View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Electronic archive of Tomsk Polytechnic University

НЕЛОКАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ: КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ И НЕВЯЗКА

А.Е. Кулагин
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

NONLOCAL GROSS-PITAEVSKII EQUATION WITH CYLINDRICAL SYMMETRY: SEMICLASSICAL ASYMPTOTICS AND ERROR

A.E. Kulagin
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

Abstract. *Nonlocal Gross-Pitaevskii equation (GPE) with cylindrical symmetry has been considered. The semiclassical solution, concentrated on a curve in the phase space, has been constructed. The error has been calculated for obtained the semiclassical solution. Both stability of semiclassical solution and limitedness of the error suggest that the exact solution is stable too.*

Нелокальное уравнение Гросса-Питаевского с цилиндрической симметрией имеет вид

$$\left\{-i\hbar\partial_t + V(\hat{p}_\varphi,\hat{z},t) + \varkappa\int\limits_{\mathbb{R}^2} W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\,\left|\Psi(\varphi,\boldsymbol{y},t)\right|^2 d\boldsymbol{y}\right\}\Psi(\varphi,\boldsymbol{x},t) = 0, \tag{1}$$

где $\hat{z} = \left(\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{x}\right)^{\mathrm{T}}$, $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\left(\partial_r,\partial_z\right)^{\mathrm{T}}$, $\hat{p}_\varphi = -i\hbar\partial_\varphi$, $\boldsymbol{x} = \left(r,z\right)^{\mathrm{T}}$, а $\varkappa$ – параметр нелинейности. Это уравнение используется в физике, например, для описания бозе-эйнштейновского конденсата в поле магнитной ловушки, причем функция $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, не зависящая от угла φ, описывает короткодействующий потенциал взаимодействия. Далее мы будем рассматривать только такие функции $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$, которые отвечают условию $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = W(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},t) = \tilde{W}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)$, которое типично для физических задач.

Для уравнения (1) система Гамильтона-Эренфеста первого порядка имеет вид

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t) = V_{\boldsymbol{p}}\left(P_\varphi, Z(t), t\right),\\ \dot{\boldsymbol{P}}(t) = -V_{\boldsymbol{x}}\left(P_\varphi, Z(t), t\right).\end{cases}$$

Здесь $Z(t) = \left(\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{X}(t)\right)^{\mathrm{T}} = \lim\limits_{\hbar\to 0}\dfrac{1}{\|\Phi\|^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \Phi^*\hat{z}\Phi\, r\,dz\,dr$, $\|\Phi\|^2 = \int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty |\Phi|^2\, r\,dz\,dr = \mathrm{const} + \mathrm{O}\left(\hbar\right)$.

Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\Psi\left(\varphi,\boldsymbol{x},t,\hbar\right) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}P_\varphi\varphi\right]\cdot\Phi(\boldsymbol{x},t,\hbar),$$

где $P_\varphi = \mathrm{const}$, а функция $\Phi(\boldsymbol{x},t,\hbar)$ принадлежит классу траекторно-сосредоточенных функций $\mathrm{P}_\hbar^t\left(Z(t)\right)$ [1].

На функциях класса $\mathrm{P}_\hbar^t\left(Z(t)\right)$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\left\{\Delta\hat{z}\right\}^\alpha = \hat{\mathrm{O}}\left(\hbar^{|\alpha|/2}\right),\quad \left\langle\left\{\Delta\hat{z}\right\}^\alpha\right\rangle = \mathrm{O}\left(\hbar^{|\alpha|/2}\right),\quad \Delta\hat{z} = \hat{z} - Z(t),\quad \hbar\to 0.$$

Здесь обозначено $\langle\hat{A}(t)\rangle = \dfrac{1}{\|\Phi\|^2}\displaystyle\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \Phi^*\hat{A}(t)\Phi r\,dz\,dr$, $\left\{\Delta\hat{z}\right\}^\alpha$ – оператор с вейлевским символом $(\Delta z)^\alpha$, где $\alpha\in\mathbb{Z}_+^2$ – мультииндекс [2].

Если функция $\Psi(\varphi,\boldsymbol{x},t)$ является решением уравнения (1), то функция $\Phi(\boldsymbol{x},t)$ удовлетворяет приведенному уравнению Гросса-Питаевского с точностью $\mathrm{O}\left(\hbar^{3/2}\right)$:

$$\left[-i\hbar\partial_t + H(t) + \left\langle H_z(t),\Delta\hat{z}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle\Delta\hat{z}, H_{zz}(t)\Delta\hat{z}\right\rangle\right]\Phi(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{O}\left(\hbar^{3/2}\right), \tag{2}$$

$$H(t) = V(P_\varphi, Z(t),t) + \tilde{\kappa}\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[W_{zz}(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t),t)\cdot\Delta_2(t)\right],\quad H_z(t) = V_z(P_\varphi, Z(t),t),$$
$$H_{zz}(t) = V_{zz}(P_\varphi, Z(t),t) + \tilde{\kappa}W_{zz}(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{X}(t),t),$$
$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_{2\times2} \\ \mathrm{I}_{2\times2} & 0\end{pmatrix},\quad W_{zz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_{xx}\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{I}_{2\times2}$ – единичная матрица, $\tilde{\kappa} = \kappa\|\Phi\|^2$, $\Delta_{2ij}(t) = \frac{1}{2}\left\langle\left\langle\Delta\hat{z}_i\Delta\hat{z}_j + \Delta\hat{z}_j\Delta\hat{z}_i\right\rangle\right\rangle$, $\mathrm{Sp}[A]$ – след матрицы A.

Матрица $\Delta_2(t)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\dot{\Delta}_2(t) = JH_{zz}(t)\Delta_2(t) - \Delta_2(t)H_{zz}(t)J + \mathrm{O}\left(\hbar^{3/2}\right).$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\left\{-i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3\hat{L}_z + \kappa\int_{\mathrm{R}^2}\exp\left[\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{\gamma^2}\right]\cdot\left|\Psi(\varphi,\boldsymbol{y},t)\right|^2 d\boldsymbol{y}\right\}\Psi(\varphi,\boldsymbol{x},t) = 0,$$

где k_1, k_2, k_3, m – параметры уравнения, $\hat{L}_z = -i\hbar\partial_\varphi$ – оператор проекции момента импульса на ось z. Гамильтониан такого вида рассматривался в работе [3] для моделирования бозе-эйнштейновского конденсата.

Пусть $\Phi_0(\boldsymbol{x},t)$ – решение уравнения (2) с нулевой правой частью, а $\Psi_0(\varphi,\boldsymbol{x},t) = \exp\left[(i/\hbar)P_\varphi\varphi\right]\cdot\Phi_0(\boldsymbol{x},t)$. Это решение описывает эволюцию начального состояния, графики которой приведены на рис. 1. Подставим асимптотическое решение $\Psi_0(\varphi,\boldsymbol{x},t)$ в уравнение (1). Функцию $g(\varphi,\boldsymbol{x},t)$, представляющую собой ненулевую правую часть тождества, назовем невязкой уравнения (1):

$$\left\{-i\hbar\partial_t + V(\hat{p}_\varphi,\hat{z},t) + \kappa\int_{\mathrm{R}^2}W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\left|\Psi_0(\varphi,\boldsymbol{y},t,\hbar)\right|^2 d\boldsymbol{y}\right\}\Psi_0(\varphi,\boldsymbol{x},t,\hbar) = g(\varphi,\boldsymbol{x},t,\hbar).$$

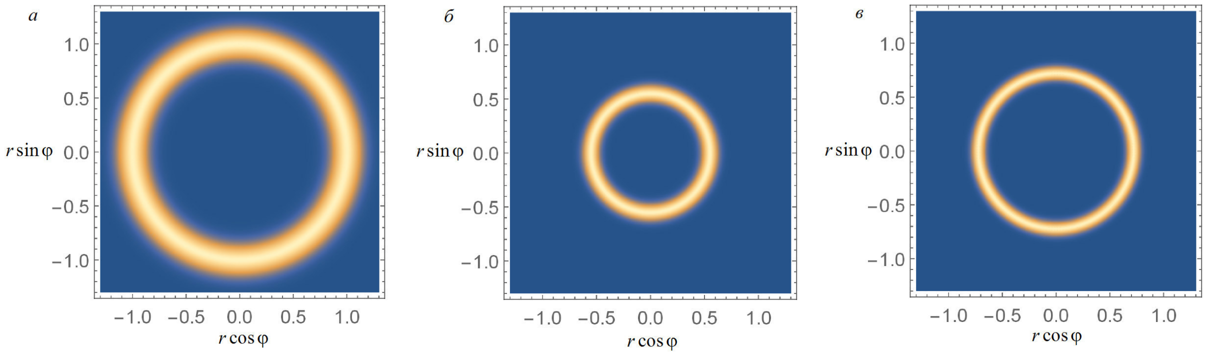

Рис. 1. Зависимость $\left|\Psi_0(\varphi,\boldsymbol{x},t)\right|^2$ *от* r,φ *для* $t=0$ *(а);* $t=0{,}8$ *(б);* $t=1{,}1$ *(в)*

Определим норму невязки $G(t,\hbar)$ соотношением

$$G(t,\hbar)=\frac{1}{\|\Psi_0\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|g(\varphi,\boldsymbol{x},t,\hbar)\right|^2 r\,dz\,dr\,d\varphi.$$

На рис. 2 представлены графики зависимости нормы невязки от времени при разных значениях параметра $\hbar$. Как и ожидалось при уменьшении $\hbar$ норма невязки убывает не медленней, чем $\hbar^3$. При этом видно, что с ростом t норма невязки не растет, т.е. функция $G(t,\hbar)\big|_{\hbar=const}$ является ограниченной. Так как асимптотическое решение, график которого изображен на рис.1., устойчиво и норма невязки ограничена, можно сделать вывод, что и точные решения уравнения (1) устойчивы для рассматриваемого Гамильтониана.

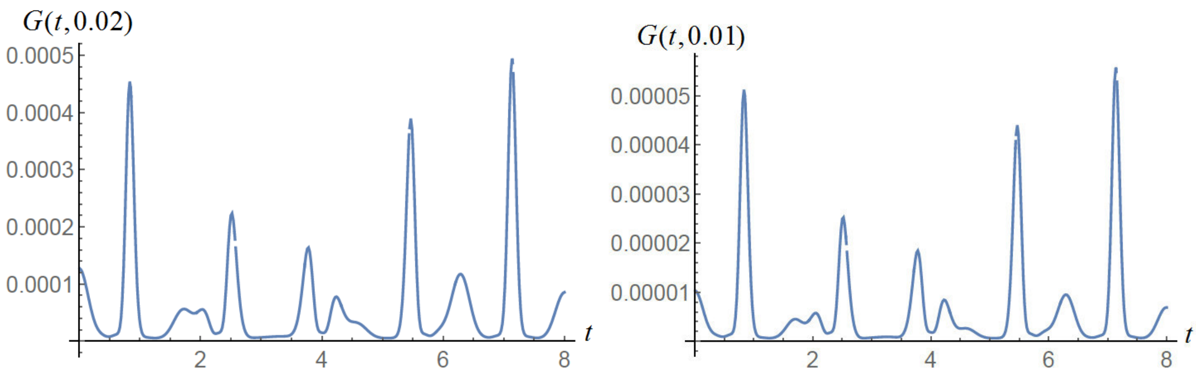

Рис.2. Зависимость $G(t,\hbar)$ *от* t *при разных* $\hbar$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулагин А.Е., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазичастицы, описываемые уравнением Гросса-Питаевского в квазиклассическом приближении. // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58 – № 5. – С. 20–29.
2. Карасев М.В. О вейлевском и упорядоченном исчислении некоммутирующих операторов. // Матем. заметки. – 1979. – Т. 26. – № 6. – С. 885–907.
3. Kasamatsu K., Tsubota M., Ueda M. Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate. // Physical Review A. – 2002. – Т. 66. – № 5.