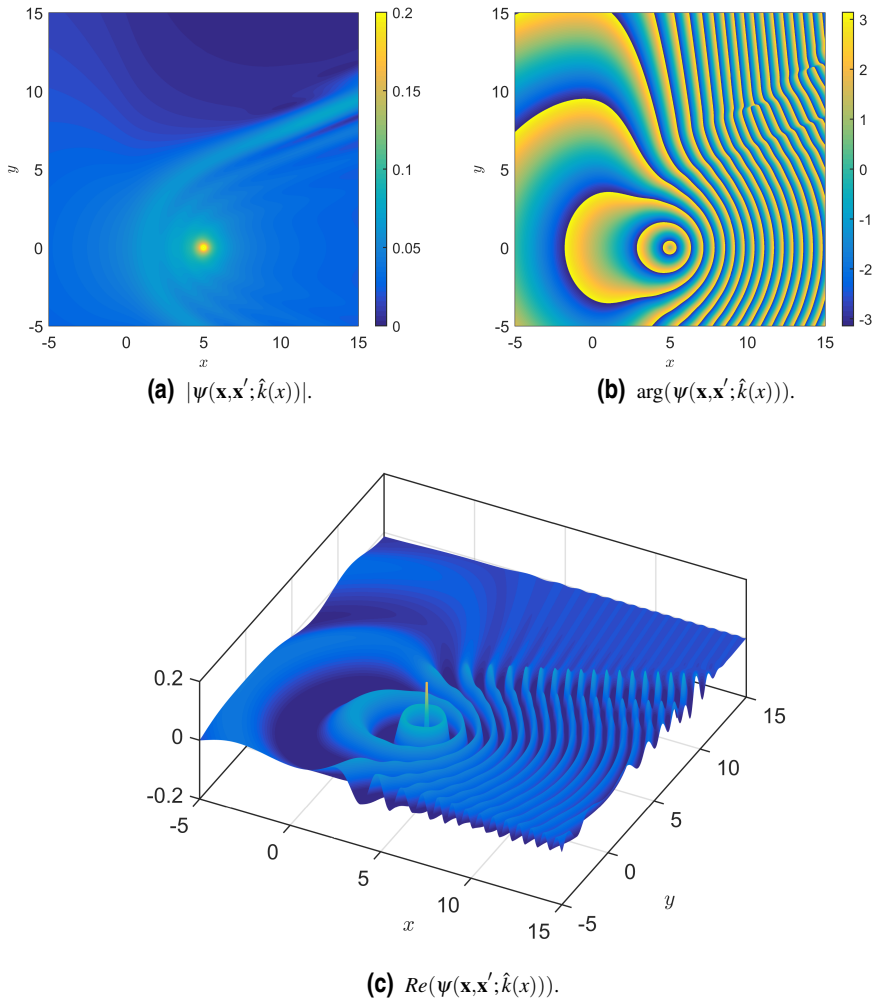
De nuevo se representan en (a) el módulo, en (b) la fase y en (c) una perspectiva con el fin de aportar una visión más clara. El procedimiento de obtención de la derivada en  $x$  es similar al del campo potencial, pues el argumento de las antitransformadas correspondientes al campo original (3.28) y a su derivada (3.29) poseen las mismas propiedades de simetría en la dimensión del espacio transformado de Fourier  $\xi$ .

Para terminar, se representa la derivada en la dirección  $y$  en la Figura 3.10. Debido al cambio en las propiedades de simetría del argumento en la antitransformada (3.30) la obtención de esta solución se complica, pues no es posible desprestigiar algunos términos como en antitransformada del potencial. Aun así, operando tal y como se explica en el **Artículo I**, la integración de (3.30) a lo largo de  $C_2^-$  y  $C_2^+$  se puede obtener añadiendo solamente una FFT más.

### 3.2.5 Resumen

En esta sección se ha introducido de manera sucinta el MEC, aplicado al problema de Helmholtz, con el fin de ayudar a una mejor comprensión de los artículos anejos a esta tesis.

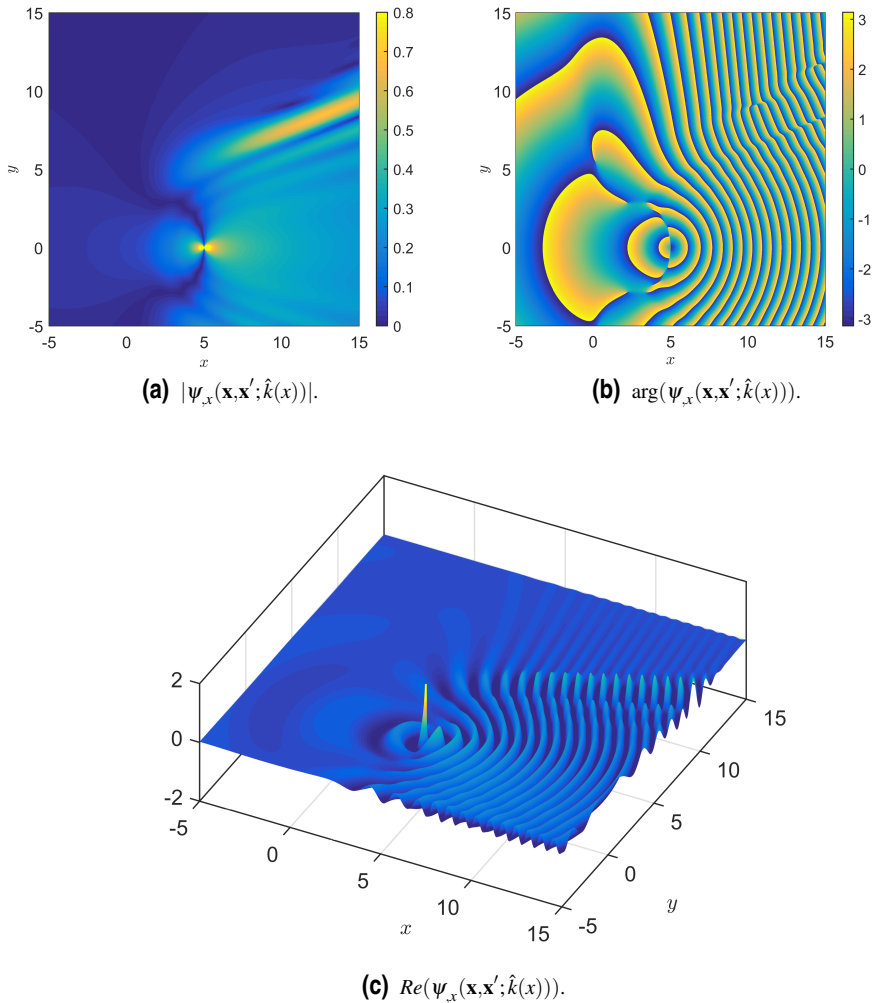
Por otro lado y como principal aportación, esta sección sirve como introducción y como apoyo al **Artículo I**, donde se presenta solución fundamental para para el problema de Helmholtz con número de onda variable. La sección añade explicación más detallada de la forma del potencial en el espacio transformado de Fourier para un caso particular en el



**Figura 3.8** Función de Green  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}(x))$  para el perfil (3.43). En (a) se muestra el valor absoluto del potencial, siendo su fase representada en (b). La figura (c) muestra el valor real del potencial.

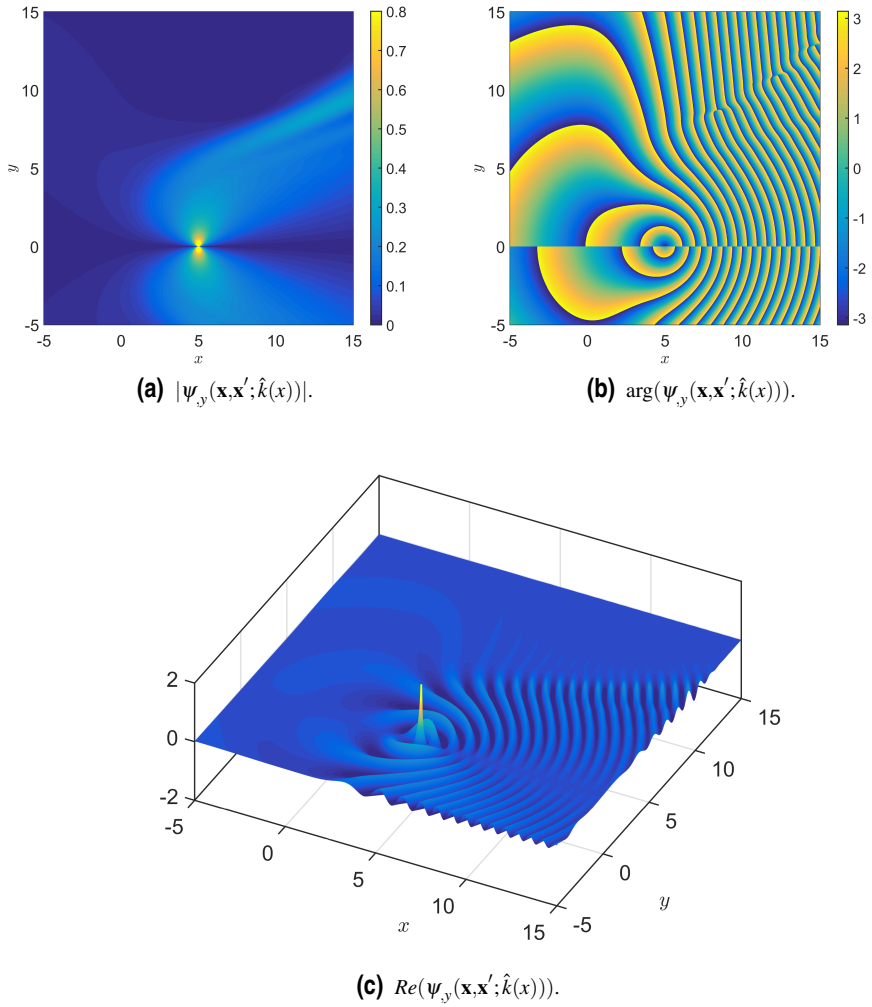
que el número de onda varía suavemente. También se representa la función de Green y sus derivadas para el mismo caso en el plano real  $x - y$ .

En el **Artículo I**, se desarrolla de forma completa la solución fundamental, también es introducida en un código de elementos de contorno. Con esta formulación se han resuelto varios ejemplos relacionados con la propagación de oleaje con el fin de comprobar la bondad de sus resultados. El caso más representativo resuelto en este trabajo trata sobre la propagación de olas de pequeña amplitud sobre una rampa de pequeña pendiente en la que



**Figura 3.9** Derivada de la función de Green en la dirección  $x$ . En (a) se muestra el valor absoluto, en (b), la fase. La figura (c) muestra el valor real de la derivada.

superpone un montículo con forma elíptica con el fin de provocar una modificación en el campo de altura de ola. Este caso, propuesto originalmente por Berkhoff en [19], ha sido resuelto por muchos autores con el fin de validar diferentes formulaciones y técnicas para la propagación de oleaje. También se ha resuelto un problema de propagación de oleaje sobre una zona costera, en concreto el puerto de Chipiona (Cádiz). Con este ejemplo se ha pretendido proporcionar resultados con un caso más práctico desde el punto de vista ingenieril en el que mostrar las bondades del MEC cuando se aplica sobre fondo variable.



**Figura 3.10** Derivada de la función de Green en la dirección  $y$ . En (a) se muestra el valor absoluto, en (b), la fase. La figura (c) muestra el valor real de la derivada.

### 3.3 Aproximación mediante elementos espectrales

#### 3.3.1 Introducción

Una de las principales dificultades que presentan los métodos basados en aproximaciones locales de la solución como el MDF o el MEF es el llamado *error de polución*. Dicho error está directamente relacionado con la dispersión numérica [67, 153], que consiste en que el número de onda que se obtiene de la solución calculada no coincide con el número de onda real del problema, produciéndose una dispersión en la propagación [47]. La fuente de este error está relacionada con la pérdida de elipticidad del operador de Helmholtz, la cual se acentúa cuanto mayor es el número de onda [84, 85]. Algunas expresiones para su cuantificación en el problema unidimensional se pueden encontrar en [8, 83] para la versión  $h$  del MEF. En [85], Ihlenburg y Babuška estiman el error de la solución ( $E$ ) obtenida mediante la versión  $hp$  del MEF, acotando la seminorma  $H^1$  de la siguiente forma:

$$E < C_1 \left( \frac{kh}{2p} \right)^p + C_2 k \left( \frac{kh}{2p} \right)^{2p}. \quad (3.44)$$

En esta expresión, el primer término del error se corresponde con el error de interpolación y puede ser controlado fácilmente manteniendo constante el número de elementos por longitud de onda. El segundo término corresponde al error de polución, que como se puede apreciar, aumenta mucho más rápido que el error de interpolación.  $C_1$  y  $C_2$  son constantes que dependen del orden  $p$  de las funciones interpolantes. Deramaemaeker et al. [47] y Bouillard et al. [25] amplían los estudios anteriores analizando el problema en dos y tres dimensiones, probando además el comportamiento de varias versiones modificadas del MEF. Una de las conclusiones de ambos trabajos es que aumentar el orden de los elementos finitos es una buena manera de controlar la dispersión tanto en una como en dos y en tres dimensiones. En la misma línea que los trabajos anteriores Ainsworth [1] analizó el error en la dispersión de la versión  $hp$  del MEF, donde el error relativo de la dispersión para valores de  $kh \ll 1$  puede calcularse mediante la expresión:

$$\frac{\tilde{k} - k}{k} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{p!}{(2p)!} \right]^2 \frac{(kh)^{2p}}{2p+1} + \mathcal{O}((kh)^{2p+2}), \quad (3.45)$$

donde  $\tilde{k}$  es el número de onda obtenido de la solución numérica del problema.

En general, de los trabajos anteriormente mencionados, se puede extraer que el error de polución viene dado por una función racional dependiente del número de onda y del tamaño del elemento o distancia entre nodos, que aumentará de forma rápida con el número de onda si no se utiliza un orden lo suficientemente alto en la interpolación o alguna técnica de estabilización.

El problema unidimensional ha sido ampliamente estudiado, presentando algunas técnicas con las que el efecto de dispersión puede ser completamente eliminado [162]. No obstante estas técnicas no son aplicables para el problema en dos y en tres dimensiones [5]. En este contexto numerosas técnicas han sido propuestas para mitigarlo, siendo las técnicas de estabilización como el *Galerkin Least Squares* (GLS) [81, 67, 153, 69] los

métodos más populares. Estas técnicas incluyen el carácter oscilatorio de la solución dentro de las funciones de aproximación. Otra técnica más reciente es el *Smoothed Finite Element Method* (SFEM), presentado en [106] para el problema elástico y propuesto en [168] como mejora al problema de la dispersión numérica. Sin embargo los resultados mostrados no distan demasiado de los del MEF. También se han propuesto modificaciones del MEF como el Partition of Unity FEM [117], la de Cessenat y Despres en [33], basadas en una formulación ultra-débil del problema o la de Farhat et al., que en [56] propusieron un método de enriquecimiento de la solución mediante funciones discontinuas dentro de los elementos. Estas modificaciones del MEF son comparadas y analizadas con detalle en [58, 160].

Otra alternativa existente, es el aumento del orden de las funciones de aproximación. Esta técnica ha demostrado ser muy eficiente a la hora de reducir el error numérico y el número de grados de libertad necesarios para una correcta aproximación de la solución. Las versiones  $p$  y  $hp$  del MEF surgen en la década los setenta y consiguen un gran auge en los ochenta. El primer trabajo que trata los aspectos teóricos y de convergencia pertenece a Babuška et al. [4]. Paralelamente a los métodos  $p$  y  $hp$  del MEF surge el MEE. Aunque el concepto es parecido ambos métodos surgen respondiendo a necesidades diferentes. El primero de ellos surge de la necesidad en la optimización del coste computacional y de la mejora en la precisión para el análisis de mecánica de sólidos y estructuras, mientras que el segundo surge como herramienta para la mecánica de fluidos computacional. El primer trabajo relacionado con el MEE fue presentado en 1984 por A. Patera [127], donde proponía combinar pequeños dominios tratados mediante métodos espectrales a modo de elementos finitos para solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles. Aunque bien es cierto que se puede considerar el MEE como una familia particular de la versión  $hp$  del MEF, estos últimos han evolucionado hacia una aproximación dentro de los elementos basadas en las típicas familias de polinomios con propiedades de ortogonalidad, lo que confiere una convergencia exponencial del problema o de tipo *spectral*.

Las aproximaciones  $p$  y  $hp$  han sido muy utilizadas para resolver ecuaciones diferenciales elípticas [3]. Las aproximaciones de alto orden basadas en familias de polinomios con propiedades ortogonales (MEE) consiguen una convergencia mayor que las aproximaciones mediante polinomios de Lagrange con distribuciones nodales equiespaciadas, pues para evitar el fenómeno de Runge es aconsejable distribuir la densidad de los nodos en la forma  $\left\{1/(\pi\sqrt{1-x^2}), x \in [-1,1]\right\}$ , como ocurre en las cuadraturas de Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) y de LGL. Este tema será tratado más adelante en la Sección 3.3.4.

En este sentido Mehdizadeh y Paraschivoiu proponen en [113] la utilización de elementos espectrales en una formulación de tipo Galerkin para la solución del problema de Helmholtz en dominios abiertos. En su trabajo, proponen elementos basados en una distribución nodal de tipo LGL, utilizando una aproximación espacial de la solución mediante polinomios de Lagrange. Incluyen, además, el uso de las PML para el tratamiento de la condición de contorno de dominio abierto. Siguiendo esta línea Petersen et al. propusieron en [128] el uso polinomios de Bernstein como funciones interpolantes en vez de polinomios de Lagrange o su forma baricéntrica, demostrando algunas ventajas sobre todo en el problema tridimensional.

A pesar de que el aumento del orden de los polinomios de interpolación, especialmente

para distribuciones de tipo CGL o LGL, conlleva a un requerimiento menor de número de grados de libertad para la solución del problema, las matrices que contienen los coeficientes de los sistemas de ecuaciones generados se van volviendo cada vez más llenas, por lo que la eficiencia en lo que a coste computacional se refiere se ve comprometida. En este sentido Vos et al. estudian en [159] el grado de aproximación óptimo, concluyendo que en general, aproximaciones del entorno de  $p = 6$  alcanzan un buen punto de acuerdo entre precisión y eficiencia.

En esta tesis, véase el **Artículo II**, se han introducido elementos espectrales de alto orden con una distribución nodal LGL tanto en la formulación MEC como en la de tipo MEF para la resolución de la ecuación *mild-slope*. Los elementos espectrales usados utilizan polinomios de Lagrange como funciones de interpolación de las variables consideradas a partir de los valores nodales. Cuatro son las principales aportaciones de este trabajo:

- Los elementos espectrales han sido utilizados para resolver por primera vez la ecuación elíptica *mild-slope*, considerando batimetrías variables.
- Una formulación MEC para la ecuación *mild-slope* con una discretización basada en elementos espectrales ha sido presentada y probada en varios ejemplos de referencia.
- Una formulación acoplada MEC-MEF basada en una discretización con elementos espectrales ha sido usada para resolver problemas de contorno abierto incluyendo batimetría variable en la formulación MEC.
- Por primera vez se ha estudiado la convergencia de un método en los problemas propuestos por Ito y Tanimoto (tren de ondas propagándose sobre un montículo parabólico) en [87] y por Berkhoff en [17] (tren de ondas propagándose sobre un montículo elíptico superpuesto en una rampa). El error de las soluciones presentadas es de varios ordenes de magnitud menor que los obtenidos hasta ahora.

A continuación, en las subsecciones 3.3.2 y 3.3.3 se presentan algunas de las características básicas de los polinomios de Legendre y se introducen los detalles básicos de la cuadratura de interés en este trabajo, la de LGL. Para más detalles sobre esta cuadratura, los polinomios de Legendre y otras familias de polinomios clásicas en los MME se refiere al lector a [44, 30, 143]. En la subsección 3.3.4 se justifica la convergencia de las aproximaciones pseudoespectrales. Para terminar, en la subsección 3.3.5 se incluye una descripción más detallada de los elementos de referencia que en el **Artículo II**.

### 3.3.2 Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre ( $P_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) son las autofunciones del problema particular de Sturm-Liouville

$$[(1-x^2)P_k'(x)]' + k(k+1)P_k(x) = 0 \quad (3.46)$$

y pueden ser expresados mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]. \quad (3.47)$$

Los polinomios de Legendre poseen las siguientes propiedades:



- Ortogonalidad:

$$\langle P_m, P_n \rangle_w = \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) w(x) dx = \gamma_n \delta_{mn}, \quad \gamma_n = \frac{2}{2n+1}, \quad \text{con } w(x) = 1, \quad (3.48)$$

$$\langle P'_m, P'_n \rangle_w = \int_{-1}^1 P'_m(x) P'_n(x) dx = n(n+1) \gamma_n \delta_{mn}, \quad \text{con } w(x) = (1-x^2), \quad (3.49)$$

donde  $\delta_{mn}$  es la delta de Kroneker.

- Simetría:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad (3.50)$$

- Recursividad:

$$P_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x), \quad (3.51)$$

- Recursividad en la derivada:

$$P'_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impar}}}^{n-1} (2k+1) P_k(x). \quad (3.52)$$

Los cinco primeros polinomios de Legendre se pueden ver en la Figura 3.11, siendo sus derivadas representadas en la Figura 3.12.

Los elementos espectrales más comunes están basados en los polinomios de Chebyshev y en los polinomios de Legendre, ambos familias particulares de los polinomios de Jacobi. La principal característica de estos elementos de alto orden es que sus nodos están localizados en los puntos de integración de la cuadratura en cuestión: Legendre-Gauss (LG), Legendre-Gauss-Lobatto o Chebyshev-Gauss-Lobatto.

En esta tesis se han incorporado los elementos espectrales a la formulación MEF y MEC descritas anteriormente.

### 3.3.3 Cuadratura de LGL

La integral de una función  $f(x)$  en el intervalo  $x \in [-1, 1]$  puede ser aproximada mediante la cuadratura de LGL, de la forma:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=0}^n f(x_j) w_j, \quad (3.53)$$

donde los puntos de la cuadratura  $x_j$  son las raíces del polinomio:

$$(1-x^2) P'_n(x), \quad (3.54)$$

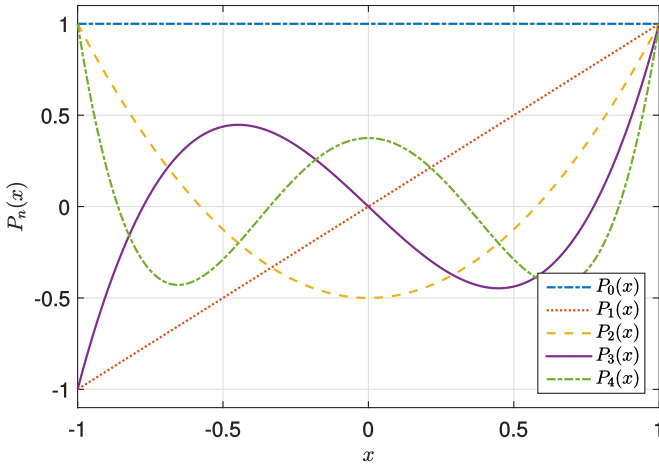


Figura 3.11 Polinomios de Legendre de orden  $p = 0, 1, \dots, 4$ .

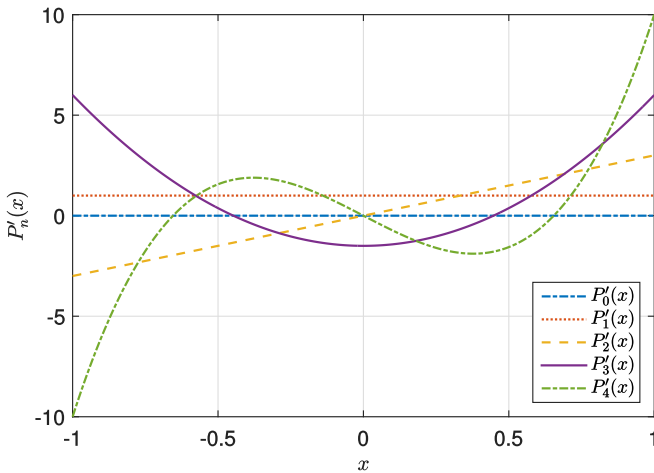


Figura 3.12 Derivada de los polinomios de Legendre de orden  $p = 0, 1, \dots, 4$ .

siendo  $P_n$  el polinomio de Legendre de orden  $n$ . Los pesos ( $w_j$ ) vienen dados por la expresión:

$$w_j = \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{[P'_n(x_j)]^2}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \tag{3.55}$$

Esta cuadratura es exacta para polinomios de orden hasta  $2n - 1$ .

### 3.3.4 Aproximación polinomial óptima

La aproximación polinomial es crucial en los métodos computacionales, puesto que en realidad son las únicas funciones que un ordenador puede evaluar de forma exacta. La aproximación de una función  $f(x)$  en el intervalo  $x \in [-1, 1]$  puede llevarse a cabo mediante polinomios de Lagrange, de forma que:

$$I_n^X f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \tag{3.56}$$

siendo  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  el conjunto de  $n + 1$  puntos donde  $f(x_k) = I_n^X f(x_k)$ . El polinomio aproximante de Lagrange  $l_k(x)$  correspondiente a cada punto del conjunto  $X$  viene dado por:

$$l_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \tag{3.57}$$

El error que se produce al usar este tipo de interpolación para una función continua hasta su derivada  $(n + 1)$ -ésima puede ser acotado superiormente mediante el teorema del error de interpolación de Cauchy:

$$e(x) = \|f(x) - I_n^X f(x)\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_\infty}{(n + 1)!} \|W_{n+1}^X(x)\|_\infty, \tag{3.58}$$

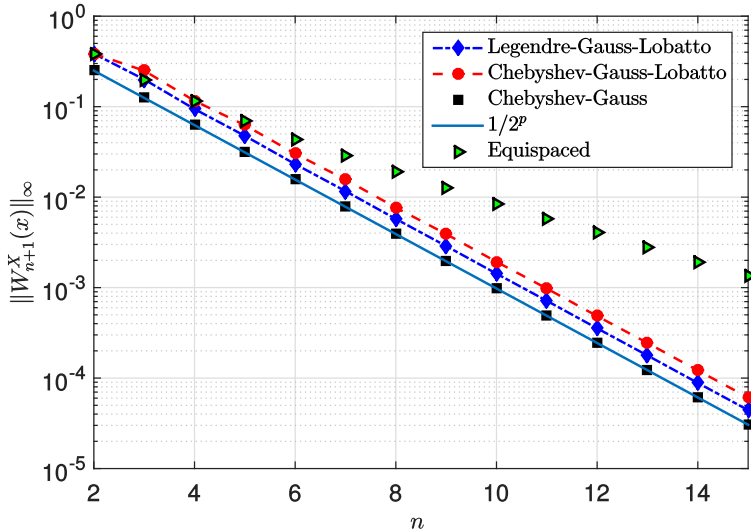
donde  $\|g(x)\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |g(x)|$ ,  $g^{(n)}(x)$  indica la derivada enésima de  $g(x)$  y  $W_{n+1}^X(x)$  es un polinomio de Lagrange de orden  $n + 1$  con raíces situadas en el conjunto de puntos  $X$ :

$$W_{n+1}^X(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k), \quad x_k \in X. \tag{3.59}$$

De la ecuación (3.58), que es una expresión exacta, se deduce que la única manera posible de disminuir el límite superior por el que viene acotado el error  $e(x)$  es minimizando  $\|W_{n+1}^X(x)\|_\infty$ , lo que se consigue con una correcta elección del conjunto de puntos contenidos en  $X$ . La opción más inmediata a la hora de escoger el conjunto de puntos  $X$  es mediante una distribución equiespaciada, como ocurren en la versión  $p$  del MEF. sin embargo, es conocida la existencia del fenómeno de Runge [161], que pone de manifiesto la falta de convergencia de este tipo de distribución nodal para funciones del tipo  $f(x) = 1/(1 + cx^2)$ , siendo  $c$  una constante. La distribución nodal óptima que minimiza  $\|W_{n+1}^X(x)\|_\infty$  es la de Chebyshev-Gauss (CG) [52] que proporciona el límite superior

$$\|W_{n+1}^X(x)\|_\infty = \frac{1}{2^n}, \tag{3.60}$$

En la Figura 3.13 se muestra la evolución del valor de  $\|W_{n+1}^X(x)\|_\infty$  en función del grado de los polinomios interpolantes  $n$  para las distribuciones nodales de LGL, CGL, CG y equiespaciada. Como se puede ver en la figura la convergencia de la norma-infinito para



**Figura 3.13** Convergencia de  $\|W_{n+1}^X(x)\|_\infty$  para diferentes distribuciones nodales.

las distribuciones LGL, CGL y CG es exponencial, mientras que para la distribución equiespaciada es una expresión algebraica dependiente de la distancia entre los puntos.

### 3.3.5 Aproximación pseudoespectral: Elementos de referencia

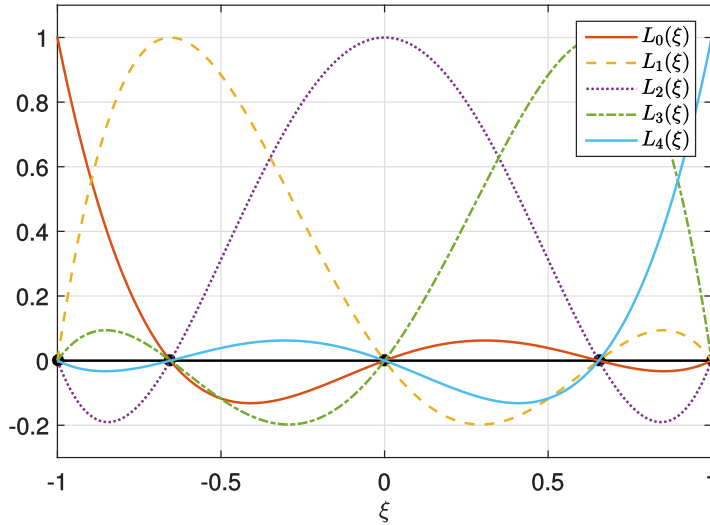
El MEE, tal y como lo presentó Patera en [127], consiste en un método híbrido entre el MEF y los MMEE que combina las virtudes de ambos: la flexibilidad y la versatilidad del primero con la precisión espectral del segundo. Al igual que en MEF, el MEE proviene de la aplicación del Método de los Residuos Ponderados (MRP) en el dominio de interés  $\Omega$ , sin embargo el MEE utiliza una aproximación pseudoespectral dentro de los elementos. El dominio es pues, dividido en un número finito  $K$  de subregiones, de forma que:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^K \Omega_j, \quad \bigcap_{j=1}^K \Omega_j = \emptyset, \quad (3.61)$$

donde la diferencia fundamental con el MEF clásico se encuentra en la distribución nodal y el grado de las funciones interpolantes en cada subdominio  $\Omega_j$ .

En esta tesis se realiza el mismo procedimiento para el MEC en el ámbito de la ecuación *mild-slope*. Para ello el contorno de interés  $\Gamma$  se divide en un número finito  $N$  de subdominios, de forma que:

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j, \quad \bigcap_{j=1}^N \Gamma_j = \emptyset. \quad (3.62)$$



**Figura 3.14** Nodos y funciones de forma del elemento de referencia unidimensional ( $n = 4$ ).

siendo  $\Gamma_j$  cada uno de los subcontornos.

Para poder llevar a cabo los procesos de interpolación, integración y diferenciación, los subdominios son llevados a unos espacios normalizados. En estas coordenadas los elementos tanto del MEC como los del MEE toman la forma de los elementos de referencia. A continuación se presentan los dos elementos espectrales necesarios para la solución de la ecuación *mild-slope*, el unidimensional y el bidimensional.

**Elemento espectral 1-D**

El elemento unidimensional de referencia está compuesto por un conjunto de nodos  $\{(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi \in [-1, 1]\}$  y sus respectivas funciones de aproximación asociadas  $(L_0(\xi), L_1(\xi), \dots, L_n(\xi))$ . La posición de los nodos se corresponde con los puntos de la cuadratura de LGL, obtenidos mediante la solución del polinomio (3.54), y sus funciones de aproximación vienen dadas por el conjunto de polinomios de Lagrange:

$$L_k(\xi) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_k - \xi_j}, \tag{3.63}$$

tal y como se representa en la Figura 3.14 para un elemento de orden  $n = 4$ .

La distribución nodal según la cuadratura LGL proporciona una aproximación cuya precisión aumenta de forma exponencial con el grado de las funciones nodales  $L_k(\xi)$ , al igual que ocurre en los métodos espectrales, de ahí su denominación de pseudoespectral, pues demuestran una convergencia similar y su distribución nodal está basada en una familia de polinomios típica de los MMEE. Sin embargo, la aproximación se realiza de manera espacial mediante valores nodales y sus funciones interpolantes.

El elemento unidimensional es requerido en este trabajo para dos propósitos, la aproximación del potencial y el flujo en la expresión discreta de la Ecuación Integral de Contorno (EIC) y la aproximación del flujo en el contorno del dominio modelado con el MEE.

### Elemento espectral 2-D

Para la implementación del MEE es necesaria la definición de un elemento de referencia bidimensional sobre el que realizar de manera simplificada las operaciones necesarias. Podemos definir la región que ocupa el elemento en el espacio normalizado como  $\{(\xi, \zeta) \mid \xi \in [-1, 1], \zeta \in [-1, 1]\}$ , donde la posición de sus nodos en el interior vendrá dada por una distribución LGL en las direcciones  $\xi$  y  $\zeta$ :

$$X \equiv (\xi_k, \zeta_k) = (\xi_i, \zeta_j), \quad \begin{cases} i = 0, 1, \dots, n, \\ j = 0, 1, \dots, n, \\ k = (i + 1) + j(n + 1), \end{cases} \quad (3.64)$$

Al igual que en (3.56), una función  $f(\xi, \zeta)$  puede ser aproximada en el elemento a partir de una serie de polinomios y valores nodales:

$$I_n f(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \zeta_k) \mathcal{L}_k(\xi, \zeta), \quad (3.65)$$

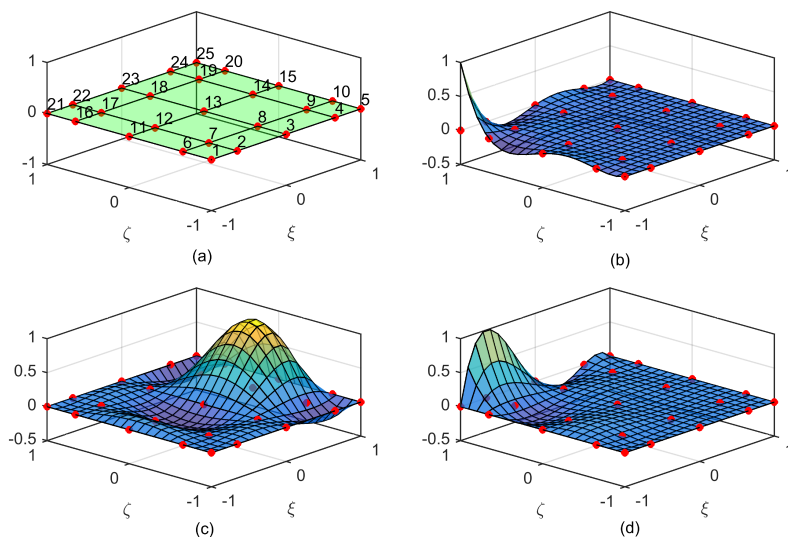
donde  $I_n$  denota el operador de interpolación de grado  $n$  sobre el conjunto de  $(n + 1)^2$  puntos internos en el elemento  $\bar{\Omega}^2$ . La función de aproximación correspondiente a cada nodo viene dada como un producto de sus funciones unidimensionales escritas en (3.63) en cada una de las direcciones. El conjunto de todas las funciones de aproximación viene dado entonces por el producto tensorial:

$$\mathcal{L}_k(\xi, \zeta) = L_i(\xi) L_j(\zeta), \quad \begin{cases} i = 0, 1, \dots, n, \\ j = 0, 1, \dots, n, \\ k = (i + 1) + j(n + 1), \end{cases} \quad (3.66)$$

En la Figura 3.15(a) se muestra una descripción de la distribución nodal en un elemento de orden  $n = 4$  y como los nodos son numerados en su interior. Las subfiguras 3.15(b), 3.15(c) y 3.15(d) muestran las funciones de aproximación correspondientes a los nodos 21, 14 y 22 respectivamente, que son representativos de las diferentes posiciones en las que se puede encontrar un punto: esquina, contorno o interior.

### 3.3.6 Integración numérica en los elementos espectrales

Como se mencionaba en el punto 3.3.3 la cuadratura de LGL es exacta para polinomios de orden hasta  $2n - 1$ , siendo el número de puntos de la cuadratura  $n + 1$ . A pesar de ser exacta para polinomios de hasta un orden de  $2n - 1$  y que los polinomios que se están integrando son de orden  $2p$  la precisión se mantiene [42].



**Figura 3.15** Elemento de referencia bidimensional. (a) elemento y numeración de los nodos, (b) función de forma del nodo 21, (c) función de forma del nodo 14 y (d) función de forma del nodo 22.

### 3.3.7 Resumen

- Si se utilizan los puntos de cuadratura Gaussiana como nodos en la discretización espacial y se les asocia una base de polinomios de Lagrange, se obtiene una base discreta ortogonal, deseable para métodos computacionales.
- La interpolación mediante una base de polinomios de Lagrange asociada a los puntos de cuadratura Gaussiana está estrechamente relacionada con la interpolación mediante el espectro de polinomios asociados a la cuadratura. Este tipo de aproximación se denomina pseudo-espectral.
- Utilizando una aproximación espectral o pseudo-espectral se consigue convergencia exponencial o espectral.
- Los polinomios de Legendre son ortogonales respecto al producto escalar  $\langle P_m, P_n \rangle_w$  con peso  $w(x) = 1$ . Esto hace que distribuciones nodales asociadas a estos polinomios sean especialmente atractivas frente al uso de otras distribuciones nodales, como aquellas basadas en los polinomios de Chebyshev. Esta característica en su ortogonalidad permite que las integrales de las funciones de forma nodales pueden ser llevadas a cabo mediante la propia cuadratura LGL manteniendo su exactitud en la integración hasta polinomios de orden  $2n - 1$ .

## 3.4 Métodos de acoplamiento

### 3.4.1 Introducción

El acoplamiento superficial entre diferentes dominios tiene un gran interés para la resolución numérica de problemas no convencionales, como por ejemplo aquellos en los que hay un gran número de grados de libertad y se hace necesaria su resolución de manera particionada y computación en paralelo; o también para problemas de contacto [149], o de interacción fluido estructura en acústica como es el caso de esta tesis. La posibilidad de utilizar además diferentes métodos numéricos para los diferentes dominios, según las características y necesidades de éste, abre la puerta a la obtención de resultados más precisos y con tiempos de computación menores. En el caso de los problemas de acústica lineal, en los que el dominio fluido puede ser infinito, el MEC es más indicado que el MEF, mientras que para la estructura no tiene por qué ser así. Mediante estas técnicas de acoplamiento ambos dominios pueden ser acoplados de manera eficiente y precisa incluso con mallas no conformes.

El principal objetivo de esta sección es servir de introducción al **Artículo III** anejo a esta tesis y aportar algunos detalles más sobre la formulación allí presentada. Este artículo, titulado "Partitioned solution strategies for coupled BEM-FEM acoustic fluid-structure interaction problems", trata específicamente sobre el acoplamiento fluido-estructura mediante el Método Mortar y Multiplicadores de Lagrange Localizados. En este trabajo el dominio fluido acústico es modelado con el MEC, por la gran cantidad de ventajas que presenta para este tipo de problemas (véase la sección 3.2), mientras que para el dominio sólido se utiliza el MEF. En este trabajo, el Método Mortar, basado en multiplicadores clásicos, es comparado con los Multiplicadores de Lagrange Localizados, utilizados aquí por primera vez en este tipo de problemas. Mediante ambos, se resuelven problemas con mallas altamente no conformes y sus sistemas de ecuaciones resultantes son resueltos mediante el método del bi-gradiente conjugado, el cual presenta una buena escalabilidad en este tipo de problemas.

En el artículo se han resuelto varios ejemplos de especial relevancia, como son la cavidad acústica propuesta por Sandberg *et al.* en [138], donde originalmente se resolvía el conjunto mediante acoplamiento con mallas conformes MEF-MEF. Este problema se estudia con detenimiento en el artículo para varias frecuencias, además, se realiza un barrido para encontrar los modos de vibración naturales del sistema. Otro ejemplo que se resuelve en el artículo es un conducto por el que se transmite una onda de presión. En este ejemplo el dominio fluido es subdividido en varias partes y se estudia como el hecho de particionar el dominio afecta a la convergencia. Para terminar, se estudia una cavidad inmersa en un medio fluido infinito que cuenta con una pared flexible, mostrando, como era de esperar, una convergencia similar al problema de la cavidad interna.

### 3.4.2 Interacción Fluido-Estructura. Problema variacional

La variación del potencial total en el problema de interacción fluido-estructura ( $\delta\Pi_{total}$ ) puede ser expresada mediante el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV):

$$\delta\Pi_{total}(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_f, \mathbf{t}_c) = \delta\Pi_s(\mathbf{u}_s) + \delta\Pi_f(\mathbf{u}_f) + \delta\Pi_c(\mathbf{u}_s^c, \mathbf{u}_f^c, \mathbf{t}_c), \quad (3.67)$$



donde  $\delta\Pi_s$ ,  $\delta\Pi_f$  y  $\delta\Pi_c$  representan la variación del trabajo en el dominio sólido, en el fluido y en la interfase respectivamente. Estos potenciales dependen de los desplazamientos producidos en la estructura ( $\mathbf{u}_s$ ), en el fluido ( $\mathbf{u}_f$ ) y de las fuerzas que surgen en la interfase entre ambos ( $\mathbf{t}_c$ ). El superíndice  $c$  se utiliza para denotar los valores de los desplazamientos en la interfase.

La variación del potencial en la estructura viene dada por:

$$\delta\Pi_s(\mathbf{u}_s) = \delta\mathbf{u}_s^T \{ \mathbf{K}_s(\omega)\mathbf{u}_s - \mathbf{f} \}, \quad (3.68)$$

siendo  $\mathbf{K}_s(\omega)$  la matriz de rigidez dinámica de la estructura en el dominio de la frecuencia. La variación del potencial en el fluido modelado con el MEC puede expresarse como una integral de contorno mediante la fórmula de Clapeyron [22, 62, 66], resultando:

$$\delta\Pi_f = \int_{\Gamma_f} (p - t_f) \cdot \delta u_{nf} d\Gamma, \quad (3.69)$$

donde  $u_{nf}$  son los desplazamientos normales al contorno del dominio fluido  $\Gamma_f$ ,  $p$  es la presión del fluido y  $t_f$  son tracciones externas normales a la superficie. La ecuación anterior se puede representar de manera discreta como:

$$\delta\Pi_f = \delta\mathbf{d}_f^T \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{t}}), \quad (3.70)$$

donde los desplazamientos normales a la superficie, la presión y las tracciones externas son aproximados como

$$u_{nf} \simeq \mathbf{N}\mathbf{d}_f, \quad (3.71)$$

$$p \simeq \mathbf{N}\mathbf{p}, \quad (3.72)$$

$$t_f \simeq \mathbf{N}\mathbf{t}_f \quad (3.73)$$

respectivamente, siendo  $\mathbf{N}$  el vector que contiene las funciones de interpolación y  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{t}_f$  los vectores que contienen los valores nodales de los desplazamientos normales a la superficie, de la presión y de las tracciones externas. En la expresión anterior, las presiones pueden ser expresadas en función de los desplazamientos recordando la forma matricial del sistema de ecuaciones del MEC descrito en (3.18). Según la cual:

$$\mathbf{p} = i\omega\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{d}_f, \quad (3.74)$$

donde la relación entre la velocidad y el desplazamiento normal a la superficie  $v_{nf} = i\omega u_{nf}$  ha sido utilizada. Aplicando esta expresión en (3.70), resulta:

$$\delta\Pi_f = \delta\mathbf{d}_f^T [\mathbf{K}_f(\omega)\mathbf{d}_f - \mathbf{M}\bar{\mathbf{t}}] = 0, \quad (3.75)$$

donde  $\mathbf{K}_f(\omega) = i\omega\mathbf{M}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}$ , siendo  $\mathbf{M} = \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma$ . Finalmente, de aquí se deduce el sistema de ecuaciones proveniente del MEC que será utilizado más adelante para acoplar

el fluido con la estructura:

$$\mathbf{K}_f(\omega)\mathbf{d}_f = \mathbf{f}_f. \quad (3.76)$$

Por último, El tercer sumando de la ecuación (3.67), requiere ser minimizado para llevar a cabo la completa transferencia de energía entre un medio y otro. De alguna manera ha de contener en su expresión que las fuerzas y los desplazamientos a un lado y otro de la interfase sean compatibles y exista equilibrio entre ambos dominios. Este término es el que diferencia las diferentes técnicas de acoplamiento descritas a continuación.

### 3.4.3 Interacción fluido-estructura mediante el Método Mortar

El método Mortar es un conjunto de técnicas basadas en la formulación de los multiplicadores de Lagrange que permiten realizar acoplamientos con mallas no conformes. En este método el campo de multiplicadores de la interfase se aproxima mediante unas funciones de interpolación, al igual que en el MEF. Dependiendo de las características del marco y de estas funciones aproximantes estas técnicas se pueden englobar en dos grupos. Por un lado, las que definen la interfase de forma independiente a los dominios que conecta, destacando los trabajos de Simo *et al.* [146], Park *et al.* [123] o Rebel *et al.* [133] y por otro lado las técnicas que definen la interfase solidaria a uno de los dominios a acoplar, donde destacan los trabajos de Wohlmuth *et al.* [165] y Bernardi *et al.* [109]. En esta tesis se opta para la discretización de la interfase por este último grupo, utilizando la malla del sólido como maestra.

#### Formulación variacional continua del problema de acoplamiento

Según la configuración de la Figura 3.16, la aportación de la interfase al potencial total (3.67) vendrá dada por:

$$\Pi_c = \int_{\Gamma_c} \{\mathbf{t}_c^T (\mathbf{u}_s^c - \mathbf{u}_f^c)\} d\Gamma, \quad (3.77)$$

siendo  $\mathbf{t}_c$  las tracciones en la interfase de acoplamiento  $\Gamma_c$  y  $\mathbf{u}_s^c$  y  $\mathbf{u}_f^c$  los desplazamientos de la estructura y del fluido respectivamente. La forma variacional de la expresión anterior resulta:

$$\delta\Pi_c = \int_{\Gamma_c} \{\delta\mathbf{t}_c^T (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_f) + (\delta\mathbf{u}_s - \delta\mathbf{u}_f)^T \mathbf{t}_c\} d\Gamma, \quad (3.78)$$

teniéndose en cuenta el incremento de energía producido ante cualquier variación de los multiplicadores de la interfase o de los desplazamientos de ambos dominios en la superficie de acoplamiento.

#### Formulación variacional discreta

Al discretizar la interfase o superficie de conexión ( $\Gamma_c$ ), esta se divide en  $N_e^f$  superficies elementales, de tal forma que han de cumplir:

$$\Gamma_c = \bigcup_{e=1}^{N_e^f} \Gamma_c^e \quad \text{y} \quad \bigcap_{e=1}^{N_e^f} \Gamma_c^e = \emptyset. \quad (3.79)$$

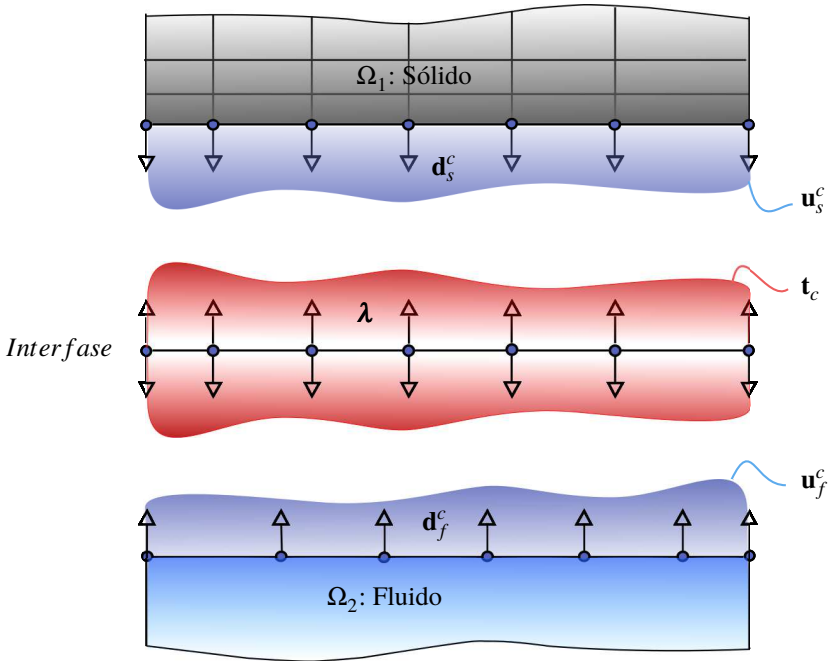


Figura 3.16 Acoplamiento tipo Mortar.

El campo de multiplicadores de Lagrange o de tracciones de acoplamiento se aproxima mediante unas funciones de forma en el marco de acoplamiento:

$$\mathbf{t}_c \simeq \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} \quad (3.80)$$

donde  $\mathbf{N}_\lambda$  es el vector contenedor de las funciones de aproximación para el campo de multiplicadores y  $\boldsymbol{\lambda}$  son los valores nodales. El campo de desplazamientos en la superficie de acoplamiento de ambos dominios ( $\mathbf{u}_\alpha^c$ ) viene dado en su forma discreta por:

$$\mathbf{u}_\alpha^c \simeq \mathbf{N}_\alpha \mathbf{d}_\alpha^c, \quad \alpha = (s, f), \quad (3.81)$$

donde  $\mathbf{N}_\alpha$  contiene las funciones de aproximación y  $\mathbf{d}_\alpha^c$  los valores nodales de los desplazamientos.

Aplicando las aproximaciones (3.80, 3.81) a la expresión (3.78) se obtiene la aproximación discreta del trabajo virtual desarrollado por la interfase:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c = \int_{\Gamma_c} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \left[ \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_s \mathbf{d}_s^c - \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_f \mathbf{d}_f^c \right] d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_c} \left[ \delta \mathbf{d}_s^{cT} \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} \right] d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \left[ \delta \mathbf{d}_f^{cT} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} \right] d\Gamma, \quad (3.82) \end{aligned}$$

que puede ser reescrita de forma más compacta de la siguiente manera:

$$\delta\Pi_c = \delta\boldsymbol{\lambda}^T \left( \tilde{\mathbf{C}}_s^T \mathbf{d}_s^c - \tilde{\mathbf{C}}_f^T \mathbf{d}_f^c \right) + \delta\mathbf{d}_s^{cT} \tilde{\mathbf{C}}_s \boldsymbol{\lambda} - \delta\mathbf{d}_f^{cT} \tilde{\mathbf{C}}_f \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (3.83)$$

donde las matrices de acoplamiento  $\tilde{\mathbf{C}}_s$  y  $\tilde{\mathbf{C}}_f$  son evaluadas:

$$\tilde{\mathbf{C}}_s = \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_\lambda d\Gamma, \quad (3.84)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_f = \int_{\Gamma_c} \mathbf{N}_f^T \mathbf{N}_\lambda d\Gamma. \quad (3.85)$$

### Ecuaciones del problema de acoplamiento fluido-estructura

Introduciendo las expresiones discretas del trabajo virtual desarrollado por la estructura (3.68), el fluido (3.75) y la interfase (3.83) en la ecuación variacional del problema de acoplamiento (3.67) se obtiene que la variación del potencial total es:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{total} = & \delta\mathbf{d}_s^T [\mathbf{K}_s(\omega) \mathbf{d}_s - \mathbf{f}_s] + \delta\mathbf{d}_f^T [\mathbf{K}_f(\omega) \mathbf{d}_f - \mathbf{f}_f] + \\ & + \delta\boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{C}_s^T \mathbf{d}_s - \mathbf{C}_f^T \mathbf{d}_f] + \delta\mathbf{d}_s^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\lambda} - \delta\mathbf{d}_f^T \mathbf{C}_f \boldsymbol{\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde las matrices de acoplamiento  $\mathbf{C}_\alpha$  vienen dadas por:

$$\mathbf{C}_\alpha = \tilde{\mathbf{C}}_\alpha \mathbf{B}, \quad (3.87)$$

siendo  $\mathbf{B}$  una matriz booleana que permite la extracción de los desplazamientos nodales de la interfase del vector global, de forma que  $\mathbf{d}_\alpha^c = \mathbf{B} \mathbf{d}_\alpha$ . Reordenando los términos de (3.86) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{total} = & \delta\mathbf{d}_s^T (\mathbf{K}_s(\omega) \mathbf{d}_s + \mathbf{C}_s \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}_s) \\ & + \delta\mathbf{d}_f^T (\mathbf{K}_f(\omega) \mathbf{d}_f - \mathbf{C}_f \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}_f) \\ & + \delta\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{C}_s^T \mathbf{d}_s - \mathbf{C}_f^T \mathbf{d}_f) = 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Donde al ser nulo el sumatorio ante cualquier desplazamiento o tracción virtual arbitrario que pueda ser introducido y obviando la solución trivial, el problema se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{d}_s^T [\mathbf{K}_s(\omega) \mathbf{d}_s + \mathbf{C}_s \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}_s] &= 0, \\ \delta\mathbf{d}_f^T [\mathbf{K}_f(\omega) \mathbf{d}_f - \mathbf{C}_f \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}_f] &= 0, \\ \delta\boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{C}_s^T \mathbf{d}_s - \mathbf{C}_f^T \mathbf{d}_f] &= 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Este sistema de ecuaciones lineales permite resolver el problema de interacción fluido-estructura para una vibración estacionaria, puede ser reescrito de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s(\omega) & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f(\omega) & -\mathbf{C}_f \\ \mathbf{C}_s^T & -\mathbf{C}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{d}_f \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_f \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (3.90)$$

que representa la condición de estacionariedad del potencial total.

### 3.4.4 Método de los Multiplicadores de Lagrange Localizados (MLL)

El método de los multiplicadores de Lagrange Localizados es un método de acoplamiento alternativo al método Mortar propuesto originalmente por Park y Felippa en [122]. En este método se utiliza un marco para representar la interfase que incorpora un campo de desplazamientos propio y se discretiza mediante elementos finitos. Las superficies en contacto se acoplan al marco mediante multiplicadores de Lagrange independientes para cada dominio. En un principio el método de los MLL se planteó para problemas de acoplamiento con mallas conformes [122] [123], a raíz de trabajos posteriores [123] [125] [133] se adaptó también a mallas no conformes y se aplicó a problemas de contacto [149].

#### Formulación variacional continua

El trabajo total producido en la interfase ( $\Gamma_c$ ) se puede escribir como la suma de los trabajos resultantes de la interacción de cada dominio con el marco [149]. De este modo:

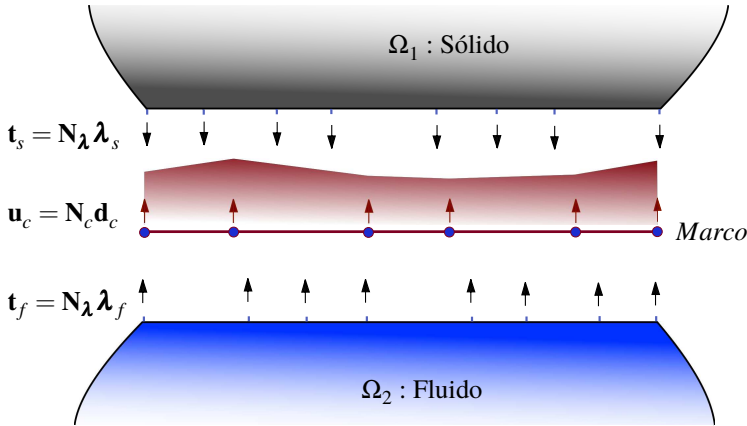
$$\Pi_c = \Pi_s^c + \Pi_f^c \quad (3.91)$$

donde el trabajo desarrollado por la interacción de cada dominio con el marco viene dada por:

$$\Pi_\alpha^c = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha^c - \mathbf{u}_c) d\Gamma \quad \alpha = s, f, \quad (3.92)$$

siendo  $\mathbf{t}_\alpha$  las tracciones de la superficie de acoplamiento del dominio  $\alpha$ ,  $\mathbf{u}_\alpha^c$  sus desplazamientos y  $\mathbf{u}_c$  el campo de desplazamientos propio del marco (ver Figura 3.17). Su forma variacional continua se expresa como:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_c = & \int_{\Gamma_c} [\delta\mathbf{t}_s(\mathbf{u}_s^c - \mathbf{u}_c) + \mathbf{t}_s\delta\mathbf{u}_s^c - \mathbf{t}_s\delta\mathbf{u}_c] d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_c} [\delta\mathbf{t}_f(\mathbf{u}_f^c - \mathbf{u}_c) + \mathbf{t}_f\delta\mathbf{u}_f^c - \mathbf{t}_f\delta\mathbf{u}_c] d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.93)$$



**Figura 3.17** Evaluación de la función de forma ( $\mathbf{N}_c$ ) en la proyección de la posición del multiplicador sobre el marco.

### Formulación variacional discreta

De manera general, tanto para mallas conformes como no conformes, se puede hacer la discretización siguiente:

$$\mathbf{u}_s^c \simeq \mathbf{N}_s \mathbf{d}_s^c, \quad (3.94)$$

$$\mathbf{u}_f^c \simeq \mathbf{N}_f \mathbf{d}_f^c, \quad (3.95)$$

$$\mathbf{u}_c \simeq \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c, \quad (3.96)$$

$$\mathbf{t}_s \simeq \mathbf{N}_\lambda^s \boldsymbol{\lambda}_s, \quad (3.97)$$

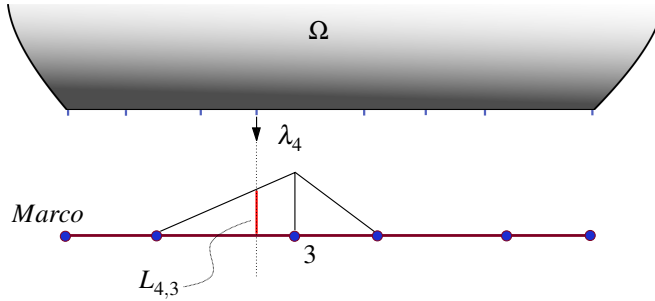
$$\mathbf{t}_f \simeq \mathbf{N}_\lambda^f \boldsymbol{\lambda}_f. \quad (3.98)$$

Donde los vectores  $\mathbf{N}$  contienen las funciones de aproximación del campo correspondiente y los vectores  $\mathbf{d}_s^c$ ,  $\mathbf{d}_f^c$  y  $\mathbf{d}_c$  están formados por los valores nodales de los desplazamientos de las diferentes mallas en la interfase. Los vectores  $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$  ( $\alpha = s, f$ ) contienen los valores nodales de las tracciones en la estructura y el fluido respectivamente.

Utilizando las aproximaciones (3.94-3.98), la expresión (3.93) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c = \int_{\Gamma_c} \left[ \delta \boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{N}_\lambda^T (\mathbf{N}_s \mathbf{d}_s^c - \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) + \boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_s \delta \mathbf{d}_s^c - \boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_c \delta \mathbf{d}_c \right] d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_c} \left[ \delta \boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{N}_\lambda^T (\mathbf{N}_f \mathbf{d}_f^c - \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) + \boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_f \delta \mathbf{d}_f^c - \boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_c \delta \mathbf{d}_c \right] d\Gamma, \quad (3.99) \end{aligned}$$

En el método de los MLL las funciones que aproximan los campos de multiplicadores de los dominios situados a cada lado del marco son funciones Delta de Dirac. Con estas funciones de aproximación el campo de multiplicadores se transforma en un conjunto de fuerzas puntuales localizadas en los nodos de la malla en la superficie de acoplamiento.



**Figura 3.18** Evaluación de la función de forma ( $N_c$ ) correspondiente al nodo 3 del marco en la proyección del multiplicador correspondiente al nodo 4 de la malla del dominio  $\Omega$ .

Las integrales de (3.99) podrán ser evaluadas de la forma:

$$\int_{\Gamma_c} \delta \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_\alpha \mathbf{d}_\alpha^c d\Gamma = \delta \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{d}_\alpha^c, \quad (3.100)$$

$$\int_{\Gamma_c} \delta \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) d\Gamma = \delta \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{L}_\alpha \mathbf{d}_c, \quad (3.101)$$

$$\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_\alpha \delta \mathbf{d}_\alpha^c d\Gamma = \delta \mathbf{d}_\alpha^{cT} \boldsymbol{\lambda}_\alpha, \quad (3.102)$$

$$\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\lambda}_\alpha^T \mathbf{N}_\lambda^T \mathbf{N}_c \delta \mathbf{d}_c) d\Gamma = \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{L}_\alpha^T \boldsymbol{\lambda}_\alpha. \quad (3.103)$$

donde el subíndice  $\alpha = s, f$  se usa nuevamente para hacer referencia a la estructura y al fluido respectivamente. En las expresiones (3.101) y (3.103) el término  $\mathbf{L}_\alpha$  son matrices que contienen la evaluación de las funciones de forma  $\mathbf{N}_c$  en la proyección de los multiplicadores sobre el marco (véase la Figura 3.18).

Sustituyendo las expresiones (3.100-3.103) en (3.99) se puede reescribir el trabajo virtual realizado en la interfase de manera discreta como:

$$\delta \Pi_c = \delta \Pi_s^c + \delta \Pi_f^c, \quad (3.104)$$

donde

$$\delta \Pi_c^s = \delta \boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{d}_s^c - \delta \boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{L}_s \mathbf{d}_c + \delta \mathbf{d}_s^{cT} \boldsymbol{\lambda}_s - \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{L}_s^T \boldsymbol{\lambda}_s, \quad (3.105)$$

$$\delta \Pi_c^f = \delta \boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{d}_f^c - \delta \boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{L}_f \mathbf{d}_c + \delta \mathbf{d}_f^{cT} \boldsymbol{\lambda}_f - \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\lambda}_f, \quad (3.106)$$

son las contribuciones provenientes de la estructura y del fluido respectivamente.

### Resolución del problema de interacción fluido-estructura

La variación total de la energía en el sistema ha de ser nula para que exista un equilibrio estable:

$$\delta \Pi_{total} = \delta \Pi_s + \delta \Pi_f + \delta \Pi_c^s + \delta \Pi_c^f. \quad (3.107)$$

Recordando las expresiones del trabajo virtual producido en la estructura (3.68) y el fluido (3.75) podemos reescribir la expresión anterior como:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{total} = & \delta\mathbf{d}_s [\mathbf{K}(\omega)\mathbf{d}_s - \mathbf{f}_s] \\ & + \delta\mathbf{d}_f [\mathbf{K}_f(\omega)\mathbf{d}_f - \mathbf{f}_f] \\ & + \delta\boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{d}_s^c - \delta\boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{L}_s \mathbf{d}_c + \delta\mathbf{d}_s^{cT} \boldsymbol{\lambda}_s - \delta\mathbf{d}_c^T \mathbf{L}_s^T \boldsymbol{\lambda}_s \\ & + \delta\boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{d}_f^c - \delta\boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{L}_f \mathbf{d}_c + \delta\mathbf{d}_f^{cT} \boldsymbol{\lambda}_f - \delta\mathbf{d}_c^T \mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\lambda}_f = 0, \end{aligned} \quad (3.108)$$

que ha de cumplirse para cualquier variación arbitraria (pero compatible con las condiciones de contorno) de los desplazamientos de los dominios, del marco y de las tracciones de la interfase. Por lo tanto, se puede reescribir la ecuación anterior reagrupando sus términos en función del operador al que multiplican como:

$$\delta\mathbf{d}_s [\mathbf{K}_s(\omega)\mathbf{d}_s - \mathbf{f}_s + \mathbf{B}_s \boldsymbol{\lambda}_s] = 0 \quad (3.109)$$

$$\delta\mathbf{d}_f [\mathbf{K}_f(\omega)\mathbf{d}_f - \mathbf{f}_f + \mathbf{B}_f \boldsymbol{\lambda}_f] = 0 \quad (3.110)$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}_s^T [\mathbf{B}_s^T \mathbf{d}_s - \delta\boldsymbol{\lambda}_s^T \mathbf{L}_s \mathbf{d}_c] = 0 \quad (3.111)$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda}_f^T [\mathbf{B}_f^T \mathbf{d}_f - \delta\boldsymbol{\lambda}_f^T \mathbf{L}_f \mathbf{d}_c] = 0 \quad (3.112)$$

$$\delta\mathbf{d}_c^T [\mathbf{L}_s^T \boldsymbol{\lambda}_s + \mathbf{L}_f^T \boldsymbol{\lambda}_f] = 0 \quad (3.113)$$

Los términos  $\mathbf{B}_\alpha$  ( $\alpha = s, f$ ) representan sendas matrices booleanas que sirven para seleccionar los grados de libertad del dominio  $\alpha$  situados en la interfase, es decir,  $\mathbf{d}_\alpha^c = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{d}_\alpha$ . Obviando la solución trivial, este sistema de ecuaciones nos permite obtener directamente la solución del campo de desplazamientos de ambos dominios, de los desplazamientos del marco y de las tracciones de la interfase. De manera matricial, el sistema se escribe:

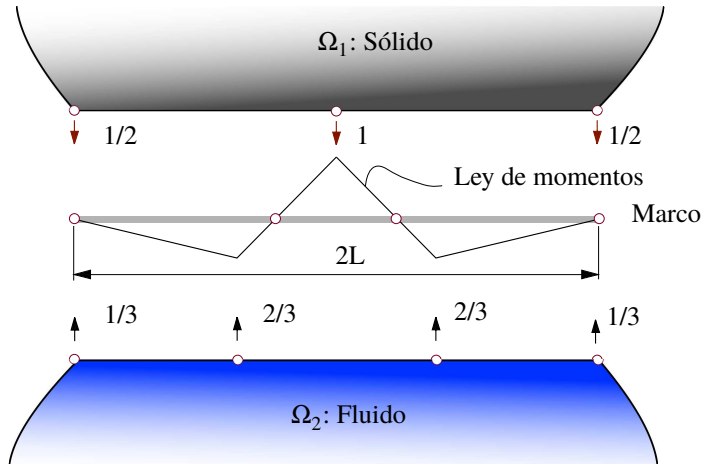
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s(\omega) & \mathbf{0} & \mathbf{B}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f(\omega) & \mathbf{0} & \mathbf{B}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_s^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_s \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_f^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{L}_s^T & -\mathbf{L}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{d}_f \\ \boldsymbol{\lambda}_s \\ \boldsymbol{\lambda}_f \\ \mathbf{d}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_s \\ \mathbf{f}_f \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.114)$$

donde el grupo de ecuaciones (3.109-3.113) está montado de manera monolítica. Para más detalles sobre la resolución de este sistema de forma particionada e iterativa véase el **Artículo III**.

### Localización de los nodos del marco de acoplamiento: Regla del momento nulo

Hasta ahora no se ha hecho ninguna especificación en cuanto a la malla del marco, sin embargo en el método de los MLL los nodos del marco no pueden estar situados de forma arbitraria, sino que su disposición ha de cumplir los requerimientos de Babuska-Brezi [51, 90, 171]. Para establecer la localización de los nodos del marco de acoplamiento se sigue la *Regla del momento nulo*, estudiada por Park *et al.* [125]. Esta regla consiste en extraer los puntos del marco en los que la resultante de los momentos producidos por los





**Figura 3.19** Aplicación de la regla del momento nulo. Representación del diagrama de momentos que producen los MLL del fluido y la estructura sobre el marco. Los nodos de la malla del marco han de situarse sobre los puntos de valor nulo del diagrama.

MLL de la interfase son nulos. En la Figura 3.19 se representa un ejemplo de una ley de momentos sobre el marco para un conjunto de MLL dados.

### 3.4.5 Resumen

En el **Artículo III** se han estudiado dos estrategias de acoplamiento MEC-MEF para problemas de interacción fluido-estructura en acústica. Los métodos empleados han sido el Método Mortar y el Método de los Multiplicadores de Lagrange Localizados, de los cuales este último ha sido por primera vez utilizado para este tipo de problemas. En este artículo se propone además el uso del Método del Bi-Gradiente Conjugado para la resolución de los sistemas de ecuaciones resultantes, aportando escalabilidad al problema. Para probar las formulaciones y el método de resolución se han resuelto varios ejemplos, en los que se comprueba que el Método de los Multiplicadores de Lagrange Localizados ofrece mejores resultados que el Método Mortar en General. Por otro lado también se ha comprobado la escalabilidad de los problemas resueltos.



# 4 Conclusiones y trabajos futuros

---

## 4.1 Resumen y conclusiones

En esta tesis se han desarrollado diferentes formulaciones numéricas para el estudio de problemas de propagación de ondas lineales en fluidos. Además, se ha abordado el problema acústico de interacción fluido-estructura, modelando el medio fluido y el sólido mediante diferentes métodos numéricos con mallas no conformes en la interfase. El trabajo llevado a cabo durante la realización de esta tesis ha dado lugar a los tres artículos anejos y de los que se hace una revisión a continuación; destacando sus resultados y conclusiones más relevantes.

- **Artículo I**

En el artículo contenido en el Apéndice A, se desarrolla una solución fundamental para el problema de Helmholtz en dos dimensiones con el número de onda variable en una dirección. El trabajo se ha desarrollado en el contexto de la propagación de oleaje modelado mediante la EPS, que reproduce el fenómeno de propagación de olas de pequeña amplitud, incluyendo los efectos de difracción, refracción y asomeramiento. Dicha solución fundamental, que está basada en la inversión mediante el algoritmo IFFT de un problema unidimensional en el espacio de Fourier, es además introducida en una formulación MEC que posteriormente es utilizada para resolver algunos ejemplos de referencia. Entre esos ejemplos se encuentran dos especialmente destacables.

El primero de ellos consiste en un problema de propagación de oleaje sobre una rampa en la que se superpone un montículo con forma elíptica. Esta variación en la geometría del fondo provoca una perturbación en el campo de la altura de ola. El problema ha sido resuelto mediante un acoplamiento MEC-MEF, utilizando el MEF para modelar la región interna con batimetría irregular y el MEC para la región externa con batimetría variable en una dirección. Este problema es especialmente relevante pues ha servido como prueba para numerosas formulaciones sobre la propagación de oleaje desde los años 70.

El último problema resuelto el artículo es el modelo de propagación de oleaje en el puerto de Chipiona (Cádiz). Este caso ha sido tratado exclusivamente mediante el MEC, aproximando la forma real de la batimetría mediante líneas rectas y paralelas a la línea de costa. El modelo permite hallar la solución del problema cubriendo un gran área alrededor del puerto con tan sólo discretizar el contorno de este.

Los resultados contenidos en el **Artículo I** muestran que el MEC provisto de la solución fundamental para profundidad variable es una herramienta muy útil, pues en muchos problemas reales la batimetría puede ser aproximada mediante líneas rectas y paralelas a la línea de costa. Además, la solución fundamental puede ser incluida dentro de un modelo acoplado MEC-MEF, donde el MEF es usado para modelar la región interna y el MEC la externa. Este acoplamiento permite resolver problemas con batimetrías complejas, cumpliéndose la condición de radiación en el infinito para condiciones de contorno de dominio abierto incluso con batimetría variable.

- **Artículo II**

El artículo contenido en el Apéndice B presenta una formulación de acoplamiento MEC-MEF para la EPS mediante elementos espectrales. El tipo de elemento utilizado aproxima las variables de forma espacial mediante polinomios de Lagrange con posiciones nodales localizadas en los puntos de cuadratura LGL. Esta clase de aproximación es usualmente denominada como *pseudo-espectral* y confiere al MEC y al MEF una convergencia exponencial de la solución con el incremento del orden de los elementos.

Las principal aportación de este artículo es la formulación del Método de los Elementos de Contorno Espectrales (MECE) para el problema de Helmholtz con número de onda constante y variable. Dentro de esta formulación, se detalla también un método semi-analítico para la evaluación de las integrales impropias inherentes al MEC. Además, se lleva a cabo el acoplamiento MECE-MEE para la resolución de problemas de propagación de oleaje en dominios abiertos con fondo variable, combinando las ventajas de ambos métodos.

La convergencia del MECE ha sido comprobada y comparada con la del MEE en un problema de propagación sobre fondo plano de solución conocida. El ejemplo se resuelve incrementando el orden de aproximación elemental, demostrando que el MECE presenta una convergencia similar a la del MEE.

El acoplamiento MECE-MEE ha sido examinado mediante la solución de dos problemas de referencia para modelos basados en la EPS. El primero de ellos consiste en un problema de propagación de oleaje sobre una región con fondo plano en la que existe un montículo con forma parabólica. En el segundo ejemplo, el oleaje se propaga sobre una rampa en la que hay un montículo con forma elíptica; para hallar la solución de este último ejemplo es necesario dotar al MECE de la solución fundamental presentada en el **Artículo I**. En ambos casos se hace uso de la versatilidad del acoplamiento MECE-MEE, que permite modelar regiones de batimetría variable en dominios abiertos, satisfaciendo la condición de radiación en el infinito. El método demuestra tener una convergencia exponencial, reduciendo en

gran medida el número de grados de libertad requeridos comparado con un método de acoplamiento MEC-MEF clásico.

- **Artículo III**

El tercer artículo que forma parte de esta tesis, incluido en el Apéndice C, estudia diferentes estrategias de acoplamiento MEC-MEF para problemas de interacción fluido-estructura en acústica.

En este trabajo, el MEC es utilizado para modelar el dominio fluido aprovechando sus ventajas en cuanto a precisión, número de grados de libertad requeridos y cumplimiento de la condición de radiación de Sommerfeld en el infinito; mientras que el MEF es utilizado para modelar la estructura.

Los métodos de acoplamiento utilizados son el método Mortar y el método de los MLL, siendo este último utilizado por primera vez para el problema acústico. Ambas formulaciones permiten llevar a cabo acoplamientos con mallas no conformes en la interfase. Además, los sistemas de ecuaciones lineales resultantes de la aplicación de estas formulaciones particionadas son resueltos mediante el método iterativo BiCGSTAB, demostrando la escalabilidad del proceso de solución del sistema particionado.

En el artículo se resuelven tres ejemplos en los que se analiza el comportamiento del método Mortar y del método de los MLL. En el primero de ellos se analizan los modos de vibración de una cavidad acústica mediante un barrido en frecuencia, presentándose además, los desplazamientos y presiones en la estructura, el fluido y la interfase de forma detallada. Este ejemplo ha sido resuelto para mallas altamente no conformes entre el fluido y la estructura. El segundo ejemplo resuelve un problema en el que una onda de presión viaja a través de un conducto. Este problema es resuelto aumentando el número de particiones, comprobándose que ante este hecho el número de iteraciones requerido para convergencia no se ve afectado de manera significativa. Finalmente, se resuelve un problema externo en el que un tren de ondas incide sobre una cavidad hueca con una pared flexible. En todos los ejemplos estudiados los sistemas resultan ser escalables, dependiendo el número de iteraciones necesarias para el BiCGSTAB principalmente del número de grados de libertad en la interfase y el grado de no conformidad existente entre ambas mallas.

En conclusión, en los tres artículos que componen esta tesis se han abordado problemas de transmisión de ondas lineales en fluidos, aportando cada uno de ellos soluciones a tres problemas de actual interés en ingeniería. En el primero de ellos se propone una solución fundamental que permite resolver problemas de propagación de ondas en medios no homogéneos mediante el MEC, en el segundo se aborda la dispersión numérica y el error de polución a través del uso de elementos espectrales de alto orden y, por último, en el tercer artículo se estudian estrategias de acoplamiento para problemas de interacción fluido-estructura en acústica.

## 4.2 Trabajos futuros

Como resultado de esta tesis quedan abiertas muchas e interesantes líneas de investigación para el futuro. A partir del primero de los artículos anejos podría continuarse con:

- La extensión de la formulación MEC a modelos de propagación de oleaje más complejos, como la Ecuación de Pendiente Suave Modificada (EPSM) [35] o la EPSE [112], lo que permitiría ampliar el espectro de problemas reales que pueden ser resueltos mediante el MEC.
- Por otro lado, se podría desarrollar una solución fundamental con el número de onda variable en una dirección para el problema tridimensional siguiendo un procedimiento parecido. Esta solución fundamental permitiría resolver el problema acústico en medios no homogéneos mediante el MEC.

A partir el segundo artículo, en el que se conjugan el MEF, el MEC y los elementos espectrales, surgen las siguientes ideas que pueden ser llevadas a cabo en el futuro:

- La formulación mediante el MECE del problema acústico tridimensional. Esta técnica aportaría una reducción significativa del coste computacional, además de incrementar la precisión, especialmente para altas frecuencias.
- La aplicación del MEE y el MECE en teorías de propagación de oleaje no lineales en el dominio del tiempo, como el modelo de Boussinesq. Discretizaciones basadas en elementos espectrales están empezando a incorporarse a estas formulaciones, mostrando muy buenos resultados.

Por último, como consecuencia del tercer artículo y continuando las propuestas anteriores, las siguientes líneas de trabajo podrían ser abordadas en el futuro:

- La extensión al espacio tridimensional de las formulaciones MEC-MEF acopladas mediante el método Mortar y el método de los MLL en problemas de interacción fluido estructura en acústica. Sin duda esta línea es de gran interés, pues está ligada numerosas aplicaciones en la industria y la construcción. Tras los buenos resultados demostrados en dominios bidimensionales, es de esperar que el comportamiento de estas formulaciones sea parecido para el caso tridimensional.
- Otro aspecto interesante sería llevar a cabo a cabo una formulación MECE-MEE para problemas de interacción fluido-estructura mediante el Método Mortar o el método de los MLL. A partir de mallas conformes en la interfase el refinamiento en cualquiera de ellas podría llevarse a cabo aumentando el orden del elemento.

# Bibliografía

---

- [1] M. Ainsworth. Discrete dispersion relation for hp-version finite element approximation at high wave number. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2):553–575, 2004.
- [2] G. B. Airy. *Encyclopedia Metropolitana*, chapter Tides and waves, page 289. 1845.
- [3] I. Babuška and M. Suri. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80(1):5 – 26, 1990.
- [4] I. Babuška, B. A. Szabo, and I. N. Katz. The p-version of the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 18(3):515–545, 1981.
- [5] I. M. Babuška and S. A. Sauter. Is the pollution effect of the fem avoidable for the helmholtz equation considering high wave numbers? *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(6):2392–2423, 1997.
- [6] M. R. Bai and S. Chang. Active noise control of enclosed harmonic fields by using bem-based optimization techniques. *Applied Acoustics*, 48(1):15 – 32, 1996.
- [7] P. K. Banerjee and T. G. Davies. The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils. *Géotechnique*, 28(3):309–326, 1978.
- [8] A. Bayliss, C. Goldstein, and E. Turkel. On accuracy conditions for the numerical computation of waves. *Journal of Computational Physics*, 59(3):396 – 404, 1985.
- [9] K. Belibassakis. The Green’s function of the mild-slope equation: The case of a monotonic bed profile. *Wave Motion*, 32:339–361, 2000.
- [10] K. Belibassakis, G. Athanassoulis, and T. Gerostathis. A coupled-mode model for the refraction-diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry. *Applied Ocean Research*, 23(6):319 – 336, 2001.

- [11] K. Belibassakis, T. Gerostathis, and G. Athanassoulis. A coupled-mode model for water wave scattering by horizontal, non-homogeneous current in general bottom topography. *Applied Ocean Research*, 33(4):384 – 397, 2011.
- [12] G. Bellotti, G. M. Beltrami, and P. D. Girolamo. Internal generation of waves in 2d fully elliptic mild-slope equation FEM models. *Coastal Engineering*, 49:71 – 81, 2003.
- [13] G. M. Beltrami, G. Bellotti, P. D. Girolamo, and P. Sammarco. Treatment of wave breaking and total absorption in a mild-slope equation fem model. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 127(5):263–271, 2001.
- [14] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185 – 200, 1994.
- [15] P. G. Bergmann. The equation in a medium with a variable index of refraction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 17(4):329 – 333, 1946.
- [16] J. Berkhoff. *Finite Element in Fluids*, volume 1, chapter Linear wave propagation problem and the finite element method, pages 251–264. Wiley New York, 1975.
- [17] J. Berkhoff, N. Booij, and A. Radder. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coastal Engineering*, 6(3):255 – 279, 1982.
- [18] W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In *Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering*. ASCE, 1972.
- [19] W. Berkhoff. *Mathematical Models for Simple Harmonic Linear Water Waves. Wave Diffraction and Refraction*. PhD thesis, Delft Hydraulics Laboratory, 1976.
- [20] P. Bettess and O. C. Zienkiewicz. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(8):1271–1290, 1977.
- [21] D. Blackstock. *Fundamentals of Physical Acoustics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 2000.
- [22] M. Bonnet. *Encyclopedia of Computational Mechanics: Boundary integral equation methods for elastic and plastic methods*, volume 2. John Wile and Sons, 2004.
- [23] N. Booij. *Gravity Waves on Water with Non-uniform Depth and Current*. PhD thesis, 1981.
- [24] N. Booij. A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Engineering*, 7(3):191 – 203, 1983.
- [25] P. Bouillard. Influence of the pollution on the admissible field error estimation for fe solutions of the helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(7):783–800, 1999.



- [26] J. V. Boussinesq. Thèorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2(17):55 – 108, 1872.
- [27] A. Brancati, M. H. Aliabadi, and V. Mallardo. A bem sensitivity formulation for three-dimensional active noise control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(9):1183–1206, 2012.
- [28] C. Brebbia and S. Walker. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Newnes-Butterworths, 1980.
- [29] C. A. Brebbia and J. Domínguez. *Boundary elements: an introductory course*. Computational Mechanics, 2 edition, 1992.
- [30] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Z. Jr. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1988.
- [31] C. G. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral methods: fundamentals in single domains*. Scientific Computation. Springer, 2nd printing. 3rd printing. edition, 2010.
- [32] A. Cerrato, J. A. González, and L. Rodríguez-Tembleque. Boundary element formulation of the mild-slope equation for harmonic water waves propagating over unidirectional variable bathymetries. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 62:22 – 34, 2016.
- [33] O. Cessenat and B. Despres. Application of an ultra weak variational formulation of elliptic pdes to the two-dimensional helmholtz problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(1):255–299, 1998.
- [34] C. C.G., H. M.Y., and Z. T.A. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. 2007.
- [35] P. Chamberlain and D. Porter. The modified mild-slope equation. *Journal Fluid Mechanics*, 291:393 – 407, 1995.
- [36] C. N. Chandrasekera and K. F. Cheung. Extended linear refraction-diffraction model. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 123(5):280 – 286, 1997.
- [37] H. Chen. Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering. *Applied Ocean Research*, 8(2):99 – 104, 1986.
- [38] H. Chen and C. Mei. Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea. In *Symposium on Naval Hydrodynamics 10th*. Cambridge, June 1974.

- [39] W. Chen. *Finite element modeling of wave transformation in harbors and coastal regions with complex bathymetry and ambient currents*. PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Maine, August 2002.
- [40] Z. Chen, G. Hofstetter, and H. Mang. A galerkin-type be-fe formulation for elasto-acoustic coupling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 152(1):147 – 155, 1998.
- [41] A. H.-D. Cheng and D. T. Cheng. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3):268 – 302, 2005.
- [42] G. C. Cohen. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Scientific Computation. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2002.
- [43] G. J. Copeland. A practical alternative to the "mild-slope" wave equation. *Coastal Engineering*, 9(2):125 – 149, 1985.
- [44] S. A. O. David Gottlieb. *Numerical Analysis of Spectral Methods - Theory and Applications*. SIAM, 1977.
- [45] L. de Lacerda, L. Wrobel, and W. Mansur. A dual boundary element formulation for sound propagation around barriers over an impedance plane. *Journal of Sound and Vibration*, 202(2):235 – 247, 1997.
- [46] L. A. de Lacerda, L. C. Wrobel, H. Power, and W. J. Mansur. A novel boundary integral formulation for three-dimensional analysis of thin acoustic barriers over an impedance plane. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(2):671–678, 1998.
- [47] A. Deraemaeker, I. Babuška, and P. Bouillard. Dispersion and pollution of the fem solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4):471–499, 1999.
- [48] M. W. Dingemans. *Water wave propagation over uneven bottom*. PhD thesis, Delft University of Technology. Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science, 1994.
- [49] J. Domínguez. *Boundary elements in dynamics*. International series on computational engineering. Computational Mechanics Publications; Elsevier Applied Science, har/dsk edition, 1993.
- [50] C. Eckart. The propagation of gravity waves from deep to shallow water. In *Gravity Waves*, page 165, Nov. 1952.
- [51] N. El-Abbasi and K. Bathe. Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computer and structures*, 79:1473–1486, 2001.

- [52] H. B. K. Eugene Isaacson. *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications, 1994.
- [53] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, V. 19 GSM/19. American Mathematical Society, 1998.
- [54] G. C. Everstine and F. M. Henderson. Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(5):1938–1947, 1990.
- [55] J. Falnes. *Ocean Waves and Oscillating Systems: Linear Interactions Including Wave-Energy Extraction*. Cambridge University Press, 1 edition, 2002.
- [56] C. Farhat, I. Harari, and L. P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(48):6455 – 6479, 2001.
- [57] M. Fischer and L. Gaul. Fast BEM-FEM mortar coupling for acoustic-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(12):1677–1690, 2005.
- [58] G. Gabard, P. Gamallo, and T. Huttunen. A comparison of wave-based discontinuous galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(3):380–402, 2011.
- [59] D. Givoli. Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 94(1):1 – 29, 1991.
- [60] D. Givoli and J. B. Keller. Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave Motion*, 12(3):261 – 279, 1990.
- [61] M. Goldstein. *Aeroacoustics*. McGraw-Hill International Book Company, 1976.
- [62] J. A. González and K. C. Park. BEM and FEM coupling in elastostatics using localized lagrange multipliers. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 69:2058–2074, 2007.
- [63] J. A. González and K. C. Park. A simple explicit-implicit finite element tearing and interconnecting transient analysis algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(10):1203–1226, 2012.
- [64] J. A. González, K. C. Park, and C. A. Felippa. Fem and bem coupling in elastostatics using localized lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10):2058–2074, 2007.
- [65] J. A. González, K. C. Park, I. Lee, C. A. Felippa, and R. Ohayon. Partitioned vibration analysis of internal fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(3):268–300, 2012.

- [66] J. A. González, L. Rodríguez-Tembleque, K. C. Park, and R. Abascal. The ns-BETI method: an extension of the FETI method to non-symmetrical BEM-FEM coupled problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, DOI:10.1002/nme.4418, 2012.
- [67] I. Harari and T. J. Hughes. Finite element methods for the helmholtz equation in an exterior domain: Model problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 87(1):59 – 96, 1991.
- [68] I. Harari and T. J. Hughes. A cost comparison of boundary element and finite element methods for problems of time-harmonic acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97(1):77 – 102, 1992.
- [69] I. Harari and F. Magoulés. Numerical investigations of stabilized finite element computations for acoustics. *Wave Motion*, 39(4):339 – 349, 2004. New computational methods for wave propagation.
- [70] I. Harari, I. Patlashenko, and D. Givoli. Dirichlet-to-neumann maps for unbounded wave guides. *Journal of Computational Physics*, 143(1):200 – 223, 1998.
- [71] I. Harari and E. Turkel. Accurate finite difference methods for time-harmonic wave propagation. *Journal of Computational Physics*, 119(2):252 – 270, 1995.
- [72] A. Hauguel. A combined FE-BIE method for water waves. In *16th International Conference on Coastal Engineering*, pages 715–721, 1978.
- [73] Y. He, M. Min, and D. P. Nicholls. A spectral element method with transparent boundary condition for periodic layered media scattering. *Journal of Scientific Computing*, pages 1–31, 2016.
- [74] Z. He, G. Liu, Z. Zhong, G. Zhang, and A. Cheng. A coupled es-fem/bem method for fluid-structure interaction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1):140 – 147, 2011.
- [75] J. Hess and A. Smith. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. *Progress in Aerospace Sciences*, 8:1 – 138, 1967.
- [76] R. L. Holford. Elementary source-type solutions of the reduced wave equation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(5):1427–1436, 1981.
- [77] J. R. Houston. Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method. *Applied Ocean Research*, 3(4):163 – 170, 1981.
- [78] T.-W. Hsu, T.-Y. Lin, C.-C. Wen, and S.-H. Ou. A complementary mild-slope equation derived using higher-order depth function for waves obliquely propagating on sloping bottom. *Physics of Fluids*, 18(8), 2006.
- [79] T.-W. Hsu and C.-C. Wen. A study of using parabolic model to describe wave breaking and wide-angle wave incidence. *J. Chin. Inst. Eng.*, 23(4):515–527, July 2000.

- [80] T.-W. Hsu and C.-C. Wen. A parabolic equation extended to account for rapidly varying topography. *Ocean Engineering*, 28(11):1479 – 1498, 2001.
- [81] T. J. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(2):173 – 189, 1989.
- [82] K. ichiro Hamanaka. Open, partial reflection and incident-absorbing boundary conditions in wave analysis with a boundary integral method. *Coastal Engineering*, 30(3–4):281 – 298, 1997.
- [83] F. Ihlenburg and I. Babuška. Dispersion analysis and error estimation of galerkin finite element methods for the helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(22):3745–3774, 1995.
- [84] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part i: The h-version of the {FEM}. *Computers & Mathematics with Applications*, 30(9):9 – 37, 1995.
- [85] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part ii: The h-p version of the fem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(1):315–358, 1997.
- [86] M. Isaacson and S. Qu. Waves in a harbour with partially reflecting boundaries. *Coastal Engineering*, 14(3):193 – 214, 1990.
- [87] Y. Ito and K. Tanimoto. A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction. In *Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering*. ASCE, 1972.
- [88] M. A. Jaswon. Integral equation methods in potential theory. i. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 275(1360):23–32, 1963.
- [89] J. B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 82(1):172 – 192, 1989.
- [90] N. Kikuchi and J. Oden. *Contact problems in esasticity: A study of variational inequalities and finite elements methods*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1998.
- [91] J. T. Kirby. A general wave equation for waves over rippled beds. *Journal of Fluid Mechanics*, 162:171 – 186, 1986.
- [92] J. T. Kirby. Rational approximations in the parabolic equation method for water waves. *Coastal Engineering*, 10(4):355 – 378, 1986.
- [93] J. T. Kirby and R. A. Dalrymple. Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves. *Coastal Engineering*, 8(3):219 – 232, 1984.

- [94] S. Kirkup. *The Boundary Element Method in Acoustics*. Integrated Sound Software, 2007.
- [95] I. B. P. L. Fox. *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. Oxford Mathematical Handbooks. Oxford University Press, 1968.
- [96] J. Lachat and J. Watson. A second generation boundary integral equation program for three dimensional elastic analysis. In *ASME AMD*, volume 11, pages 85–100, 1975.
- [97] H. Lamb. *Hydrodynamics*. University Press, 1895.
- [98] C. Lanczos. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *Journal of Mathematics and Physics*, 17(1-4):123–199, 1938.
- [99] S. Lau and Z. Ji. Efficient 3-d infinite element for water wave diffraction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(6):1371–1387, 1989. cited By (since 1996)6.
- [100] C. Lee, W. S. Park, Y.-S. Cho, and K. D. Suh. Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, 34:243 – 257, 1998.
- [101] H. S. Lee, S. D. Kim, K.-H. Wang, and S. Eom. Boundary element modeling of multidirectional random waves in a harbor with a rectangular navigation channel. *Ocean Engineering*, 36(17-18):1287 – 1294, 2009.
- [102] N. M. Leopold B. Felsen. *Radiation and scattering of waves*. Wiley-IEEE, 1994.
- [103] B. Li. An evolution equation for water waves. *Coastal Engineering*, 23(3):227 – 242, 1994.
- [104] W. Li, T. Wu, and A. Seybert. A half-space boundary element method for acoustic problems with a reflecting plane of arbitrary impedance. *Journal of Sound and Vibration*, 171(2):173 – 184, 1994.
- [105] Y. L. Li, C. H. Liu, and S. J. Franke. Three-dimensional green’s function for wave propagation in a linearly inhomogeneous medium - the exact analytic solution. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(6):2285–2291, 1990.
- [106] G. R. Liu, K. Y. Dai, and T. T. Nguyen. A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics*, 39(6):859–877, 2006.
- [107] H. Liu. A modified GDRBEM model for wave scattering. In *International Conference on Estuaries and Coasts*, pages 749–755, 11 2003.
- [108] S.-X. Liu, B. Sun, Z.-B. Sun, and J.-X. Li. Self-adaptive FEM numerical modeling of the mild-slope equation. *Applied Mathematical Modelling*, 32(12):2775 – 2791, 2008.

- [109] C. B. Y. Maday and A. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In *Non linear partial differential equations and their applications*, pages 13–51, New York, 1994. Pitman and Wiley.
- [110] T. Manacorda. Origin and development of the concept of wave. *Meccanica*, 26(1):1–5, 1991.
- [111] G. D. Manolis and R. P. Shaw. Green’s function for the vector wave equation in a mildly heterogeneous continuum. *Wave Motion*, 24(1):59 – 83, 1996.
- [112] S. R. Massel. Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Engineering*, 19:97 – 126, 1993.
- [113] O. Z. Mehdizadeh and M. Paraschivoiu. Investigation of a two-dimensional spectral element method for helmholtz’s equation. *Journal of Computational Physics*, 189:111 – 129, 2003.
- [114] C. Mei. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. Advanced series on ocean engineering. World Scientific, 1989.
- [115] C. Mei and C. H.S. Hybrid-element method for water waves. In *ASCE Modeling*, 1975.
- [116] C. Mei, M. Stiassnie, and D. Yue. *Theory and Applications of Ocean Surface Waves: Linear aspects*. Advanced series on ocean engineering. World Scientific, 2005.
- [117] J. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1–4):289 – 314, 1996.
- [118] D. Modesto, S. Zlotnik, and A. Huerta. Proper generalized decomposition for parameterized helmholtz problems in heterogeneous and unbounded domains: Application to harbor agitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295:127 – 149, 2015.
- [119] P. M. Morse and H. Feshbach. *Methods Of Theoretical Physics*, volume 1 & 2. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [120] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Akustik I / Acoustics I*. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik 3 / 11 / 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1961.
- [121] V. Panchang, B. X. W. Chen, K. Schelenker, Z. Demirbilek, and M. Okihiro. Exterior bathymetry effects in elliptic harbor wave models. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 126:71–78, March-April 2000.
- [122] K. C. Park and C. A. Felippa. A variational framework for solution method developments in structural mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 47:242–249, 1998.

- [123] K. C. Park, C. A. Felippa, and U. Gumaste. A localized version of the method of lagrange multipliers and its applications. *Computational Mechanics*, 24:476–490, 2000.
- [124] K. C. Park, C. A. Felippa, and R. Ohayon. Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25):2989 – 3007, 2001. Advances in Computational Methods for Fluid-Structure Interaction.
- [125] K. C. Park, C. A. Felippa, and G. Rebel. A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2117–2142, 2002.
- [126] K. C. Park, R. Ohayon, C. A. Felippa, and J. A. González. Partitioned formulation of internal and gravity waves interacting with flexible structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12):723 – 733, 2010.
- [127] A. T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468 – 488, 1984.
- [128] S. Petersen, D. Dreyer, and O. von Estorff. Assessment of finite and spectral element shape functions for efficient iterative simulations of interior acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44â€“47):6463 – 6478, 2006.
- [129] A. Pierce. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. Acoustical Society of America, 1989.
- [130] D. Porter and D. Staziker. Extensions of the mild-slope equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 300:367–382, 1995.
- [131] A. C. Radder. On the parabolic equation method for water-wave propagation. *Journal of Fluid Mechanics*, 95:179–176, 1979.
- [132] C. Rajakumar and A. Ali. Boundary element-finite element coupled eigenanalysis of fluid-structure systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(10):1625–1634, 1996.
- [133] G. Rebel, K. C. Park, and C. A. Felippa. A contact formulation based on localized lagrange multipliers: formulation and application to two-dimensional problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:263–297, 2002.
- [134] F. J. Rizzo. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 25(1):83–95, 1967.
- [135] Z. Rong and C. Xu. Numerical approximation of acoustic waves by spectral element methods. *Appl. Numer. Math.*, 58(7):999–1016, July 2008.
- [136] M. R. Ross, C. A. Felippa, K. C. Park, and M. A. Sprague. Treatment of acoustic fluid-structure interaction by localized lagrange multipliers: Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33-40):3057 – 3079, 2008.



- [137] M. R. Ross, M. A. Sprague, C. A. Felippa, and K. C. Park. Treatment of acoustic fluid-structure interaction by localized lagrange multipliers and comparison to alternative interface-coupling methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9-12):986 – 1005, 2009.
- [138] G. Sandberg, P. Wernberg, and P. Davidson. Fundamentals of fluid-structure interaction. In G. Sandberg and R. Ohayon, editors, *G. Sandberg and R. Ohayon (Eds.) Computational Aspects of structural acoustics and vibratinton*, pages 23–102, New York, 2008. Springer Wien New York.
- [139] S. Schneider. Fe/fmbe coupling to model fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(13):2137–2156, 2008.
- [140] J. C. Schönfeld. Propagation of two dimensional short waves. Delft University of Technology Manuscript (in Dutch), 1972.
- [141] R. Seznec. Diffraction of sound around barriers: Use of the boundary elements technique. *Journal of Sound and Vibration*, 73(2):195 – 209, 1980.
- [142] R. Shaw and W. Falby. FEBIE - A combined finite element-boundary integral equation method. *Computers & Fluids*, 6(3):153 – 160, 1978.
- [143] J. Shen, T. Tang, and L.-L. Wang. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics 41. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2011.
- [144] J. Shen and L.-L. Wang. Spectral approximation of the helmholtz equation with high wave numbers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(2):623–644, 2005.
- [145] B. Shizgal. *Spectral Methods in Chemistry and Physics: Applications to Kinetic Theory and Quantum Mechanics*. Scientific Computation. Springer Netherlands, 1 edition, 2015.
- [146] J. Simo, P. Wriggers, and R. Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:163–180, 1985.
- [147] E. Skudrzyk. *The Foundations of Acoustics: Basic Mathematics and Basic Acoustics*. Springer-Verlag Wien, 1 edition, 1971.
- [148] R. Smith and T. Sprinks. Scattering of surface waves by a conical island. *Journal of Fluid Mechanics*, 72:373–384, 1975.
- [149] L. R.-T. Solano. *Formulación numérica de la interacción mecánica entre superficies de sólidos 3D*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, Sevilla, mayo 2009.
- [150] D. Steward and V. Panchang. Improved coastal boundary condition for surface water waves. *Ocean Engineering*, 28(1):139 – 157, 2001.

- [151] G. G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. In *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, volume 8, pages 441–455. 1847.
- [152] K. D. Suh, C. Lee, and W. S. Park. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, 32:91 – 117, 1997.
- [153] L. L. Thompson and P. M. Pinsky. A galerkin least-squares finite element method for the two-dimensional helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(3):371–397, 1995.
- [154] T.-K. Tsay and P.L.-F. Liu. A finite element model for wave refraction and diffraction. *Applied Ocean Research*, 5(1):30 – 37, 1983.
- [155] T.-K. Tsay, W. Zhu, and P.-F. Liu. A finite element model for wave refraction, diffraction, reflection and dissipation. *Applied Ocean Research*, 11(1):33 – 38, 1989.
- [156] E. Turkel, D. Gordon, R. Gordon, and S. Tsynkov. Compact 2d and 3d sixth order schemes for the helmholtz equation with variable wave number. *Journal of Computational Physics*, 232(1):272 – 287, 2013.
- [157] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23:805–823, 1956.
- [158] G. van de Sande. Literature study for the msc thesis. the mild-slope equation and its numerical implementation. Master’s thesis, Delft University of Technology, 12 2011.
- [159] P. E. Vos, S. J. Sherwin, and R. M. Kirby. From h to p efficiently: Implementing finite and spectral/hp element methods to achieve optimal performance for low- and high-order discretisations. *Journal of Computational Physics*, 229(13):5161 – 5181, 2010.
- [160] D. Wang, R. Tezaur, J. Toivanen, and C. Farhat. Overview of the discontinuous enrichment method, the ultra-weak variational formulation, and the partition of unity method for acoustic scattering in the medium frequency regime and performance comparisons. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(4):403–417, 2012.
- [161] H. Wang and S. Xiang. On the convergence rates of legendre approximation. *Mathematics of Computation*, 81(278):861–877, 2012.
- [162] K. Wang and Y. S. Wong. Pollution-free finite difference schemes for non-homogeneous Helmholtz equation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 4(11):787–815, December 2014.
- [163] K. Watanabe. *Integral Transform Techniques for Green’s Function*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 76. Springer International Publishing, 2 edition, 2015.

- 
- [164] D. T. Wilton. Acoustic radiation and scattering from elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 13(1):123–138, 1978.
- [165] B. I. Wohlmuth. *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering 17. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2001.
- [166] T. Wu. *Boundary Element Acoustics, Fundamentals and Computer Codes*, volume 3. WIT Press, Boston, 5 edition, 2000.
- [167] Y. Xu. Radiation condition and scattering problem for time-harmonic acoustic waves in a stratified medium with a nonstratified inhomogeneity. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 54(1):9–29, 1995.
- [168] L. Yao, Y. Li, and L. Li. Dispersion error reduction for acoustic problems using the smoothed finite element method (sfem). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 80(6):343–357, 2016. FLD-14-0421.R1.
- [169] S. Zhu. A new DRBEM model for wave refraction and diffraction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(4):261–274, 1993.
- [170] S.-P. Zhu, H.-W. Liu, and K. Chen. A general DRBEM model for wave refraction and diffraction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(5):377 – 390, 2000.
- [171] O. Zienkiewicz, S. Qu, R. Taylor, and S. Nakazawa. Finite element modeling of rolling contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:1873–1883, 1986.



**Apéndice A**

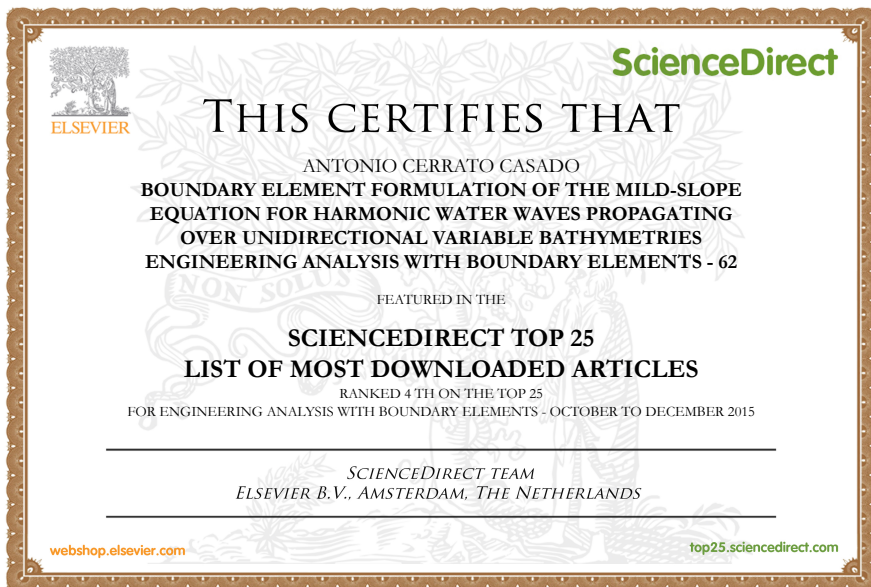
**Artículo I: Boundary element  
formulation of the Mild-Slope  
Equation for harmonic water waves  
propagating over unidirectional  
variable bathymetries**

---

The original version of this paper can be found in [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

- DOI: 10.1016/j.enganabound.2015.09.006
- Journal Name: Engineering Analysis with Boundary Elements
- ISSN: 0955-7997
- Journal Citation Reports (2015): Impact factor: 1.862
  - Classification (Engineering, Multidisciplinary): Q1(20/85)
  - Classification (Mathematics, Interdisciplinary Applications): Q1(23/101)
- SCIMAGO (2015): Impact factor: 1.251
  - Classification (Applied Mathematics): Q1(86/461)
  - Classification (Computational Mathematics): Q1(22/134)
  - Classification (Engineering (miscellaneous)): Q1(26/544)
  - Classification (Analysis): Q2(34/118)









# Boundary element formulation of the Mild-Slope Equation for harmonic water waves propagating over unidirectional variable bathymetries

**Authors:** Antonio Cerrato, José A. González and Luis Rodríguez-Tembleque

Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, Spain

## Abstract

This paper presents a boundary element formulation for the solution of the Mild-Slope equation in wave propagation problems with variable water depth in one direction. Based on the Green's function approximation proposed by Belibassakis [3], a complete fundamental-solution kernel is developed and combined with a boundary element scheme for the solution of water wave propagation problems in closed and open domains where the bathymetry changes arbitrarily and smoothly in a preferential direction. The ability of the proposed formulation to accurately represent wave phenomena like refraction, reflection, diffraction and shoaling, is demonstrated with the solution of some example problems, in which arbitrary geometries and variable seabed profiles with slopes up to 1:3 are considered. The obtained results are also compared with theoretical solutions, showing an excellent agreement that demonstrates its potential.

**Keywords:** Wave propagation; Mild-slope equation; Helmholtz equation; Boundary element method

## A.1 Introduction

Wave propagation in variable-depth waters is a problem of significant importance in coastal engineering with applications in the design and maintenance of harbors, coastal defense works and hydrodynamic and sediment transportation studies. It is well known that the transmission of linear waves in intermediate and deep waters can be reproduced by the elliptical Mild-Slope Equation (MSE) which was derived by Berkhoff [9] in the early 70s. The MSE considers simultaneously the effects of diffraction, refraction, reflection and shoaling of linear water surface waves and it is formally valid for slowly varying sea bed slopes, i.e.  $\nabla h \ll kh$ , being  $h$  the water depth and  $k$  the wave number. The validity of the MSE has been evaluated by Tsay and Liu [51] demonstrating that it produces accurate results for bottom slopes up to 1:1 when waves are propagating perpendicularly to the bathymetry contour lines. Nevertheless, Booij [13] verified that, for general directions of wave propagation, the MSE is able to provide acceptable accuracy for bottom profiles with slopes up to 1:3, enough for practical applications.

Some extensions of the MSE have been proposed in subsequent works. For example, a time-dependent extension of the MSE was derived by Kirby [30] for the case of waves propagating over ripple beds. Also, an Extended Mild-Slope Equation (EMSE) was proposed by Massel [40] that includes higher-order terms, providing a better accuracy for more complicated bathymetries. Energy dissipation effects, such as wave breaking and bottom friction, were included in [39]. Chamberlain and Porter [14] suggested a Modified Mild-Slope Equation (MMSE), later improved by Porter and Staziker [46], which retains the second order terms discarded by Berkhoff in the formulation of the MSE. On the other hand, Suh et al. [50] derived a time-dependent equation for wave propagation on rapidly varying topography and Chandrasekera et al. [15] included terms for relatively steep and rapidly undulating bathymetries. Later, Lee et al. [32] presented an hyperbolic MSE for rapidly varying topography, followed by the works of Copeland [19] and Massel [40] in the same direction. Finally, the recent works of Hsu et al. [26] and Li et al. [35, 25] considered higher-order bottom effect terms to account for a rapidly varying topography and wave energy dissipation in the surf zone. Basically, all these formulations introduce higher-order terms in the MSE due to the bottom effects, usually proportional to the square of the bottom slope or the bottom curvature.

In general, the MSE represents the basic framework for the simulation of surface wave transmission problems in variable water depths and different numerical solution procedures have been proposed in the literature since the pioneering work of Berkhoff [9].

Traditionally, the MSE has been solved using the Finite Element Method (FEM) [10] and the Finite Difference Method (FDM), where we can include the works of Li and Anastasiou [36], Panchang and Pearce [45]. Nevertheless, finite difference schemes and the finite element method present a common deficiency; open and partially reflecting boundary conditions are difficult to represent. These deficiencies have been studied by many authors, like Chen et al. [17, 16] using hybrid FEM formulations, together with the initial proposals of Berkhoff [10] and Tsay et al. [51, 52] including bottom friction effects. For the closing boundary conditions, Bettess and Zienkiewicz [11] and Lau and Ji [31] used infinite elements in the outer regions. Dirichlet to Neumann (DtN) boundary conditions were proposed by Givoli et al. [22, 29, 21] as an analytical procedure to reproduce exact non-reflecting boundary conditions in some particular cases. This idea, was followed by Bonet [12] to derive the discrete non-local (DNL) boundary condition. More rudimentary iterative methods have also been proposed to define absorbing boundary conditions; see Beltrami et al. [6], Steward and Panchang [49], Chen [18] or Liu et al. [38], among others. It is important to mention that a boundary element formulation of the MSE for open domains and variable bathymetry, would be able to palliate the drawbacks of FEM, providing a better approximation for the simulation of absorbing boundaries.

The MSE problem has also been solved using the Boundary Element Method (BEM). Boundary element techniques prove to be very accurate in wave refraction-diffraction problems with open domains, presenting the additional benefit that the radiation condition to infinity is automatically satisfied. In order to improve the solution of the FEM schemes, Hauguel [23] and Shaw and Falby [48] first coupled FEM and BEM. Hamanaka [27] proposed a genuine BEM based boundary condition for open, partial reflection and incident-absorbing boundaries. At the same time, Isaacson and Qu [28] introduced a boundary integral formulation to reproduce the wave field in harbors with partial reflecting boundaries

and Lee et al. [34, 33] included the effect of incoming random waves. The Dual Reciprocity Boundary Element Method (DRBEM) has been used to model wave run-ups by Zhu [54]. Later, this technique was extended to model internal regions with variable depth surrounded by exterior regions with constant bathymetry [37, 55, 56, 24]. More recently, Naserizabeh et al. [43] proposed a coupled BEM-FDM formulation to solve the MSE in unbounded problems.

In this context, this paper presents a BEM formulation for the MSE in wave propagation problems with variable water depth in one direction. Based on the Green's function approximation proposed by Belibassakis [3], a complete fundamental-solution kernel is developed and combined with a boundary element scheme for the solution of water wave propagation problems in closed and open domains where the bathymetry changes arbitrarily and smoothly in a preferential direction. This particular case is of high practical interest, because the bathymetric lines can usually be considered straight and parallel to the coast-line. A BEM formulation of the MSE for variable bathymetry not only extends the range of applications of the BEM for the solution of coastal engineering problems but also, combined with the FEM and used as a matching condition, offers the possibility of modeling very accurately the radiation condition to deeper waters.

The paper is organized as follows. Section A.2 first reviews the formulation of the MSE. In Section A.3, the fundamental solution of the MSE for variable water depth is approximated in the frequency domain. The mathematical and numerical principles of the BEM for wave scattering problems are covered in Section A.4. Section A.5 is dedicated to the validation of the proposed BEM formulation through the solution of wave propagation problems in variable water depth. Finally, Section A.6 closes with the conclusions.

## A.2 The Mild-Slope Equation

The classical MSE [9, 10] is obtained from the linear wave theory using a Cartesian coordinate system with the  $(x,y)$ -plane located on the quiescent water surface and the  $z$  direction pointing upwards. Under the assumption of potential flow and integrating the velocity potential in the vertical direction with appropriated boundary conditions, the velocity potential of the water surface can be represented in the form:

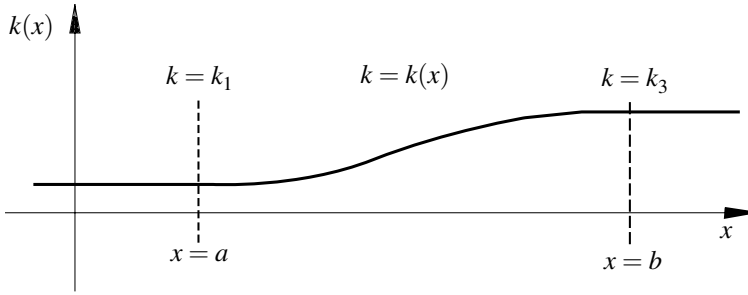
$$\Phi(x,y,t) = \phi(x,y)e^{-i\omega t}, \quad (\text{A.1})$$

being  $i$  the imaginary unit and  $t$  the time variable. This potential has to satisfy the homogeneous MSE, that may be written as:

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \phi) + \omega \frac{c_g}{c} \phi = 0, \quad (\text{A.2})$$

where  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$  is the gradient operator,  $c$  is the wave velocity and  $c_g$  the group velocity. The water depth function  $h(x,y)$ , wave number  $k$  and angular frequency  $\omega$  of the waves are related by the dispersion equation:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh), \quad (\text{A.3})$$



**Figure A.2** Wave number variation in the  $x$ -direction for a fixed wave frequency due to a monotonically decreasing water depth profile  $h(x)$ . Wave number is higher where water depth is lower as dictated by the dispersion relation.

being  $g$  the gravitational acceleration ( $g = 9.81m/s^2$ ). This means that, for a fixed frequency and variable bathymetry, the wave number  $k(x,y)$  is a function of the local water depth.

The MSE can be simplified introducing the following change of variable due to Bergmann [7]:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{cc_g}} \hat{\phi}, \quad (\text{A.4})$$

a relation that transforms (A.2) into a Helmholtz equation:

$$\nabla^2 \hat{\phi} + \hat{k}^2 \hat{\phi} = 0, \quad (\text{A.5})$$

with a modified wave number  $\hat{k}(x,y)$  given by:

$$\hat{k}^2(x,y) = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{cc_g}}{\sqrt{cc_g}}, \quad (\text{A.6})$$

that is a known function of the wave characteristics and the local water depth.

Note that this approach is also valid for treating the same problem in the framework of the MMSE. Simply by modifying the expression of the wave number (A.6), including additional effects associated with higher-order contributions of bottom slope and curvature, we obtain the MMSE model that extends the applicability of the MSE.

### A.3 Fundamental solution for variable wave number

Based on the Green's function of Belibassakis [3], in this section we develop a fundamental solution of the Helmholtz problem (A.5) for the particular case of an unidirectional variable bathymetry like the one described in Figure A.2. Taking the  $x$ -axis in the same direction than the variation of the water-depth  $h = h(x)$ , a modified wave-number  $\hat{k} = \hat{k}(x)$  is obtained for a fixed wave frequency after applying relation (A.6). The Green's function of the MSE

equation  $\psi = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k})$  is formulated as the solution of the following problem:

$$\nabla^2 \psi + \hat{k}(x)^2 \psi + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.7})$$

being  $\mathbf{r}_o = (x_o, y_o)$  the location of the source load and  $\mathbf{r} = (x, y)$  the observed point where the velocity potential is going to be evaluated. An additional condition is that the velocity potential  $\psi(\mathbf{r})$  should satisfy the Sommerfeld's radiation condition at infinity.

To solve this problem, we apply the Fourier transform to the velocity potential in the  $y$ -direction, where the modified wave-number  $\hat{k}(x)$  is constant, to operate with a transformed velocity potential  $\Psi = \mathcal{F}(\psi)$  that is defined as:

$$\Psi(x, x_o; \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) e^{-iy\xi} dy, \quad (\text{A.8})$$

obtained by decomposition of the potential into its frequencies, represented by the Fourier parameter  $\xi$ . Introducing this transformation into problem (A.7), a family one-dimensional wave equations is obtained:

$$\Psi_{,xx} + \kappa^2(x) \Psi + \delta(x - x_o) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (\text{A.9})$$

with a transformed wave-number  $\kappa^2(x) = \hat{k}^2(x) - \xi^2$  that is now function of the space variable and the Fourier parameter. Note also that the transformed problem depends on the square of this Fourier parameter, so our transformed velocity potential should be symmetric with respect to  $\xi$ , i.e.:

$$\Psi(x, x_o; \xi) = \Psi(x, x_o; -\xi), \quad (\text{A.10})$$

an important property that will be used later. It is also known that the analytical solution of (A.9) for a constant wave number  $\kappa$  is:

$$\Psi(x, x_o; \xi) = \frac{i}{2\kappa} e^{i\kappa|x-x_o|} \quad (\text{A.11})$$

and that, for large values of  $\xi$ , it is also possible to assume that (A.11) is a good approximation of the solution of problem (A.9) for a smooth function  $\kappa(x)$ . Hence for  $\xi \gg \hat{k}$  we find that  $\kappa \rightarrow i\xi$  and the transformed velocity potential decays exponentially in the form:

$$\Psi(x, x_o; \xi) \simeq \frac{1}{2\xi} e^{-\xi|x-x_o|} \quad \text{for } \xi \rightarrow \infty, \quad (\text{A.12})$$

expression that defines the asymptotic behavior of the transformed potential for large values of the Fourier parameter.

Next, we observe that the one-dimensional infinite domain where the transformed problem (A.9) is defined, can be divided into three different regions, as depicted in Figure A.2. In the first semi-infinite interval,  $x \in (-\infty, a]$ , the modified wave number is considered constant  $\hat{k} = \hat{k}_1$ ; then a second finite interval  $x \in [a, b]$  where the modified wave number  $\hat{k} = \hat{k}(x)$  is variable, changing monotonically from  $\hat{k}_1$  to  $\hat{k}_3$ , and finally another semi-infinite region  $x \in [b, \infty)$ , where the wave number remains constant  $\hat{k} = \hat{k}_3$ . By performing this division of space, problem (A.9) can be reduced to a BVP defined in a finite interval  $[a, b]$ ,

with appropriated matching conditions at the boundaries, written in the following way:

$$\Psi_{,xx} + \kappa^2(x)\Psi + \delta(x-x_o) = 0 \quad \text{in } x \in [a,b] \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{cases} \Psi_x + i\alpha(\xi)\Psi = 0 & \text{in } x = a \\ \Psi_x - i\beta(\xi)\Psi = 0 & \text{in } x = b \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

being  $\alpha(\xi) = (\hat{k}_1^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$  and  $\beta(\xi) = (\hat{k}_3^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$  the parameters of the two Sommerfeld's radiation boundary conditions used to close the domain.

This one-dimensional wave transmission problem can now be solved numerically for any given value of the Fourier parameter  $\xi$ , providing an approximation of the transformed velocity potential in the finite interval  $[a,b]$ . The transformed velocity potential in the semi-infinite domains  $x \in (-\infty, a)$  and  $x \in (b, \infty)$ , can then be substituted by the analytical solution of the equivalent one-dimensional Helmholtz problem for constant wave-number:

$$\Psi(x, x_o; \xi) = \Psi(a, x_o; \xi) e^{-i\alpha(\xi)|a-x|} \quad \text{in } x \in (-\infty, a], \quad (\text{A.15})$$

$$\Psi(x, x_o; \xi) = \Psi(b, x_o; \xi) e^{i\beta(\xi)|b-x|} \quad \text{in } x \in [b, \infty), \quad (\text{A.16})$$

establishing this way the continuity of the solution in the complete domain.

After solving for the transformed velocity potential, the original variables can finally be recovered via inverse Fourier transform,  $\psi = \mathcal{F}^{-1}(\Psi)$ , defined as:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, x_o; \xi) e^{iy\xi} d\xi, \quad (\text{A.17})$$

for the velocity potential and

$$\psi_{,x}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(x, x_o; \xi) e^{iy\xi} d\xi, \quad (\text{A.18})$$

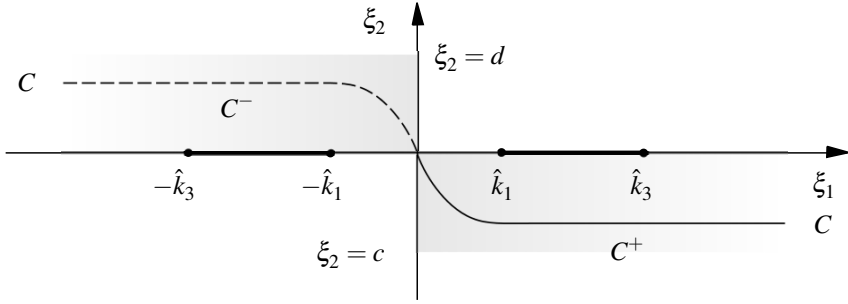
$$\psi_{,y}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \Psi(x, x_o; \xi) e^{iy\xi} d\xi, \quad (\text{A.19})$$

for its spatial derivatives.

### A.3.1 Inverse transform in the complex plane

To compute the inverse Fourier transforms (IFT) given by equations (A.17-A.19), Belibasakis et al. [3, 4] propose a truncation of the infinite interval of integration and to use a discrete Fast Fourier Transform (FFT) algorithm that approximates the integral on a finite subinterval by sampling a numerical discretization of the integrand. An undesirable consequence of this approximation is that undersampling in the  $\xi$ -domain can cause aliasing effects in the physical  $y$  direction.

In order to reduce aliasing, it is possible to extend the integration to the complex plane ( $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ ). The selected integration path must be antisymmetric, as Equation (A.10) requires, so the alternative integration path  $C$  represented in Figure A.3 is used to evaluate these inverse transforms.



**Figure A.3** Antisymmetric integration path  $C$  in the complex plane avoiding the  $\pm\hat{k}_1$  and  $\pm\hat{k}_3$  roots lying on the real axis.

Now, in the complex plane, the antisymmetry of the path  $C$  is used to rewrite the IFT of the transformed velocity potential (A.17) and its derivatives (A.18-A.19) in the following one-sided way:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = \frac{1}{\pi} \int_{\xi \in C^+} \Psi(x, x_o; \xi) \cos(y\xi) d\xi, \quad (\text{A.20})$$

$$\Psi_{,x}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = \frac{1}{\pi} \int_{\xi \in C^+} \Psi_{,x}(x, x_o; \xi) \cos(y\xi) d\xi, \quad (\text{A.21})$$

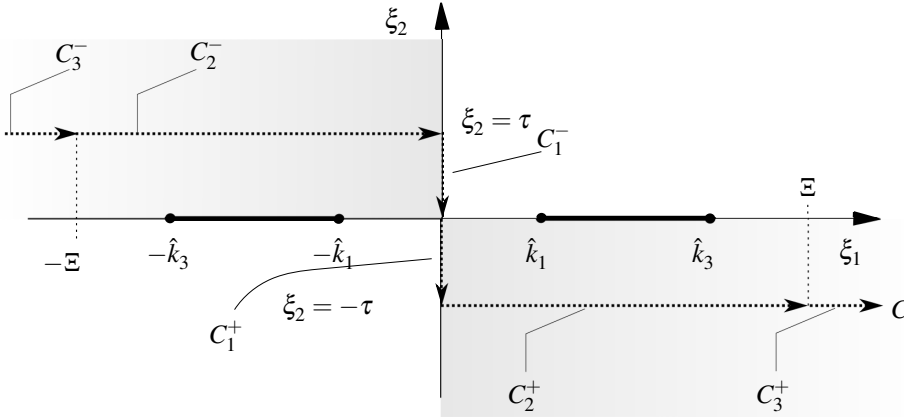
$$\Psi_{,y}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = -\frac{1}{\pi} \int_{\xi \in C^+} \xi \Psi(x, x_o; \xi) \sin(y\xi) d\xi. \quad (\text{A.22})$$

### A.3.2 Numerical approximation of the Fundamental Solution

The fundamental solution, expressed above as three indefinite IFT integrals, can not be computed analytically when water depth, and consequently wave number, change arbitrarily in one direction. In this section, the numerical aspects of its approximation and efficient numerical computation for this case are analyzed.

#### Integration in the complex plane

For the numerical evaluation of the fundamental solution, the positive domain of integration  $C^+$  is divided into three linear paths as shown in Figure A.4, i.e.,  $C^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^+$ . The first line  $C_1^+ = \{\xi_1 = 0, -\tau \leq \xi_2 \leq 0\}$  starts at the origin and is supposed to be very short, i.e.,  $\tau \ll 1$ . The second interval  $C_2^+ = \{0 \leq \xi_1 \leq \Xi, \xi_2 = -\tau\}$  is finite but long enough to circumvent the roots and, finally, a third semi-infinite path  $C_3^+ = \{\Xi \leq \xi_1, \xi_2 = -\tau\}$  closes the domain. Substituting this integration path in (A.20), we compute the transformed



**Figure A.4** Approximation and decomposition into linear paths of the integration path in the complex  $\xi$ -plane used to compute the inverse Fourier transform of the function  $\Psi$ .

velocity potential in the following way:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{-\tau} \Psi(x, x_o; i\xi_2) \cosh(y\xi_2) d\xi_2 + \\ & \frac{1}{2\pi} e^{\tau y} \int_{-E}^E \Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau) e^{iy\xi_1} d\xi_1 + \\ & \frac{1}{\pi} \sinh(\tau y) \int_0^E \Psi(x, x_o; \xi_1 - i\tau) e^{-iy\xi_1} d\xi_1 + \\ & \frac{1}{\pi} \int_E^\infty \Psi(x, x_o; \xi_1 - i\tau) \cos((\xi_1 - i\tau)y) d\xi_1, \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

where the first integral, along  $C_1^+$ , can be disregarded if  $\tau$  is considered sufficiently small. The second and the third integrals correspond to the integration along the second path  $C_2^+$ , with the third one containing an hyperbolic sine of small argument that can also be neglected without an important loss of accuracy. The last integral corresponds to the third path  $C_3^+$ , where an asymptotic behavior of the integrand, defined by (A.12), can be assumed. Under these assumptions, the approximation of the velocity potential can be finally reduced to:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \simeq & \frac{1}{2\pi} e^{\tau y} \int_{-E}^E \Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau) e^{iy\xi_1} d\xi_1 + \\ & \frac{1}{2\pi} \cosh(\tau y) \Re \{ E_1(|x - x_o| + iy)\tau \}, \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

expression previously proposed by Belibassakis in [3] for the evaluation of the Green's function. However, to complete the fundamental solution kernel, we also need to compute the spatial derivatives.



The  $x$ -derivative of the velocity potential is obtained using the same procedure. Substituting the integration path  $C^+$  in (A.21), we have:

$$\begin{aligned} \psi_{,x}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{-\tau} \Psi_{,x}(x, x_o; i\xi_2) \cosh(y\xi_2) d\xi_2 \\ & + \frac{1}{2\pi} e^{\tau y} \int_{-\Xi}^{\Xi} \Psi_{,x}(x, x_o; |\xi_1| - i\tau) e^{iy\xi_1} d\xi_1 \\ & + \frac{1}{\pi} \sinh(\tau y) \int_0^{\Xi} \Psi_{,x}(x, x_o; \xi_1 - i\tau) e^{-iy\xi_1} d\xi_1 \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\Xi}^{\infty} \Psi_{,x}(x, x_o; \xi_1 - i\tau) \cos((\xi_1 - i\tau)y) d\xi_1, \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

where, again, the first and the third integrals can be neglected for a small value of  $\tau$ . Using the asymptotic behavior of the velocity potential derivative, the integral along the semi-infinite interval  $C_3^+$  can be evaluated analytically:

$$\begin{aligned} \int_{\Xi}^{\infty} \Psi_{,x}(x, x_o; \xi_1 - i\tau) \cos((\xi_1 - i\tau)y) d\xi_1 = \\ \frac{1}{2} \frac{e^{-|x-x_o|(\Xi-i\tau)}}{(x-x_o)^2 + y^2} [y \sin((\Xi - i\tau)y) - |x-x_o| \cos((\Xi - i\tau)y)], \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

an substituting back in (A.25) we arrive to the final approximation for the  $x$ -derivative of the velocity potential:

$$\begin{aligned} \psi_{,x}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \simeq & \frac{1}{2\pi} e^{\tau y} \int_{-\Xi}^{\Xi} \Psi_{,x}(x, x_o; |\xi_1| - i\tau) e^{iy\xi_1} d\xi_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-|x-x_o|(\Xi-i\tau)}}{(x-x_o)^2 + y^2} [y \sin((\Xi - i\tau)y) - |x-x_o| \cos((\Xi - i\tau)y)]. \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

However, obtaining the  $y$ -derivative is more involved. We see from its definition (A.22) that the integrand is antisymmetric, so integration in  $C^+$  can be carried out considering only the antisymmetric part of the exponential complex function as follows:

$$\begin{aligned} \psi_{,y}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{-\tau} \xi_2 \Psi(x, x_o; \xi_2) \sinh(y\xi_2) d\xi_2 + \\ & \frac{1}{2\pi} e^{\tau y} \int_{-\Xi}^{\Xi} i(|\xi_1| - i\tau) \Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau) e^{iy\xi_1} d\xi_1 + \\ & \frac{1}{\pi} \cosh(\tau y) \int_0^{\Xi} i(\xi_1 - i\tau) \Psi(x, x_o; \xi_1 - i\tau) e^{-iy\xi_1} d\xi_1 + \\ & \frac{1}{\pi} \int_{\Xi}^{\infty} i(\xi_1 - i\tau) \Psi(x, x_o; \xi_1 - i\tau) \sin((\xi_1 - i\tau)y) d\xi_1, \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

where, once more, the first integral can be neglected, but the hyperbolic cosine that appears now in the third integral should be retained. To facilitate its numerical computation, this

third integral will be extended to a symmetrical integration interval using the symmetry properties of the integrand in the following way:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Xi} i(\xi_1 - i\tau)\Psi(x, x_o; \xi_1 - i\tau)e^{-iy\xi_1} d\xi_1 = \\ \frac{1}{2} \int_{-\Xi}^{\Xi} i(|\xi_1| - i\tau)\Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau)e^{-iy\xi_1} d\xi_1 + \\ \frac{1}{2} \int_{-\Xi}^{\Xi} i\xi \Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau)e^{-iy\xi_1} d\xi_1, \quad (\text{A.29}) \end{aligned}$$

and the fourth integral, along the path  $C_3^+$ , is evaluated analytically using the asymptotic value of the transformed velocity potential:

$$\begin{aligned} \int_{\Xi}^{\infty} i(\xi_1 - i\tau)\Psi(x, x_o; \xi_1 - i\tau) \sin((\xi_1 - i\tau)y) d\xi_1 = \\ \frac{1}{2} \frac{e^{-|x-x_o|(\Xi-i\tau)}}{(x-x_o)^2 + y^2} [|x-x_o| \sin((\Xi-i\tau)y) + y \cos((\Xi-i\tau)y)], \quad (\text{A.30}) \end{aligned}$$

results that are substituted back in (A.28) to find the final approximation for the y-derivative of the velocity potential:

$$\begin{aligned} \psi_{,y}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \simeq \frac{1}{2\pi} e^{\tau y} \int_{-\Xi}^{\Xi} i(|\xi_1| - i\tau)\Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau)e^{iy\xi_1} d\xi_1 + \\ \frac{1}{2\pi} \cosh(\tau y) \int_{-\Xi}^{\Xi} i(|\xi_1| - i\tau)\Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau)e^{-iy\xi_1} d\xi_1 + \\ \frac{1}{2\pi} \cosh(\tau y) \int_{-\Xi}^{\Xi} i\xi \Psi(x, x_o; |\xi_1| - i\tau)e^{-iy\xi_1} d\xi_1 + \\ \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-|x-x_o|(\Xi-i\tau)}}{(x-x_o)^2 + y^2} [|x-x_o| \sin((\Xi-i\tau)y) + y \cos((\Xi-i\tau)y)], \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

an expression where all the integration paths are now symmetric. As we will see, this symmetry is needed for an efficient numerical evaluation using FFT.

In conclusion, equations (A.24), (A.27) and (A.31) constitute the complete kernel of the fundamental solution back-transformed to the space domain. Next step is to devise an efficient and accurate numerical procedure to evaluate these integrals.

### Numerical evaluation of the Fourier integrals

The final expression of the velocity potential (A.24) and its derivatives, (A.27) and (A.31), can be calculated very efficiently by means of the FFT algorithm, as proposed in [3].

Starting with the velocity potential (A.24), it can be expressed in a compact form as:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \simeq \psi^{(1)} + \psi_{an}^{(2)} \quad (\text{A.32})$$

where  $\psi^{(1)}$  is the first definite integral and  $\psi_{an}^{(2)}$  represents the second analytic term on the

right hand side. To compute  $\psi^{(1)}$ , the domain of integration is discretized using a uniform mesh of  $N$  elements, where  $\xi_l = (l-1)\Delta\xi$  are the nodal locations of the  $l = 1, \dots, N+1$  sampling points and  $\Delta\xi = \Xi/N$  is the element length; in addition, the physical space  $y \in [0, Y]$  is discretized with a similar uniform distribution of nodes  $y_j = (j-1)\Delta y$ , for  $j = 1, \dots, N+1$ , separated a distance  $\Delta y = Y/N$  using a fixed value of  $\Delta y = \pi/\Xi$ . The symmetry property expressed in (A.10) assures that the discrete values of the transformed velocity potential  $\Psi_l = \Psi(x, x_o; \xi_l - i\tau)$ , for  $l = 1, \dots, N+1$ , are symmetric with respect to  $\xi_1$  and hence  $\Psi_l = \Psi_{2N-l+2}$ , for  $l = 2, \dots, N$ . Based on these discretizations and applying the IFFT algorithm, the value of  $\psi^{(1)}$  can then be approximated by the finite series:

$$\psi^{(1)} = \frac{1}{2\pi} e^{\tau y_j} \left[ \sum_{l=1}^M \Psi_l e^{i\frac{2\pi}{M}(j-1)(l-1)} \right] \quad (\text{A.33})$$

where the total number of points  $M = 2N$  is selected as a power of two to be efficiently evaluated.

In a similar way, the  $x$ -derivative given by (A.27) can be written as the addition of two terms:

$$\psi_{,x}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \simeq \psi_{,x}^{(1)} + \psi_{,xan}^{(2)} \quad (\text{A.34})$$

with a definite integral  $\psi_{,x}^{(1)}$  that needs to be evaluated at the same interval. Noting that the discrete values of the velocity potential derivative  $\Psi_{,xl} = \Psi_{,x}(x, x_o; \xi_l - i\tau)$ , for  $l = 1, \dots, N+1$ , are symmetric with respect to  $\xi_1$  and using the same discretization, we can sample  $\Psi_{,xl} = \Psi_{,x}(x, x_o; \xi_l - i\tau)$ , for  $l = 1, \dots, N+1$ , and apply the symmetry property  $\Psi_{,xl} = \Psi_{,x2N-l+2}$ , for  $l = 2, \dots, N$ , to approximate  $\Psi_{,x}^{(1)}$  as the IFFT sequence:

$$\psi_{,x}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} e^{\tau y_j} \left[ \sum_{l=1}^M \Psi_{,xl} e^{i\frac{2\pi}{M}(j-1)(l-1)} \right]. \quad (\text{A.35})$$

Finally, according to equation (A.31), the  $y$ -derivative of the velocity potential can be decomposed into four different terms:

$$\psi_{,y}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \simeq \psi_{,y}^{(1)} + \psi_{,y}^{(2)} + \psi_{,y}^{(3)} + \psi_{,yan}^{(4)} \quad (\text{A.36})$$

with three definite integrals and one analytical term. The complex parameter present in the integrands of  $\psi_{,y}^{(1)}$  and  $\psi_{,y}^{(2)}$  is  $\xi^s = |\xi_1| - i\tau$ , a symmetric function with respect to variable  $\xi_1$ . This variable can be defined in a discrete form as  $\xi_l^s = (l-1)\Delta\xi - i\tau$ , for  $l = 1, \dots, N+1$ , and  $\xi_{2N-l+2}^s = \xi_l^s$ , for  $l = 2, \dots, N$ . By doing that, the first integral  $\psi_{,y}^{(1)}$ , can be evaluated applying the IFFT algorithm as we did before:

$$\psi_{,y}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} e^{\tau y_j} \left[ \sum_{l=1}^M i\xi_l^s \Psi_l e^{i\frac{2\pi}{M}(j-1)(l-1)} \right] \quad (\text{A.37})$$

and, on the contrary, the second integral  $\psi_{,y}^{(2)}$  is approximated using the FFT algorithm:

$$\psi_{,y}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \cosh(\tau y_j) \left[ \sum_{l=1}^M i \xi_l^s \Psi_l e^{-i \frac{2\pi}{M} (j-1)(l-1)} \right] \quad (\text{A.38})$$

due to its negative exponential term.

In the last integral  $\psi_{,y}^{(3)}$ , the complex parameter  $\xi$  is defined in discrete form as  $\xi_l^a = (l-1)\Delta\xi - i\tau$ , for  $l = 1, \dots, N+1$ , and  $\xi_{2N-l+2}^a = -\xi_l^a$ , for  $l = 2, \dots, N$ . Substituting and performing the FFT, the last definite integral is approximated as follows:

$$\psi_{,y}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \cosh(\tau y_j) \left[ \sum_{l=1}^M i \xi_l^a \Psi_l e^{-i \frac{2\pi}{M} (j-1)(l-1)} \right] \quad (\text{A.39})$$

closing the derivation of a complete fundamental solution kernel.

The accuracy of this approach highly depends on a proper selection of parameters  $\tau$ ,  $\Xi$  and  $N$ . As explained by Belibassakis [3], for the calculation of  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k})$  using this technique, the value of  $\tau$  must be small enough to make it possible to neglect the contribution of the first and third integrals of (A.23) and (A.25), and the first term of (A.28), but at the same time, it can not be too small because the aliasing effect is attenuated at least by factor of  $\exp(-2\tau Y)$ . On the other hand, experience demonstrates that a value of  $\Xi \approx 4 - 6\hat{k}^*$ , being  $\hat{k}^*$  the maximum value of  $\hat{k}(x)$ , is large enough to make the asymptotic expression (A.12) valid, and consequently the approximation of integrals along the path  $C_3^+$ . In our calculations, we have used a sampling of  $M = 2^{12} = 4096$  points inside the interval  $[-\Xi, \Xi]$ , fixing the other two parameters to  $\Xi = 6\hat{k}^*$  and  $\tau = \Delta\xi$ .

### FEM solution of the transformed velocity potential

As we have seen, in order to evaluate the fundamental solution, it is necessary to solve the transformed one-dimensional wave transmission problem defined by equations (A.13-A.14) for different values of the Fourier parameter  $\xi$ . For this task, Belibassakis [3] proposes a second-order central finite difference scheme. In our experience, the use of the finite element method improves the solution near the source point  $x_o$ , increasing this way the final accuracy of the fundamental solution.

Applying the method of weighted residuals, with a test function  $w(x)$  defined in the domain  $[a, b]$ , the weak form of equation (A.13) can be expressed:

$$\int_a^b w(\Psi_{,xx} + \kappa^2(x)\Psi + \delta(x-x_o)) dx = 0, \quad (\text{A.40})$$

and integrating by parts:

$$\int_a^b [w_{,x} \Psi_{,x} - w \kappa^2(x)\Psi] dx = w(x_o) + i\beta(\xi)w(b)\Psi(b) + i\alpha(\xi)w(a)\Psi(a), \quad (\text{A.41})$$

where we have substituted the matching conditions (A.14) that close the transformed domain.

Using the classical finite element Galerkin formulation, the transformed velocity potential and the weighted residual function are approximated as:

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x)\Psi_j, \quad w(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x)w_j \quad (\text{A.42})$$

where  $\Psi_j$  and  $w_j$  are the corresponding nodal values,  $N_j(x)$  are linear shape functions and  $n$  is the number of nodes distributed in the domain. Substituting the discretization (A.42) into (A.41), the following FEM system is obtained:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - i\alpha(\xi) & a_{12} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} - i\beta(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_j \\ \vdots \\ \Psi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.43})$$

where the components of the tridiagonal matrix:

$$a_{ij} = \int_a^b [N_{i,x}N_{j,x} - \kappa^2(x)N_iN_j] dx. \quad (\text{A.44})$$

are computed with a two-point Gauss quadrature.

The right hand side of system (A.43) contains the contribution of the load, where a node  $j$  is purposely located at  $x_o$ . As a practical rule, we use at least 20 elements per wave-length to discretize the transformed one-dimensional transmission problems.

### A.3.3 Validation of the fundamental solution for constant water depth

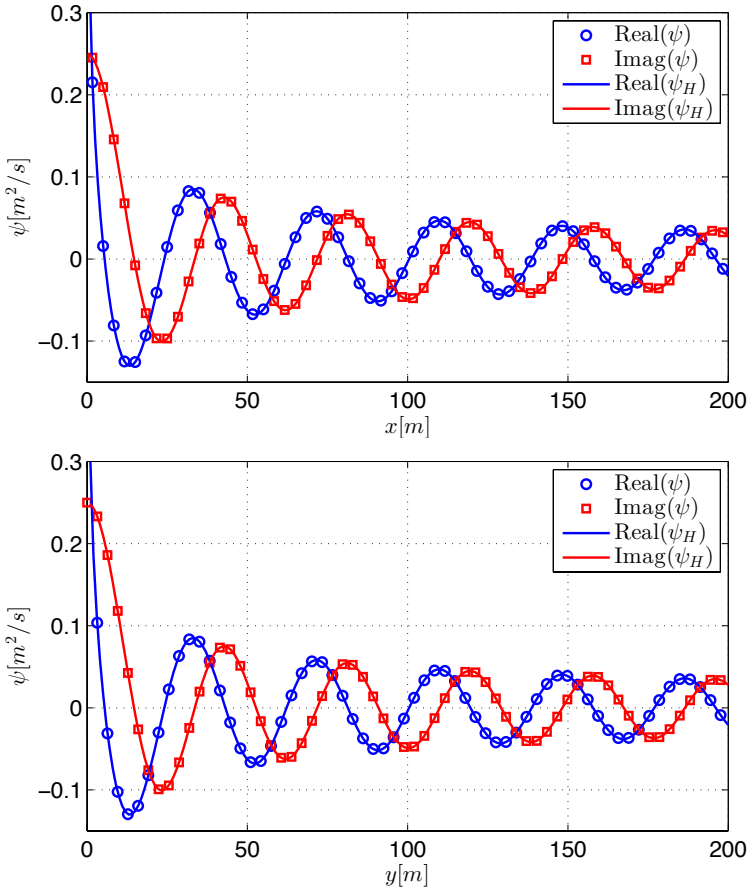
To check the accuracy of the numerical integration process described in Section A.3.2 to approximate the MSE fundamental solution, we solve the problem for constant water-depth and compare the numerical results with the analytical solution of the equivalent Helmholtz problem for constant wave number given by:

$$\Psi_H = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr), \quad \Psi_{H,r} = -\frac{i}{4}kH_1^{(1)}(kr), \quad (\text{A.45})$$

where  $H_0^{(1)}$  and  $H_1^{(1)}$  are Hankel functions of the first kind of order zero and one,  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|$  is the distance in the radial direction and subindex  $H$  refers to Helmholtz solution. Using the series expansion of the Bessel's function for small argument [1] the fundamental solution  $\Psi_H$  near the source can be expressed as:

$$\Psi_H^p = -\frac{1}{2\pi}(\ln \frac{kr}{2} + \gamma) + \frac{i}{4} + \mathcal{O}((kr)^2 \ln(kr)) \quad (\text{A.46})$$

where  $\gamma$  is the Euler-Mascheroni constant and the superindex  $p$  denotes the polynomial approximation. The expansion contains a weak singularity of the the real part and a



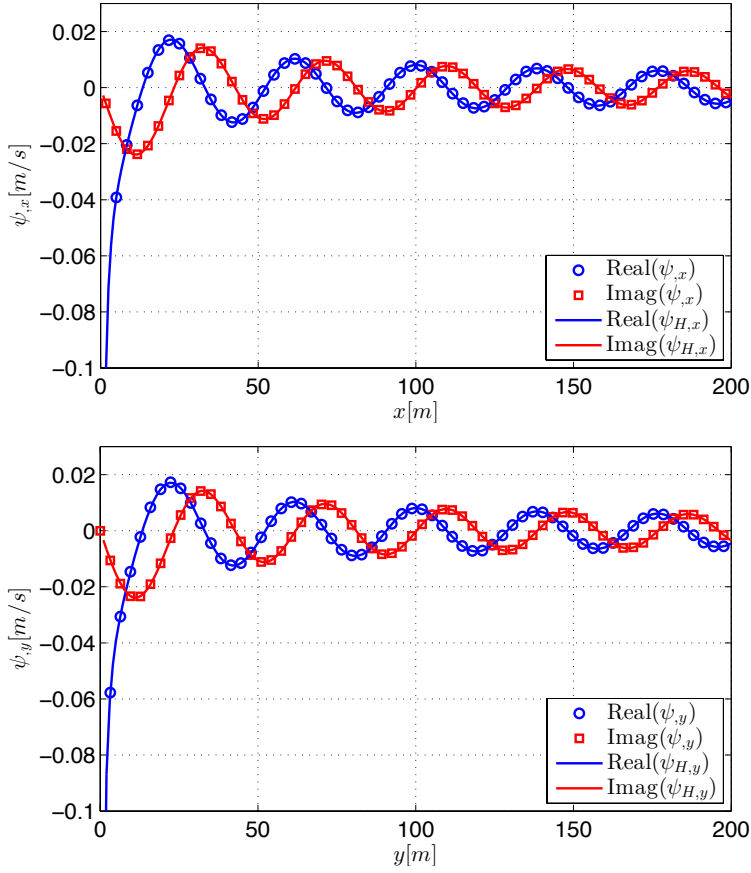
**Figure A.5** Comparison of analytical and numerical fundamental solution  $\psi$  for constant water depth. Cross section of the 2D fundamental solution along the lines  $y = 0$  (top) and  $x = 0$  (bottom).

constant imaginary value.

Figures A.5 and A.6 show a comparison between the numerical fundamental solution  $\psi$  and the analytical solution  $\psi_H$  for constant water depth. The wave-period and water-depth used are  $T = 5s$  and  $h = 14m$  respectively. The solution profiles at  $y = 0$  and  $x = 0$  shown in Figure A.5 are in excellent agreement. The same degree of approximation is obtained for  $x$  and  $y$  derivatives, represented in Figure A.6.

## A.4 Boundary element formulation

In this section we present the basis of the BEM for the Helmholtz problem, originated from an integral equation expressing a reciprocity relation between the unknown velocity



**Figure A.6** Comparison of analytical and numerical fundamental solution derivatives  $\psi_{,x}$  and  $\psi_{,y}$  for constant water depth. Cross section of the  $x$ -derivative along the line  $y = 0$  (top) and the  $y$ -derivative along  $x = 0$  (bottom).

potential field  $(\hat{\phi}, \nabla \hat{\phi})$  and the fundamental solution kernel  $(\psi, \nabla \psi)$ .

#### A.4.1 Direct boundary integral equation

The BEM formulation for an acoustic medium is well known and can be found in different texts [53, 2]. Let us consider a domain  $\Omega$  closed by a boundary  $\Gamma$  of outward normal  $\mathbf{n}$ . Multiplying both sides of Helmholtz equation (A.5) by the fundamental solution and applying Green's second identity and Sommerfeld's radiation condition, the following Boundary Integral Equation (BIE) is obtained in absence of internal loads:

$$C(\mathbf{r}_o) \hat{\phi}(\mathbf{r}_o) + \int_{\Gamma} \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \cdot \mathbf{n} \hat{\phi}(\mathbf{r}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \nabla \hat{\phi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0, \quad (\text{A.47})$$

where  $\nabla \hat{\phi} \cdot \mathbf{n} = \partial \hat{\phi} / \partial n = \hat{q}$  is the normal flux,  $\mathbf{r}_o$  is the collocation point and  $C(\mathbf{r}_o)$  is a geometrical coefficient, function of the regularity of the boundary, that takes the value  $C(\mathbf{r}_o) = \theta(\mathbf{r}_o)/2\pi$  with  $\theta(\mathbf{r}_o)$  being the internal angle of the boundary at point  $\mathbf{r}_o$ .

This BIE can be solved numerically discretizing the boundary into  $n_e$  elements,  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n_e} \Gamma_e$  and approximating the fields of modified velocity potential  $\hat{\phi}(\mathbf{r})$  and normal flux  $\hat{q}(\mathbf{r})$  using isoparametric linear elements:

$$\hat{\phi}(\zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta) \hat{\phi}_i, \quad \hat{q}(\zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta) \hat{q}_i, \quad (\text{A.48})$$

where  $\hat{\phi}_i$  and  $\hat{q}_i$  represent the nodal values of velocity potential and flux,  $N_j(\zeta)$  are the element shape functions and  $n$  is the number of nodes per element. Introducing this approximation in (A.47), the discretized form of the BIE can be written as:

$$C_i \hat{\phi}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; \hat{k}) \cdot \mathbf{n} N_j \hat{\phi}_j d\Gamma_e = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; \hat{k}) N_j \hat{q}_j d\Gamma_e, \quad (\text{A.49})$$

an equation that can be expressed in matrix form as:

$$\hat{\mathbf{H}} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{q}}, \quad (\text{A.50})$$

being  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  the nodal vector of modified velocity potentials  $\hat{\phi}_j$ ,  $\hat{\mathbf{q}}$  the nodal vector of fluxes  $\hat{q}_j$ , together with the matrix coefficients:

$$\hat{H}_{ij} = C_i \delta_{ij} + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; \hat{k}) \cdot \mathbf{n} N_j d\Gamma_e \quad (\text{A.51})$$

$$\hat{G}_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; \hat{k}) N_j d\Gamma_e \quad (\text{A.52})$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker  $\delta$ -function and  $\mathbf{r}_i$  the position of node  $i$ .

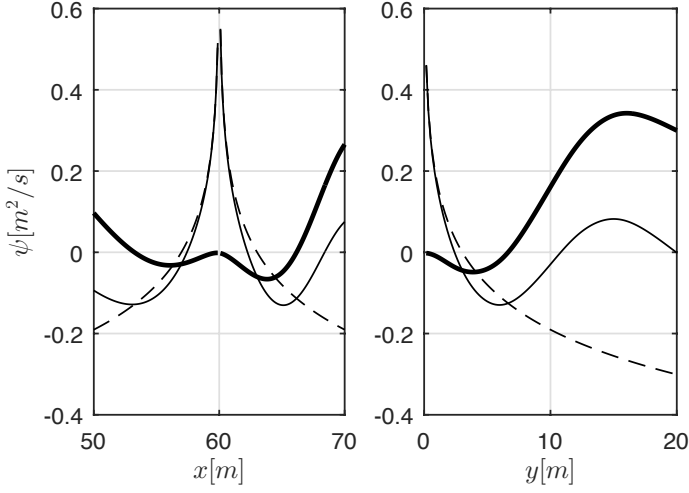
In general, the boundary element integrals present in (A.51) and (A.52) can be computed using a standard Gauss quadrature formula. But when the collocation point is located in one of the element nodes, integral (A.52) becomes weakly singular and needs a special treatment. In that particular case, it is possible to express the integrand as the sum of two terms:

$$\hat{G}_{ij} = \int_{\Gamma_e} [\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; \hat{k}) - \wp(\hat{k}_i r)] N_j d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} \wp(\hat{k}_i r) N_j d\Gamma_e \quad (\text{A.53})$$

one completely regular treated by a standard Gauss quadrature and another term of order  $\mathcal{O}(\ln r)$  that can be evaluated numerically using a special quadrature. We have used the real part of the first term of the series expansion of  $\psi_H$  around  $\mathbf{r}_i$ , obtained in (A.46), to define the kernel:

$$\wp(\hat{k}_i r) = -\frac{1}{2\pi} \left( \ln \frac{\hat{k}_i r}{2} + \gamma \right) \quad (\text{A.54})$$





**Figure A.7** Behavior of the Green's function  $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k})$  (thin solid line), the kernel  $\wp(\hat{k}_o r)$  (dashed line) and the regularized integrand (thick solid line). The source point is located at  $x_o = 60m$  and the bathymetry is defined in Section A.5.1 with a wave period  $T = 5s$ .

needed to regularize the first integral, see Figure A.7. Details of the numerical treatment of the second integral can be found in [20].

Finally, back-substituting the change of variable introduced in (A.4), the BEM system (A.50) can be rewritten in terms of the original velocity potential as:

$$\mathbf{H}\phi = \mathbf{G}q, \quad (\text{A.55})$$

a complex non-symmetrical linear system that provides the solution of the problem.

#### A.4.2 Integral formulation for scattering problems

In wave transmission problems, it is usually interesting to consider the effect on the object under study of an incident wave radiated from a distant source. In these scattering problems [53], we divide the total velocity potential into a scattered wave and an incident wave:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \hat{\phi}_{sc}(\mathbf{r}) + \hat{\phi}_{in}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.56})$$

where  $\hat{\phi}_{sc}$  is the scattered field radiated by the object that should satisfy the Helmholtz equation and  $\hat{\phi}_{in}$  is the incident field that would exist in the absence of obstacles. If we substitute this decomposition in (A.47), the BIE adopts the new form:

$$C(\mathbf{r}_o)\hat{\phi}(\mathbf{r}_o) + \int_{\Gamma} \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \cdot \mathbf{n} \hat{\phi}(\mathbf{r}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o; \hat{k}) \nabla \hat{\phi}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \hat{\phi}_{in}(\mathbf{r}_o). \quad (\text{A.57})$$

Using the same approximation described in (A.48) for the modified velocity potential and the normal fluxes on the boundary, the discrete matrix form of the BEM for scattering problems becomes:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{G}\mathbf{q} = \boldsymbol{\phi}_{in} \quad (\text{A.58})$$

where the change of variable (A.4) has been applied and  $\boldsymbol{\phi}_{in}$  is a free-term vector containing the evaluation of the incident potential  $\phi_{in}(\mathbf{r})$  at the nodal positions. Therefore, the only difference with the original BEM system (A.55) is in the free term due to the incident wave.

## A.5 Numerical examples

In this section, different numerical examples are presented in order to demonstrate the potential of the proposed BEM formulation for the solution of water-wave transmission problems in variable bathymetries. The first and the second problem present analytical solution and are used to test the accuracy of the fundamental solution and the BEM scheme. The variable used to compare with the analytical solution is the wave amplification factor WAF, a common design parameter in engineering applications that is defined as the ratio between the local value of the wave height and a reference value, normally selected as the incident wave height in deep water. Due to the linear relation between the water surface elevation and the velocity potential, i.e.  $|\phi| = gH/(2\omega)$ , the WAF is also the ratio between the absolute value of the velocity potential and the absolute value of the incident velocity potential in deep water.

The velocity potential for an incident wave traveling in an infinite two-dimensional domain with unidirectional variable bathymetry, under the mild-slope assumption in conjunction with very slowly varying bathymetry and discarding strong diffraction effects, is given by the expression [44]:

$$\phi_{in}(\mathbf{r}) = |\phi_o|A(x) \exp \left[ ik(x)y \sin \theta + \int_{x_0}^x ik(\eta) \cos \theta d\eta \right] \quad (\text{A.59})$$

where wave amplitude  $A(x)$  is a function containing the shoaling and refraction coefficients and  $\theta$  is the angle between the incident wave and the direction of variable wave number. This solution is a necessary ingredient of the BEM formulation for scattering problems (A.58).

### A.5.1 Shoaling effect in a channel

The shoaling effect can be observed under stationary conditions in waves traveling from deep to shallow waters. When the waves arrive to the shallow water they slow down, the wave length is gradually reduced and, because the energy flux must remain constant, a reduction in the group velocity is compensated by an increase in the wave height.

To reproduce this phenomena, we model a rectangular channel of length  $L = 70m$  in the  $x$ -direction that is discretized with a uniform mesh of linear boundary elements. The lateral walls present zero normal-flux conditions, the incident velocity potential  $\phi_{in}$  is imposed as boundary condition at  $x = 0m$  and  $x = 70m$ . The period of the incoming water wave is

$T = 5s$  and its wave-length at the entry point is  $L_0 = 39m$ . A sketch of the configuration is represented in Figure A.8.

Water depth  $h(x)$  is supposed to decrease monotonically along the channel from  $14m$  to  $0.5m$  between  $x = 0m$  and  $x = 70m$ . This means that, for the considered initial wave-length of  $39m$ , waves travel from intermediate water-depths to shallow waters. In the transition zone, the water depth function is mathematically approximated by a cubic polynomial:

$$h(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (\text{A.60})$$

with  $a_0 = 14m$ ,  $a_1 = 0m^{-1}$ ,  $a_2 = -8.2653 \times 10^{-3}m^{-2}$  and  $a_3 = 7.8717 \times 10^{-5}m^{-3}$ . The associated wave number  $k(x)$  for this water-depth function is evaluated using the dispersion relation (A.3) for the fixed frequency of the incident wave.

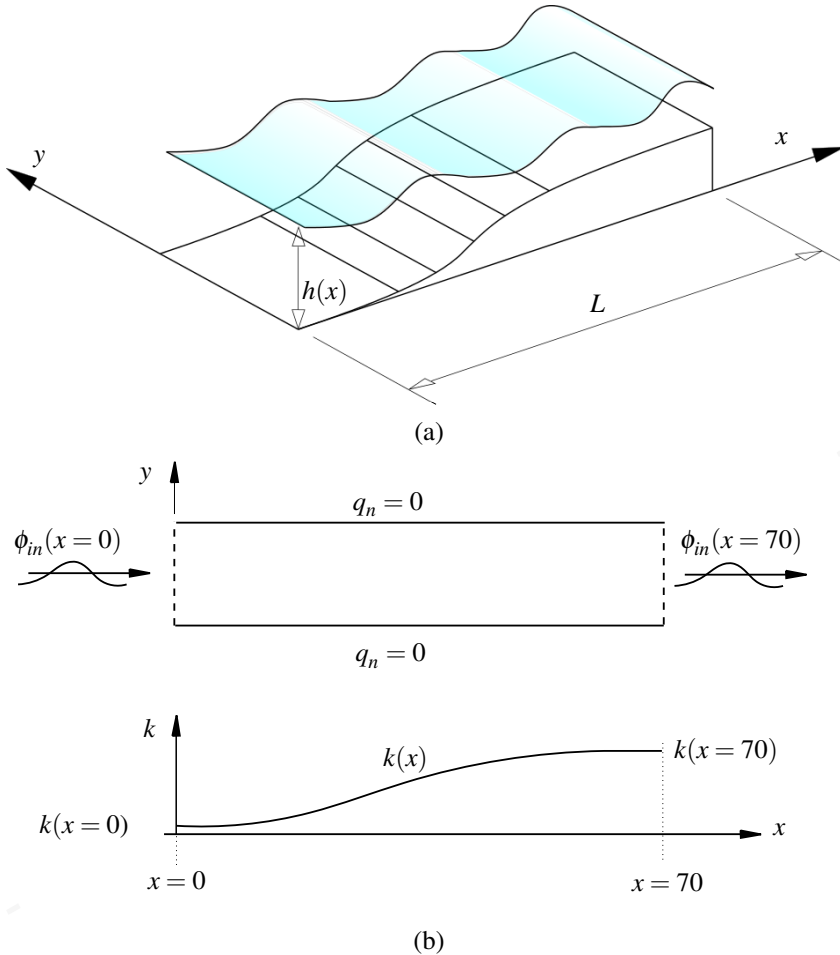
The variation of the velocity potential along the channel is obtained at the lateral walls. Figure A.9 shows a comparison of the WAF obtained with BEM and the analytical solution for the incident wave given by equation (A.59). Both solutions present very good agreement, demonstrating the ability of the proposed boundary element formulation to represent this phenomenon and to compute accurate shoaling coefficients in variable water depths.

## A.5.2 Scattering by a cylinder with variable bathymetry

In this section we study the wave scattering produced by a cylinder in waters of variable depth. A rigid cylinder of radius  $R = 25m$  is fixed on a seabed of depth  $h(x)$  varying in one direction, as represented in Figure A.10. Plane waves of potential  $\phi_o$  are incident from infinity with wave period  $T$  and incidence angle  $\theta$ . To model the open domain, the boundary of the cylinder is uniformly discretized using 320 linear BEM elements of the same size.

We will apply first the proposed BEM scheme (A.58) to the particular case of constant bathymetry in order to check the accuracy achieved by the numerical fundamental solution. The wave scattering by a circular cylinder in an infinite homogeneous medium is a well known problem with analytical solution obtained by McCamy and Fuchs [41] that is commonly used to validate numerical algorithms for diffraction problems [10, 42]. Considering a constant water depth  $h(x) = 14m$ , the dispersion relation (A.3) yields for this case a wave number  $k = 0.42m^{-1}$ . The magnitude and real part of the normalized velocity potential  $\phi(x,y)/|\phi_o|$  computed with BEM are represented in the form of contour plots in Figure A.11. As expected, we obtain a diffraction pattern that decays inversely with the square root of the radial distance and observe a strong shadow region in the rear part of the cylinder. Accuracy of this solution is demonstrated in Figure A.12, where the normalized velocity potential is compared with the analytical solution for a cross section located at  $y = 0$ .

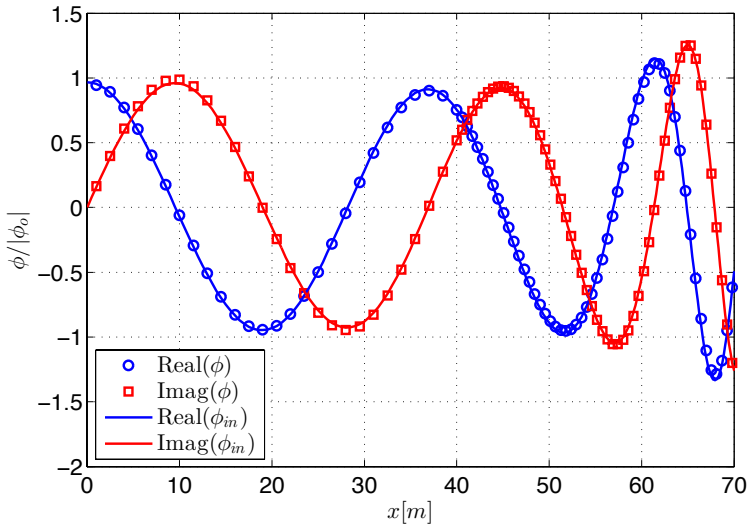
The problem is next solved for two different incidence angles,  $\theta = \pi/2$  and  $\theta = \pi/6$ , in the same variable water-depth profile considered in Section A.5.1. The solution for  $\theta = \pi/2$ , incident wave normal to the bathymetric lines, is represented in Figure A.13, where a strong shoaling effect is observed behind the cylinder due to the change of water depth in this region. For an inclined incident wave of  $\theta = \pi/6$ , the solution is shown in Figure A.14. In this case, combined shoaling and refraction effects appear



**Figure A.8** Channel with variable water depth  $h(x)$  in the longitudinal direction. Model of the closed rectangular domain (a). Boundary conditions and associated wave-number  $k(x)$  in the  $x$ -direction (b).

behind the cylinder. Refraction involves a change in the direction of waves as they pass from one medium to another. This phenomenon appears in water waves when traveling from deep to shallow waters, because the waves change their direction and tend to travel perpendicularly to the bathymetric lines. These results demonstrate the ability of the proposed formulation to model the combined effects of shoaling, diffraction and refraction in water wave transmission problems.

Finally, in Figure A.15 we study the influence of variable water-depth and different incidence angles on the normalized velocity potential at  $y = 0$ . We observe that the solution in front of the cylinder is mainly influenced by the incidence angle and that the variable bathymetry is controlling the solution in the wake behind the object.



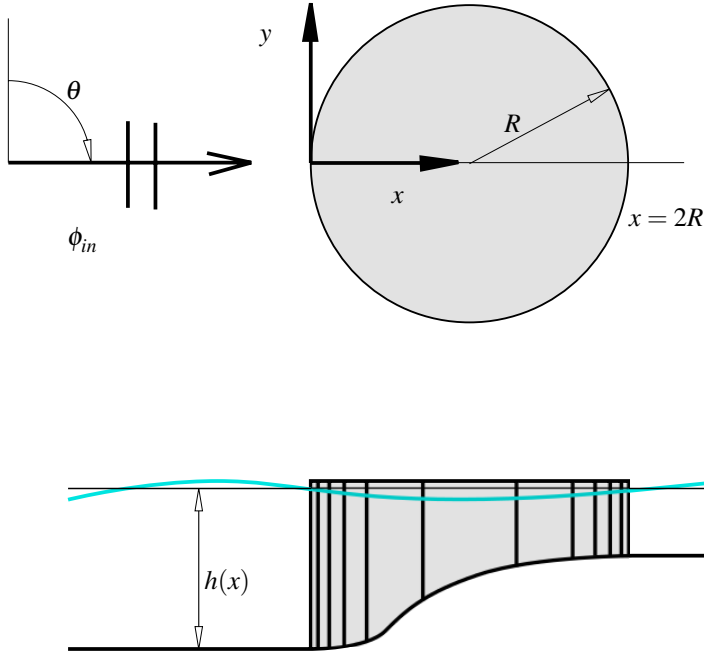
**Figure A.9** Shoaling effect in a channel with monotonically decreasing water depth. Real and imaginary parts of the wave amplification factor obtained using BEM (dots) compared with the analytical solution (solid-line) given by equation (A.59).

### A.5.3 Elliptic shoal on a sloping bottom

Although the proposed fundamental solution is restricted to unidirectional variation of the bathymetry, problems with local irregularities of the seabed in two directions can be effectively treated using BEM-FEM coupling techniques [47] by enclosing the unevenness within a FEM domain that is connected to a BEM model of the external region where the bathymetry varies only in one direction. To demonstrate the effectiveness of this technique and validate the results of the BEM model, we study the scattering produced by an elliptic shoal resting on a sloping seabed. This problem was first studied by Berkhoff et al. [8] comparing experimental and numerical results based on the MSE and later used by Belibassakis et. al. [5] to verify a coupled-mode model.

In this problem, the bathymetry is composed of an elliptic shoal superimposed on a sloping bottom with a constant slope of 2%. The shape of the inclined background bathymetry  $h_i(x,y)$  is given by:

$$h_i(x,y) = \begin{cases} 0.45, & x < -5.85 \\ 0.45 - 0.02(5.85 + x), & -5.85 \leq x \leq 14.15 \\ 0.05, & x > 14.15 \end{cases} \quad (\text{A.61})$$



**Figure A.10** Rigid circular cylinder mounted on waters with variable depth  $h(x)$ . Top and side views of the cylinder with an incident wave  $\phi_{in}$  of incidence angle  $\theta$  relative to the bathymetric lines.

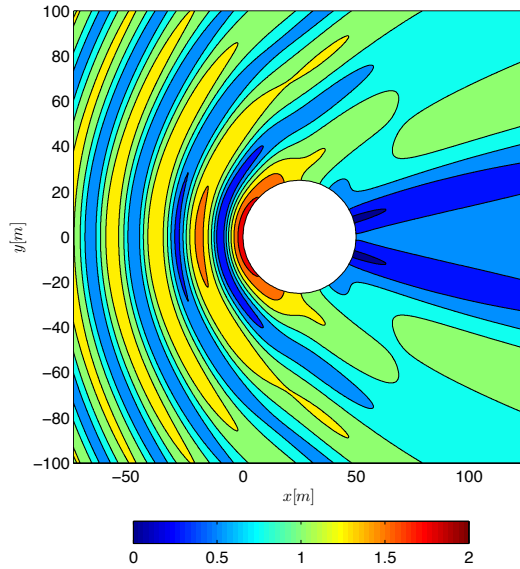
and the superimposed shoal, located inside a domain  $\Omega_s$  with boundary  $\Gamma_s$ , produces a disturbance height  $h_d(x,y)$  that is evaluated as:

$$h_s(x,y) = 0.3 - 0.5 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3.75}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2}, \quad (x,y) \in \Omega_s \quad (\text{A.62})$$

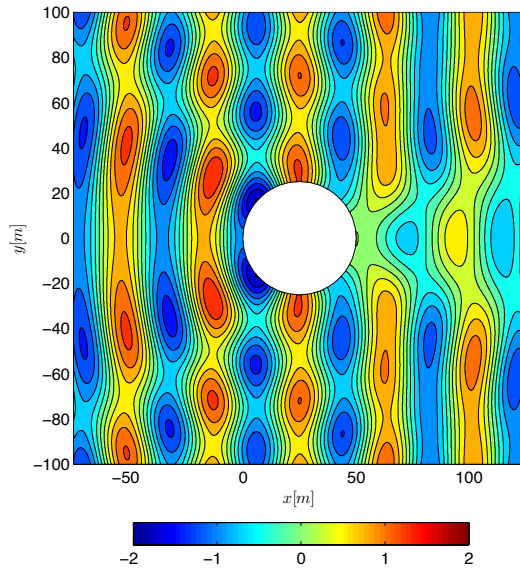
where the elliptic domain of the disturbance is defined by the condition  $\Omega_s = \{(x,y) \mid (x/3)^2 + (y/4)^2 \leq 1\}$ .

The numerical model consists of an internal region, defined in  $\Omega_s$ , modeled using a FEM approximation of the MSE and an external problem, defined on  $\Gamma_s$ , modeled by the BEM. The BEM equipped with the proposed fundamental solution allows us to reproduce the infinite domain without the need of using special techniques to satisfy the Sommerfeld radiation condition. A regular mesh of isoparametric quadrilateral finite elements is used to discretize  $\Omega_s$ , with 400 divisions in the  $x$ -axis and 300 divisions in the  $y$ -axis to have at least 12 elements per wavelength. The external surface of the domain is meshed using linear two-node boundary elements perfectly matching the finite element discretization on the boundary. Coupling of the FEM and BEM meshes is made node-to-node, compatibilizing nodal velocity-potential and fluxes.

The considered incoming wave has a period  $T = 1\text{ s}$  and enters into the domain with an angle of incidence  $\theta = 20^\circ$  in the  $x$  direction. These conditions produce intermediate-water

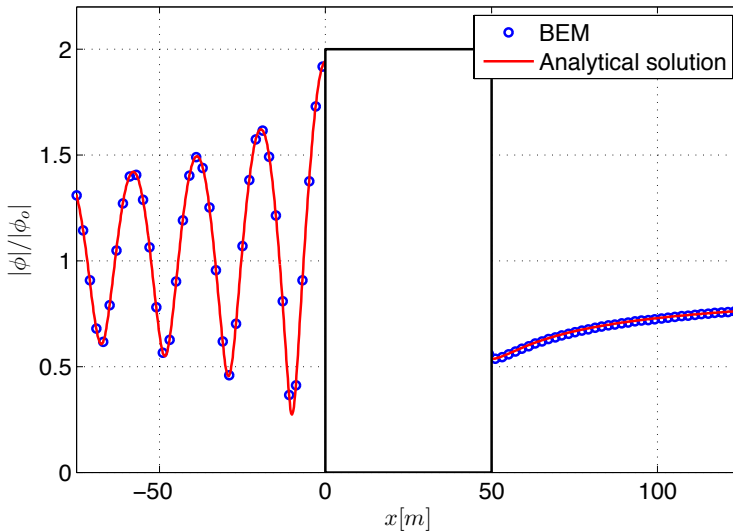


(a)



(b)

**Figure A.11** Interference patterns obtained using BEM for a cylinder in constant water depth  $h(x) = 14m$  and an incident wave of period  $T = 5s$ . Contours of magnitude (a) and real part (b) of the normalized velocity potential  $\phi/|\phi_o|$ .



**Figure A.12** Wave scattering by a cylinder in constant water depth. Comparison with the analytical solution of the normalized magnitude of the velocity potential  $|\phi|/|\phi_0|$  at  $y = 0$  obtained using BEM.

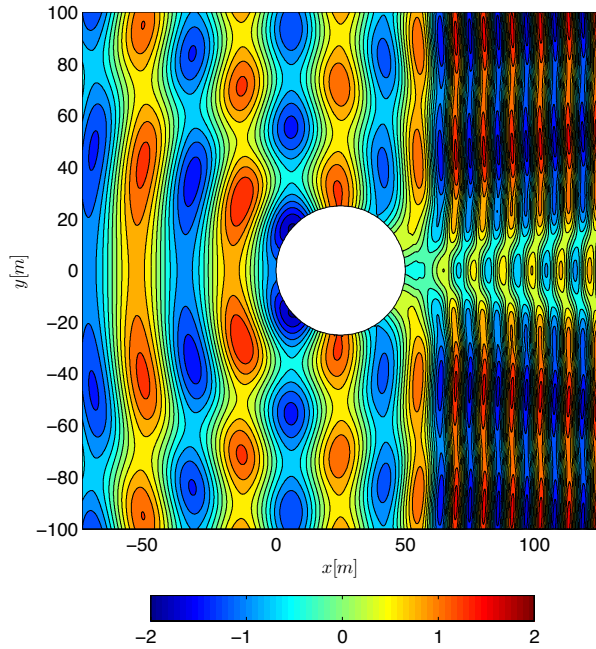
waves with a shallowness ratio varying between 0.30 and 0.074 from the deepest area to the shallow region. In Figure A.16 (top) we represent the contours of equal-amplitude lines of normalized wave height obtained over the elliptical shoal using the BEM-FEM coupling technique. Two sections are defined in the domain to compare the solution with experimental results obtained by Berkhoff et. al. [8] and numerical results from Belibassakis et. al [5] solving the MMSE for this case, see Figure A.17. Equal phase-range zones of the solution are shown at the bottom of Figure A.16, where it can be appreciated its continuity and absence of spurious reflections at the BEM-FEM interface.

Sections A-A' and B-B' of the solution are represented in Figure A.17, demonstrating the good behavior of the fundamental solution and presenting a very reasonable agreement with the experimental data. The discrepancies between numerical and experimental results, as the overestimation of the focal peak in the transversal section B-B' and the lack of prediction along the longitudinal section A-A', are mainly attributed to the non-linear effects [5], not considered in the MSE linear theory. The phase results represented in Figure A.16 (bottom) are in very good agreement with those measured by Berkhoff et al. [8], capturing the presence of two low amplitude points behind the shoal observed in the experiments.

#### A.5.4 Harbor resonance study

Finally, in order to explore the possibilities of the proposed BEM formulation in applications with more complex geometries, it is studied the wave transmission problem in a small





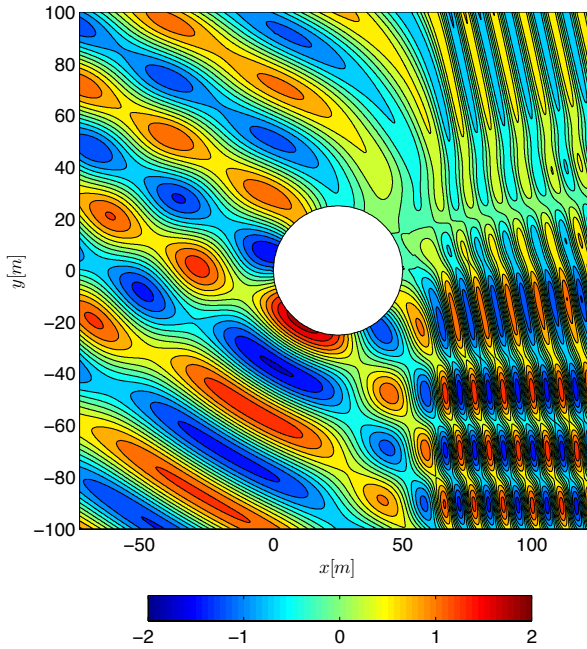
**Figure A.13** BEM solution for a decreasing water depth in the  $x$ -direction and incidence angle  $\theta = \pi/2$ . Contour field of the real part of the normalized velocity potential. Shadow region behind the cylinder is now affected by a strong shoaling effect due to the variable bathymetry.

harbor and its near-by coastal region with variable bathymetry. The harbor is located in the coastal village of Chipiona, at coordinates  $36^{\circ}44'57''$  latitude and  $6^{\circ}25'42''$  longitude on the Atlantic shoreline of the Cádiz province, southwest of Spain.

The objective of the simulation is to estimate the wave amplification in the interior of the harbor and reproduce the diffraction effects in front of the breakwater. The geometry and boundary conditions of the numerical model are shown in Figure A.18, with open boundaries to represent the shoreline and completely reflecting boundaries in the dike and quay walls of the harbor. The open boundaries are modeled assuming a complete absorption of the incoming wave. Bathymetric lines are defined parallel to the shoreline, varying with the polynomial depth function (A.60) with coefficients  $a_0 = 100m$ ,  $a_1 = 0m^{-1}$ ,  $a_2 = -4.0816327 \times 10^{-4}m^{-2}$  and  $a_3 = 3.239391 \times 10^{-7}m^{-3}$ . In the region, the tidal range is  $3.4m$  with a lowest tide of  $4m$  that is considered as mean water-depth inside the harbor.

The boundary of the harbor is discretized using 1234 linear boundary elements with at least 20 elements per wave length. As external source, it is considered an incident wave of height  $1m$ , angle of incidence  $\theta = \pi/6$  and a common period value for this area,  $T = 10s$ .

As part of the post-process and after solving the boundary problem, we computed the solution in the exterior domain at 72539 collocation points that are evenly distributed with a distance between two adjacent points of  $1/20$  times the local wave length. The WAF



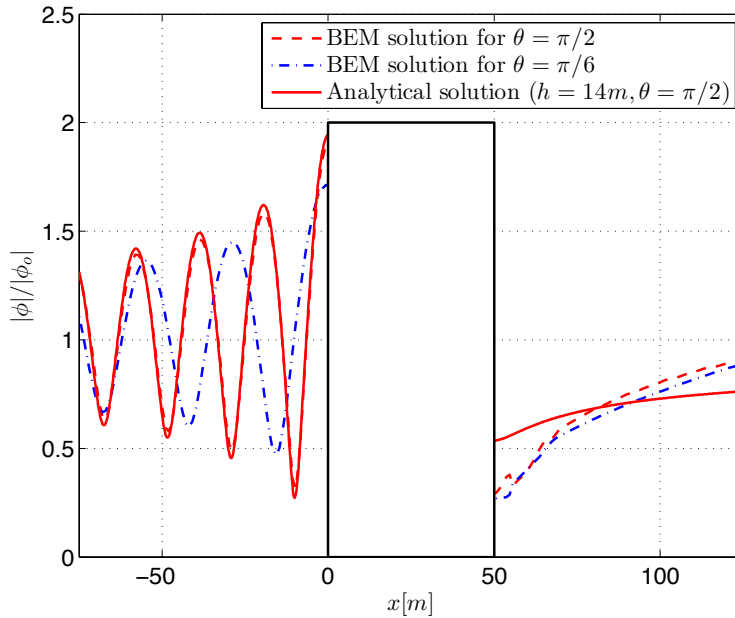
**Figure A.14** BEM solution for a decreasing water depth in the  $x$ -direction and incidence angle  $\theta = \pi/6$ . Contour field of the real part of the normalized velocity potential. Combined shoaling and refraction effects behind the cylinder due to the variable bathymetry.

obtained for this example is shown in Figure A.19. It can be observed that some points inside the harbor exhibit a significant amplification factor because dissipation effects, like friction with the sea floor and partial-reflecting boundaries, are not considered in the analysis. However, the use total reflection boundaries is a common practice in harbor resonance studies.

## A.6 Summary and Conclusions

A complete fundamental solution and BEM formulation for the elliptic Mild-Slope equation in waters of variable depth in one direction has been presented. The Green's function proposed by Belibassakis [3] has been used as the starting point of our BEM formulation and different examples have been solved to validate the approximation. The main conclusions and findings of this work are the following.

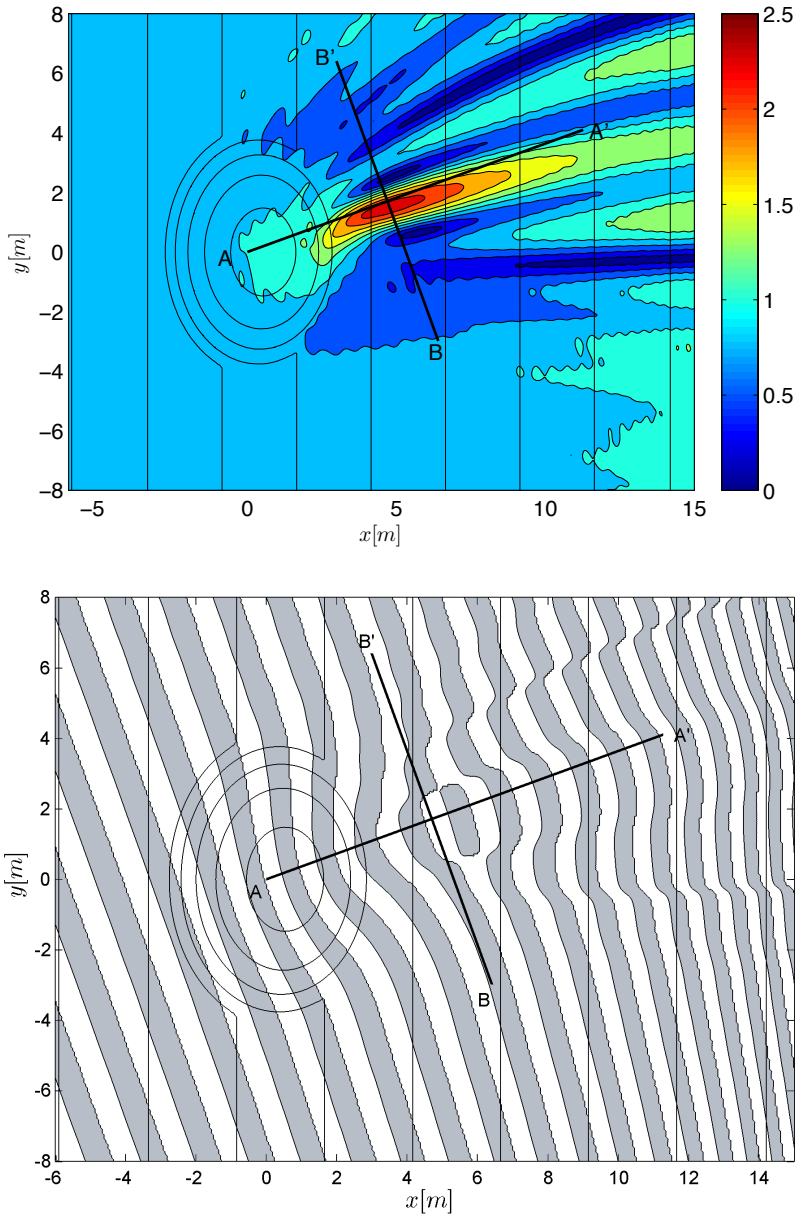
- The Green's function of Belibassakis [3] for the MSE with one-directional variable bathymetries has been extended and combined with a boundary element formulation to simulate surface water-wave transmission problems in medium to shallow transition waters.



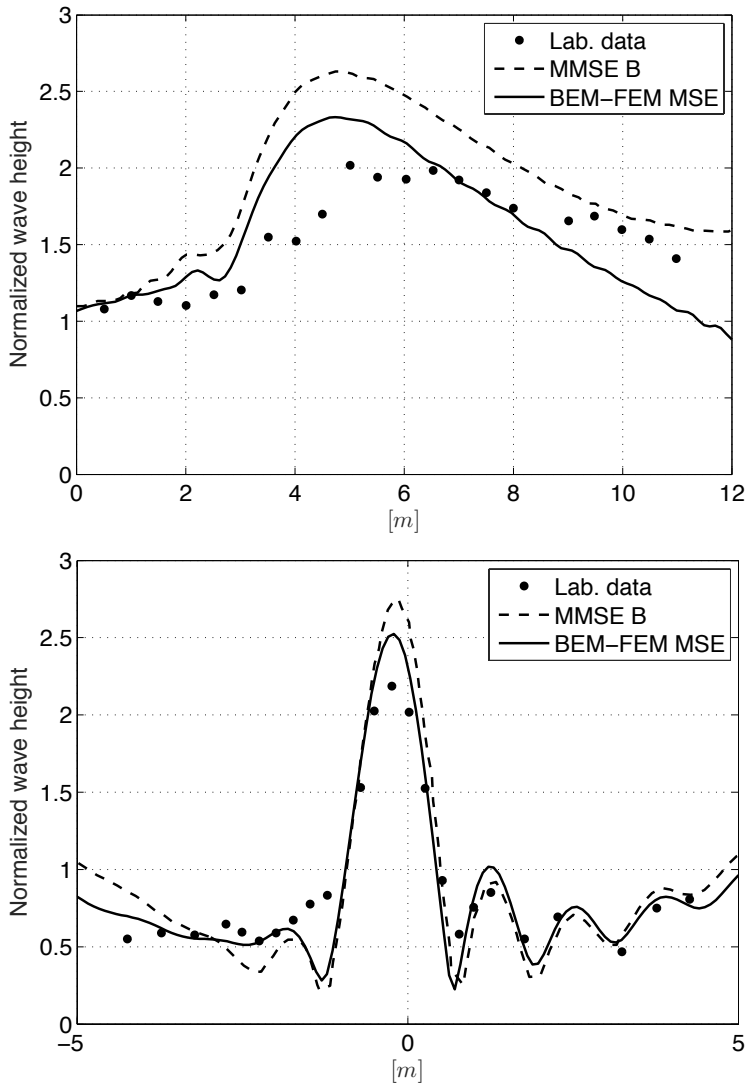
**Figure A.15** Wave scattering by a cylinder in variable water depth. Normalized magnitude of the velocity potential computed with the BEM along the profile located at  $y = 0$  for two different incidence angles.

- The one-dimensional wave equations in the transformed domain associated with the evaluation of the fundamental solution are solved using a classical Galerkin finite element approximation. It has been observed in our numerical experiments that similar accuracy is obtained using this approach, compared to the second order FD scheme proposed by Belibasakis [3] for this task.
- The formulation is able to correctly reproduce the phenomena appearing in water-wave transmission problems: shoaling, diffraction, refraction and the result of their combined effects.
- Bathymetries with slopes up to 1:3 and contour lines parallel to the shoreline are very common in real problems. The proposed BEM technique allows to simulate these conditions, providing accurate solutions for practical coastal engineering problems.
- This BEM formulation can be coupled with classical design techniques, like FEM or FDM formulations of the MSE or MMSE [43], to model open sea conditions of variable bathymetry.

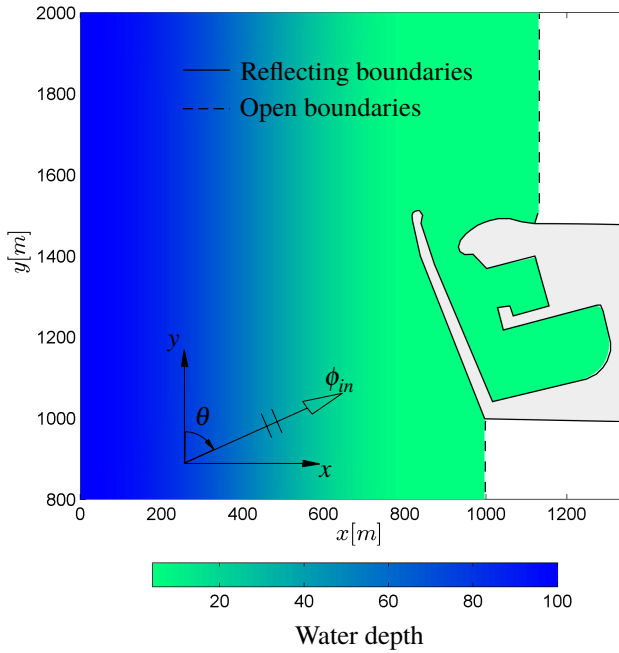
Finally, it is important to mention that the proposed BEM formulation can also be combined with more advanced partial-reflection boundary conditions and FEM-BEM coupling techniques to extend the range of practical applications. Work in this direction is under way.



**Figure A.16** Scattering produced by an elliptic bank on a sloping bottom. Absolute value of the normalized wave height (top) and zones of equal phase within an interval of  $\pi$  radians (bottom). Two thick lines indicate the location of the sections represented in Figure A.17.



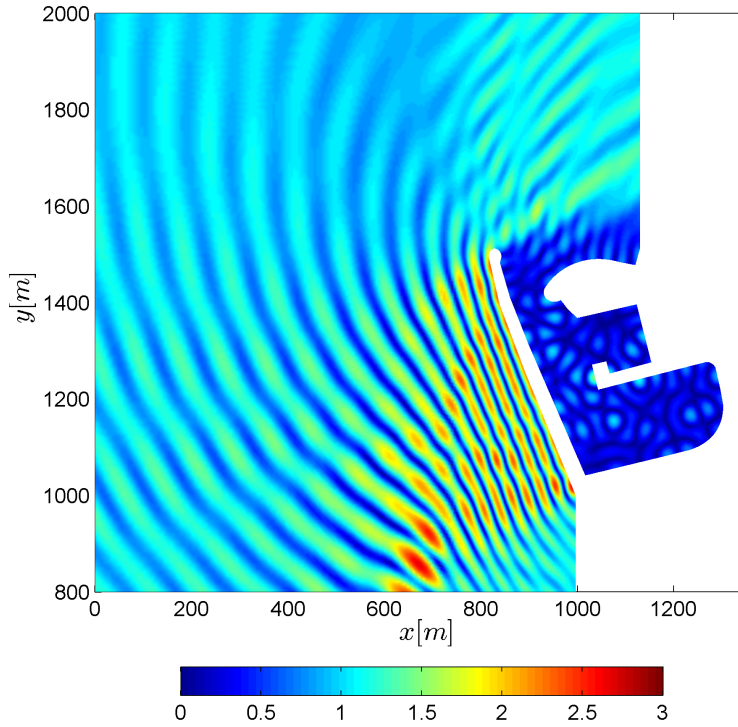
**Figure A.17** Normalized wave height along a longitudinal section A-A' (top) and a transversal section B-B' (bottom), see Figure A.16. Comparison of experimental data from Berkhoff et al. [8], numerical results based on the MMSE obtained by Belibassakis et al. [5] and numerical solution of the MSE obtained by BEM-FEM coupling.



**Figure A.18** Nearshore bathymetric mapping and boundary conditions used for the harbor simulation. Water depth changes along the  $x$ -coordinate from 100m to 4m between  $x = 0m$  and  $x = 840m$ . Water depth remains constant for  $x \geq 840m$ .

## A.7 Acknowledgements

This work was supported by the *Ministerio de Economía y Competitividad* of Spain, under the research projects DPI2010-19331 and DPI2013-43267-P, which were co-funded by European Regional Development Funds (ERDF).



**Figure A.19** WAF diagram calculated using BEM for the harbor of Chipiona example under inclined incident waves and 10-second period wave condition.





# Bibliography

---

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. NBS, 10 edition, 1972.
- [2] N. Atalla and F. Sgard. *Finite Element and Boundary Methods in Structural Acoustics and Vibration*. CRC Press, 2015.
- [3] K. Belibassakis. The Green's function of the mild-slope equation: The case of a monotonic bed profile. *Wave Motion*, 32:339–361, 2000.
- [4] K. Belibassakis and G. Athanassoulis. Three-dimensional Green's function for harmonic water waves over a bottom topography with different depths at infinity. *Journal of Fluid Mechanics*, 510:267 – 302, 2004.
- [5] K. Belibassakis, G. Athanassoulis, and T. Gerostathis. A coupled-mode model for the refraction-diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry. *Applied Ocean Research*, 23(6):319 – 336, 2001.
- [6] G. Beltrami, G. Bellotti, P. Girolamo, and P. Sammarco. Treatment of wave breaking and total absorption in a mild-slope equation fem model. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 127(5):263–271, 2001.
- [7] P. G. Bergmann. The equation in a medium with a variable index of refraction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 17(4):329 – 333, 1946.
- [8] J. Berkhoff, N. Booy, and A. Radder. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coastal Engineering*, 6(3):255 – 279, 1982.
- [9] W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In *Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering*. ASCE, 1972.
- [10] W. Berkhoff. *Mathematical Models for Simple Harmonic Linear Water Waves. Wave Diffraction and Refraction*. PhD thesis, Delft Hydraulics Laboratory, 1976.

- [11] P. Bettess and O. C. Zienkiewicz. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(8):1271–1290, 1977.
- [12] R. P. Bonet. Refraction and diffraction of water waves using finite elements with a DNL boundary condition. *Ocean Engineering*, 63:77–89, 2013.
- [13] N. Booij. A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Engineering*, 7(3):191 – 203, 1983.
- [14] P. Chamberlain and D. Porter. The modified mild-slope equation. *Journal Fluid Mechanics*, 291:393 – 407, 1995.
- [15] C. N. Chandrasekera and K. F. Cheung. Extended linear refraction-diffraction model. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 123(5):280 – 286, 1997.
- [16] H. Chen. Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering. *Applied Ocean Research*, 8(2):99 – 104, 1986.
- [17] H. Chen and C. Mei. Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea. In *Symposium on Naval Hydrodynamics 10th*. Cambridge, June 1974.
- [18] W. Chen. *Finite element modeling of wave transformation in harbors and coastal regions with complex bathymetry and ambient currents*. PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Maine, August 2002.
- [19] G. J. Copeland. A practical alternative to the "mild-slope" wave equation. *Coastal Engineering*, 9(2):125 – 149, 1985.
- [20] J. Domínguez. *Boundary elements in dynamics*. International series on computational engineering. Computational Mechanics Publications; Elsevier Applied Science, har/dsk edition, 1993.
- [21] D. Givoli. Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 94(1):1 – 29, 1991.
- [22] D. Givoli and J. B. Keller. Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave Motion*, 12(3):261 – 279, 1990.
- [23] A. Hauguel. A combined FE-BIE method for water waves. In *16th International Conference on Coastal Engineering*, pages 715–721, 1978.
- [24] S.-S. Hsiao, C.-M. Chang, and C.-C. Wen. Solution for wave propagation through a circular cylinder mounted on different topography ripple-bed profile shoals using DRBEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(11):1246 – 1257, 2009.
- [25] T.-W. Hsu and C.-C. Wen. A study of using parabolic model to describe wave breaking and wide-angle wave incidence. *J. Chin. Inst. Eng.*, 23(4):515–527, July 2000.

- 
- [26] T.-W. Hsu and C.-C. Wen. A parabolic equation extended to account for rapidly varying topography. *Ocean Engineering*, 28(11):1479 – 1498, 2001.
- [27] K. ichiro Hamanaka. Open, partial reflection and incident-absorbing boundary conditions in wave analysis with a boundary integral method. *Coastal Engineering*, 30(3–4):281 – 298, 1997.
- [28] M. Isaacson and S. Qu. Waves in a harbour with partially reflecting boundaries. *Coastal Engineering*, 14(3):193 – 214, 1990.
- [29] J. B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 82(1):172 – 192, 1989.
- [30] J. T. Kirby. A general wave equation for waves over rippled beds. *Journal of Fluid Mechanics*, 162:171 – 186, 1986.
- [31] S. Lau and Z. Ji. Efficient 3-d infinite element for water wave diffraction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(6):1371–1387, 1989. cited By (since 1996)6.
- [32] C. Lee, W. S. Park, Y.-S. Cho, and K. D. Suh. Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, 34:243 – 257, 1998.
- [33] H. S. Lee, S. D. Kim, K.-H. Wang, and S. Eom. Boundary element modeling of multidirectional random waves in a harbor with a rectangular navigation channel. *Ocean Engineering*, 36(17-18):1287 – 1294, 2009.
- [34] H. S. Lee and A. Williams. Boundary element modeling of multidirectional random waves in a harbor with partially reflecting boundaries. *Ocean Engineering*, 29(1):39 – 58, 2002.
- [35] B. Li. An evolution equation for water waves. *Coastal Engineering*, 23(3):227 – 242, 1994.
- [36] B. Li and K. Anastasiou. Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using the multigrid technique. *Coastal Engineering*, 16(3):245 – 266, 1992.
- [37] H. Liu. A modified GDRBEM model for wave scattering. In *International Conference on Estuaries and Coasts*, pages 749–755, 11 2003.
- [38] S.-X. Liu, B. Sun, Z.-B. Sun, and J.-X. Li. Self-adaptive FEM numerical modeling of the mild-slope equation. *Applied Mathematical Modelling*, 32(12):2775 – 2791, 2008.
- [39] J.-Y. Maa, T.-W. Hsu, and D.-Y. Lee. The RIDE model: an enhanced computer program for wave transformation. *Ocean Engineering*, 29(11):1441 – 1458, 2002.
- [40] S. R. Massel. Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Engineering*, 19:97 – 126, 1993.

- [41] R. McCamy and R. Fuchs. Wave forces on piles; a diffraction theory. Beach Erosion Board, Techn. Memorandum, no. 69, 1954.
- [42] C. Mei. *The applied dynamics of ocean surface waves*. John Wiley, Chichester, 1983.
- [43] R. Naserizadeh, H. B. Bingham, and A. Noorzad. A coupled boundary element-finite difference solution of the elliptic modified mild slope equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1):25 – 33, 2011.
- [44] V. Panchang, B. X. W. Chen, K. Schelenker, Z. Demirbilek, and M. Okihiro. Exterior bathymetry effects in elliptic harbor wave models. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 126:71–78, March-April 2000.
- [45] V. G. Panchang, B. R. Pearce, G. Wei, and B. Cushman-Roisin. Solution of the mild-slope wave problem by iteration. *Applied Ocean Research*, 13(4):187 – 199, 1991.
- [46] D. Porter and D. Staziker. Extensions of the mild-slope equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 300:367–382, 1995.
- [47] L. Rodríguez-Tembleque, J. A. González, and A. Cerrato. Partitioned solution strategies for coupled BEM–FEM acoustic fluid–structure interaction problems. *Comput. Struct.*, 152:45 – 58, 2015.
- [48] R. Shaw and W. Falby. FEBIE - A combined finite element-boundary integral equation method. *Computers & Fluids*, 6(3):153 – 160, 1978.
- [49] D. Steward and V. Panchang. Improved coastal boundary condition for surface water waves. *Ocean Engineering*, 28(1):139 – 157, 2001.
- [50] K. D. Suh, C. Lee, and W. S. Park. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, 32:91 – 117, 1997.
- [51] T.-K. Tsay and P. L.-F. Liu. A finite element model for wave refraction and diffraction. *Applied Ocean Research*, 5(1):30 – 37, 1983.
- [52] T.-K. Tsay, W. Zhu, and P.-F. Liu. A finite element model for wave refraction, diffraction, reflection and dissipation. *Applied Ocean Research*, 11(1):33 – 38, 1989.
- [53] T. Wu. *Boundary Element Acoustics, Fundamentals and Computer Codes*, volume 3. WIT Press, Boston, 5 edition, 2000.
- [54] S. Zhu. A new DRBEM model for wave refraction and diffraction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(4):261–274, 1993.
- [55] S.-P. Zhu, H.-W. Liu, and K. Chen. A general DRBEM model for wave refraction and diffraction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(5):377 – 390, 2000.
- [56] S.-P. Zhu, H.-W. Liu, and T. R. Marchant. A perturbation DRBEM model for weakly nonlinear wave run-ups around islands. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(1):63 – 76, 2009.

**Apéndice B**

**Artículo II: A coupled finite and  
boundary spectral element method  
for linear water–wave propagation  
problems**

---

Paper submitted to journal on 10/06/2016.

- Journal Name: Applied Mathematical Modelling
- ISSN: 0307-904X
- Journal Citation Reports (2015): Impact factor: 2.291
  - Classification (Engineering, Multidisciplinary): Q1(12/85)
  - Classification (Mathematics, Interdisciplinary Applications): Q1(13/101)
  - Classification (Mechanics): Q1(22/135)
- SCIMAGO (2015): Impact factor: 1.318
  - Classification (Applied Mathematics): Q1(76/461)
  - Classification (Modelling and Simulation): Q1(27/457)



# A coupled finite and boundary spectral element method for linear water–wave propagation problems

**Authors:** Antonio Cerrato<sup>+</sup>, Luis Rodríguez-Tembleque<sup>+</sup>, José A. González<sup>+</sup> and M.H. Ferri Aliabadi\*

<sup>+</sup>Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, Spain

\*Department of Aeronautics, Faculty of Engineering, Imperial College of London, South Kensington Campus, London SW7 2AZ, UK.

## Abstract

A coupled boundary spectral element method (BSEM) and spectral element method (SEM) formulation for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions is presented in this work. The wave model is based on the Mild-Slope Equation (MSE), which provides a good approach of the propagation of surface waves over irregular bottoms with slopes up to 1:3. In unbounded domains or infinite regions, the space can be divided into a central region or "inner region" and a surrounding infinite "outer region". The SEM allows us to model the inner region, where any variation of the bathymetry can be considered, while the outer region is modelled by the BSEM which, combined with the fundamental solution presented by Cerrato et al. (2016) [14], can include bathymetries with straight and parallel contour lines. The solution approximation within the elements is constructed by a high order Legendre polynomials associated to Legendre-Gauss-Lobatto quadrature points, providing a spectral convergence for both methods. The proposed formulation has been validated in three different benchmark cases with different shapes of the bottom surface. The solutions present the typical  $p$ -convergence of spectral methods, with the combined advantages on the modelisation of the boundary element and finite element methods.

**Keywords:** Spectral element methods; BEM-FEM Coupling; Wave propagation; Mild-Slope equation

## B.1 Introduction

The pseudo-spectral methods have gained popularity over the last three decades since Patera [53] presented his pioneer work on the mid 80s, combining the spectral approach with finite element formulation to solve the Navier-Stokes equation. Since then, the spectral element method has been used to solve many different problems in the fields of optics, electromagnetics, acoustics or water-wave propagation. In this area, much effort has been

made for non-linear equations like the Boussinesk-type equations [19, 20]. Nevertheless, the application of pseudo-spectral methodologies to the mild-slope equation has not been treated in the literature, despite of the fact that these type of models represent the basic framework for the simulation of surface wave propagation problems in variable water depths.

The elliptical *mild-slope* equation (MSE) [9, 10] allows to consider simultaneously the effects of diffraction, refraction, reflection and shoaling of linear water surface waves, being formally only valid for slowly varying sea-bed slopes, i.e.  $\nabla h \ll kh$ , being  $h$  the water depth and  $k$  the wave number [60, 13]. That condition converts the MSE in a powerful tool to study large coastal areas with less computational effort compared to non-linear models. In order to extend the applicability of the MSE, some modifications has been proposed for more complicated bathymetries, as in [54] [48], or to include energy dissipation effects, such as wave breaking and bottom friction [46]. The modified mild-slope equation (MMSE) presented in [15] and later improved in [54], retains the second order terms discarded by Berkhoff in the original formulation of the MSE. More extensions of the MSE can be found in [58, 16, 38, 41, 28, 29].

The MSE has been traditionally solved using the finite element method (FEM) [10], and the finite difference method (FDM) [52, 42]. However, classical finite difference and finite element methods present common deficiencies, as the pollution effect and difficulties to reproduce properly natural boundary conditions.

The pollution effect is directly related to the numerical dispersion, which is an error due to the loss of the ellipticity of the Helmholtz's equation as the wave number  $k$  increases. This error deteriorates the solution even if the coefficient  $kh$ , where  $h$  is the element size, is kept small. Hence the number of nodes per wave length is not sufficient to determine the accuracy of the solution. This matter has been object of many works [3, 31, 32, 18], where the pollution error is in general estimated as a rational function of  $kh$  with the coefficients depending on the order of the interpolation function  $p$ . It is found that with higher  $p$ , the number of points per wave length required for a given accuracy presents a slower increasing rate. In order to overcome this deficiency several formulations have been proposed, as the Galerkin Least-squares (GLS) methods [59], spectral element methods [49] or the smoothed finite element methods [43].

One of the most important problems of the FEM and FDM formulations is in the difficulty to reproduce unbounded domains properly. This deficiency has been studied by many authors. Bettess and Zienkiewicz [11] and Lau and Ji [37] used infinite elements in the outer regions. Dirichlet to Neumann (DtN) boundary conditions were proposed by Givoli et al. [23, 35, 22] as an analytical procedure to reproduce exact non-reflecting boundary conditions in some particular cases. This idea was followed by Bonet [12] to derive the discrete non-local (DNL) boundary condition. Other methods, such perfectly matched layers (PML) has been used in [21] and [50]. More rudimentary iterative methods have also been proposed to define absorbing boundary conditions in [6, 57, 17, 45].

Boundary element techniques prove to be very accurate in wave-diffraction problems in unbounded domains, presenting the additional benefit that the radiation condition to infinity is automatically satisfied. In order to improve the solution of the FEM schemes, Hauguel [25] and Shaw and Falby [56] proposed coupling FEM and BEM at the end of the seventies. Hamanaka [30] and later Isaacson and Qu [33] introduced a boundary integral formulation



to reproduce the wave field in harbors with partial reflecting boundaries and Lee et al. [40, 39] included the effect of incoming random waves. Boundary integral techniques have also been used for non-constant bathymetries by means of the dual reciprocity boundary element method (DRBEM). Some of these works also include wave run-ups, see Zhu [63]. Later, this technique was extended to model internal regions with variable depth surrounded by exterior regions with constant bathymetry [44, 64, 65, 27]. More recently, Naserizabeh et al. [51] proposed a coupled BEM-FDM formulation to solve the MSE in unbounded domains. Later, Cerrato et al. [14] derived a complete kernel of a fundamental solution for variable water depths, based on the Green's function presented in [4], and introduced it in a standard BEM formulation.

In the context of SEM, we have the contributions of Mehdizadeh and Paralchivoiu (2003) [49] or, more recently, He et al. (2016) [26]. These works presented a SEM formulation based on the Legendre polynomials for the two dimensional Helmholtz's equation using special techniques to reproduce unbounded domains. To model the open boundaries, Mehdizadeh and Peralchivoiu use an absorbing layer, or PML, surrounded the inner region while He et al. used the Dirichlet to Neumann (DtN) boundary conditions. This last work is also concerned with the modelling of waves propagating over layered media. An specific work about water wave modelling with BEM combined with spectral approximation based on Chebyshev polynomials was presented recently by Kumar et al. [36], but their formulation is limited to constant bathymetries. The combination of spectral elements and BEM formulations has been also recently applied to other fields, such as elastodynamic problems [66]. A final interesting work is [61], where the authors study the *hp*-convergence of the spectral element method for the two dimensional Helmholtz's equation.

In order to deal with the issues mentioned above, this work presents a spectral boundary element-finite element formulation for linear water-wave propagation problems. The SEM is used to model inner regions, allowing to model bathymetries with arbitrary shape, while the BSEM is used as a natural boundary condition which fulfils automatically the Sommerfeld radiation condition. An important feature of the BSEM formulation is that it uses the fundamental solution derived by Cerrato et al. [14] to consider a variable bathymetry in the outer region. The approach of the solution is made by considering a pseudospectral approximation inside the elements, using nodal basis functions with nodes located at the LGL points.

The paper is organized as follows. First, Section B.2 presents the MSE for the linear water-wave propagation problem. In Section B.3, the boundary spectral element formulation is explained in detail. In Section B.4, special attention is paid to the finite spectral element formulation. The coupled boundary spectral element-finite spectral element formulation is presented in Section B.5. Section B.6 is dedicated to the validation of the proposed formulation through the solution of different wave propagation problems for variable water depth, where mathematical and numerical convergence studies are presented. Finally, the paper concludes with the summary and conclusions.

## B.2 The mild-slope equation

To formulate the MSE, according to [9, 10], we consider a Cartesian coordinate system with the  $(x,y)$ -plane located on the quiescent water surface and the  $z$  direction pointing upwards. The still water depth is given by  $h_w(x,y)$  and  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$  is used to represent the gradient operator. Under the assumption of potential flow and integrating the velocity potential in the vertical direction with appropriated boundary conditions, the velocity potential of the water surface can be assumed to be of the form:

$$\Phi(x,y,t) = \phi(x,y)e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.1})$$

where  $i$  is the imaginary unit and  $t$  is the time variable. This potential has to satisfy the homogeneous MSE, that may be written as:

$$\nabla \cdot (cc_g \nabla \phi) + \omega \frac{c_g}{c} \phi = 0. \quad (\text{B.2})$$

where  $c$  is the wave velocity and  $c_g$  is the group velocity. The water depth function  $h_w(x,y)$ , the wave number  $k$  and the angular frequency  $\omega$  of the waves are related by the dispersion equation:  $\omega^2 = gk \tanh(kh_w)$ , where  $g$  is the gravitational acceleration ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ). So, for a fixed frequency and variable bathymetry, the wave number  $k(x,y)$  is a function of the local water depth. In the linear wave theory, the wave height ( $H$ ), is linearly related to the velocity potential on the water surface by the following relation:

$$H = 2\omega|\phi|/g, \quad (\text{B.3})$$

an important design variable for practical problems.

The MSE can be simplified introducing the following change of variable due to Bergmann [7]:  $\phi = \hat{\phi}/\sqrt{cc_g}$ . This relation transforms (B.2) into a Helmholtz equation:

$$\nabla^2 \hat{\phi} + \hat{k}^2 \hat{\phi} = 0, \quad (\text{B.4})$$

with a modified wave number  $\hat{k}(x,y)$  given by:

$$\hat{k}^2(x,y) = k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{cc_g}}{\sqrt{cc_g}}, \quad (\text{B.5})$$

that is a known function of the wave characteristics and the local water depth. In this work, we discard the second term and the modified wave number is approached as  $\hat{k} = k(x,y)$ .

Note that a similar change of variable can be done for treating the same problem under the framework of the MMSE. Simply by modifying accordingly the expression of the wave number (B.5), to account for additional effects associated with higher-order contributions of bottom slope and curvature, we obtain a MMSE model that extends the applicability of the mild-slope equation.

## B.3 Boundary spectral element method

The Boundary Integral Equation (BIE) is a powerful tool to construct accurate and efficient formulations for linear water wave problems. The BIE presents some important advantages as a the fulfillment of the Sommerfeld radiation condition at infinity, or the strong reduction on the number of degrees of freedom required to construct the discrete model of the domain. The main disadvantage of the application of the BIE to water wave propagation problems is the difficulty to include variable bathymetries. The preferred technique to deal with this difficulty is the DRBEM. However it requires to compute domain integrals and the modelisation of infinite domains continues being only applicable to constant-depth areas. Nevertheless, in order to model infinity domains with non-homogeneous water-depth, we can use the standard BIE but equipped with an appropriated fundamental solution [14].

In the BSEM, the BIE is discretized by spectral elements. As in other spectral element techniques, the nodal basis functions based on a family of orthonormal polynomials provide to the BIE an exponential convergence and highly accurate description of the boundary shape.

### B.3.1 Boundary integral equation

We start writing the classical BIE of the BEM in order to fix the notation. Considering a boundary  $\Gamma$  of the region of interest, which is governed by equation (B.4), the BIE can be expressed as:

$$C(\mathbf{x}')\hat{\phi}(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma} \nabla \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}) \cdot \mathbf{n} \hat{\phi}(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}) \hat{q}(\mathbf{x}) d\Gamma + \hat{\phi}_{in}, \quad (\text{B.6})$$

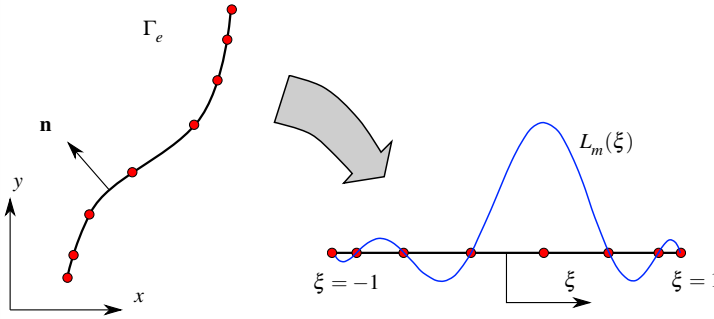
where  $\mathbf{x}'$  is the collocation point,  $\hat{q}$  is the normal flux through the boundary considering an outward normal and  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k})$  is the Green's function of the Helmholtz problem. The free term is, in general, given by  $C(\mathbf{x}') = \theta(\mathbf{x}')/2\pi$ , being  $\theta(\mathbf{x}')$  the internal angle of the boundary at the collocation point. In order to consider also scattering problems, the incident potential  $\hat{\phi}_{in}$  is included in the above expression [62].

### B.3.2 Spectral boundary elements

In order to evaluate the integrals of equation (B.6) the boundary is divided into  $n_e$  elements, being the discrete boundary  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n_e} \Gamma_e$ . In the BSEM formulation presented here, the geometry and the variables on the boundary are approximated using nodal basis functions based on the Lagrange polynomials with nodes located on the Legendre–Gauss–Lobatto (LGL) quadrature points. Inside each spectral element, the modified velocity potential and the normal flux through the boundary is approximated by:

$$\hat{\phi}(\xi) = \sum_{m=0}^p L_m(\xi) \hat{\phi}_m^{(e)}, \quad \hat{q}(\xi) = \sum_{m=0}^p L_m(\xi) \hat{q}_m^{(e)}, \quad (\text{B.7})$$

where  $\hat{\phi}_m^{(e)}$  and  $\hat{q}_m^{(e)}$  are the nodal values of the element  $e$  and  $L_m(\xi)$  the nodal basis functions of degree  $p$  on the interval  $[-1, 1]$ . This approximation functions can be constructed by



**Figure B.1** Example of a spectral boundary element. An element of order  $p = 7$  is represented in the global  $x - y$ -axis (left) and in the local coordinate  $\xi$  (right). Also the nodal function corresponding to the fifth node is shown.

means of Lagrange polynomials with roots at the Gauss-Lobatto points:

$$L_m(\xi) = \prod_{l=0(l \neq m)}^p \frac{\xi - \xi_l}{\xi_m - \xi_l}, \quad m = 0, 1, \dots, p, \quad (\text{B.8})$$

being  $\xi_m$  the local coordinate of the node under consideration and  $\xi_l$  the coordinate of the rest of the nodes inside the element. In the above expressions the index 0 and  $p$  are used to denote the nodes located at the extremes of the interval ( $\xi = -1$  and  $\xi = 1$ ). A representation of this spectral boundary element is given in Figure B.1. It is possible to use the same high order polynomials to approximate the geometry, specially when the real geometry is curved and complex.

### B.3.3 Discrete boundary integral equation

Introducing in the BIE given by (B.6) the approximations of the variables (B.7), the discrete form of the BIE can be written as

$$C_i \hat{\phi}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \nabla \psi(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{x}_i; \hat{k}) \cdot \mathbf{n} L_m(\xi) J^{(e)}(\xi) d\xi \hat{\phi}_m^{(e)} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{-1}^1 \psi(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{x}_i; \hat{k}) L_m(\xi) J^{(e)}(\xi) d\xi \hat{q}_m^{(e)} + \hat{\phi}_{in_i} \quad (\text{B.9})$$

where the sub-index  $i$  refers to the collocation point and the super-index  $e$  to the elements. The jacobian of the transformation from a global coordinate to the local coordinate system is denoted by  $J^{(e)}(\xi)$ . Assembling all the element contributions included in expression (B.9), the discrete form of the BIE can be finally written in a matrix form as:

$$\hat{\mathbf{H}} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{q}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}_{in_i}, \quad (\text{B.10})$$

where the vectors  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  and  $\hat{\mathbf{q}}$  contain the unknown nodal values of the modified potential and flux respectively, and  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{in}$  is the load vector with the values of the incident wave. The matrices  $\hat{\mathbf{H}}$  and  $\hat{\mathbf{G}}$  are composed of the following terms:

$$\hat{H}_{ij} = C_i \delta_{ij} + \sum_{e=1}^{E^{(j)}} \int_{-1}^1 \nabla \psi(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{x}_i; \hat{k}) \cdot \mathbf{n} L_j(\xi) J^{(e)}(\xi) d\xi, \quad (\text{B.11})$$

$$\hat{G}_{ij} = \sum_{e=1}^{E^{(j)}} \int_{-1}^1 \psi(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{x}_i; \hat{k}) L_j(\xi) J^{(e)}(\xi) d\xi, \quad (\text{B.12})$$

where  $E^{(j)}$  represents the group of elements sharing node  $j$ .

### B.3.4 Numerical integration

The integrals of the  $\hat{H}_{ij}$  and  $\hat{G}_{ij}$  terms are evaluated numerically. One of the principal advantages of using a Lagrangian approach combined with a LGL distribution of the nodes within the element, is that the numerical integration can be carried out by means of its associated LGL quadrature rule, which is exact for polynomials up to  $2p - 1$ . This is specially accurate for those elements that are not located close to the collocation point, over a region with smooth variation of the wave number and without a complex geometry. In this case, the values of the Lagrange interpolants at the quadrature points are given by the relation

$$L_m(\xi_k) = \delta_{mk}, \quad (\text{B.13})$$

being  $\delta$  the Kronecker delta. Using this property, the integral of the product of a function  $f(\xi)$  with the nodal basis functions  $L_m(\xi)$  reduced to a single evaluation of the integrand at the quadrature point as follows:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) L_m(\xi) d\xi = f(\xi_m) w_m, \quad (\text{B.14})$$

where the weight is given by the expression:

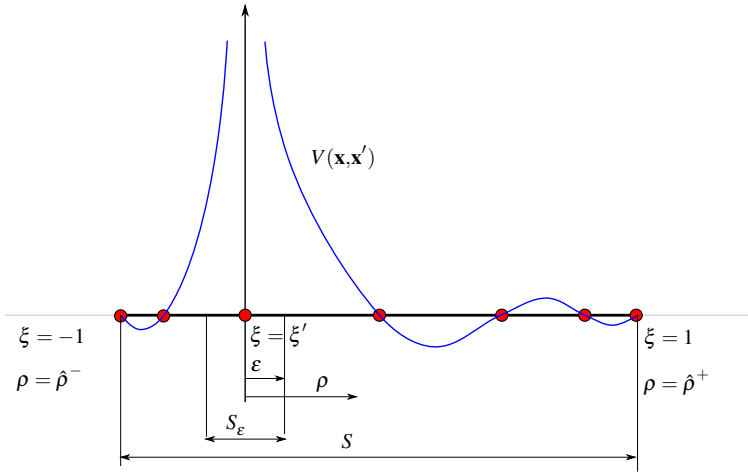
$$w_m = \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{P_p^2(\xi_m)}, \quad (\text{B.15})$$

and where  $P_p(x)$  is the Lagrange polynomial of order  $p$ . This way, the values of the integrals inside (B.11) and (B.12) can be computed fast and efficiently.

In other cases, like for example integration on elements close to the collocation point, over regions where the geometry contains a sharp corner, or the wave number changes with a complex function, a standard Gaussian quadrature is preferred.

### B.3.5 Regularization of the singular integrals

During the collocation process, when the element under integration contains the source load, the integrand of (B.12) becomes weakly singular. This problem can be treated by a regularisation technique; subtracting the singularity and integrating it separately [2, 1, 24].



**Figure B.2** Singular integral around  $S_\epsilon$  when the collocation point is located inside the element. The distance to the singularity  $\rho = |\xi - \xi'|$  is defined to extract the singular kernel.

Let us define the  $S$  and the  $S_\epsilon$  regions inside the element as shown in Figure B.2, where  $S_\epsilon$  surrounds the singularity and  $S$  covers the entire element. Taking the limit when  $\epsilon$  tends to zero, the singular integrals in (B.12) can be calculated by means of their Cauchy Principal Value:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-S_\epsilon} V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - V_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\xi + \int_{S-S_\epsilon} V_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\xi \right\} \quad (\text{B.16})$$

where the integrands are  $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}(\xi), \mathbf{x}(\xi'))L_i(\mathbf{x}(\xi))J(\mathbf{x}(\xi))$  and  $V_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  is the first term of the Taylor series expansion of  $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  at  $\xi = \xi'$ .

To subtract the singularity, we use the fundamental solution of the 2D-Helmholtz equation for constant wave number in terms of its series expansion:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \wp(k\rho) + \frac{i}{4} + O((k\rho)^2 \log(k\rho)), \quad (\text{B.17})$$

where

$$\wp(k\rho) = -\frac{1}{2\pi}(\log(k\rho/2) + \gamma) \quad (\text{B.18})$$

and  $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  is the distance to the load. Then, in order to express the weakly singular kernel of (B.16) when  $\rho$  goes to zero, the function containing the singularity (B.18) is written in terms of the local variable of the element  $\rho = |\xi - \xi'|$ , as shown in Figure B.2. Then, the distance from  $\mathbf{x}'$  in any direction  $x_i$  can be approximated using the first order

term of its Taylor series expansion:

$$x_i - x'_i = \left. \frac{dx_i}{d\xi} \right|_{\xi=\xi'} \rho + O(\rho^2). \quad (\text{B.19})$$

Therefore, the distance between  $\mathbf{x}'$  and any point  $\mathbf{x}$  can be finally expressed as

$$\rho = \rho A + O(\rho^2), \quad (\text{B.20})$$

where  $A^2 = \sum_{i=1}^2 \left( x_{i,\xi} \Big|_{\xi=\xi'} \right)^2$  contains the Jacobian of the transformation.

Substituting (B.20) into (B.18) we obtain the kernel of the singularity in terms of the local distance  $\rho$ :

$$\wp(k\rho) = \wp_o + \wp_1 \log \rho + O(\rho), \quad (\text{B.21})$$

where  $\wp_o = -\frac{1}{2\pi} \left( \gamma + \log \frac{kA}{2} \right)$  and  $\wp_1 = -\frac{1}{2\pi}$ .

The same procedure can be applied to all the terms appearing in the integrand, like:

$$L(\rho) = L_o + O(\rho) \quad (\text{B.22})$$

and

$$J(\rho) = J_o + O(\rho), \quad (\text{B.23})$$

being  $L_o = L_i(\xi')$  and  $J_o = J(\xi')$ . Collecting all the terms, we can write:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T_o + T_1 \log \rho + O(\rho) \quad (\text{B.24})$$

where  $T_o = \wp_o L_o J_o$  and  $T_1 = \wp_1 L_o J_o$ . Therefore, the first term of the series expansion of the integrand  $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  can be written as:

$$V_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T_o + T_1 \log \rho. \quad (\text{B.25})$$

Introducing this in equation (B.16) we regularize integral in the domain  $S_\varepsilon$ .

To compute the first regular integral of (B.16) we can use a standard Gaussian quadrature. The second integral, which contains the singularity, can be computed analytically dividing the domain  $S$  into two regions:

$$\int_S V_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\xi = \int_{\hat{\rho}^-}^0 T_o + T_1 \log \rho d\rho + \int_0^{\hat{\rho}^+} T_o + T_1 \log \rho d\rho, \quad (\text{B.26})$$

and integrating,

$$\int_S V_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\xi = 2T_o + T_1 (\hat{\rho}^- \log \hat{\rho}^- + \hat{\rho}^+ \log \hat{\rho}^+ - 2), \quad (\text{B.27})$$

being  $\hat{\rho}^- = |-1 - \xi'|$  and  $\hat{\rho}^+ = |1 - \xi'|$ .

## B.4 Spectral element method

The SEM is a high-order finite element technique that combines the geometrical flexibility of finite elements with the high accuracy of spectral methods. This method was pioneered in the mid 80's by Patera [53] for the Navier-Stokes equation and exhibits several favorable computational properties, such as the use of naturally diagonal mass matrices that facilitate the iterative solution process. Moreover, in the context of Helmholtz's equation, the SEM reduces the pollution effect and improves the efficiency of the classical Galerkin finite element approximation, i.e., it requires a lower number of nodes per wavelength compared to FEM in order to attain the same accuracy [49].

### B.4.1 Weak form of the MSE

The weighted residual form of the Helmholtz's equation (B.4) for a domain  $\Omega$  bounded by  $\Gamma$  after integrating by parts is expressed as:

$$\int_{\Omega} \nabla \eta \nabla \hat{\phi} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \eta \hat{q} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{k}^2 \eta \hat{\phi} \, d\Omega = 0, \quad (\text{B.28})$$

where  $\eta$  is the weight function. This variational formulation is the starting point of the SEM.

### B.4.2 Two dimensional spectral elements

A discretization of the domain  $\Omega$  is carried out by using  $n_e$  spectral elements, fulfilling

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e \quad \text{and} \quad \bigcap_{e=1}^{n_e} \Omega_e = \emptyset, \quad (\text{B.29})$$

where the modified velocity potential is approached inside the elements by means of Lagrangian interpolants through the LGL grid points in the form:

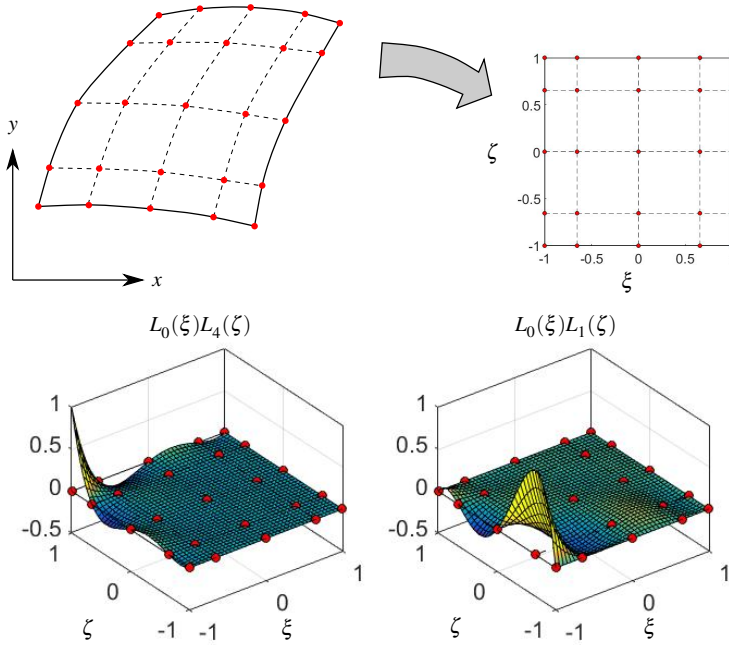
$$\hat{\phi}(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^p L_m(\xi) L_n(\zeta) \hat{\phi}(\xi_m, \zeta_n). \quad (\text{B.30})$$

where  $L_m$  is the one dimensional shape function associated to node  $m$  as in (B.8),  $p$  is the polynomial degree and  $(\xi, \zeta) \in [-1, 1]^2$  are the intrinsic coordinates of the reference element. Figure B.3 shows an example of a two-dimensional spectral element and its transformation to the normalized coordinates  $(\xi, \zeta)$ . Also two the nodal basis functions corresponding to  $\mathcal{L}_{21}(\xi, \eta) = L_0(\xi) L_4(\zeta)$  and  $\mathcal{L}_6(\xi, \eta) = L_0(\xi) L_1(\zeta)$  are represented.

Equation (B.30) can be written in a more compact form as

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{N_e} \mathcal{L}_j(\boldsymbol{\xi}) \hat{\phi}_j, \quad (\text{B.31})$$





**Figure B.3** A finite spectral element of order  $p = 4$  is represented in the physical  $(x - y)$ -coordinate system and in the normalized  $(\xi, \zeta) \in [-1, 1]^2$  reference coordinate system (top). Two representative nodal basis functions of the element are also showed (bottom).

where  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \zeta)$ ,  $N_e$  is the total number of element nodes ( $(p + 1)^2$  for quadrilateral elements),  $\mathcal{L}_j(\boldsymbol{\xi})$  the two dimensional shape functions and  $\hat{\phi}_j$  the nodal values of the modified velocity potential.

### B.4.3 Discrete finite element equations

Applying the Spectral-Galerkin method to the weighted residual form (B.28) and considering the domain discretization (B.29), the following system of equation is obtained:

$$[ \hat{\mathbf{A}} \quad -\hat{\mathbf{C}} ] \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \{ \mathbf{0} \}, \quad (\text{B.32})$$

where vectors  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  and  $\hat{\mathbf{q}}$  group all the nodal values of the modified velocity potentials and boundary fluxes respectively. The matrix  $\hat{\mathbf{A}}$  and  $\hat{\mathbf{C}}$  are obtained by assembling the elemental matrices  $\hat{\mathbf{A}}^e$  and  $\hat{\mathbf{C}}^e$  as in the standard finite element formulation. The domain integrals of (B.28) over each element  $e$  provide the coefficients of the  $\hat{\mathbf{A}}^e$  matrix:

$$\hat{A}_{ij}^e = K_{ij}^e - M_{ij}^e, \quad (\text{B.33})$$

where

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \nabla \mathcal{L}_i \nabla \mathcal{L}_j d\Omega \quad (\text{B.34})$$

and

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \hat{k}^2(x,y) \mathcal{L}_i \mathcal{L}_j d\Omega. \quad (\text{B.35})$$

The coefficients of the  $\hat{\mathbf{C}}^e$  matrices correspond to the boundary integrals of (B.28), being:

$$\hat{C}_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} L_i L_j d\Gamma. \quad (\text{B.36})$$

#### B.4.4 Numerical integration

To compute the integrals appearing in the SEM, the LGL quadrature is selected due to the convenient evaluation of the Lagrange interpolants at the quadrature points, as it was shown in (B.13). In the two dimensional form, the quadrature is written as

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\zeta = \sum_{j=1}^{N_c} f(\boldsymbol{\xi}_j) \bar{w}_j, \quad (\text{B.37})$$

for a general integrand  $f(x)$ , where  $\boldsymbol{\xi}_j$  are the local coordinates of each quadrature point  $j$  and  $\bar{w}_j$  are their corresponding weights.

Hence, the computation of the "stiffness" matrix (B.34) by the LGL quadrature of order  $p$  leads to a diagonal banded matrix. Moreover the integrand is composed by polynomials of order  $2p - 2$  on each direction, being the LGL quadrature exact for polynomials of order up to  $2p - 1$ .

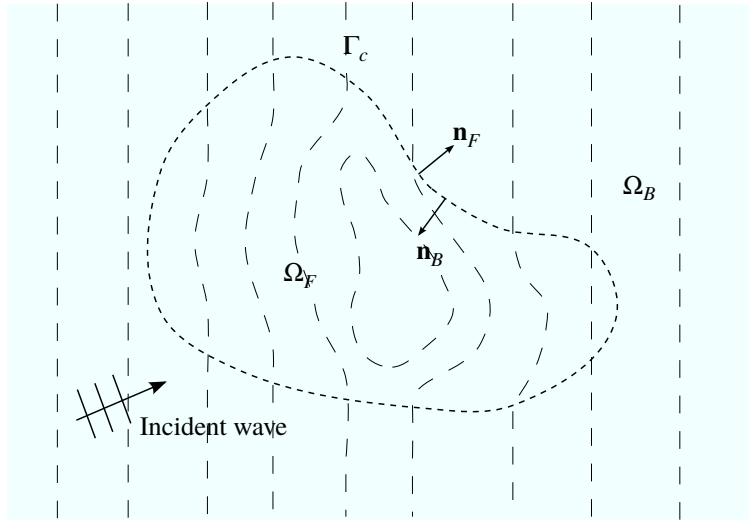
One of the main advantages of the LGL quadrature of order  $p$  is that the domain integrals (B.35) and the boundary integrals (B.36) produces diagonal matrices. The coefficients are easily obtained merely by evaluating the jacobian at the quadrature points and multiplying it by their corresponding weights. Therefore, the "mass" matrices are obtained by

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{k}^2(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{L}_i(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{L}_j(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) d\xi d\zeta \simeq \hat{k}^2(\boldsymbol{\xi}_i) J(\boldsymbol{\xi}_i) \bar{w}_i \delta_{ij}, \quad (\text{B.38})$$

and the boundary integrals

$$\int_{-1}^1 L_i(\xi) L_j(\xi) J(\xi) d\xi \simeq J(\xi_i) w_i \delta_{ij}, \quad (\text{B.39})$$

which are expressions easy and efficient to calculate. However these integrals are computed with some error due to the limited accuracy of the quadrature but, the spectral convergence of the SEM is maintained even for non-homogeneous medium or complex geometries [47]. Nevertheless a standard quadrature is preferred for some cases, as for example when the wave number function  $\hat{k}(x,y)$  presents a non-continuous derivative.

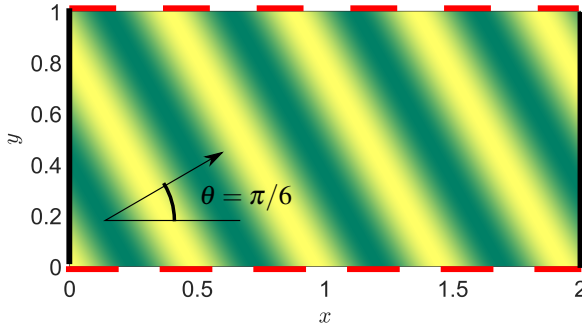


**Figure B.4** Illustration of the physical model with dashed lines representing iso-depth contours. A region with an arbitrary bathymetry is considered on  $\Omega_F$  closed by  $\Gamma_c$ . On  $\Omega_B$ , the domain has a bathymetry with by straight and parallel contour lines.

## B.5 BSEM and SEM coupling

Formulations based on BEM and FEM offer different advantages that can be judiciously combined in order to palliate the drawbacks of both methods. The finite element approach of the MSE is able to model complex bathymetries while the boundary element formulation is able to satisfy automatically the Sommerfeld radiation condition, being a perfect choice for modelling open and infinite domains. A scheme of the coupling of the two methods proposed is showed in Figure B.4, with an incident wave train propagating over an infinite domain, that is divided into an inner and an outer regions. The inner region,  $\Omega_F$ , has an irregular bathymetry, while the outer region, named  $\Omega_B$ , presents parallel contour lines. The contour where both regions match is denoted  $\Gamma_c$ . A similar coupled BEM-FEM was proposed in [56], but the bathymetry of the exterior domain was limited to be constant. In this work we include in the BSEM the fundamental solution derived by Cerrato et al. in [14], that makes it possible to consider a variable bathymetry in one direction, providing a perfect approach for the case under consideration.

The Spectral BEM-FEM coupling is carried out by a direct node to node matching condition along the boundary  $\Gamma_c$ . The vector containing the nodal values of the SEM domain, denoted by  $\hat{\phi}_F = [\hat{\phi}_I, \hat{\phi}_C]$ , that is divided into two parts, a subvector containing the interior nodes  $\hat{\phi}_I$  and another subvector containing the potentials located at the boundary,  $\hat{\phi}_C$ . Then, combining the matrix forms obtained for the BSEM (B.10) and SEM (B.32), and considering the normal to  $\Gamma_c$  positive towards the inner region, the non-homogeneous



**Figure B.5** Wave train with an incident angle  $\theta = \pi/6$  propagating through a rectangular domain with black solid lines representing Dirichlet boundary conditions and red dashed lines showing Neumann boundary conditions.

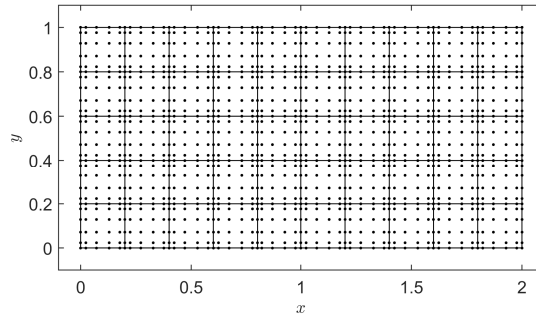
complete system can be written as

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_I & \hat{\mathbf{A}}_c & \hat{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{H}} & -\hat{\mathbf{G}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_I \\ \hat{\phi}_c \\ \hat{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\phi}_{in} \end{Bmatrix}, \quad (\text{B.40})$$

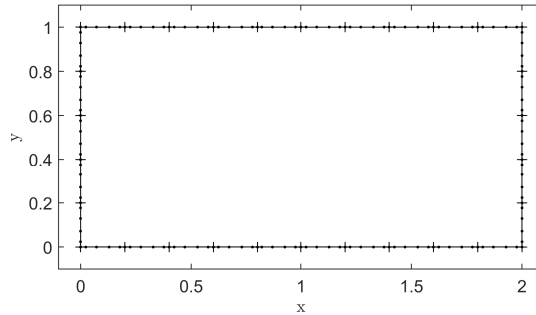
where submatrices  $\mathbf{A}_I$  and  $\mathbf{A}_c$  collect the columns of  $\mathbf{A}$  corresponding to  $\hat{\phi}_I$  and  $\hat{\phi}_c$  respectively. The incident wave is introduced into the formulation through the SBEM region considered as an scattering problem, where the SEM region is the scatter.

## B.6 Numerical results

The proposed formulation (B.40) has been tested using different benchmark problems in order to demonstrate its high accuracy and convergence characteristics. The first example considers a wave train propagating over a constant water depth area using Neumann and Dirichlet boundary conditions to simulate the unbounded domain. This simple case allows us to evaluate the convergence and the behaviour of the solution of the BSEM and the SEM and compare them for the same problem. The second benchmark problem includes a variable bottom surface within the inner  $\Omega_F$  region keeping a constant depth on the border  $\Gamma_C$  with the outer region, testing the capabilities of the coupled spectral BSEM-SEM. The third example includes also a variable bathymetry in  $\Omega_B$ , being necessary to use a special fundamental solution for the BSEM.



(a)



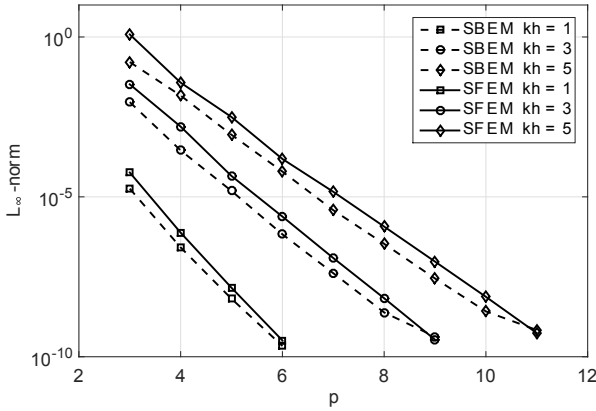
(b)

**Figure B.6** Spectral LGL finite (a) and boundary (b) element meshes for  $h = 0.2$  and  $p = 5$ .

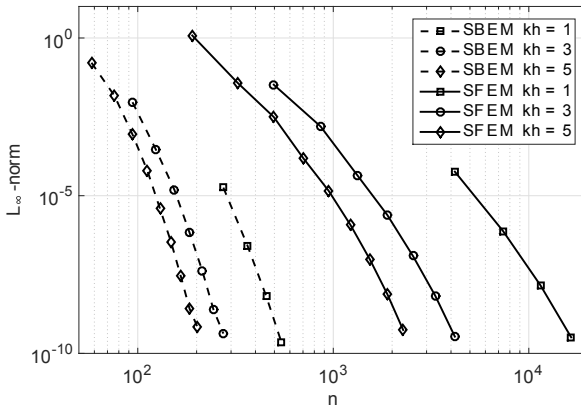
### B.6.1 Convergence study of BSEM and SEM

This example considers a wave train propagating over an unbounded domain of constant-depth, as represented in Figure B.5, being the solution  $\hat{\phi} = e^{i\hat{k}(\cos\theta x + \sin\theta y)}$ . The incident wave enters into the domain with an angle  $\theta = \pi/6$ . The wave number of the domain is  $k = 15$  and essential boundary conditions are applied on  $x = 0$  and  $x = 2$  (black solid lines in Fig. B.5) while the known normal fluxes are applied on  $y = 0$  and  $y = 1$  (red dashed lines in Fig. B.5).

The problem is solved using the SEM and the BSEM separately. Three different meshes are used with each method of element sizes  $h = \{1/15, 1/5, 1/3\}$  and therefore  $kh = \{1, 3, 5\}$ . To investigate the efficiency of the spectral LGL element formulations for BEM and FEM, p-convergence studies are done for every mesh, increasing the order  $p$  of the nodal basis functions  $L_m$ . As example, the spectral finite element mesh for  $h = 0.2$  and  $p = 5$  is shown in Figure B.6 (a) and the corresponding spectral boundary element mesh is presented in



**Figure B.7** A  $p$ -convergence study for different element size  $h$ .



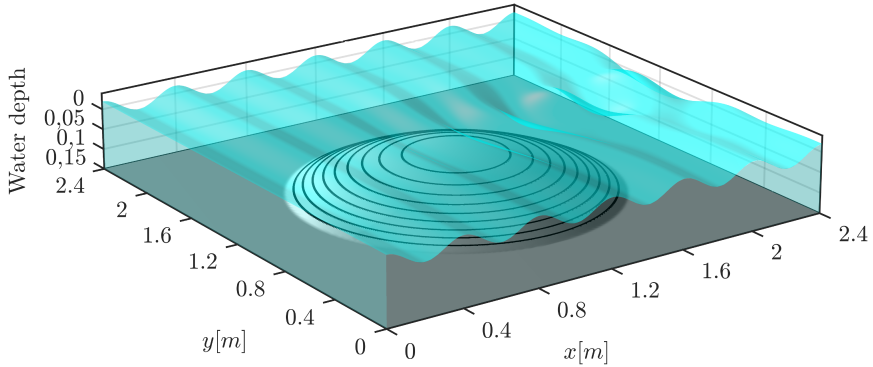
**Figure B.8** Error evolution versus the number of degrees of freedom ( $n$ ) for different number of elements per wave length.

Figure B.6 (b).

To analyze the convergence of the calculated potentials they are compared to the analytical solution. The  $L_\infty$ -error norm has been use for this purpose, which is defined as:

$$\|e\|_\infty = \max |\hat{\phi}_{\text{computed}} - \hat{\phi}_{\text{exact}}|, \tag{B.41}$$

where  $\hat{\phi}_{\text{computed}}$  is the vector that contains the computed solution at the nodes and  $\hat{\phi}_{\text{exact}}$  is the analytical solution. Analyzing Figure B.7, we can see that both methods (SEM and BSEM) present a standard spectral convergence, because the error norm decreases exponentially with the order of the approximation functions showing similar convergence slopes. Nevertheless, the BSEM presents a slightly higher accuracy than the SEM. Another



**Figure B.9** Water waves propagating over a circular shoal showing the effect downstream of an irregular seabed and its complete absorption by the coupled BSEM.

common feature of both methods is that the slope of the convergence curve increases when the element size  $h$  decreases. Increasing the order of the nodal basis functions, is a better option to a certain limit, because it is known that the condition number of the system increases also linearly with the approximation order.

The behaviour of the error-norm with the number of degrees of freedom ( $n$ ) can be observed in Figure B.8. As in Figure B.7, the number of elements remains constant, increasing only the order or the nodal basis function. Because only the boundary has to be discretized, the number of nodes needed to solve with the same accuracy the problem with the BSEM is much lower than those needed with SEM. However, regarding to the number of degrees of freedom, the main aspect that can be observed for both methods is again that, in every case, the strategy which seems more appropriate to achieve a fast convergence is to increase the element order instead of decreasing the element size.

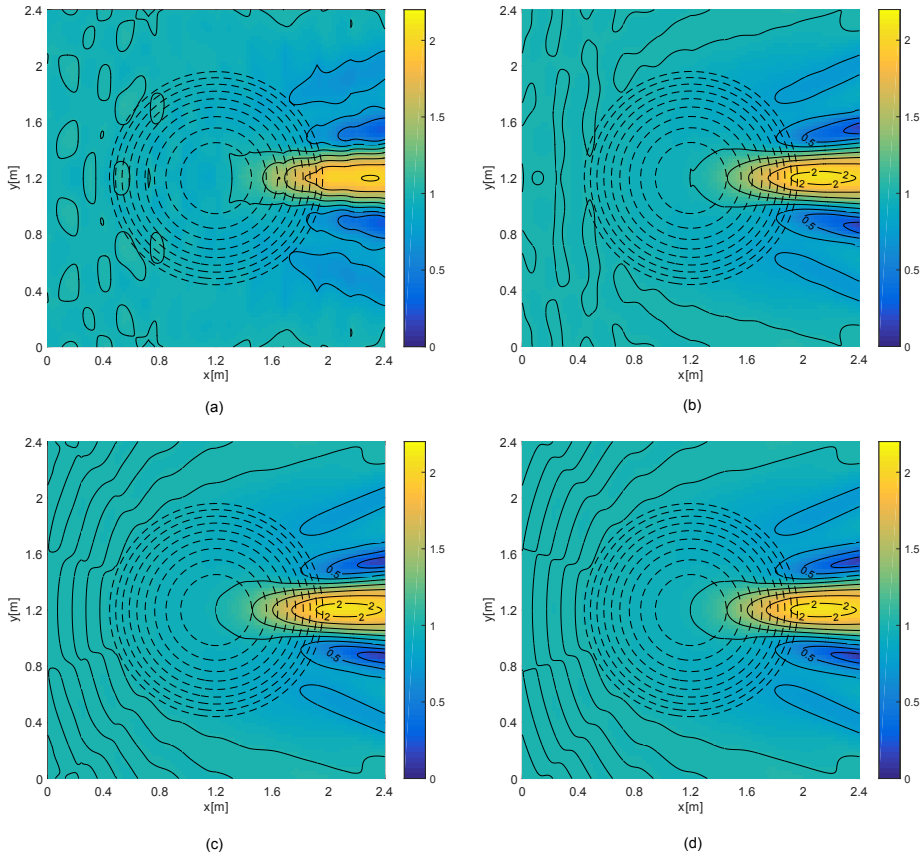
Observing the results of Figures B.7 and B.8 we see that, a good choice is to use elements of size  $h \approx 5/k$  with nodal basis functions of order  $4 \leq p \leq 8$  depending on the level of accuracy we need.

Finally we can observe that both methods present similar accuracy when elements of the same order and size are used, so we can expect the same type of behaviour for a coupled finite and boundary SEM formulation.

### B.6.2 Wave scattering over a circular shoal

Like in the previous problem, a wave train propagating in an infinite domain is considered but, this time, we include on the seabed a parabolic shoal. The water depth is defined by:

$$h_w(r) = \begin{cases} 0.1 \left( \frac{r}{0.8} \right)^2 + 0.05, & r < 0.8, \\ 0.15, & r \geq 0.8. \end{cases} \quad (\text{B.42})$$



**Figure B.10** Water-wave propagation over a circular shoal. Absolute value of the dimensionless wave height field over the circular shoal (i.e. dashed lines) for different element polynomial orders: (a)  $p = 3$ , (b)  $p = 4$ , (c)  $p = 5$  and (d)  $p = 15$ .

where  $r$  is the distance to the center of the shoal:  $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$ , located at  $(x_c = 1.2, y_c = 1.2)$ , and the water depth takes values between  $h_w = 0.15$  and  $h_w = 0.05$ . The internal domain is a square located in  $(0 \leq x \leq 2.4, 0 \leq y \leq 2.4)$ , with an infinite region of constant depth around it.

A wave train of period  $T = 0.511$  s and different wave heights have been simulated. A scheme of the model, where the wave height has been exaggerated, is shown in Figure B.9. The relation between the water depth and the wave period indicates that waves are propagating over intermediate waters, where the MSE is considered to be applicable.

The partition of the model into an internal region enclosing the irregular bathymetry and another external region with regular bathymetry, makes of this case an excellent benchmark to test the capabilities of the coupled spectral BSEM-SEM model. As it was described in previous sections, SEM allows to model regions including arbitrary bathymetries, but, if we use only this method, special techniques such as PML are required to model correctly



open boundaries avoiding spurious reflection. The BSEM is used instead to model the infinite domain, fulfilling automatically the Sommerfeld radiation condition. Considering that the interface  $\Gamma_c$  between both regions is located over constant depth, the fundamental solution used for the BSEM is the standard Green's function for the two dimensional Helmholtz problem (more details are given in the appendix B.9). This is an important element because it allows us to study the problem for different mesh configurations without introducing additional sources of error related to the absorption of the outgoing waves.

To approximate the wave field, the domain represented in Figure B.9 is discretized using a rectangular mesh of  $10 \times 10$  spectral finite elements of the same length. The SEM mesh is surrounded by a perfectly matching BSEM mesh composed by 40 elements. Then, the problem is studied as an scattering problem, with an incident wave field going in the  $x$ -direction. The selection of the element size was realized following the conclusions derived from the convergence analysis. From the dispersion relation we know that the wave number takes values between  $15.69 \text{ rad/m}$  and  $20.15 \text{ rad/m}$ , with values of the dimensionless parameter  $kh$  between 3.77, at the center of the shoal, and 4.84 over the flat region.

To analyse the behaviour of the coupled formulation, the problem is solved using different order of the basis approximation functions and compare the results using the following definition for the global error norm:

$$\text{Relative error} = \left| \frac{\int_{\Omega} (\hat{\phi} - \hat{\phi}_R) d\Omega}{\int_{\Omega} \hat{\phi}_R d\Omega} \right|, \quad (\text{B.43})$$

where the computed solution  $\hat{\phi}$  is compared with a reference solution  $\hat{\phi}_R$ .

Unfortunately there is no analytical solution for this problem, but experimental data was obtained in 1972 by Ito and Tanimoto [34], that designed this experiment to test refraction and diffraction numerical models. In order to select a reference solution  $\hat{\phi}_R$ , the problem has been solved repeatedly increasing the element order until convergence with  $p = 15$ . The convergence of the results is shown in Figure B.10, representing the normalized wave-height ( $H/H_o$ ) for different element orders  $p = \{3,4,5,15\}$ . The solution varies drastically when the order of element ischnaged from 3 to 4, and small improvements are observed changing the order from 4 to 5, indicating that the reference solution has been practically reached. From order 5 to 15 the solution does not change significantly, but the accuracy of the solution continues increasing. Then, the normalized wave field calculated with  $p = 15$  has been chosen as the correct solution. To validate our results, some sections of the wave field are compared with the experimental data presented in [34] and the numerical results from Bonet [12], where standard finite elements are used in combination with DNL boundary conditions. This comparison is shown in Figure B.11. Section (a) represents the profile of the normalized wave height along the  $x$ -axis at  $y = 1.4$ , section (b) gives the profile along the  $y$ -axis at  $x = 2$  and finally section (c) is located at  $y = 2.4$ . The experimental data represented in the figure, correspond to two different wave heights:  $H = 0.0064m$  and  $H = 0.0104m$ . All the profiles show a good agreement with the solutions from other authors. We remark the smoothness of our solution, which is not typically found on other methods based on a low order approximation of the solution due to the pollution effect. The use of high-order polynomials and the derivability of the

solution works really well diminishing the intrinsic error of discrete methods.

Finally, the error norm is used to analyse the behaviour of the solution. Figure B.12 represents the relative error versus the element order and the number of degrees of freedom. The convergence is similar to the previous example, but this time is truncated at  $10^{-4}$  and  $10^{-5}$ . The origin of this blocking in the convergence is in the difficulty to integrate the  $\hat{k}(x,y)$ -function, with a presenting non-continuous first derivative on the edge of the circular shoal. However, even considering an inhomogeneous medium, the spectral convergence of the method is still preserved, providing high accuracy and smoothness of the solution.

### B.6.3 Wave scattering over a sloping bottom with an elliptical shoal

The elliptic shoal over a constant slope bed is a common numerical experiment which has been widely used to demonstrate the behaviour and capabilities of different wave theories and numerical techniques for water wave [41, 8, 5]. A geometrical description of the problem is depicted in Figure B.13, where depth contours and water surface are represented. The seabed is dominated by a constant slope of 2% starting from 0.45m-depth up to 0.05m-depth. Over this slope, an elliptical shoal is superimposed. The depth function is defined in metres as  $h_w(x,y) = h_i + h_s$  where:

$$h_i(x,y) = \begin{cases} 0.45, & x < -5.85, \\ 0.45 - 0.02(5.85 + x), & -5.85 \leq x \leq 14.15, \\ 0.05, & x > 14.15, \end{cases} \quad (\text{B.44})$$

is the expression for the constant slope component and the superimposed shoal produces a disturbance height

$$h_s(x,y) = 0.3 - 0.5 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3.75}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2} \quad \text{in } \Omega_s, \quad (\text{B.45})$$

where  $\Omega_s = \{(x,y) : (x/3)^2 + (y/4)^2 \leq 1\}$ . Experimental data for this problem are provided in [8], with an incident wave train of period  $T = 1\text{ s}$  and height of 0.01058m, the direction of the waves is  $\theta = 20^\circ$  relative to the  $x$ -axis. The maximum slope of the seabed is on the front of the elliptical shoal, where it raises up to 18% and the shallowness ratio ( $h_w/\lambda$ ) varies from 0.3, on the deepest zone, to 0.074, on the shallow part, meaning that waves are propagating over intermediate waves. These geometric parameters of the bottom profile indicate that the MSE is adequate to model the problem, nevertheless the amplitude of the incident wave used to obtain the experimental data on [8] falls outside the limit of linear theory on the shallow zone and if one wants to obtain a better approach of the physical reality it should be considered to use non-linear models.

The aim of solving this case by the proposed coupled BSEM-SEM formulation, is to analyse its behaviour when the bathymetry varies also in the external infinite region. To make it possible, a specialized fundamental solution for variable water depth, like the one presented in [14], has to be included.

Based on the experience from convergence analyses, a regular mesh of spectral finite elements is used to discretize the  $xy$ -domain, with 40 divisions along the  $x$ -axis and 30 divisions along the  $y$ -axis, which makes a total of 1200 spectral finite elements. The

external interface is meshed using 140 spectral boundary elements perfectly matching the spectral finite element discretization on the boundary. In this regular mesh the  $kh$  coefficient remains between 2.2 and 4.7.

The absolute value of the normalized wave-height has been obtained for different element orders, starting at  $p = 3$ . Some of the calculated solutions are shown in Figure B.14, with  $p = 3$  (a),  $p = 4$  (b) and  $p = 6$  (c). The results reveal a fast convergence, being the difference between orders 3 and 4 remarkable, while very small changes are observed on the solution from order 4 to 6. Order 6 is enough to represent the correct solution with a crest behind the shoal with two important amphidromical points, corresponding to low amplitude areas, as described in [8, 5].

Figure B.15 shows the sections which are marked on Figure B.14 (c). In these profiles, the normalized wave-height field calculated using the proposed coupled BSEM-SEM formulation (solid line) with  $p = 6$  is compared to the MMSE (dashed line), the values from a Coupled-Mode Model (dashed-point line) [5] and the experimental data from [8]. A good agreement with other solutions can be observed. Nevertheless, as expected, the mild-slope models cannot approximate experimental data as well as the coupled-mode model does, because the MSE does not exactly preserve mass conservation due to the bottom curvature and also because slope-squared terms have been neglected.

## B.7 Summary and conclusions

Realistic wave propagation problems modelled by the MSE need to include the effect variable bathymetries, the modelization of big areas and the correct approach of open and infinite regions. At the same time, standard FEM formulations based on low order polynomial approximations require a big number of degrees of freedoms, with an increasing number nodes per wave length as the wave number increases due to the pollution effect. Considering all these aspects and in order to provide a better approach, a coupled boundary spectral element method (BSEM) and finite spectral element method (SEM) formulation has been proposed. This formulation is based on a pseudospectral approximation, considering elements with a Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) distribution of nodes.

A complete formulation of the BSEM has been derived for the MSE. This new method take advantages of the specific virtues of the spectral approach with LGL elements and the Boundary Integral Formulation (BIE) of the Helmholtz problem with variable wave number. One of the difficulties of BIE formulations is in the integration of singular kernels, which increases the computational cost with the order of the approximation polynomials. Therefore, a regularization technique has been proposed, with an analytic integration of the singularity and a regular integral of a smooth function that can be computed by using a standard Gaussian quadrature.

The results of this work show that a pseudospectral approach of the solution provides a similar convergence in BSEM and SEM, achieving very accurate solutions, reducing the pollution effect drastically with relatively few degrees of freedom, compared to classical discrete approaches of the problem.

The coupled BSEM-SEM strategy can cover a wide range of different bathymetries. The SEM is used to model internal regions, usually the zone of interest. SEM combines all the

positive attributes of the classical FEM approach together with the accuracy of spectral methods, being able to reproduce water wave propagation over variable bathymetries with high accuracy. In order to reproduce natural boundary conditions, the internal region is connected to an outer infinite region modelled by the BSEM, which is based on the Boundary Integral Equation, automatically fulfilling the Sommerfeld radiation condition. For the BSEM implementation, the complete fundamental solution presented in [14] for variable bathymetries has been also included, increasing the capabilities of the coupled BSEM-SEM modelization. This fundamental solution allows to reproduce more realistic bathymetries, by locating the coupling frame in regions where the only restriction is that the bathymetry lines have to be straight and parallel contour lines.

Two classical water-wave benchmark problems has been solved using the coupled formulation for the MSE, providing an accurate solution of the wave field and the water profiles.

As a future work we consider the possibility of extending this method to other water wave formulations, such as the MMSE, or to include the effect of wave breaking or currents. Also, the interaction of waves with structures [55] is an interesting topic for wave energy generation.

## B.8 Acknowledgments

This work was supported by the *Ministerio de Ciencia e Innovación* (Spain) through the research project DPI2010-19331.

## B.9 Appendix: Fundamental solutions

The fundamental solution for the 2D-Helmholtz problem with variable wave number  $\hat{k}(x)$  in one direction, is obtained from the solution of:

$$\nabla^2 \psi + \hat{k}(x)^2 \psi + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 \quad (\text{B.46})$$

with  $\mathbf{x}'$  the collocation point and considering the Sommerfeld ration boundary condition at infinity. For the special case where  $\hat{k}$  is constant the fundamental solution is given by the following expressions:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \hat{k}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\hat{k}r), \quad \psi_{,r}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \hat{k}) = -\frac{i}{4} \hat{k} H_1^{(1)}(\hat{k}r), \quad (\text{B.47})$$

where  $H_0^{(1)}$  and  $H_1^{(1)}$  are Hankel functions of the first kind of order zero and one, respectively, and  $r$  is the distance to the collocation point.

For variable bathymetries changing only in one direction ( $x$ ) and with a wave number function described by a continuous function of the form:

$$\hat{k}(x) = \begin{cases} \hat{k}_a, & x < a, \\ \hat{k}_b(x), & a \leq x \leq c, \\ \hat{k}_c, & x > c, \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

it is possible to apply a Fourier transform ( $\mathcal{F}(\bullet)$ ) in the  $y$ -direction to (B.46), leading to the following one-dimensional problem:

$$\Psi_{,xx} + \kappa^2(x)\Psi + \delta(x-x') = 0 \quad \text{in } x \in [a,c] \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{cases} \Psi_{,x} + i\alpha(\xi)\Psi = 0 & \text{in } x = a \\ \Psi_{,x} - i\beta(\xi)\Psi = 0 & \text{in } x = c \end{cases} \quad (\text{B.50})$$

where  $\Psi(x,x';\xi) = \mathcal{F}(\psi(\mathbf{x},\mathbf{x}';\hat{k}))$  and  $\kappa^2(x) = \hat{k}_b^2(x) - \xi^2$  are the transformed velocity potential and wave number. The coefficients  $\alpha$  and  $\beta$  are:  $\alpha(\xi) = (\hat{k}_a^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$  and  $\beta(\xi) = (\hat{k}_c^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$ . This one-dimensional problem can be solved numerically using different techniques, like for example the SEM described in Section B.4.

Following [14], the complete kernel of the boundary element formulation for linear water waves propagating over a variable bathymetry can be calculated by solving the following integrals coming from the application of the inverse Fourier transform ( $\psi = \mathcal{F}^{-1}(\Psi)$ ) to the solution of (B.49,B.50), obtaining:

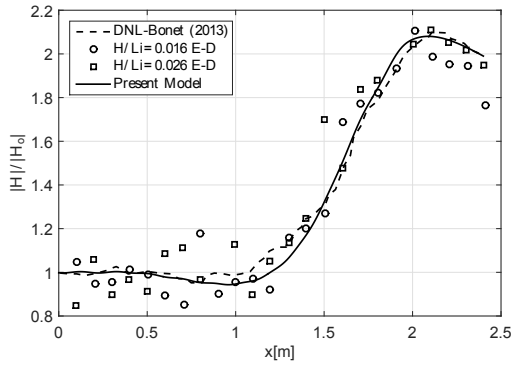
$$\psi(\mathbf{x},\mathbf{x}';\hat{k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Psi(x,x';\xi) \cos(y\xi) d\xi \quad (\text{B.51})$$

for the velocity potential and

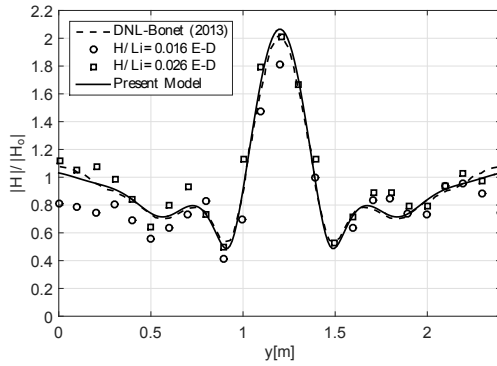
$$\psi_{,x}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\hat{k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Psi_{,x}(x,x';\xi) \cos(y\xi) d\xi, \quad (\text{B.52})$$

$$\psi_{,y}(\mathbf{x},\mathbf{x}';\hat{k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty -\xi \Psi(x,x';\xi) \sin(y\xi) d\xi \quad (\text{B.53})$$

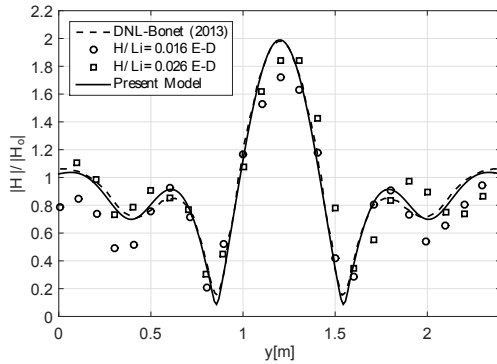
for the derivatives of the Green's function. Details about the numerical computation of these integrals can be found in [14].



(a)

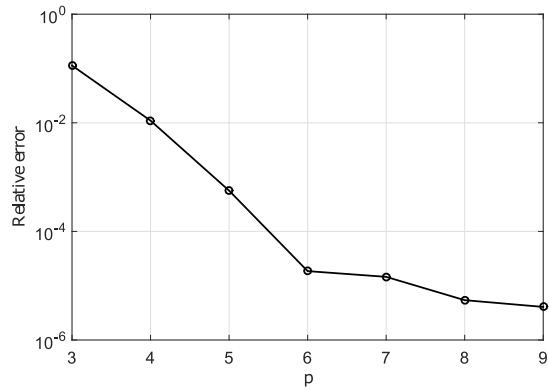


(b)

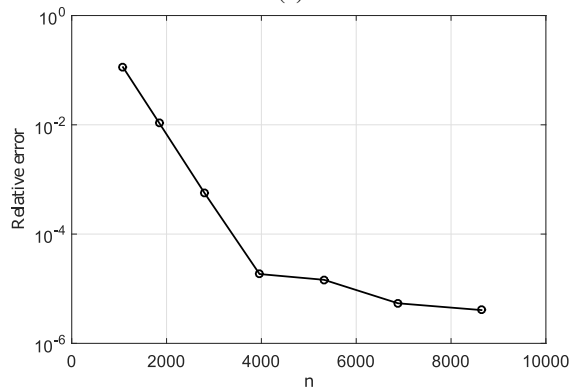


(c)

**Figure B.11** Normalized wave height over a circular shoal. Comparison of the present coupled spectral BEM-FEM solution (solid line) with experimental data from [34] and the solution presented in [12] for three different sections: (a) section  $y = 1.2$ , (b) section  $x = 2$  and (c) section  $x = 2.4$ .

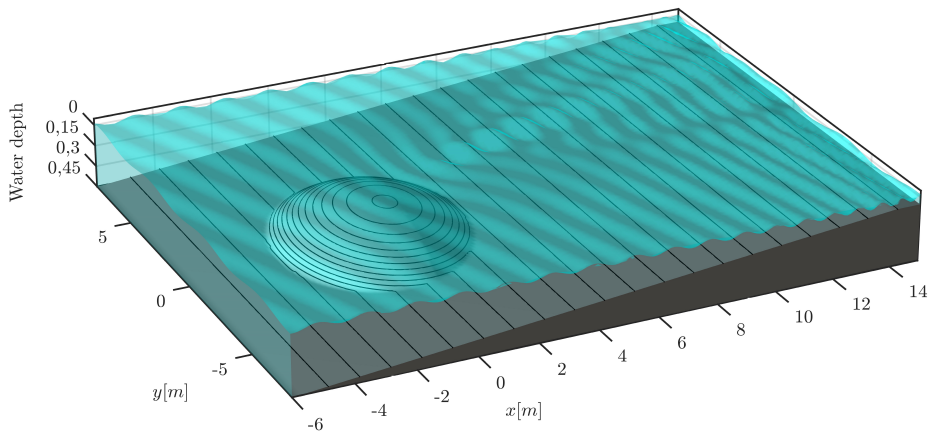


(a)



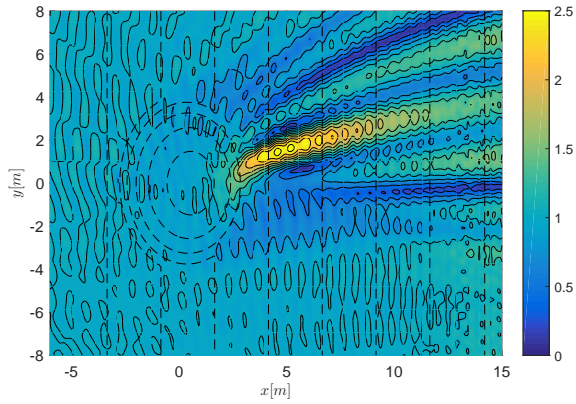
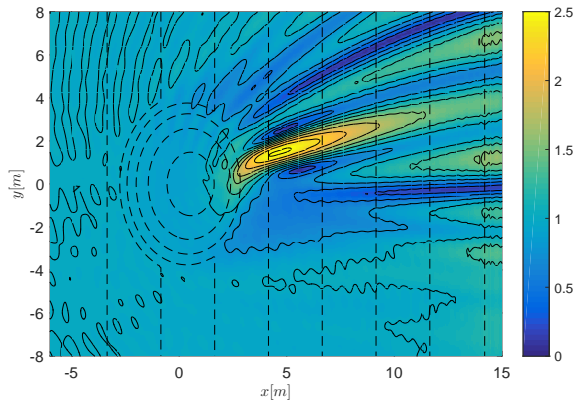
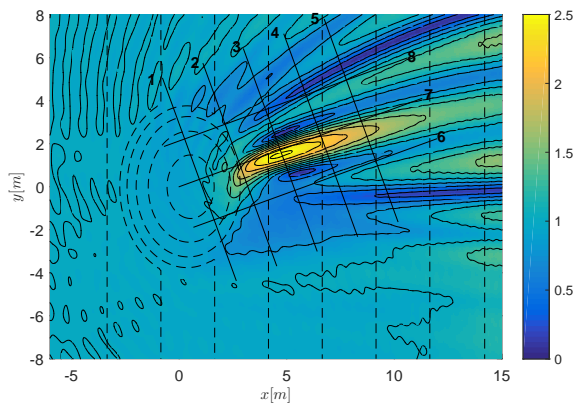
(b)

**Figure B.12** Water-wave propagation over a circular shoal. A  $p$ -convergence study for a mesh with  $10 \times 10$  spectral finite elements and 40 spectral boundary elements coupled on the boundary. (a) Relative error versus polynomial order ( $p$ ). (b) Error evolution with the number degrees of freedom ( $n$ ).

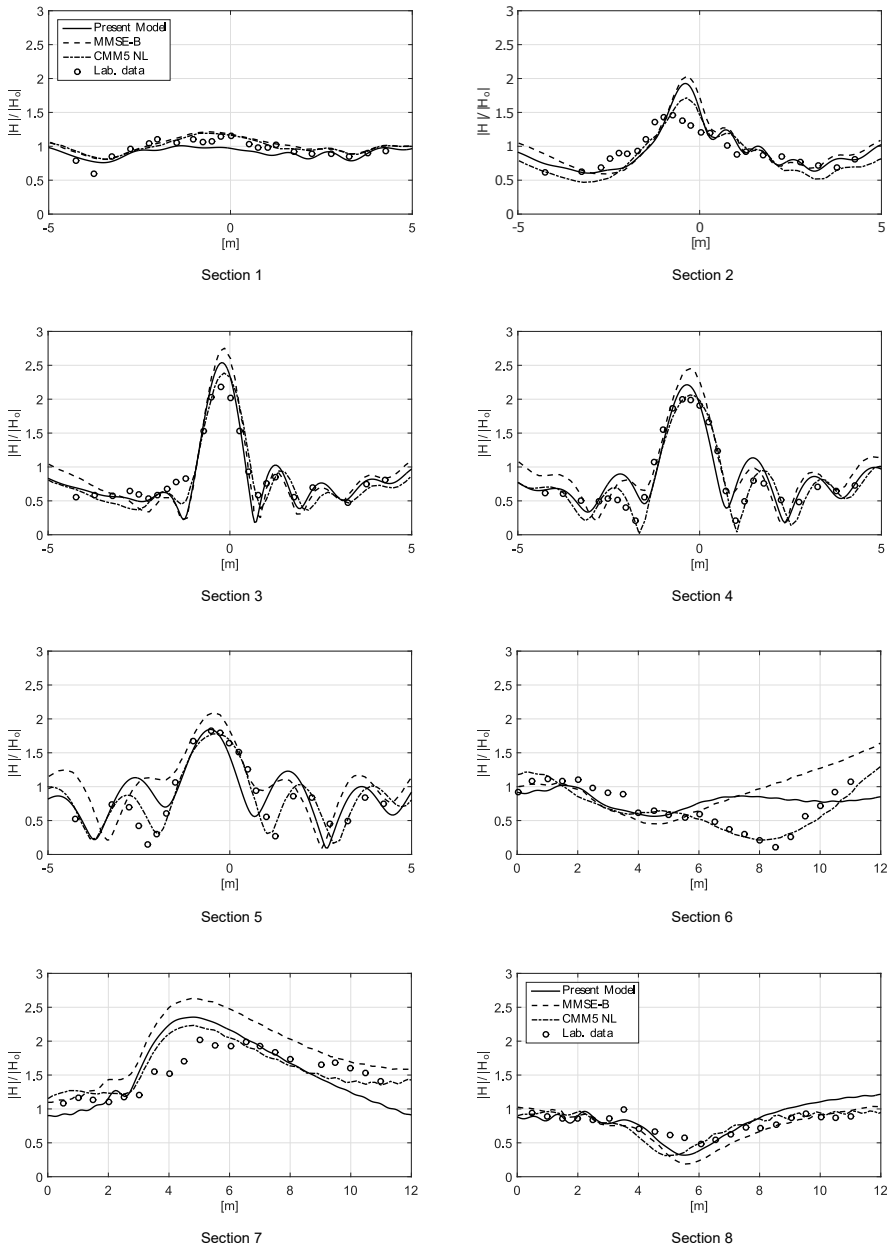


**Figure B.13** Water-wave propagation problem over a sloping bottom with an elliptical shoal.



(a)  $p = 3$ .(b)  $p = 4$ .(c)  $p = 6$ .

**Figure B.14** Elliptical shoal problem. Absolute value of the dimensionless wave height field over the elliptical shoal for: (a)  $p = 3$ , (b)  $p = 4$  and (c)  $p = 6$ .



**Figure B.15** Elliptical shoal problem. Comparison of the coupled spectral BEM-FEM solutions (solid line) with the MMSE (dashed line), a Coupled-Mode Model (dashed-point line) [5] and the experimental data from [8] for different sections.

# Bibliography

---

- [1] M. Aliabadi and W. Hall. The regularising transformation integration method for boundary element kernels. comparison with series expansion and weighted gaussian integration methods. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 6:66 – 71, 1989.
- [2] M. Aliabadi, W. Hall, and T. Phemister. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 21:2221 – 2236, 1985.
- [3] A. Bayliss, C. Goldstein, and E. Turkel. On accuracy conditions for the numerical computation of waves. *Journal of Computational Physics*, 59(3):396 – 404, 1985.
- [4] K. Belibassakis. The Green’s function of the mild-slope equation: The case of a monotonic bed profile. *Wave Motion*, 32:339–361, 2000.
- [5] K. Belibassakis, G. Athanassoulis, and T. Gerostathis. A coupled-mode model for the refraction-diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry. *Applied Ocean Research*, 23(6):319 – 336, 2001.
- [6] G. Beltrami, G. Bellotti, P. Girolamo, and P. Sammarco. Treatment of wave breaking and total absorption in a mild-slope equation fem model. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 127(5):263–271, 2001.
- [7] P. G. Bergmann. The equation in a medium with a variable index of refraction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 17(4):329 – 333, 1946.
- [8] J. Berkhoff, N. Booy, and A. Radder. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. *Coastal Engineering*, 6(3):255 – 279, 1982.
- [9] W. Berkhoff. Computation of combined refraction-diffraction. In *Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering*. ASCE, 1972.
- [10] W. Berkhoff. *Mathematical Models for Simple Harmonic Linear Water Waves. Wave Diffraction and Refraction*. PhD thesis, Delft Hydraulics Laboratory, 1976.

- [11] P. Bettess and O. C. Zienkiewicz. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(8):1271–1290, 1977.
- [12] R. P. Bonet. Refraction and diffraction of water waves using finite elements with a DNL boundary condition. *Ocean Engineering*, 63:77–89, 2013.
- [13] N. Booij. A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Engineering*, 7(3):191 – 203, 1983.
- [14] A. Cerrato, J. A. González, and L. Rodríguez-Tembleque. Boundary element formulation of the mild-slope equation for harmonic water waves propagating over unidirectional variable bathymetries. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 62:22 – 34, 2016.
- [15] P. Chamberlain and D. Porter. The modified mild-slope equation. *Journal Fluid Mechanics*, 291:393 – 407, 1995.
- [16] C. N. Chandrasekera and K. F. Cheung. Extended linear refraction-diffraction model. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 123(5):280 – 286, 1997.
- [17] W. Chen. *Finite element modeling of wave transformation in harbors and coastal regions with complex bathymetries and ambient currents*. PhD thesis, Department of Civil Engineering, University of Maine, August 2002.
- [18] A. Deraemaeker, I. Babuška, and P. Bouillard. Dispersion and pollution of the fem solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4):471–499, 1999.
- [19] C. Eskilsson and S. J. Sherwin. Discontinuous galerkin spectral/hp element modelling of dispersive shallow water systems. *Journal of Scientific Computing*, 22(1):269–288, 2005.
- [20] C. Eskilsson and S. J. Sherwin. Spectral/hp discontinuous galerkin methods for modelling 2d boussinesq equations. *J. Comput. Phys.*, 212(2):566–589, Mar. 2006.
- [21] G. Giorgiani, S. Fernández-Méndez, and A. Huerta. Hybridizable discontinuous Galerkin p-adaptivity for wave propagation problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 73(10):883–903, 2013.
- [22] D. Givoli. Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 94(1):1 – 29, 1991.
- [23] D. Givoli and J. B. Keller. Non-reflecting boundary conditions for elastic waves. *Wave Motion*, 12(3):261 – 279, 1990.
- [24] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T. Rudolph, and E. Rizzo. General algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 59:604 – 614, 1992.

- 
- [25] A. Hauguel. A combined FE-BIE method for water waves. In *16th International Conference on Coastal Engineering*, pages 715–721, 1978.
- [26] Y. He, M. Min, and D. P. Nicholls. A spectral element method with transparent boundary condition for periodic layered media scattering. *Journal of Scientific Computing*, pages 1–31, 2016.
- [27] S.-S. Hsiao, C.-M. Chang, and C.-C. Wen. Solution for wave propagation through a circular cylinder mounted on different topography ripple-bed profile shoals using DRBEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(11):1246 – 1257, 2009.
- [28] T.-W. Hsu and C.-C. Wen. A study of using parabolic model to describe wave breaking and wide-angle wave incidence. *J. Chin. Inst. Eng.*, 23(4):515–527, July 2000.
- [29] T.-W. Hsu and C.-C. Wen. A parabolic equation extended to account for rapidly varying topography. *Ocean Engineering*, 28(11):1479 – 1498, 2001.
- [30] K. ichiro Hamanaka. Open, partial reflection and incident-absorbing boundary conditions in wave analysis with a boundary integral method. *Coastal Engineering*, 30(3–4):281 – 298, 1997.
- [31] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part i: The h-version of the {FEM}. *Computers & Mathematics with Applications*, 30(9):9 – 37, 1995.
- [32] F. Ihlenburg and I. Babuška. Finite element solution of the helmholtz equation with high wave number part ii: The h-p version of the fem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(1):315–358, 1997.
- [33] M. Isaacson and S. Qu. Waves in a harbour with partially reflecting boundaries. *Coastal Engineering*, 14(3):193 – 214, 1990.
- [34] Y. Ito and K. Tanimoto. A method of numerical analysis of wave propagation-application to wave diffraction and refraction. In *Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering*. ASCE, 1972.
- [35] J. B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 82(1):172 – 192, 1989.
- [36] P. Kumar, H. Zhang, K. I. Kim, Y. Shi, and D. A. Yuen. Wave spectral modeling of multidirectional random waves in a harbor through combination of boundary integral of helmholtz equation with chebyshev point discretization. *Computers & Fluids*, 108:13 – 24, 2015.
- [37] S. Lau and Z. Ji. Efficient 3-d infinite element for water wave diffraction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(6):1371–1387, 1989. cited By (since 1996)6.

- [38] C. Lee, W. S. Park, Y.-S. Cho, and K. D. Suh. Hyperbolic mild-slope equations extended to account for rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, 34:243 – 257, 1998.
- [39] H. S. Lee, S. D. Kim, K.-H. Wang, and S. Eom. Boundary element modeling of multidirectional random waves in a harbor with a rectangular navigation channel. *Ocean Engineering*, 36(17-18):1287 – 1294, 2009.
- [40] H. S. Lee and A. Williams. Boundary element modeling of multidirectional random waves in a harbor with partially reflecting boundaries. *Ocean Engineering*, 29(1):39 – 58, 2002.
- [41] B. Li. An evolution equation for water waves. *Coastal Engineering*, 23(3):227 – 242, 1994.
- [42] B. Li and K. Anastasiou. Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using the multigrid technique. *Coastal Engineering*, 16(3):245 – 266, 1992.
- [43] G. R. Liu, K. Y. Dai, and T. T. Nguyen. A smoothed finite element method for mechanics problems. *Computational Mechanics*, 39(6):859–877, 2006.
- [44] H. Liu. A modified GDRBEM model for wave scattering. In *International Conference on Estuaries and Coasts*, pages 749–755, 11 2003.
- [45] S.-X. Liu, B. Sun, Z.-B. Sun, and J.-X. Li. Self-adaptive FEM numerical modeling of the mild-slope equation. *Applied Mathematical Modelling*, 32(12):2775 – 2791, 2008.
- [46] J.-Y. Maa, T.-W. Hsu, and D.-Y. Lee. The RIDE model: an enhanced computer program for wave transformation. *Ocean Engineering*, 29(11):1441 – 1458, 2002.
- [47] Y. Maday and E. M. Ronquist. Optimal error analysis of spectral methods with emphasis on non-constant coefficients and deformed geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80(1):91 – 115, 1990.
- [48] S. R. Massel. Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Engineering*, 19:97 – 126, 1993.
- [49] O. Z. Mehdizadeh and M. Paraschivoiu. Investigation of a two-dimensional spectral element method for helmholtz’s equation. *Journal of Computational Physics*, 189:111 – 129, 2003.
- [50] D. Modesto, S. Zlotnik, and A. Huerta. Proper generalized decomposition for parameterized helmholtz problems in heterogeneous and unbounded domains: Application to harbor agitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295:127 – 149, 2015.
- [51] R. Naserizadeh, H. B. Bingham, and A. Noorzad. A coupled boundary element-finite difference solution of the elliptic modified mild slope equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1):25 – 33, 2011.

- 
- [52] V. G. Panchang, B. R. Pearce, G. Wei, and B. Cushman-Roisin. Solution of the mild-slope wave problem by iteration. *Applied Ocean Research*, 13(4):187 – 199, 1991.
- [53] A. T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468 – 488, 1984.
- [54] D. Porter and D. Staziker. Extensions of the mild-slope equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 300:367–382, 1995.
- [55] L. Rodríguez-Tembleque, J. A. González, and A. Cerrato. Partitioned solution strategies for coupled BEM–FEM acoustic fluid–structure interaction problems. *Comput. Struct.*, 152:45 – 58, 2015.
- [56] R. Shaw and W. Falby. FEBIE - A combined finite element-boundary integral equation method. *Computers & Fluids*, 6(3):153 – 160, 1978.
- [57] D. Steward and V. Panchang. Improved coastal boundary condition for surface water waves. *Ocean Engineering*, 28(1):139 – 157, 2001.
- [58] K. D. Suh, C. Lee, and W. S. Park. Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, 32:91 – 117, 1997.
- [59] L. L. Thompson and P. M. Pinsky. A galerkin least-squares finite element method for the two-dimensional helmholtz equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(3):371–397, 1995.
- [60] T.-K. Tsay and P. L.-F. Liu. A finite element model for wave refraction and diffraction. *Applied Ocean Research*, 5(1):30 – 37, 1983.
- [61] P. E. Vos, S. J. Sherwin, and R. M. Kirby. From h to p efficiently: Implementing finite and spectral/hp element methods to achieve optimal performance for low- and high-order discretisations. *Journal of Computational Physics*, 229(13):5161 – 5181, 2010.
- [62] T. Wu. *Boundary Element Acoustics, Fundamentals and Computer Codes*, volume 3. WIT Press, Boston, 5 edition, 2000.
- [63] S. Zhu. A new DRBEM model for wave refraction and diffraction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12(4):261–274, 1993.
- [64] S.-P. Zhu, H.-W. Liu, and K. Chen. A general DRBEM model for wave refraction and diffraction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(5):377 – 390, 2000.
- [65] S.-P. Zhu, H.-W. Liu, and T. R. Marchant. A perturbation DRBEM model for weakly nonlinear wave run-ups around islands. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(1):63 – 76, 2009.
- [66] F. Zou and M. H. Aliabadi. Boundary spectral element method for three-dimensional elastodynamic problems. *Applied Mathematical Modelling*, Submitted paper, 2016.





# Apéndice C

## Artículo III: Partitioned solution strategies for coupled BEM-FEM acoustic fluid-structure interaction problems

---

The original version of this paper can be found in [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

- DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.02.018
- Journal Name: Computers & Structures
- ISSN: 0045-7949
- Journal Citation Reports (2015): Impact factor: 2.425
  - Classification (Computer science, Interdisciplinary Applications): Q1(21/104)
  - Classification (Civil Engineering): Q1(14/126)
- SCIMAGO (2015): Impact factor: 1.710
  - Classification (Civil and Structural Engineering): Q1(14/376)
  - Classification (Computer Science Applications): Q1(51/1142)
  - Classification (Material Science (miscellaneous)): Q1(44/546)
  - Classification (Mechanical Engineering): Q1(31/718)
  - Classification (Modelling and Simulation): Q1(16/457)



# Partitioned solution strategies for coupled BEM-FEM acoustic fluid-structure interaction problems

**Authors:** Luis Rodríguez-Tembleque, José A. González and Antonio Cerrato

Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, Spain

## Abstract

This paper investigates two FEM-BEM coupling formulations for acoustic fluid-structure interaction (FSI) problems, using the Finite Element Method (FEM) to model the structure and the Boundary Element Method (BEM) to represent a linear acoustic fluid. The coupling methods described interconnect fluid and structure using classical or localized Lagrange multipliers, allowing the connection of non-matching interfaces. First coupling technique is the well known Mortar method, that uses classical multipliers and is compared with a new formulation of the method of localized Lagrange multipliers (LLM) for FSI applications with non-matching interfaces. The proposed non-overlapping domain decomposition technique uses a classical non-symmetrical acoustic BEM formulation for the fluid, although a symmetric Galerkin BEM formulation could be used as well. A comparison between the localized methodology and the mortar method in highly non conforming interface meshes is presented. Furthermore, the methodology proposes an iterative preconditioned and projected bi-conjugate gradient solver which presents very good scalability properties in the solution of this kind of problems.

**Keywords:** Domain Decomposition; FETI; nsBETI; Fluid-structure interaction; localized Lagrange multipliers; Mortar

## C.1 Introduction

Reductions in noise emissions have high priority in the design process of vibrating fluid-structure systems. In particular, acoustic fluid-structure interaction (FSI) problems are commonly found in many engineering applications [34] and the numerical simulation of the interaction provides fundamental information for optimizing the design of the structure. In some situations one can perform the simulations neglecting the influence of the acoustic field on the vibrating structure. However, this is not acceptable for thin and flexible structures that are easily excited by the acoustic pressure. For these applications, the acoustic field has to be considered fully coupled to the vibrating structure. The finite element method (FEM) has been successfully applied to study this kind of problem and

many examples can be found in the book of Ohayon and Soize [43] and Sandberg and Ohayon [25].

The boundary element method (BEM) offers the major advantage over the FEM that only the boundary of the acoustic domain must be discretized. Moreover, the Sommerfeld radiation condition for exterior domains is inherently fulfilled, so it is especially more appropriate than the FEM to study exterior problems (i.e. waves propagating in infinite domains). For an introduction to the BEM, consult the monograph by Gaul et al. [19]. By coupling the BEM and the FEM in FSI, one can benefit from the advantages of both numerical methodologies: FEM is used to model the structure and the BEM to model the fluid. The first BEM-FEM coupling algorithm was developed by Everstine and Henderson [8] and later Chen et al. [6] proposed a variational coupling scheme for Galerkin methods. Further developments and applications of BEM-FEM methods in FSI can be found in the works of Gaul and Wenzel [20], Czygan and von Estorff [7], and Langer and Antes [30], and more recently, Fritze et al. [18], Soares [47], He et al. [27] and Soares and Godinho [28].

The mortar method was originally introduced by Bernardi et al. [1] for coupling non-conforming finite element discretizations. With this method, one obtains great flexibility for meshing the subdomains and increased computational efficiency combining fine with coarse meshes. Later, based in a mortar scheme, Fischer and Gaul [17] proposed an efficient FEM-BEM coupling technique in FSI which allows to connect dissimilar meshes, via classical Lagrange multipliers. Formulations based on classical Lagrange multiplier fields are quite effective but tend to generate monolithic schemes that do not preserve software modularity.

To obtain a completely partitioned scheme, Park and Felippa [37, 38, 40] proposed a formulation to connect non-matching FEM meshes. Non-matching interfaces are treated by the method of localized Lagrange multipliers (LLM), introducing a discrete surface *frame* interposed between the subdomains to approximate interface displacements. This *frame* is discretized and connected to the BEM or FEM substructures by using LLM collocated on the interface nodes. The application of BEM and FEM coupling in elastostatics using localized Lagrange multipliers has been studied by González and Park [22], and the extension to fluid-structure field interaction, by Park et al. [39, 42], Ross et al. [44, 45], González and Park [21] and González et al. [23].

In the mid-frequency regimes the acoustic fluid-structure problems require fine meshes and as a result they tend to require a large number of degrees of freedom. In this context, model reduction techniques [36] and domain decomposition methodologies (DDM) have been proposed for solving these large-scale systems. One of the most important strategies is the finite element tearing and interconnecting (FETI) method. The FETI methodology was proposed by Farhat and Roux [16] in the mid-90s and it is an effective DDM for the parallel solution of finite element problems partitioned into subdomains. The global continuity across the subdomains interfaces is enforced by classical Lagrange multipliers, which leads to a saddle point problem that can be solved iteratively [2, 15, 15, 14, 9, 33]. A more sophisticated version of the FETI method denominated FETI-DP [11, 10] has been also used by Farhat et al. [12, 13] and Li et al. [32] to solve partitioned acoustic FSI problems with finite elements.

The Boundary Element Tearing and Interconnecting (BETI) was recently introduced by Langer and Steinbach [31] as a counter part of the FETI methods. This methodology extends the tearing and interconnecting technique to symmetric Galerkin boundary element method (SGBEM) [4, 26] in order to obtain symmetric system matrices and, therefore, the use of a FETI PCG solver becomes feasible. The SGBEM is used to construct the *Steklov-Poincaré* operators instead of the finite element based Schur complements, so the advantageous properties of FETI methods remain valid for BETI methods as well. It can be demonstrated numerically [31, 35] that, using a preconditioner with appropriated scaling matrices, the condition number of the preconditioned BETI system is  $\mathcal{O}((1 + \log(L/h))^2)$  where  $L/h$  is the number of elements per subdomain, providing the same scalability characteristics than the FETI method. This BETI methodology has been successfully applied to different kind of problems (i.e. Bouchala et al. [5] proposed a BETI scheme for contact problems), but it requires the implementation of SGBEM, what is not straightforward. If it is replaced by a non-symmetrical BEM formulation to approximate the *Steklov-Poincaré* operators of the floating substructures, the flexibility equations become non-symmetric and different solution strategies should be considered.

This work presents a non-symmetrical BE-FETI (nsBE-FETI) formulation to solve vibro-acoustic FSI problems based on the mortar and LLM methods, following the techniques described in [41, 29, 24]. The resulting non-symmetrical flexibility system is solved with a new iterative solution procedure based on a preconditioned and projected Bi-Conjugate Gradient Stabilized (Bi-CGSTAB) algorithm. The formulation is presented together with some benchmark examples that compare the mortar and LLM schemes used for non-conforming interface approximations, checking the convergence and accuracy of the Bi-CGSTAB algorithm as well as its scalability properties.

The paper is organized as follows. First, a general formulation of the partitioned acoustic FSI problem is developed. In Section 3, special attention is paid to the choice of the interface coupling strategy based on mortar or LLM approaches. The projected Bi-CGSTAB algorithm is presented in Section 4 and its scalability and convergence properties are studied using different examples in Section 5. Finally, the paper concludes with the summary and resulting conclusions.

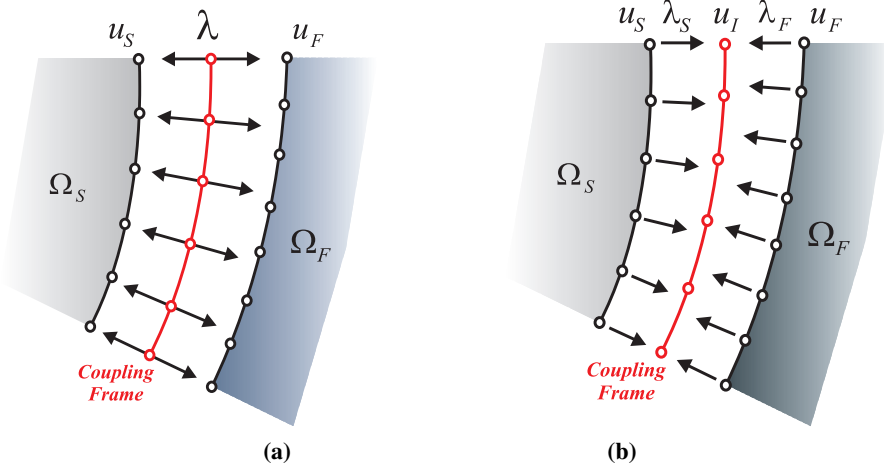
## C.2 Acoustics FSI partitioned formulation

We start considering a FEM structure and a BEM fluid domain, so the total virtual work of the system  $\delta W_T$  can be expressed as the addition of the virtual work done by the FEM structure domain  $\delta W_S$ , the BEM fluid domain  $\delta W_F$  and the interface coupling contribution  $\delta W_C$ :

$$\delta W_T = \delta W_S + \delta W_F + \delta W_C \quad (\text{C.1})$$

### C.2.1 Structural domain

The virtual work of a flexible structure,  $\delta W_S$ , is described by the principle of virtual work for a continuum body with domain  $\Omega_S$  and surface  $\Gamma_S$  that, assuming small displacements,



**Figure C.1** Differences in the description of mortar (a) and localized (b) interfaces. Classical multipliers are used in (a) with a direct connection of the interfaces. In (b), an independent discretization of the interface is introduced and connected to the solid and fluid boundaries using localized Lagrange multipliers.

can be written:

$$\delta W_S = \int_{\Omega_S} \sigma_{Si,j} \delta u_{Si,j} d\Omega - \int_{\Omega_S} (\rho_S \omega^2 u_{Si} + b_{Si}) \delta u_{Si} d\Omega - \int_{\Gamma_S} t_{Si} \delta u_{Si} d\Gamma \quad (C.2)$$

where  $u_{Si}$  is the  $i$ -th component of the structural displacement vector, a vector with the same number of components than the dimension of the space;  $\sigma_{Si,j}$  is the Cauchy stresses tensor,  $t_{Si}$  the applied surface tractions and  $b_{Si}$  the body forces. Finally,  $\omega$  and  $\rho_S$  are the angular frequency of the harmonic oscillations and the density of the structural material, respectively.

Next, the structure is discretized using the classical FEM approximation, where the assembly of element contributions by the direct stiffness method leads to the semidiscrete equation of motion:

$$\delta W_S = \delta \mathbf{u}_S^T \{ (\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \mathbf{u}_S - \mathbf{f}_S \} \quad (C.3)$$

where  $\mathbf{K}_S$  is the stiffness matrix,  $\mathbf{M}_S$  is the mass matrix,  $\mathbf{u}_S$  is the vector of nodal displacements and  $\mathbf{f}_S$  are the applied nodal forces. Equation (C.3) can be written in a more compact form:

$$\delta W_S = \delta \mathbf{u}_S^T \{ \bar{\mathbf{K}}_S \mathbf{u}_S - \mathbf{f}_S \} \quad (C.4)$$

defining the dynamic stiffness matrix as  $\bar{\mathbf{K}}_S = \mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S$ .

### C.2.2 Acoustic-fluid domain

The governing equation for the linear acoustic fluid with domain  $\Omega_F$  is the Helmholtz equation:

$$\nabla^2 p_F + k_F^2 p_F = 0 \quad (\text{C.5})$$

In this equation,  $\nabla^2$  is the Laplacian,  $p_F$  is the acoustic fluid pressure,  $k_F = \omega/c_F$  the wave number,  $c_F$  the speed of sound in the fluid and  $\omega$  the frequency.

On the fluid boundary  $\Gamma_F = \Gamma_{Fu} \cup \Gamma_{Fr}$ , two types of boundary condition are considered:

- Neumann boundary condition:

$$\frac{\partial p_F}{\partial n} = \rho_F \omega^2 u_{Fn} \quad \text{on } \Gamma_{Fu} \quad (\text{C.6})$$

- Rigid boundary:

$$\frac{\partial p_F}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_{Fr} \quad (\text{C.7})$$

where  $n$  denotes the unit normal on the surface,  $\rho_F$  is the fluid density and  $u_{Fn}$  represents the amplitude of the normal displacement on the boundary.

The BEM formulation for a linear acoustic medium is well known and can be found in many classical texts [49] and it is based on the transformation of Helmholtz equation (C.5) into a boundary integral equation. To do so, Helmholtz equation is written in a weak form considering a weighted residual approach using the Green's function  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  as the weighting function, being  $\mathbf{x}$  the collocation point and  $\mathbf{y}$  the source point. The expression of the Green's function depends on the dimension of the space, with:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_F |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (\text{C.8})$$

for two dimensions, where  $H_0^{(1)}$  is the Hankel function of the first kind and  $i$  is the imaginary unit.

Applying Green's second theorem to the weighted residual and locating the collocation point on the boundary, the resulting boundary integral equation is:

$$C(\mathbf{x}) p_F(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_F} p_F(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_F} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial p_F(\mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{C.9})$$

where  $C(\mathbf{x})$  is a coefficient that depends on the position of point  $\mathbf{x}$ :  $C(\mathbf{x}) = 1$  for an internal point,  $C(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}$  for  $\mathbf{x}$  on a smooth boundary  $\Gamma_F$ , and  $C(\mathbf{x}) = 0$  for an external point.

Taking into account the Neumann boundary condition (C.6), equation (C.9) can be rewritten as:

$$C(\mathbf{x}) p_F(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_F} p_F(\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma = \rho_F \omega^2 \int_{\Gamma_{Fu}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_{Fn}(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (\text{C.10})$$

Next, the BIE is discretized dividing the fluid boundary  $\Gamma_F$  into  $n_e$  linear elements of surface  $\Gamma_e$ . Pressure and displacement fields are approximated on each element  $\Gamma_e$  by

using linear shape functions:

$$p_F = \sum_{i=1}^m N_i p_{Fi} = \mathbf{N} \mathbf{p}_F \quad (\text{C.11})$$

$$u_{Fn} = \sum_{i=1}^m N_i u_{Fni} = \mathbf{N} \mathbf{u}_F \quad (\text{C.12})$$

where  $p_{Fi}$  and  $u_{Fni}$  are the nodal values of acoustic pressure and fluid normal displacement at node  $i$ , and  $\mathbf{N}$  is the shape function approximation matrix. A discrete boundary integral equation is then obtained substituting equation (C.11) into equation (C.10) and considering that the point  $\mathbf{x}$  is collocated on a boundary node:

$$C_i \delta_{ij} p_{Fj} + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} N_j p_{Fj} d\Gamma_e = \rho_F \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_j u_{Fnj} d\Gamma_e \quad (\text{C.13})$$

being  $\delta_{ij}$  is the Kronecker  $\delta$ -function. Equation (C.13) can be written in matrix form as:

$$\mathbf{H} \mathbf{p}_F = \mathbf{G} \mathbf{u}_F \quad (\text{C.14})$$

with the following definition for the matrix components:

$$H_{ij} = C_i \delta_{ij} + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} N_j d\Gamma_e \quad (\text{C.15})$$

$$G_{ij} = \rho_F \omega^2 \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_j d\Gamma_e \quad (\text{C.16})$$

The virtual work of a BEM fluid subdomain can then be computed using a weak statement for dynamic equilibrium reduced to the boundary. This is done with Clapeyron equation [3, 22] that is expressed in the following form:

$$\delta W_F = \int_{\Gamma_F} (p_F - t_F) \delta u_{Fn} d\Gamma \quad (\text{C.17})$$

defining the external normal tractions imposed on the boundary as  $t_F$  and where the fluid pressure  $p_F$  satisfies equation (C.9).

Discretizing equation (C.17) using the same BEM mesh utilized for the fluid, a discrete approximation of the virtual work is obtained:

$$\begin{aligned} \delta W_F &= \delta \mathbf{u}_F^T \left[ \int_{\Gamma_F} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \right] \{ \mathbf{p}_F - \mathbf{t}_F \} \\ &= \delta \mathbf{u}_F^T \mathbf{M} \{ \mathbf{p}_F - \mathbf{t}_F \} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

with a lumping matrix

$$\mathbf{M} = \int_{\Gamma_F} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (\text{C.19})$$



that transforms distributed tractions into equivalent nodal forces.

Substituting the discrete fluid pressures  $\mathbf{p}_F$  coming from the BE equation (C.14) into the variational form (C.18), a final expression for the discrete variation is obtained:

$$\delta W_F = \delta \mathbf{u}_F^T \mathbf{M} \{ \rho_F \omega^2 \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{u}_F - \mathbf{t}_F \} \quad (\text{C.20})$$

Note that this variational statement, obtained from a boundary integral formulation, in general does not derive from an energy functional and will be non-symmetric.

By comparison with equation (C.4), we conclude that the equations for the fluid and the structure can be written using the same expression:

$$\delta W_F = \delta \mathbf{u}_F^T \{ \bar{\mathbf{K}}_F \mathbf{u}_F - \mathbf{f}_F \} \quad (\text{C.21})$$

simply by defining an equivalent dynamic stiffness matrix for the fluid  $\bar{\mathbf{K}}_F = \rho_F \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$  and the vector of given external forces as  $\mathbf{f}_F = \mathbf{M} \mathbf{t}_F$ .

### C.3 Coupling strategies

Two different strategies are investigated in this Section for the connection of the fluid and the structure: *Mortar* method and the method of *localized Lagrange multipliers*. A general formulation is derived first for both methodologies and then they are compared using a classical FSI example from [46].

#### C.3.1 Mortar method

We consider two coupled subdomains,  $\Omega_S$  and  $\Omega_F$ , sharing a common interface  $\Gamma_C$ . In Mortar methods, the work associated to the tying interface will enforce the coupling condition in a weak sense through the following expression:

$$W_C = \int_{\Gamma_C} \lambda (u_{S_n} - u_{F_n}) d\Gamma \quad (\text{C.22})$$

where  $\lambda$  is the Lagrange Multiplier traction field over the coupling interface  $\Gamma_C$ , and  $u_{S_n}$  and  $u_{F_n}$  are the structure and fluid normal displacement fields over  $\Gamma_C$ . The variation of this form leads to:

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_C} \delta \lambda (u_{S_n} - u_{F_n}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \delta u_{S_n} \lambda d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \delta u_{F_n} \lambda d\Gamma \quad (\text{C.23})$$

The interface normal tractions  $\lambda$  and the boundary normal displacements  $u_n$  of each domain ( $S, F$ ) are interpolated on the boundary as follows:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n_I} \hat{N}_i \lambda_i \quad (\text{C.24})$$

$$u_{S_n} = \sum_{i=1}^{n_S} N_{Si} u_{Sni}, \quad u_{F_n} = \sum_{i=1}^{n_F} N_{Fi} u_{Fni} \quad (\text{C.25})$$

where the shape functions ( $N_{Si}, N_{Fi}$ ) are defined independently for the solid and the fluid side, ( $u_{Sni}, u_{Fni}$ ) are the structure and fluid normal nodal displacements and ( $n_I, n_F, n_S$ ) are the number of interface, fluid and structure boundary nodes.

Lagrange multipliers are approximated using linear shape functions  $\hat{N}_i$  with the support of the discretisation on the solid non-mortar side, same approximation than in [1]. When Dirichlet boundary conditions exist on the boundary of  $\Gamma_C$ , the shape functions  $\hat{N}_i$  have to be modified to avoid over-constrained conditions at those restricted edges [48], as represented in Figure C.2.

Substituting approximations (C.24) and (C.25) in the mortar coupling equation (C.23), the boundary integrals can be approximated:

$$\int_{\Gamma_C} \delta u_{Sn} \lambda \, d\Gamma = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_F} \sum_{j=1}^{n_S} \delta u_{Sni} \left[ \int_{\Gamma_e} N_{Si} \hat{N}_j \, d\Gamma \right] \lambda_j \quad (C.26)$$

$$\int_{\Gamma_C} \delta u_{Fn} \lambda \, d\Gamma = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{i=1}^{n_F} \sum_{j=1}^{n_S} \delta u_{Fni} \left[ \int_{\Gamma_e} N_{Fi} \hat{N}_j \, d\Gamma \right] \lambda_j \quad (C.27)$$

where  $n_e$  is the number of elements on the non-mortar side and  $\Gamma_e$  is the element  $e$  boundary (see Figure C.3). The boundary integrals of equations (C.26) and (C.27) are assembled into matrices  $\mathbf{A}_S$  and  $\mathbf{A}_F$ , so equation (C.23) can be written in matrix form as follows:

$$\begin{aligned} \delta W_C = & \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}_S^T \mathbf{u}_{Sn} + \mathbf{A}_F^T \mathbf{u}_{Fn}) \\ & + (\delta \mathbf{u}_{Sn})^T \mathbf{A}_S \boldsymbol{\lambda} + (\delta \mathbf{u}_{Fn})^T \mathbf{A}_F \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (C.28)$$

being  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\mathbf{u}_{Sn}$  and  $\mathbf{u}_{Fn}$  the vectors of nodal tractions, and nodal structure and fluid interface normal displacements.

Normal displacement vectors on the boundary,  $\mathbf{u}_{Sn}$  and  $\mathbf{u}_{Fn}$ , can be obtained from the global vectors of structure and fluid displacements:

$$\mathbf{u}_{Sn} = \mathbf{B}_S^T \mathbf{u}_S, \quad \mathbf{u}_{Fn} = \mathbf{B}_F^T \mathbf{u}_F \quad (C.29)$$

where  $\mathbf{B}_S$  and  $\mathbf{B}_F$  are boolean matrices. Substituting (C.29) into (C.28) and defining the coupling matrices:

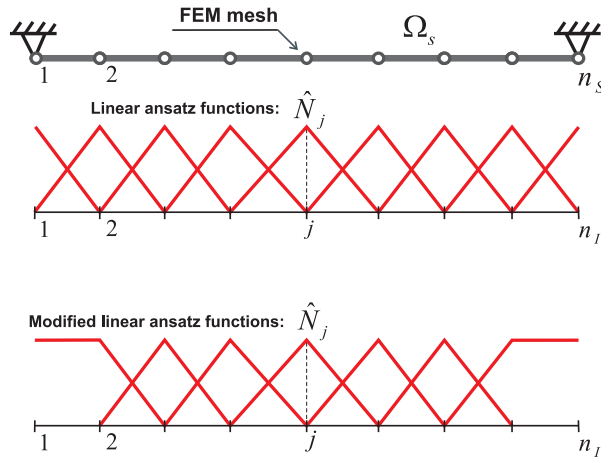
$$\mathbf{C}_S = \mathbf{B}_S \mathbf{A}_S, \quad \mathbf{C}_F = \mathbf{B}_F \mathbf{A}_F \quad (C.30)$$

we arrive to the following expression for the virtual work of the interface:

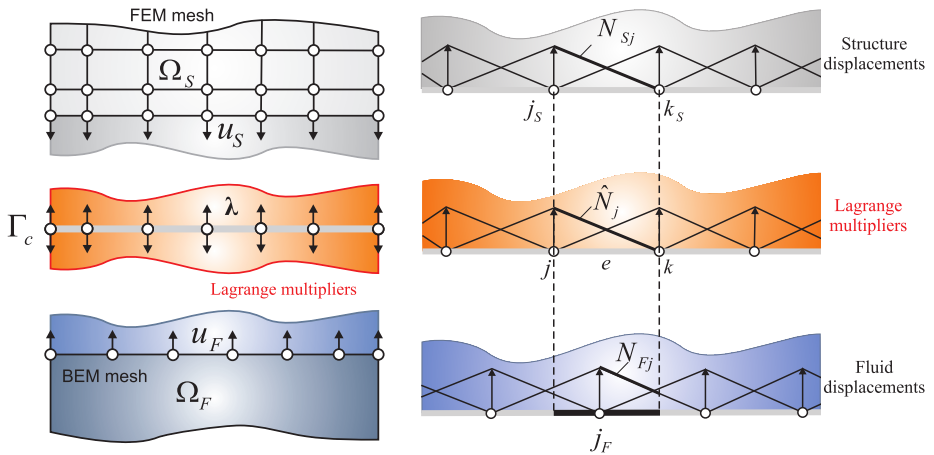
$$\delta W_C = \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{C}_S^T \mathbf{u}_S + \mathbf{C}_F^T \mathbf{u}_F) + \delta \mathbf{u}_S^T \mathbf{C}_S \boldsymbol{\lambda} + \delta \mathbf{u}_F^T \mathbf{C}_F \boldsymbol{\lambda} \quad (C.31)$$

Total virtual work of the system  $\delta W_T$  is then derived from (C.4), (C.21) and (C.31) as:

$$\begin{aligned} \delta W_T = & \delta \mathbf{u}_S^T \{ \bar{\mathbf{K}}_S \mathbf{u}_S + \mathbf{C}_S \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}_S \} + \\ & \delta \mathbf{u}_F^T \{ \bar{\mathbf{K}}_F \mathbf{u}_F + \mathbf{C}_F \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}_F \} + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \{ \mathbf{C}_S^T \mathbf{u}_S + \mathbf{C}_F^T \mathbf{u}_F \} \end{aligned} \quad (C.32)$$



**Figure C.2** Modified linear ansatz functions used with Mortar method in the presence of Dirichlet boundary conditions for the approximation of interface Lagrange multipliers.



**Figure C.3** Coupling with the Mortar method fluid and solid interfaces. Approximation spaces for boundary displacements and multipliers.

and from the stationary-point condition of this virtual work, the following partitioned FSI equation set is obtained:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_S & \mathbf{0} & \mathbf{C}_S \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_F & \mathbf{C}_f \\ \mathbf{C}_S^T & \mathbf{C}_F^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_F \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_S \\ \mathbf{f}_F \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.33})$$

In general, for  $p = 1 \dots n_p$  fluid and structure partitions, equation (C.33) can be expressed in condensed form as:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

by simply defining the block-matrices:

$$\mathbf{K} = \text{diag} \left[ \mathbf{K}_*^{(1)} \dots \mathbf{K}_*^{(n_p)} \right], \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_*^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_*^{(n_p)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.35})$$

and block-vectors:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_*^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_*^{(n_p)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_*^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_*^{(n_p)} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.36})$$

with subscript  $*$  =  $S, F$  indicating the type of model associated to substructure  $p$ , i.e., (S) for solid modeled using FEM or (F) for acoustic fluid using BEM.

After this reorganization and eliminating the displacements  $\mathbf{u}$  from the first row of (C.34) using the relation:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}) \quad (\text{C.37})$$

a compact non-symmetrical flexibility system is obtained:

$$\mathbf{F}_{bb}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b} \quad (\text{C.38})$$

being  $\mathbf{F}_{bb} = \mathbf{C}^\top \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}$  a boundary flexibility matrix and  $\mathbf{b} = \mathbf{C}^\top \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$  the free term.

### C.3.2 Localized Lagrange multipliers method

The virtual work for the interface frame  $\delta W_C$  can be also evaluated applying the variationally-based formulation proposed by Park and Felippa [37, 38] and González et al. [22]. The virtual work of the total system  $\delta W_T$  consists of contributions from the FE structure and BE fluid,  $\delta W_S$  and  $\delta W_F$ , plus the interface frame  $\delta W_C$ . This formulation enforces the kinematical positioning of the frame in a weak sense with the following expression:

$$W_C = \int_{\Gamma_C} \{ \lambda_S (u_{Sn} - u_{In}) + \{ \lambda_F (u_{Fn} - u_{In}) \} d\Gamma \quad (\text{C.39})$$

where both integrals are extended to the boundary interface  $\Gamma_C$ . The localized Lagrange multipliers and the displacements of the structure interface are represented by  $(\lambda_S, u_{Sn})$ , and the fluid localized Lagrange multipliers and displacements by  $(\lambda_F, u_{Fn})$ . Finally, the frame displacements are represented by  $u_{In}$ .

Equation (C.39) can be written in matrix form as:

$$\delta W_C = \delta \{ \boldsymbol{\lambda}_S^\top (\mathbf{B}_S^\top \mathbf{u}_S - \mathbf{L}_S \mathbf{u}_I) \} + \delta \{ \boldsymbol{\lambda}_F^\top (\mathbf{B}_F^\top \mathbf{u}_F - \mathbf{L}_F \mathbf{u}_I) \} \quad (\text{C.40})$$

using two linear operators,  $\mathbf{B}_S$  to extract the structural boundary displacements projected into the normal direction and  $\mathbf{B}_F$  to extract the fluid boundary displacements.  $\mathbf{L}_S$  and  $\mathbf{L}_F$  [40, 22] are matrices whose terms are obtained by evaluating the frame shape functions at the interface nodal position of the structure and fluid  $P_j^s$  and  $P_j^f$  (see Figure C.4).

The total virtual work of the coupled BEM-FEM-Frame system can finally be expressed as:

$$\begin{aligned} \delta W_T = & \delta \mathbf{u}_S^T \{ \bar{\mathbf{K}}_S \mathbf{u}_S + \mathbf{B}_S \boldsymbol{\lambda}_S - \mathbf{f}_S \} + \\ & \delta \mathbf{u}_F^T \{ \bar{\mathbf{K}}_F \mathbf{u}_F + \mathbf{B}_F \boldsymbol{\lambda}_F - \mathbf{f}_F \} + \delta \boldsymbol{\lambda}_S^T \{ \mathbf{B}_S^T \mathbf{u}_S - \mathbf{L}_S \mathbf{u}_I \} \\ & + \delta \boldsymbol{\lambda}_F^T \{ \mathbf{B}_F^T \mathbf{u}_F - \mathbf{L}_F \mathbf{u}_I \} + \delta \mathbf{u}_I^T \{ \mathbf{L}_S^T \boldsymbol{\lambda}_S + \mathbf{L}_F^T \boldsymbol{\lambda}_F \} \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

The stationarity condition of this variational form provides the equations of motion, defined by the following system:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_S & \mathbf{0} & \mathbf{B}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}}_F & \mathbf{0} & \mathbf{B}_F & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_S^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_S \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_F^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_F \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L}_S^T & \mathbf{L}_F^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_S \\ \mathbf{u}_F \\ \boldsymbol{\lambda}_S \\ \boldsymbol{\lambda}_F \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_S \\ \mathbf{f}_F \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.42})$$

In general, if we have  $n_p$  different fluid and structure partitions, equation (C.42) can be written in a more compact form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.43})$$

by defining the following block matrices and vectors:

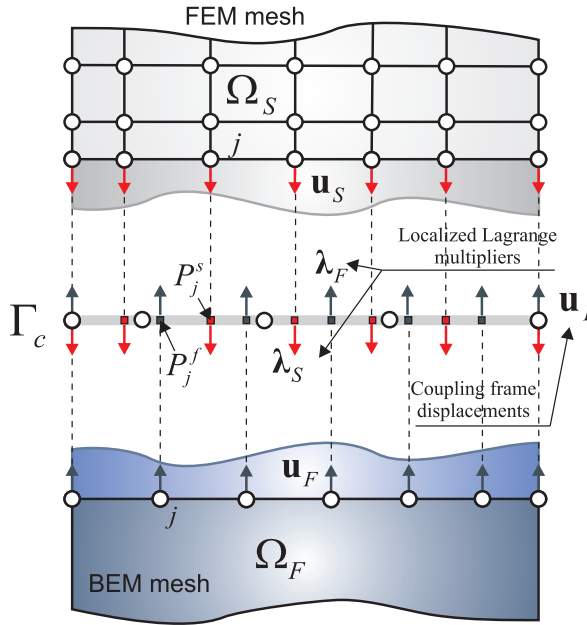
$$\mathbf{B} = \text{diag} \left[ \mathbf{B}_\star^{(1)} \dots \mathbf{B}_\star^{(n_p)} \right] \quad (\text{C.44})$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\star^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{L}_\star^{(n_p)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\lambda}_\star^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_\star^{(n_p)} \end{array} \right\} \quad (\text{C.45})$$

with  $\star = S, F$  depending on the physics associated to substructure  $p$ , i.e., (S) for a structure modeled using the FEM or (F) for an acoustic fluid approximated with the BEM.

Finally, we are interested in solving the problem first for the interface. This can be done obtaining the subdomain displacements from the first row of (C.43):

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{B} \boldsymbol{\lambda}) \quad (\text{C.46})$$



**Figure C.4** FSI BEM-FEM system with intercalated frame and localized Lagrange multipliers.

and substituting into the second row to obtain the following flexibility system:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{bb} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{C.47})$$

with  $\mathbf{F}_{bb} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}$  and  $\mathbf{b} = \mathbf{B}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$ .

### C.3.3 Test: Mortar-MLL comparisson

The coupling possibilities of Mortar and LLM methodologies are studied and compared by solving the following test problem taken from [46]: a two dimensional  $L \times H$  cavity ( $L = 10\text{ m}$  and  $H = 4\text{ m}$ ) with one flexible side (see Figure C.5). The flexible wall is a beam that is simply supported on both edges of the cavity and is modeled using Euler-Bernoulli beam elements. The properties of this structural domain are: Young module  $E = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$ , section inertia  $I = 1.59 \times 10^{-4}\text{ m}^4$ , cross section area  $A = 0.02\text{ m}^2$  and a mass per unit length  $m_s = 50\text{ kg/m}$ . The remaining three sides of the cavity are reverberant walls where homogeneous Neumann boundary conditions are applied ( $v_n = 0$ ). The fluid is water with  $c_F = 1500\text{ m/s}$  and  $\rho_F = 1000\text{ kg/m}^3$ . The sketch of this problem is presented in Figure C.5(a) where a harmonic bending moment  $M_{exc} = M_o e^{i\omega t}$  is applied in one edge. In Figure C.5(b) an scheme of the meshes and the coupled BEM-FEM subdomains using LLM is presented.

Figure C.6 shows the beam rotation at  $x = L$  as a function of the excitation frequency. The results coincide with the natural frequencies obtained by Sandberg et al. in [46]. In Figure C.7 it can be observed the flexible wall deflection and fluid pressure due to excitations of 5 Hz and 80 Hz, for matching Figure C.7(a) and non-matching Figure C.7(b) meshes.

The coupling interface displacements of the structure and the fluid obtained using matching meshes with the mortar method and the LLM method are presented in Figure C.8, for an harmonic excitations of 5 Hz. As it is observed in Figure C.8(a-b) and Figure C.8(c-d) both methodologies present the same coupling behavior using matching meshes at the interfaces. However, Figure C.9 presents the coupling interface displacements computed using nonmatching meshes with the mortar and the LLM method. It can be observed in Figure C.9(a-b) that we obtain inaccuracies in the form of wiggles on the fluid displacements using the mortar method. The appearance of these artifacts in the mortar solution is attributed to the use of different displacement interpolations for the fluid (linear shape functions) and the structure (Hermite polynomials). One main characteristic of mortar methods is that the condition of pointwise continuity across the interface is replaced by a weak form and this standard primal approach is suboptimal when mixed finite element discretizations are used [48]. For this reason, LLM method is going to be used in the nsBE-FETI methodology.

## C.4 Iterative solution strategy for the interface problem

The solution strategy presented to solve the flexibility system obtained for the FSI localized Lagrange multipliers formulation (C.47) uses a projection of the interface solution vector in the form:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathcal{P}\boldsymbol{\lambda}_d \quad (\text{C.48})$$

with the symmetric projector defined as:

$$\mathcal{P} = \mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T \quad (\text{C.49})$$

satisfying the condition:  $\mathcal{P}\mathbf{L} = \mathbf{0}$ .

Substitution of this decomposition into the flexibility formulation of the interface problem (C.47) yields the following equation:

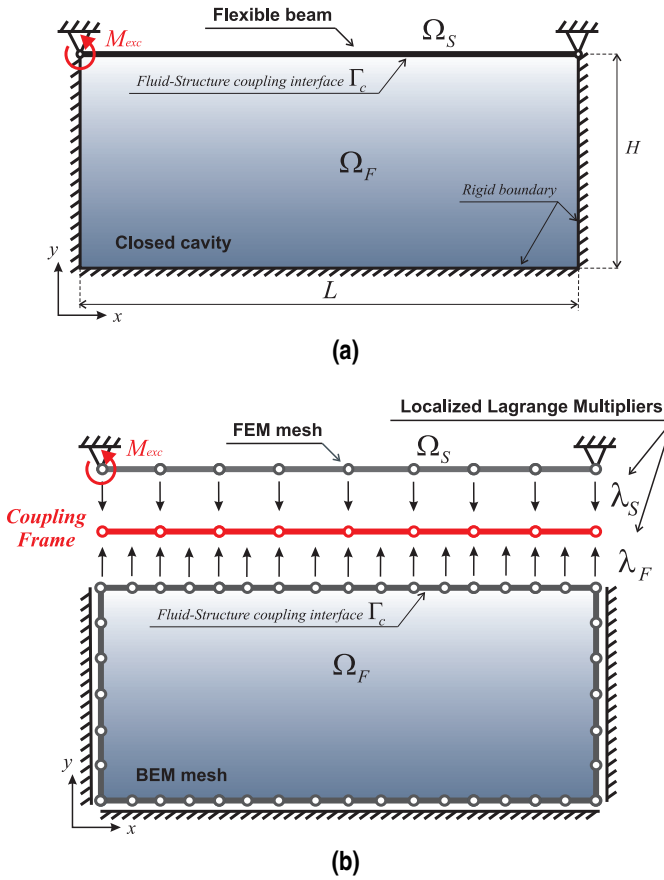
$$\mathcal{P}\mathbf{F}_{bb}\mathcal{P}\boldsymbol{\lambda}_d = \mathcal{P}\mathbf{b} \quad (\text{C.50})$$

So the projected residual is then finally given by:

$$\mathbf{r} = \mathcal{P}(\mathbf{b} - \mathbf{F}_{bb}\mathcal{P}\boldsymbol{\lambda}_d) \quad (\text{C.51})$$

equation that is solved for  $\mathcal{P}\boldsymbol{\lambda}_d$ .

Because the non-symmetrical BEM-FEM interface problem is usually very large in practical applications, Krylov's iterative schemes for non-symmetrical systems like Bi-CGSTAB and GMRES are preferred for the minimization of residual (C.51). The authors introduced in [24] a projected Bi-CGSTAB algorithm for non-symmetrical BEM problems



**Figure C.5** Acoustic cavity with a flexible wall and harmonic excitation. Problem definition (a) and BEM-FEM subdomains coupled using LLM (b).

in statics. This projected Bi-CGSTAB iterative scheme is generalized to dynamics in Table C.1 for the proposed nsBE-FETI formulation.

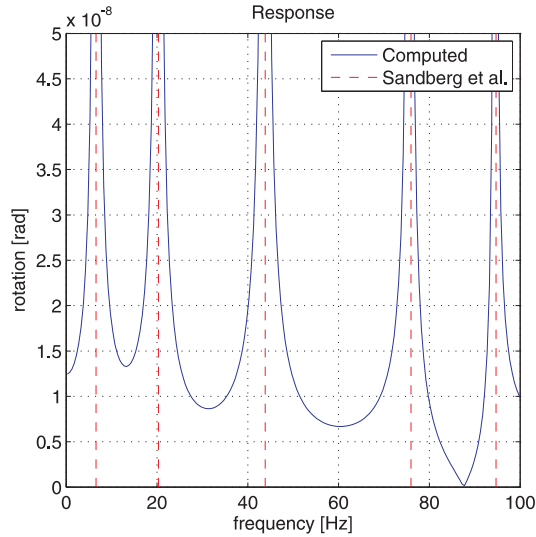
The proposed preconditioners for the fluid and the structure are extensions of the well-known lumped and Dirichlet preconditioners of the standard FETI and AFETI algorithms. These preconditioners are calculated in a domain-by-domain basis as:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{bb}^+ = \begin{cases} \bar{\mathbf{K}}_{bb} & \text{(FEM subdomain)} \\ \rho_F \omega^2 \mathbf{M}_{bb} \mathbf{H}_{bb}^{-1} \mathbf{G}_{bb} & \text{(BEM subdomain)} \end{cases} \quad (\text{C.52})$$

where subscript  $(bb)$  refers to boundary extraction, i.e. pre and post multiplication by  $\mathbf{B}^T$  and  $\mathbf{B}$  respectively.

Before an iterative method can be used to solve equation (C.42), a scaling of the variables





**Figure C.6** Transfer function of the cavity problem for the beam rotation at  $x = L$ . Natural frequencies computed by Sandberg et al. [46] using a FEM-FEM coupling method.

based on [32] should be applied to improve the condition number of the system. Denoting  $\Lambda = Ev/((1 + \nu)(1 - 2\nu))$ , the scaled displacements are  $\tilde{\mathbf{d}}_s = \sqrt{\rho\omega^2\Lambda} \mathbf{u}_s$  and  $\tilde{\mathbf{d}}_f = \sqrt{\rho\omega^2\Lambda} \mathbf{u}_f$ , and the scaled Lagrange multipliers  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = 1/\sqrt{\rho\omega^2\Lambda} \boldsymbol{\lambda}$ .

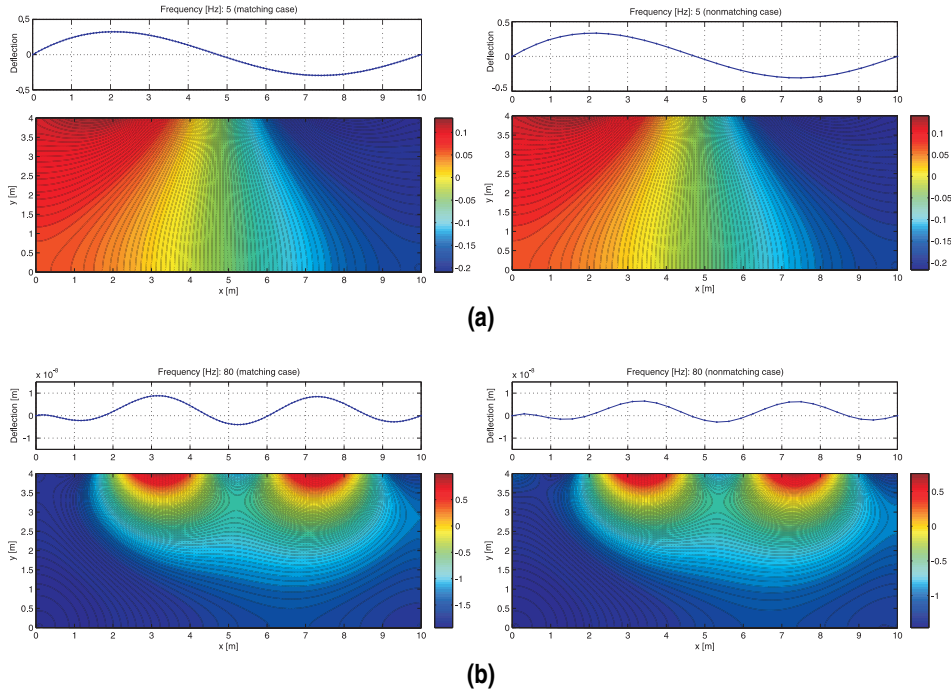
## C.5 Numerical Results

The possibilities of the proposed methodology are demonstrated in this section, where three representative examples are investigated solving the flexibility equation (C.47) using the nsBE-FETI iterative algorithm. The influence of different factors in the convergence of the nsBE-FETI algorithm like the number of elements per subdomain, frequency of the excitation and presence of non-matching interfaces, are examined.

### C.5.1 Acoustic cavity with a flexible wall

This first example revisits the problem presented in section C.3.3 (see Figure C.5). A series of cases using BEM-FEM matching meshes are first solved. Fluid domain is discretized using linear boundary-element meshes with  $L/h = 32, 64, 128,$  and  $256$  divisions at the interface and the structure is discretized using two-node Euler-Bernoulli beam elements. Two frequencies excitation of  $5 \text{ Hz}$  and  $80 \text{ Hz}$  are considered to study the influence of the frequency in the convergence.

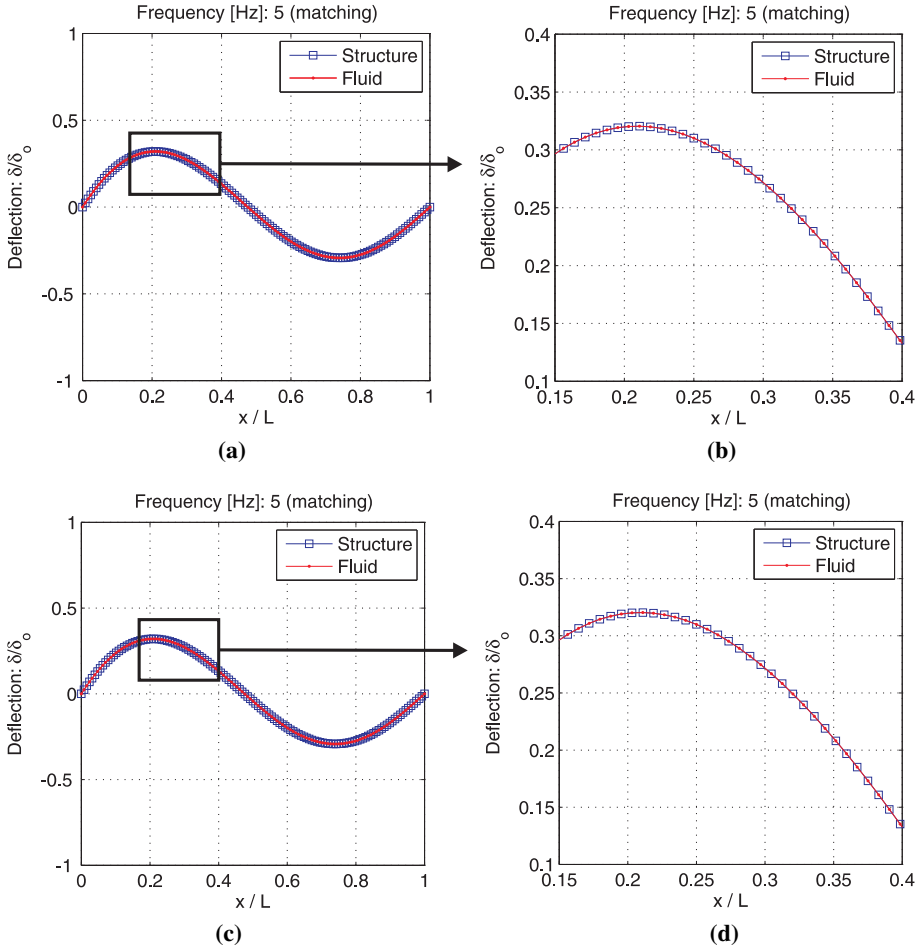
Table C.2 shows the number of iterations needed by the projected Bi-CGSTAB algorithm to solve these coupled problems with a tolerance of  $10^{-10}$ . Figures C.10(a) and C.10(b)



**Figure C.7** Acoustic cavity. Deflection of the flexible wall and fluid pressure field for different excitation frequencies. Results for 5 Hz (a) and 80 Hz (b) using matching meshes (left) and non-matching meshes (right).

show the convergence evolution for a low excitation frequency of 5 Hz and a higher frequency of 80 Hz with the number of iterations needed by the algorithm to solve these problems. For the cases considered, it can be observed that an exponential increase of the type  $L/h = 2^n$  translates into a constant number of iterations for both excitation frequencies. The difference in the iterations number between 5 Hz and 80 Hz is due to the complexity of the solution, as Figure C.11 shows.

Finally, the non-matching case is considered changing the discretization of the structure to produce dissimilar meshes at the interface. Figure C.12 presents error evolutions for 5 Hz (Figure C.12(a)) and 80 Hz (Figure C.12(b)). The results are obtained for structural meshes ranging from  $L/h = 64$  (highly non-matching case) to 256 (matching case) maintaining the mesh of the fluid fixed with  $L/h = 256$  divisions. It is noted that the introduction of dissimilar meshes, maintaining a constant  $(L/h)_{max}$ , slightly increases the number-of-iterations needed by nsBE-FETI to solve the problem for low and high excitation frequencies. The experiment is repeated for the BEM-FEM case, see Table C.3, presenting similar results. As a summary, in the matching case, the convergence of nsBE-FETI is governed by  $(L/h)_{max}$ , but the introduction of non-matching interfaces destructs this property producing a negative effect in the convergence that is controlled

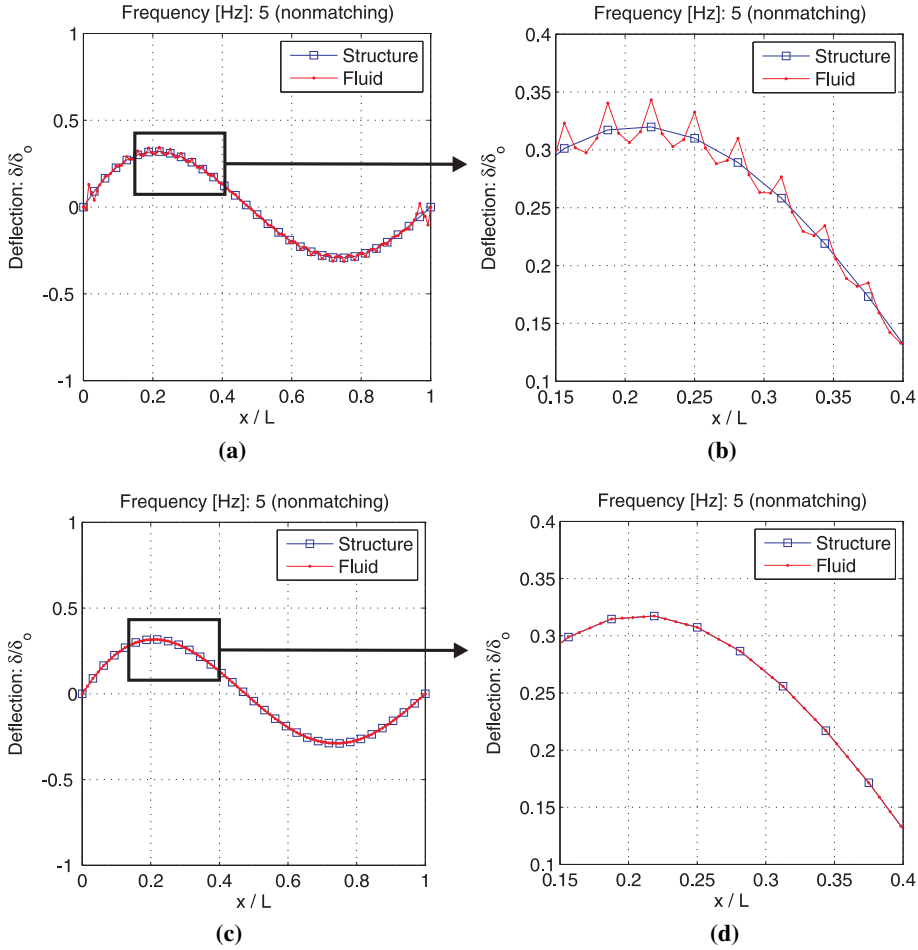


**Figure C.8** Beam deflection and interface fluid displacements for a bending moment with frequency  $\omega = 5$  Hz. Interface coupling using matching meshes with mortar method (top) and LLM (bottom).

by the interface mesh-dissimilarity parameter  $h_{max}/h_{min}$ . However, for the cases studied, the impact of a non-matching interface is limited and does not significantly affect the algorithm convergence.

### C.5.2 Rectangular duct with closed outlet

Next example considers a simple rectangular duct with a closed outlet as represented in Figure C.13(a). The closed outlet is located at  $x = L_o$  and assumed to be a rigid wall from  $y = 0$  to  $y = L$ , and the inlet has a complex pressure ( $p = p_o e^{i\omega t}$ ) prescribed at  $x = 0$ . The fluid is water as in the previous example. The wave number is set to  $k = 1$ , the length of



**Figure C.9** Beam deflection and interface fluid displacements for a bending moment of frequency  $\omega = 5$  Hz. Interface coupling using non-matching meshes with mortar method (top) and LLM (bottom). In the mortar case, artifacts appear as a consequence of imposing the displacement compatibility condition in a weak sense (top-right).

the duct in the  $x$ -direction is  $L_o = 8\pi m$  and the section height is  $L = 1m$ . Figure C.13(b) presents the solution in terms of resulting pressure distribution on the field points.

The duct is partitioned transversally into  $N_s = 2, 4$  and  $8$  subdomains, discretized using linear boundary elements of fixed size  $L/h = 10$ , maintaining matching interfaces (Figure C.14). The objective of this test is to demonstrate that, maintaining the element size, the convergence of nsBE-FETI is not considerably affected by the number of partitions. Table C.4 contains a summary of convergence results, and Figure C.15 shows the convergence history of this particular case. It is observed a small effect of  $N_s$  in the convergence.

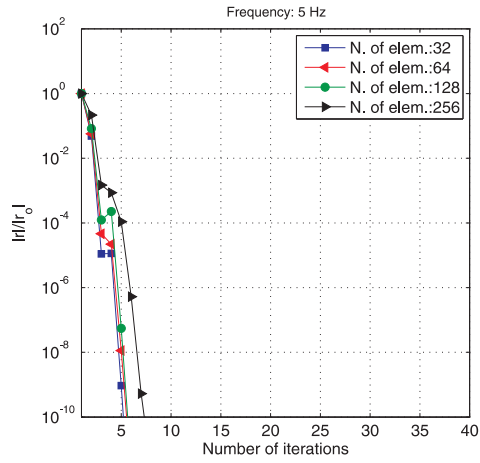
**Table C.1** Complex BiCGStab algorithm with preconditioning and projection used to minimize the residual of equation (C.51).

<p>(I) Initialize:  <math>\boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{r}_0 = \mathcal{P}(\mathbf{b} - \mathbf{F}_{bb}\boldsymbol{\lambda}_0)</math>  <math>\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{p}_0 = \mathbf{0}</math></p> <p>(II) Iterate <math>i = 1, 2, 3, \dots</math> until convergence:  Compute:  <math>\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_{i-1} + \omega_i(\mathbf{p}_{i-1} - \alpha_{i-1}\mathbf{x}_{i-1})</math>  with <math>\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_0, \beta_i = (\hat{\mathbf{r}}_0^* \mathbf{r}_{i-1})</math>  and <math>\omega_i = \beta_i \gamma_{i-1} / (\alpha_{i-1} \beta_{i-1})</math></p> Precondition: $\mathbf{a}_i = \tilde{\mathbf{F}}_{bb}^+ \mathbf{p}_i$ Projection: $\mathbf{z}_i = \mathcal{P} \mathbf{a}_i$ Compute: $\mathbf{u}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \gamma_i \mathbf{x}_i,$ with $\mathbf{b}_i = \mathbf{F}_{bb} \mathbf{z}_i, \mathbf{x}_i = \mathcal{P} \mathbf{b}_i$ and $\gamma_i = \beta_i / (\hat{\mathbf{x}}_i^* \mathbf{r}_0)$ Precondition: $\mathbf{c}_i = \tilde{\mathbf{F}}_{bb}^+ \mathbf{u}_i$ Projection: $\mathbf{y}_i = \mathcal{P} \mathbf{c}_i$ Update solution: $\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}_{i-1} + \gamma_i \mathbf{z}_i + \alpha_i \mathbf{y}_i$ with $\mathbf{G}_i = \mathbf{F}_{bb} \mathbf{y}_i, \mathbf{w}_i = \mathcal{P} \mathbf{G}_i$ and $\alpha_i = (\hat{\mathbf{w}}_i^* \mathbf{u}_i) / (\hat{\mathbf{w}}_i^* \mathbf{w}_i)$ Update residual: $\mathbf{r}_i = \mathbf{u}_i - \alpha_i \mathbf{w}_i$ <p>(III) If <math>\ \mathbf{r}_i\  / \ \mathbf{r}_0\  &gt; \varepsilon, i \leftarrow i + 1</math> return to step (II)</p>
--

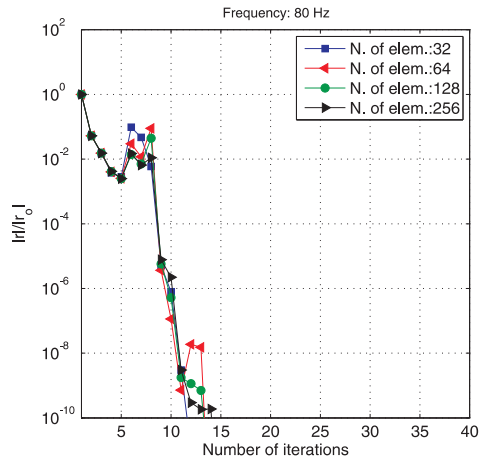
**Table C.2** Acoustic cavity problem with BEM-FEM matching interface. Number of iterations for a constant normalized residual with different mesh sizes.

$L/h$	$n_e$		Iterations	
	BEM	FEM	5Hz	80Hz
32	96	32	6	12
64	192	64	6	14
128	384	126	6	14
256	768	256	8	15

In the next experiment, the number of subdomains is fixed to  $N_s = 4$  and the problem solved for different discretizations with  $L/h = 10, 20$  and  $40$ , using a total of 148, 296 and 592 elements-per-subdomain. Convergence-rate results are summarized in Table C.5,



(a)

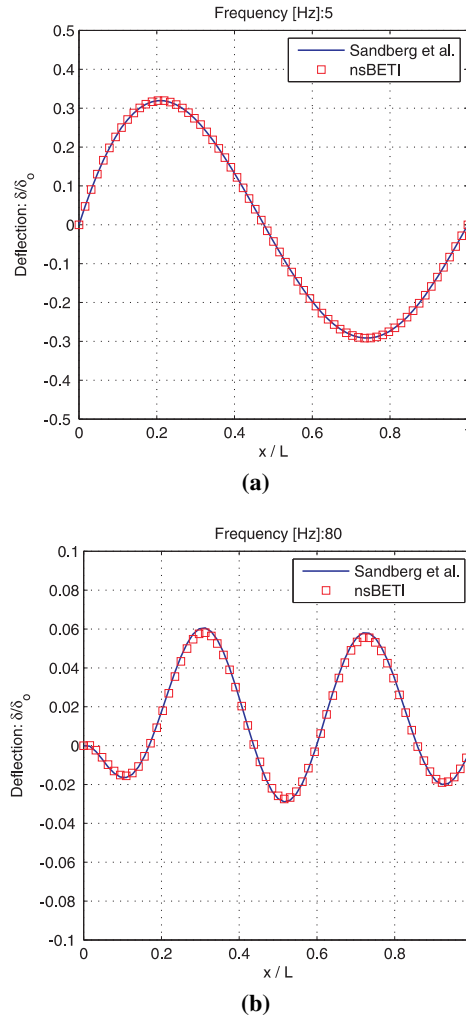


(b)

**Figure C.10** BiCGSTAB error evolution for: 5 Hz (a) and 80 Hz (b), considering a LLM coupling of matching meshes.

**Table C.3** Acoustic cavity problem with BEM-FEM non-matching interface. Number of iterations for a normalized residual of  $10^{-10}$  with different mesh sizes.

$L/h$ FEM	$L/h$ BEM	Iterations $5Hz$	Iterations $80Hz$
64	256	8	15
128	256	18	25
256	256	20	30

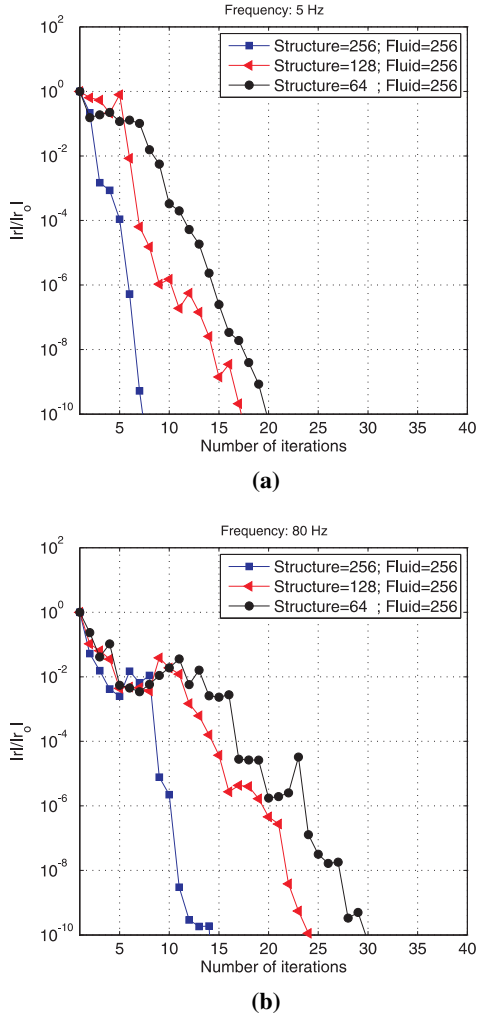


**Figure C.11** Beam deflection due to harmonic excitation of different frequencies: 5 Hz (a) and 80 Hz (b), considering a LLM coupling of matching meshes.

demonstrating a logarithmic correlation between the number of iterations for convergence and the mesh-size ( $L/h$ ) in the range of discretization-sizes studied.

### C.5.3 Open problem: Scattering object with a flexible wall

Finally, in our last example we consider an open problem with a square scattering object that has a flexible wall of length  $L = 10\text{ m}$  (Figure C.16(a)). The fluid is water and the structural domain presents the same properties than the first example. Our object is excited by a plane monochromatic wave of frequency  $500\text{ Hz}$  and an incidence angle  $\alpha = \pi/4$

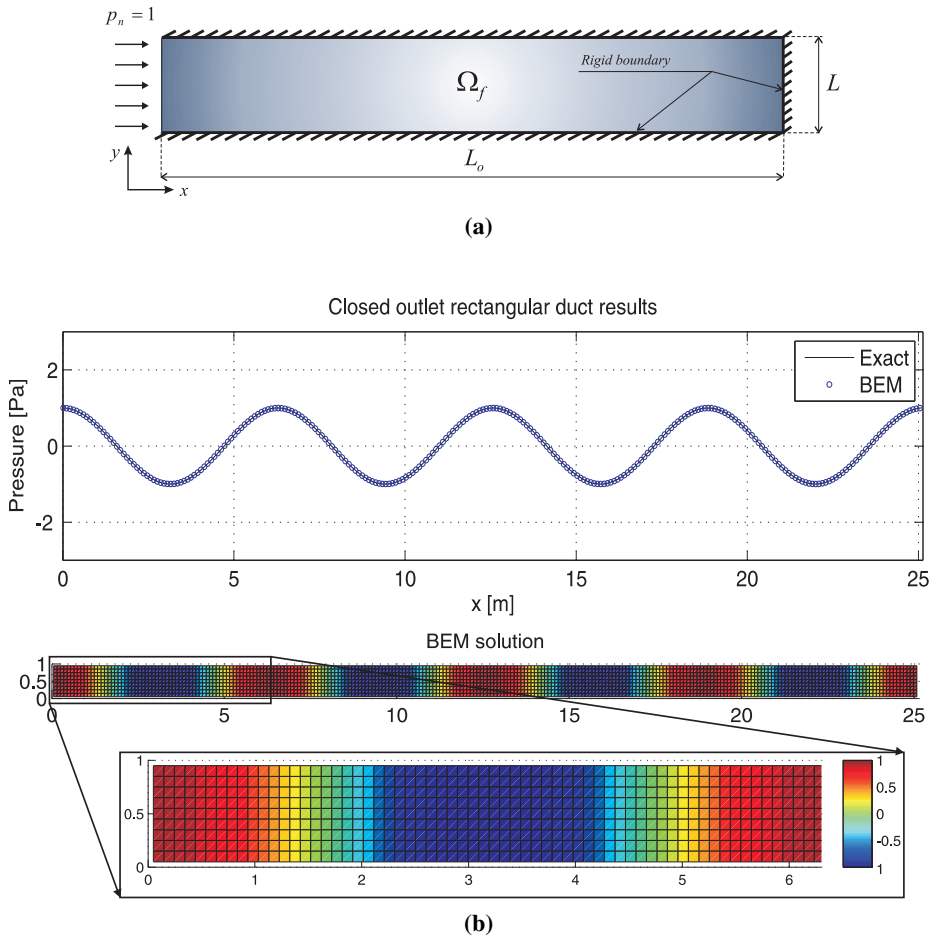


**Figure C.12** Bi-CGSTAB error evolution considering non-matching meshes and harmonic excitations of: 5 Hz (a) and 80 Hz (b).

*rad.*

The domains are discretized using the same number of elements at the coupling interface. Figure C.16(b) shows the real part of the total acoustic pressure around the object. Table C.6 presents the number of iterations needed by the projected Bi-CGSTAB algorithm to solve the coupled problem with a tolerance  $\varepsilon = 10^{-10}$  and Figure C.17 shows the evolution of the residuals. It can be observed a similar behaviour of the algorithm in this exterior problem than in the interior cases previously studied.

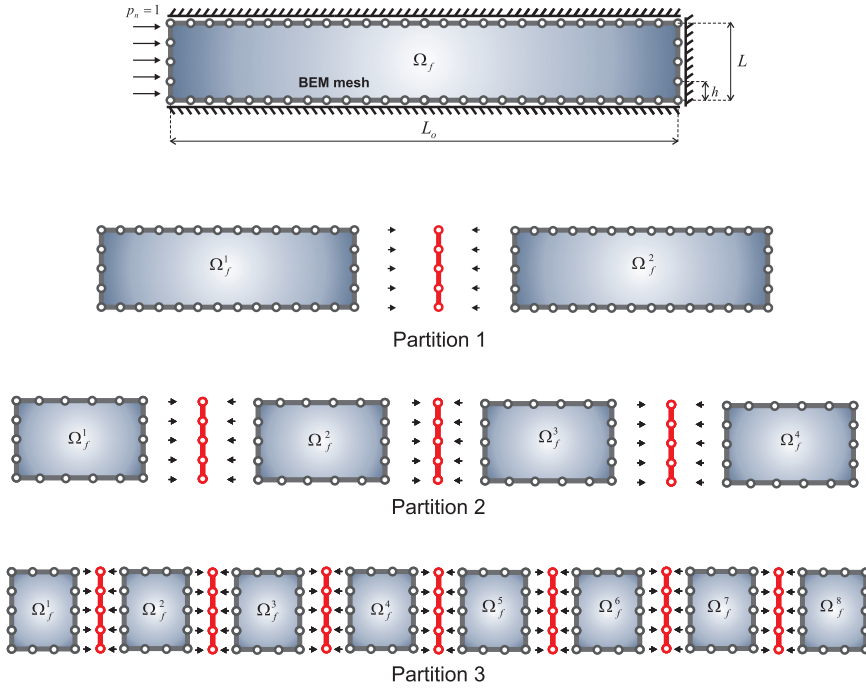




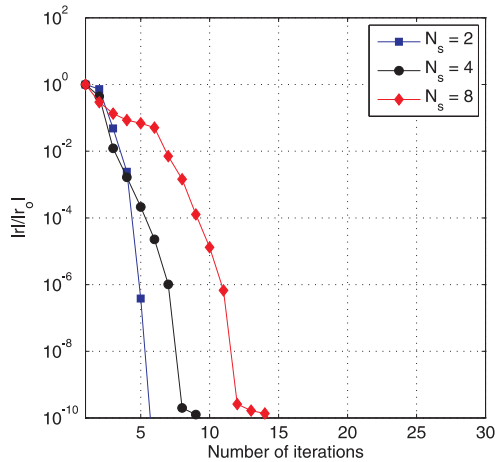
**Figure C.13** Rectangular duct with closed outlet. (a) Problem description, dimensions and boundary conditions. (b) Distribution of the fluid pressure in the longitudinal direction compared with the analytical solution.

**Table C.4** Influence of the number of partitions ( $N_s$ ) for a fixed mesh discretization ( $L/h$ ) of the duct problem.

$L/h$	$n_p$	$n_e$	Iterations
10	2	552	6
10	4	592	10
10	8	672	15



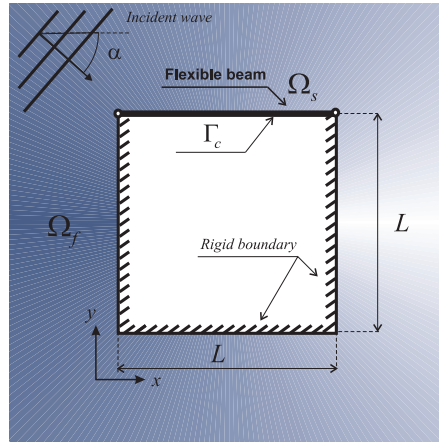
**Figure C.14** Rectangular duct with closed outlet. Partitioning of the fluid domain into  $n_p=2, 4$  and  $8$  subdomains connected with localized Lagrange multipliers.



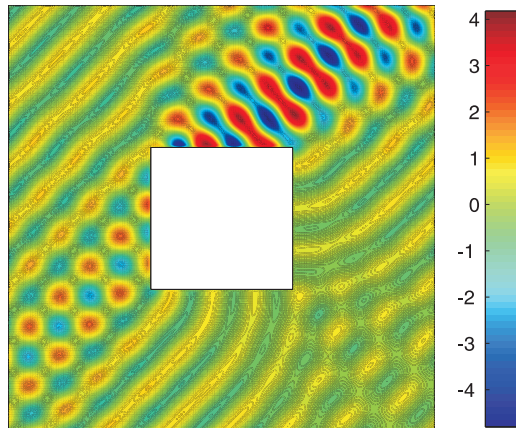
**Figure C.15** Duct problem. Evolution of the residual for different number of partitions.

**Table C.5** The number of partitions is fixed ( $N_s = 4$ ) and the number of elements ( $N_{el}$ ) increases.

$L/h$	$n_p$	$n_e$	Iterations
10	4	592	10
20	4	1184	14
40	4	2368	18

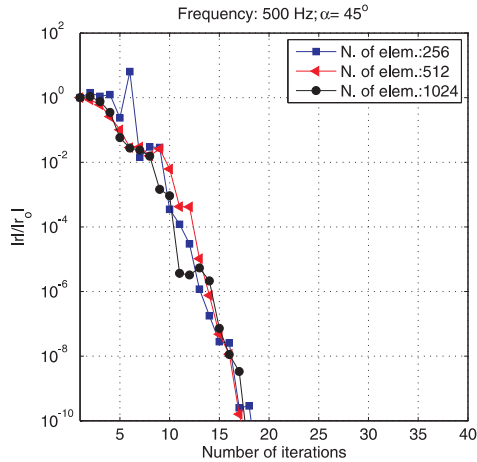


(a)



(b)

**Figure C.16** Wave scattering produced by a monochromatic incident wave on a square obstacle with a flexible wall. (a) Problem definition. (b) Real part of the total acoustic pressure for frequency  $500\text{Hz}$  and incidence angle  $\alpha = -\pi/4$ .



**Figure C.17** Scattering problem. Convergence of the projected Bi-CGSTAB algorithm for a frequency of 500 Hz with different meshes.

**Table C.6** Open problem with a BEM-FEM matching interface. Number of iterations for a constant normalized residual with different mesh sizes.

$L/h$	$n_e$ BEM	$n_e$ FEM	Iterations 500Hz
64	256	64	19
128	512	128	18
256	1024	256	18

## C.6 Summary and conclusions

NsBE-FETI, a FETI-type formulation, has been extended to treat non-matching and non-symmetrical BEM-FEM acoustic FSI problems. This new formulation enjoys similar scalability properties than the classical FETI and symmetrical-BETI algorithms.

This resolution scheme is based on the LLM methodology which allows to consider non-matching interfaces and preserves software modularity. A comparison between LLM and the mortar scheme reveals that the LLM method obtain a better interface displacements approximation than mortar for this kind of FSI problem: flexible wall discretized using cubic beam elements coupled with an acoustics fluid cavity, when highly dissimilar meshes are considered at the interfaces.

Some scalability properties of the nsBE-FETI scheme have been studied considering different physics. First example was an interior acoustic problem with a flexible wall, where fluid and structure were discretized using matching and non-matching meshes. It was found that, in the matching case, convergence of nsBE-FETI algorithm is governed by the element size  $(L/h)_{max}$  but the introduction of non-matching interfaces produces a negative

effect in the convergence that is controlled by the interface mesh-dissimilarity parameter  $h_{max}/h_{min}$ . However, for the cases studied, the impact of a non-matching interface is limited and does not significantly affect the algorithm convergence for low frequencies.

In the second example, we modify the number of subdomains. Convergence studies reveal that for a fixed element size, the nsBE-FETI is not considerably affected by the number of partitions ( $N_s$ ). Furthermore, when the number of subdomains is fixed and the problem solved for different discretizations, a logarithmic correlation between the number of iterations for convergence and the mesh-size used ( $L/h$ ) is observed.

Finally, the last example presents an exterior FSI scattering problem where the same scalability behavior than in the interior ones could be observed. We can conclude that the proposed nsBE.FETI formulation equipped with the projected Bi-CGSTAB iterative solution algorithm presents good scalability properties for the solution of acoustic FSI problems.

## C.7 Acknowledgements

This work was co-funded by the *Ministerio de Ciencia e Innovación* (Spain), through the research projects DPI2010-19331, which is co-funded with the European Regional Development Fund (ERDF) (*Fondo Europeo de Desarrollo Regional*, FEDER).



# Bibliography

---

- [1] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. *A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method*, volume 299 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, chapter 2, pages 13–51. Nonlinear partial differential equation and their applications, Collège de France Seminar, 11 (Paris, 1989–1991), 1994.
- [2] M. Bhardwaj, D. Day, C. Farhat, M. Lesoinne, K. Pierson, and D. Rixen. Application of the FETI method to ASCI problems-scalability results on 1000 processors and discussion of highly heterogeneous problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):513–535, 2000.
- [3] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Elastic and Plastic Problems*, chapter 2, pages 2–23. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [4] M. Bonnet, G. Maier, and C. Polizzotto. Symmetric galerkin boundary element methods. *Applied Mechanics Reviews*, 51(11):669–704, 1998.
- [5] J. Bouchala, Z. Dostál, and M. Sadowská. Scalable total BETI based algorithm for 3D coercive contact problems of linear elastostatics. *Computing*, 85(3):189–217, 2009.
- [6] Z. Chen, G. Hofstetter, and H. Mang. A galerkin-type BE-FE formulation for elasto-acoustic coupling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 152(1-2):147 – 155, 1998. Containing papers presented at the Symposium on Advances in Computational Mechanics.
- [7] O. Czygan and O. von Estorff. Fluid-structure interaction by coupling BEM and nonlinear FEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(9):773 – 779, 2002.
- [8] G. C. Everstine and F. M. Henderson. Coupled finite element/boundary element approach for fluid-structure interaction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(5):1938–1947, 1990.

- [9] C. Farhat, P.-S. Chen, J. Mandel, and F. X. Roux. The two-level FETI method Part II: Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1-2):153–179, 1998.
- [10] C. Farhat, M. Lesoinne, P. LeTallec, K. Pierson, and D. Rixen. FETI-DP: a dual-primal unified FETI method Part I: A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1523–1544, 2001.
- [11] C. Farhat, M. Lesoinne, and K. Pierson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 7(7-8):687–714, 2000.
- [12] C. Farhat, A. Macedo, and M. Lesoinne. A two-level domain decomposition method for the iterative solution of high frequency exterior helmholtz problems. *Numerische Mathematik*, 85(2):283–308, 2000.
- [13] C. Farhat, A. Macedo, M. Lesoinne, F.-X. Roux, F. Magoulés, and A. de La Bourdonnaie. Two-level domain decomposition methods with lagrange multipliers for the fast iterative solution of acoustic scattering problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4):213–239, 2000.
- [14] C. Farhat and J. Mandel. The two-level FETI method for static and dynamic plate problems Part I: An optimal iterative solver for biharmonic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1-2):129 – 151, 1998.
- [15] C. Farhat, K. Pierson, and M. Lesoinne. The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2-4):333–374, 2000.
- [16] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32(6):1205–1227, 1991.
- [17] M. Fischer and L. Gaul. Fast BEM-FEM mortar coupling for acoustic-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(12):1677–1690, 2005.
- [18] D. Fritze, S. Marburg, and H.-J. Hardtke. FEM-BEM-coupling and structural-acoustic sensitivity analysis for shell geometries. *Computers & Structures*, 83(2–3):143 – 154, 2005. *Advances in Analysis of Fluid Structure Interaction* *Advances in Analysis of Fluid Structure Interaction*.
- [19] L. Gaul, M. Kögl, and M. Wagner. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2003.



- 
- [20] L. Gaul and W. Wenzel. A coupled symmetric BE-FE method for acoustic fluid-structure interaction. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(7):629 – 636, 2002.
- [21] J. A. González and K. C. Park. A simple explicit-implicit finite element tearing and interconnecting transient analysis algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(10):1203–1226, 2012.
- [22] J. A. González, K. C. Park, and C. A. Felippa. FEM and BEM coupling in elastostatics using localized lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10):2058–2074, 2007.
- [23] J. A. González, K. C. Park, I. Lee, C. A. Felippa, and R. Ohayon. Partitioned vibration analysis of internal fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(3):268–300, 2012.
- [24] J. A. González, L. Rodríguez-Tembleque, K. C. Park, and R. Abascal. The nsBETI method: an extension of the FETI method to non-symmetrical BEM-FEM coupled problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(10):1015–1039, 2013.
- [25] R. O. Göran Sandberg. *Computational aspects of structural acoustics and vibration*. CISM courses and lectures 505. Springer, 2008.
- [26] L. J. Gray and G. H. Paulino. Symmetric galerkin boundary integral formulation for interface and multi-zone problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(16):3085–3101, 1997.
- [27] Z. He, G. Liu, Z. Zhong, G. Zhang, and A. Cheng. A coupled ES-FEM/BEM method for fluid-structure interaction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1):140 – 147, 2011.
- [28] D. S. Jr. and L. Godinho. An optimized BEM-FEM iterative coupling algorithm for acoustic-elastodynamic interaction analyses in the frequency domain. *Computers & Structures*, 106-107:68–80, 2012.
- [29] M. R. Justino, K. C. Park, and C. A. Felippa. An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis: performance evaluation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(15):2739–2758, 1997.
- [30] S. Langer and H. Antes. Analyses of sound transmission through windows by coupled finite and boundary element methods. *Acta Acustica united with Acustica*, 89(1):78–85, 2003-01-01T00:00:00.
- [31] U. Langer and O. Steinbach. Boundary element tearing and interconnecting methods. *Computing*, 71(3):205–228, 2003.
- [32] J. Li, C. Farhat, P. Avery, and R. Tezaur. A dual-primal FETI method for solving a class of fluid-structure interaction problems in the frequency domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(4):418–437, 2012.

- [33] J. Mandel and R. Tezaur. Convergence of a substructuring method with lagrange multipliers. *Numerische Mathematik*, 73(4):473–487, 1996.
- [34] H. Morand and R. Ohayon. *Fluid-Structure Interaction: Applied Numerical Methods*. Wiley-Masson Series Research in Applied Mathematics. Wiley, 1995.
- [35] G. Of and O. Steinbach. The all-floating boundary element tearing and interconnecting method. *Journal of Numerical Mathematics*, 17(4):277–298, 2010.
- [36] R. Ohayon and C. Soize. *Advanced Computational Vibroacoustics: Reduced-Order Models and Uncertainty Quantification*. Cambridge University Press, 2014.
- [37] K. C. Park and C. A. Felippa. A variational framework for solution method developments in structural mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 65(1):242–249, 1998.
- [38] K. C. Park and C. A. Felippa. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):395–418, 2000.
- [39] K. C. Park, C. A. Felippa, and R. Ohayon. Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized lagrange multipliers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25):2989–3007, 2001. Advances in Computational Methods for Fluid-Structure Interaction.
- [40] K. C. Park, C. A. Felippa, and G. Rebel. A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(9):2117–2142, 2002.
- [41] K. C. Park, M. R. Justino, and C. A. Felippa. An algebraically partitioned FETI method for parallel structural analysis: algorithm description. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(15):2717–2737, 1997.
- [42] K. C. Park, R. Ohayon, C. A. Felippa, and J. A. González. Partitioned formulation of internal and gravity waves interacting with flexible structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9-12):723–733, 2010.
- [43] C. S. Roger Ohayon. *Structural acoustics and vibration: mechanical models, variational formulations and discretization*. Academic Press, 1998.
- [44] M. R. Ross, C. A. Felippa, K. C. Park, and M. A. Sprague. Treatment of acoustic fluid-structure interaction by localized lagrange multipliers: Formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(33-40):3057 – 3079, 2008.
- [45] M. R. Ross, M. A. Sprague, C. A. Felippa, and K. C. Park. Treatment of acoustic fluid-structure interaction by localized lagrange multipliers and comparison to alternative interface-coupling methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9-12):986–1005, 2009.

# Índice de Figuras

---

2.1.	Sección esquemática en el plano $x - z$ de olas propagándose sobre un fondo variable	15
2.2.	Curvas de dispersión para una onda propagándose sobre un fondo de profundidad variable	21
2.3.	Definición de los parámetros utilizados para la adimensionalización del problema	22
3.1.	Variación del número de onda con la distancia $x$	34
3.2.	Camino de integración cerrado en el plano complejo	36
3.3.	Camino de integración simétrico respecto al origen. Los intervalos del eje real en los que la solución del problema unidimensional es singular son evitados pasando por el segundo y el cuarto cuadrante	37
3.4.	Camino de integración por tramos para resolver de forma numérica	37
3.5.	Función $\hat{k}(x)$ utilizada para el caso práctico	38
3.6.	Solución del potencial transformado $\Psi(x, x', \xi)$ para el conjunto de puntos $\xi \equiv \{\xi_1 \in [0, 12], \xi_2 = 0\}$ . En (a) se muestra el valor absoluto del potencial, siendo su fase representada en (b). Los polos situados en $\xi = 1, 10$ están marcados con líneas rojas	39
3.7.	Solución del potencial transformado $\Psi(x, x', \xi)$ para el conjunto de puntos $\xi \equiv \{\xi_1 \in [0, 12], \xi_2 = -\tau\}$ . En (a) se muestra el valor absoluto del potencial, siendo su fase representada en (b). Los polos situados en $\xi = \hat{k}_{a,c}$ están marcados con líneas rojas	40
3.8.	Función de Green $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \hat{k}(x))$ para el perfil (3.43). En (a) se muestra el valor absoluto del potencial, siendo su fase representada en (b). La figura (c) muestra el valor real del potencial	41
3.9.	Derivada de la función de Green en la dirección $x$ . En (a) se muestra el valor absoluto, en (b), la fase. La figura (c) muestra el valor real de la derivada	42
3.10.	Derivada de la función de Green en la dirección $y$ . En (a) se muestra el valor absoluto, en (b), la fase. La figura (c) muestra el valor real de la derivada	43
3.11.	Polinomios de Legendre de orden $p = 0, 1, \dots, 4$	48

3.12.	Derivada de los polinomios de Legendre de orden $p = 0, 1, \dots, 4$	48
3.13.	Convergencia de $\ W_{n+1}^X(x)\ _\infty$ para diferentes distribuciones nodales	50
3.14.	Nodos y funciones de forma del elemento de referencia unidimensional ( $n = 4$ )	51
3.15.	Elemento de referencia bidimensional. (a) elemento y numeración de los nodos, (b) función de forma del nodo 21, (c) función de forma del nodo 14 y (d) función de forma del nodo 22	53
3.16.	Acoplamiento tipo Mortar	57
3.17.	Evaluación de la función de forma ( $N_c$ ) en la proyección de la posición del multiplicador sobre el marco	60
3.18.	Evaluación de la función de forma ( $N_c$ ) correspondiente al nodo 3 del marco en la proyección del multiplicador correspondiente al nodo 4 de la malla del dominio $\Omega$	61
3.19.	Aplicación de la regla del momento nulo. Representación del diagrama de momentos que producen los MLL del fluido y la estructura sobre el marco. Los nodos de la malla del marco han de situarse sobre los puntos de valor nulo del diagrama	63

# Glosario

---

- BEM** Boundary Element Method. VII, VIII
- BiCGSTAB** Bigradiante Conjugado Estabilizado. 9, 67
- BSEM** Boundary Spectral Element Method. VIII
- CAS** Control Activo de Sonido. 6
- CG** Chebyshev-Gauss. 49, 50
- CGL** Chebyshev-Gauss-Lobatto. 45, 46, 49, 50
- DNL** *Discrete Non Local*. 5
- DRBEM** Método de Elementos de Contorno de Reciprocidad Dual. 6
- DtN** *Dirichlet to Neumann*. 5, 7
- EIC** Ecuación Integral de Contorno. 52
- EPS** Ecuación de Pendiente Suave. 2, 3, 7, 9, 10, 14, 15, 21–23, 25, 26, 65, 66
- EPSE** Ecuación de Pendiente Suave Extendida. 20, 68
- EPSM** Ecuación de Pendiente Suave Modificada. 68
- FEM** Finite Element Method. VII, VIII
- FFT** Transformada Rápida de Fourier. 35, 39, 40
- GLS** *Galerkin Least Squares*. 44
- IFFT** Transformada Rápida de Fourier Inversa. 39, 65
- LGL** Legendre-Gauss-Lobatto. XII, 45–47, 49–53, 66

- LLM** Localized Lagrange Multipliers. VIII
- MDF** Método de las Diferencias Finitas. 4, 7, 9, 29, 35, 44
- MEC** Método de los Elementos de Contorno. XII, 4–6, 8, 9, 26–30, 32–34, 40, 42, 46, 47, 50, 51, 54, 55, 63, 65–68
- MECE** Método de los Elementos de Contorno Espectrales. 66, 68
- MEE** Método de los Elementos Espectrales. 7, 45, 50–52, 66, 68
- MEF** Método de los Elementos Finitos. 4–9, 27–29, 33, 35, 38, 44–47, 49, 50, 54, 56, 63, 65–68
- MLL** Multiplicadores de Lagrange Localizados. 8, 9, 59, 60, 62, 63, 67, 68, 194
- MMEE** Métodos Espectrales. 4, 6, 7, 46, 50, 51
- MRP** Método de los Residuos Ponderados. 50
- MSE** mild-slope equation. VIII
- nsBE-FETI** non symmetrical Boundary Element-Finite Element Tearing and Interconnecting. VIII
- PMLs** *Perfectly Matched Layers*. 5, 7
- PTV** Principio de los Trabajos Virtuales. 54
- SEM** Spectral Element Method. VIII
- SFEM** *Smoothed Finite Element Method*. 45