

Lliçó Inaugural

Curs Acadèmic 2010-2011

U n i v e r s i t a t d ' A l a c a n t



Investigació Operativa o l'aplicació del mètode científic a la presa de decisions

MARCO A. LÓPEZ-CERDÀ

CATEDRÀTIC D'ESTADÍSTICA I INVESTIGACIÓ OPERATIVA

Avui em correspon l'immens honor de fer la lliçó inaugural del curs acadèmic 2010-2011 a la meua Universitat d'Alacant. Vull que aquesta lliçó siga un humil reflex de l'alt prestigi científic que aquesta institució ha aconseguit en la seua vida encara curta. És tracta, doncs, d'un gran repte professional, al qual crec he de respondre triant el tema a què he dedicat quasi quaranta anys de la meua carrera, en la doble vessant de professor i d'investigador: la investigació operativa.

Quan recorrem a un diccionari a la recerca de la definició d'una determinada disciplina científica, solem trobar-hi una resposta clara, concisa i succinta, que sol satisfer la nostra curiositat. Per exemple, en el *Diccionario Manual de la Lengua Española Vox*, de l'editorial Larousse (2007), hi trobem que *física* és la “ciència que estudia les propietats de la matèria i de l'energia i estableix les lleis que expliquen els fenòmens naturals, excloent els que modifiquen l'estructura molecular dels cossos”. Per la seua banda, una de les accepcions que el *Diccionario de la Real Academia Española*¹ atribueix al vocable *economia* estableix que aquesta “ciència és la que estudia els mètodes mes eficaços per a satisfer les necessitats humanes materials, mitjançant l'ús de béns escassos”. Si fem una nova cerca amb l'objectiu de conèixer quin és el significat d'una matèria científica anomenada *investigació operativa* (IO, de forma abreujada), la qual forma part dels continguts curriculars d'algunes de les antigues llicenciatures impartides a les nostres universitats i dels nous graus emergents en el context dels canvis derivats dels acords de Bolonya, experimentarem la decepció que l'esmentada cerca és infructuosa. Amb l'ajuda de Google i del web de Principia Cybernetica, trobarem la següent definició que s'atribueix a l'Operational Research Society de Gran Bretanya en 1962²: “Investigació operativa és la disciplina que aborda, a través de la ciència moderna, problemes complexos relatius a la direcció i gestió de grans sistemes en què intervenen homes, màquines, materials i diners, que sorgeixen en la indústria, els negocis, l'administració i la defensa”. Una definició molt més actual, que apareix en la web de l'Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), diu que “Investigació operativa és la disciplina que ajuda a la presa de millors decisions mitjançant l'aplicació de mètodes analítics avançats”³.

¹ Del web de la Real Academia Española (<http://www.rae.es/>), informació obtinguda el 9 de febrer de 2010.

² *Operational Research Quarterly* 13 (3): 282, 1962.

³ O.R. is the discipline of applying advanced analytical methods to make better decisions” (INFORMS, <http://www.informs.org/>)

D'aquestes i de moltes altres definicions alternatives que s'han donat de la IO en els seus aproximadament 60 anys de vida, se'n desprèn que aquesta disciplina no pot ser vista ni com una ciència natural ni com una ciència social i que la principal característica és l'aplicació del mètode científic a la presa de decisions complexes en contextos molt diversos. Amb el risc d'incórrer en una simplificació excessiva, podríem definir la IO com la ciència de la presa de decisions.

Des d'aquesta accepció, és difícil reconèixer quins són els orígens històrics de la IO, ja que la presa de decisions importants és obvi que arranca amb Adam i Eva. Alguns afirmen que la IO va haver de ser aplicada per Josep quan va ajudar el faraó dels egipcis, possiblement Apofis II (segons l'*Enciclopèdia Catòlica*⁴), a optimitzar els escassos recursos existents en els set anys de vaques magres. També va poder ser aplicada la IO per Dido, o Elisa de Tir, en l'*Eneida*. Dido apareix com la fundadora i primera reina de Cartago, l'actual Tunis, en delimitar la màxima extensió de terreny que podia ser coberta per una pell de bou tallada en fines tires. Responia així a l'oferiment d'asil del rei Iarbes.

Sens dubte la programació matemàtica (PM, abreujadament) pot ser considerada el nucli de la IO i és aquest capítol clau de la nostra disciplina el que rebrà major atenció en aquesta lliçó inaugural. El terme fou utilitzat per primera vegada en 1959, en ocasió del RAND Symposium que va tenir lloc a Santa Mònica (Califòrnia), per a referir-se a la disciplina matemàtica que té com a objectiu la resolució de problemes d'optimització. Encara que avui en dia *optimització* i *programació matemàtica* es consideren sinònims, al voltant dels anys 50 del segle passat es va apostar decididament pel segon, posant el major èmfasi en la naturalesa econòmica dels problemes abordats i relegant a un segon pla la fonamentació matemàtica de la disciplina. És així com es van encunyar successivament els termes de *programació lineal* (Dantzig, 1947), *programació no lineal* (Kuhn i Tucker, 1951), *programació dinàmica* (Bellman, 1957), *programació sencera* (Gomory, 1958), etc.



Dantzig

Khun

Tucker

Bellman

Gomory

⁴ <http://ec.aciprensa.com/f/faraon.htm>

L'optimització està present en qualsevol activitat planificada de l'ésser humà. Les companyies aèries planifiquen els seus vols i la rotació de les tripulacions amb l'afany de minimitzar els costos o, el que és equivalent, de maximitzar els beneficis. Els inversors orienten les seues decisions per tal de minimitzar els riscos i alhora garantir nivells de rendibilitat satisfactoris. En general, les indústries aspiren a una eficiència màxima a l'hora de dissenyar els seus productes i d'organitzar els processos productius. Per la seua banda, la naturalesa també optimitza i els sistemes físics evolucionen cap a un estat de mínima energia. Les molècules en un sistema químic aïllat reaccionen entre elles fins que l'energia potencial dels seus electrons arriba al mínim valor. Els rajos de llum segueixen les trajectòries que minimitzen la durada del seu viatge.

El que sí que pot afirmar-se amb rigor històric és que els vertaders prolegòmens de la programació matemàtica es corresponen amb les decisives aportacions dels matemàtics dels segles XVII i XVIII al desenvolupament de les poderoses eines del càlcul.



Issac Newton

Destaquem ací a *sir* Isaac Newton amb els seus descobriments fonamentals al voltant de 1665⁵, com ara el mètode per a calcular, de manera aproximada, les arrels d'una equació i les condicions necessàries per a l'existència d'extrem (màxim o mínim) d'una funció. Aproximadament 35 anys abans, Pierre de Fermat, magistrat de la ciutat francesa de Tolosa, va fer ús implícit de la condició necessària d'optimitat establida per Newton, però sense recórrer (per ser desconegudes) a la noció de derivada ni a la de límits. Brook Taylor, deixeble de Newton, va posar la primera pedra de la teoria de l'aproximació, de gran importància en IO, en utilitzar polinomis per a aproximar determinades funcions diferenciables amb una cota d'error preestablida. El matemàtic francès Joseph-Louis de Lagrange, en el seu celebrat llibre *Mécanique Analytique*, introdueix el mètode, conegut com a regla dels multiplicadors de Lagrange, per a trobar els extrems d'una funció, les variables dels quals estan subjectes a restriccions en forma d'igualtat, encara que el seu procediment és descrit com una eina per a determinar els estats d'equilibri d'un sistema dinàmic. El cas més freqüent en què les restriccions tenen forma de desigualtat, com s'esdevé en problemes d'optimització típics de la IO, fou analitzat per primera vegada pel matemàtic francès Jean-Baptiste Joseph Fourier, qui va proposar i provar una condició, prèviament conjecturada per l'economista-matemàtic Antoine-Augustin Cournot (1827) per a certs casos particulars, i pel matemàtic rus Mikahil Ostrogradski (1834) per al cas general.

Fou en l'any 1951 quan l'anomenada programació matemàtica no lineal, disciplina que s'ocupa del problema de minimitzar (o maximitzar) una funció objectiu no lineal les variables de la qual estan sotmeses a restriccions, també no lineals, en forma de desigualtat, cobrà carta de naturalesa amb l'article seminal titulat "Nonlinear programming", publicat per Harold W. Kuhn i

⁵ Quan tenia menys de 25 anys d'edat.



Fermat

Taylor

Lagrange

Fourier

Cournot

Ostrogradski

Albert W. Tucker ⁶. Les famoses condicions necessàries d'optimitat de Kuhn i Tucker tenen l'origen en aquell article i que siguen ara conegudes com a condicions de Karush-Kuhn-Tucker (condicions KKT, de forma breu) és un reconeixement a la contribució del físic William Karush, qui va fer una primera aproximació al tema, en 1939, en la seua tesi no publicada.

També al llarg dels segles XVII i XVIII, i principis del XIX, es van formular per primera vegada les lleis bàsiques de la probabilitat, cosa que proporcionà la base per a una anàlisi científica de la presa de decisions en ambient d'incertesa. Aquest període pot considerar-se com la prehistòria de la IO.

En el que tots els analistes coincideixen és a situar l'origen històric de la IO en els anys crítics de la Segona Guerra Mundial. En 1936 el British Air Ministry va establir una estació d'investigació militar a Suffolk ⁷, amb l'objectiu d'aplicar nova tecnologia a l'ús del radar en la intercepció d'avions de combat enemics. La *British Operational Research Society* situa els orígens de la IO en 1937, quan els primers èxits de l'estació de Suffolk van ser reconeguts i explotats per un equip d'oficials de la RAF a la base d'operacions en Ken ⁸. El terme *Operational Research* és atribuït a Albert P. Rowe, segon superintendent de la base de Suffolk, qui el va introduir en 1938.

Sota la direcció del físic Patrick M.S. Blackett, i al si de la Royal Air Force, es va crear en 1940 un grup d'estudi interdisciplinari, conegut com *Blackett's Circus*, i que va estar originàriament integrat per tres psicòlegs, un físic, un astrofísic, quatre matemàtics, un oficial de l'armada i un topògraf. La seua eficàcia en la destrucció dels famosos submarins alemanys de la sèrie U, en la batalla de l'Atlàntic, gràcies a la ubicació estratègica de càrregues

⁶ H.W. Kuhn, A.W. Tucker, "Nonlinear programming, p. 481-492 en *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, J. Neyman (editor) University of California Press, Berkeley, 1951.

⁷ La Bawdsey Manor Research Station, a Suffolk, on el primer director fou Robert Watson-Wat, de la National Physical Laboratory.

⁸ A Biggin Hill Airfield.

de profunditat, fou extraordinària; aquest grup fou el precursor de grups d'IO semblants creats en l'Armada Britànica. La característica d'interdisciplinarietat d'aquests grups és essencial a la IO, des dels orígens mateix, i el seu èxit futur dependrà en gran manera del manteniment d'aquest esperit de col·laboració científica. Blackett va obtenir el Nobel en Física en 1948 ⁹.



Patrick M. S. Blackett

Uns altres antecedents matemàtics de la IO són els següents. Abans de 1936 ja s'havien publicat alguns articles d'investigació que versaven sobre sistemes de desigualtats lineals, vinculats per tant a la base teòrica de la programació lineal. De fet, en 1936, en la tesi doctoral del matemàtic alemany Theodore S. Motzkin ¹⁰, se citaven 42 articles previs sobre el tema. De fet, l'anomenat teorema de transposició de Motzkin inclou com a casos particulars uns altres resultats importants per a sistemes de desigualtats lineals, com ara els teoremes de Gordan i Stiemke, i permet deduir-hi el decisiu teorema de dualitat de la programació lineal.

Amb la publicació en 1941 de la primera taula (matriu) *input-output* (TIO) de l'economia nord-americana, Wassily W. Leontief, economista rus, acabat d'incorporar en aquell moment a la Universitat de Harvard, va establir les bases de l'economia interindustrial. Aquest instrument estadístic desglossa la producció nacional entre els diferents sectors que l'han originada i els sectors que l'han absorbida. Per això reben el nom de taules intersectorials. *Output* designa el producte que ix d'una empresa o indústria, mentre que *inputs* són els factors o recursos necessaris per a produir. Les TIO mostren la producció total de cada sector productiu i quina és la seua destinació; quant d'allò que s'ha produït és adquirit pel consumidor i quant és absorbit per cadascun dels altres sectors. Malgrat les seues limitacions conceptuals, les TIO esdevingueren eines de gran valor a l'hora d'analitzar l'impacte de les polítiques econòmiques dels governs i dels canvis en els hàbits dels consumidors. Van ser utilitzades pel Department of Labor Statistics dels Estats Units, el Banc Mundial, les Nacions Unides, etc. i comportaren a Leontief la concessió del Premi Nobel d'Economia en 1973 ¹¹. Fou George B. Dantzig mateix, pare de la programació lineal, qui va manifestar en 1963 que el model interindustrial de Leontief constituï un factor de motivació en la seua concepció del model general de la programació lineal. Personalment vaig tenir el privilegi, i el gaudi intel·lectual, d'estudiar, en els començaments de la meua carrera professional, la teoria de l'equilibri en



Wassily W. Leontief

⁹ Blackett obtingué el Premi Nobel de Física en 1948, pel desenvolupament del mètode de la cambra de Wilson, i els seus descobriments en els camps de la física nuclear i la radiació còsmica.

¹⁰ *Beiträge zur Theorie der Linearen Ungleichungen*, T.S. Motzkin, Doctoral Thesis, University of Zurich, 1936. S'hi citaven 42 articles previs sobre el tema. De fet, l'anomenat teorema de transposició de Motzkin

¹¹ <http://www.econlib.org/Enc/bios/Leontief.html>

economies lineals i l'anàlisi interindustrial en el llibre *Introduction to sets and mappings in modern economics*, d'Hukukane Nikaido¹². Des d'aleshores no puc evitar experimentar una certa sensació de perplexitat davant de l'opinió que es pot ser un bon economista sense saber matemàtiques.

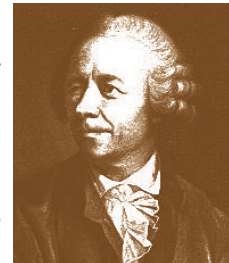
En 1936 Dénes König va publicar el llibre *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*¹³, on va introduir el terme teoria de grafs i va establir les bases d'aquest important capítol de la matemàtica discreta, d'extraordinària influència en el desen-



volupament posterior de la IO. Aquest tractat apareix dos-cents anys després que Leonhard Euler resolguera el problema dels set ponts de Königsberg, l'antiga ciutat russa de Kaliningrad, que durant el segle XVIII va formar part de Prússia Oriental. Aquesta ciutat està travessada pel riu Pregol, el qual es bifurca per a rodejar amb els seus braços a l'illa Kneiphof, i divideix el terreny en quatre regions distintes unides per set ponts. El problema consistia a trobar un recorregut que passara només una vegada per cada un dels ponts i tornara al punt de partida.

La resposta d'Euler al problema dels set ponts de Königsberg és negativa, és a dir, no hi ha una ruta amb aquestes característiques. En honor seu, es va establir posteriorment la noció de circuit eulerià, que és el camí en un graf capaç de recórrer totes les arestes una única vegada, tornant finalment al vèrtex de partida. En aquell moment Euler era conscient que estava tractant amb un tipus diferent de geometria, en la qual la distància no era rellevant.

Un pas més en la direcció d'alliberar les matemàtiques de la necessitat de mesurar es va fer en 1750, quan Euler va escriure una carta a Christian Goldbach en què establia l'anomenada, des d'aleshores, fórmula d'Euler per a un poliedre, que estableix la relació entre el nombre de les seues cares, arestes i vèrtexs. Aquesta fórmula constitueix el primer exemple conegut d'invariant topològica, noció clau en



Euler

¹² North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1970.

¹³ Dénes König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, M.B.H., Leipzig, 1936 (Chelsea Publishing Co. el reedità en 1950).

topologia, disciplina matemàtica d'extraordinària importància que es beneficia, com la IO, de la riquesa conceptual i del seu valor com a eina de modelització de la teoria de grafs. És interessant constatar el fet de que la fórmula d'Euler no va ser descoberta abans i que la senzilla relació que estableix passara desapercibuda a Arquimedes i Descartes mateix, que van estudiar a fons les propietats dels poliedres. La raó pot ser que tots els matemàtics que van precedir Euler en l'estudi dels poliedres van ser incapaços de pensar en propietats geomètriques que no estigueren lligades a la noció de distància.

Recentment, el jove matemàtic espanyol, Francisco Santos Leal¹⁴, catedràtic de la Universitat de Cantàbria, ha refutat la conjectura d'Hirsch (formulada en 1957) al descriure la construcció d'un poliedre de dimensió $d = 43$, amb nombre de facetes $n = 86$, i diàmetre major que $\delta = 43$ (la conjectura d'Hirsch estableix que δ ha de ser menor o igual que $n - d$). Aquest descobriment, d'extraordinària repercussió en combinatòria polièdrica, optimització, y molts altres capítols de les matemàtiques, ha causat una immensa satisfacció entre els membres de la comunitat matemàtica espanyola.

Però tornem a temps més pròxims. En 1937 Merrill M. Flood va mantenir una conversa amb Albert W. Tucker sobre un problema de gran interès, tant des del punt de vista matemàtic com per les seues evidents aplicacions: el problema de l'agent viatger. Arran d'aquella conversa, Flood va estudiar en profunditat el problema esmentat, el va popularitzar en la denominació anglesa, açò és el *travelling salesman problem* (TSP, abreujadament), i va contribuir al fet que fóra considerat durant molts anys el paradigma de l'optimització combinatòria. A finals dels anys 40, la important RAND Corporation, després de la intervenció de Flood mateix, va veure en aquest problema un repte intel·lectual, mereixedor de l'interès científic de la corporació.

Un incís. El Projecte RAND (Research and Development) fou llançat pel govern dels EUA, en 1945, a fi d'explotar l'experiència adquirida pels científics que havien participat en la planificació d'operacions militars durant la Segona Guerra Mundial i aplicar-la a la resolució de problemes, de gran complexitat, sorgits en la postguerra en l'àmbit civil. Tot un exemple de com recórrer a l'assessorament científic en la presa de decisions governamentals, si bé el Projecte RAND va rebre algunes crítiques per l'excés biaix cap a les qüestions de naturalesa militar, motivat, potser, pel preocupant escenari en potència de la guerra freda¹⁵.

El problema del TSP és extraordinàriament senzill en la seua formulació: tenint n ciutats d'un territori, l'objectiu és trobar una ruta que, començant i acabant en una ciutat concreta, passe una sola vegada per cada una de les ciutats (el que s'anomena un circuit hamiltonià) i minimitze la distància recorreguda pel viatjant. La resposta al problema és coneguda, és a dir es coneix la forma de resoldre'l, però només en teoria, ja que en la pràctica la solució no és aplicable a causa del temps que

¹⁴ F. Santos. A counter-example to the Hirsch Conjecture. Preprint arXiv:1006.2814, Junio de 2010.

¹⁵ Podeu trobar la història de la fundació, la descripció dels objectius i la seua evolució al llarg dels anys en <http://www.rand.org/about/history/>.

computacionalment cal per a obtenir-ne el resultat. Des del punt de vista de la seua complexitat computacional es tracta d'un problema NP-complet.

La solució més simple al TSP consistiria a avaluar totes les possibles rutes i quedar-se amb aquella en què la distància recorreguda és menor. El problema resideix en el fet que el nombre d'aquestes combinacions és n i aquest número és impracticable, fins i tot amb els mitjans computacionals actualment al nostre abast. Per exemple, si un ordinador fóra capaç de calcular la longitud de cada ruta en 1 microsegon, tardaria un poc més de 3 segons a resoldre el problema per a 10 ciutats, un poc més de mig minut a resoldre el problema per a 11 ciutats i més de 77 anys a resoldre el problema per a només 20 ciutats.

És obvi, doncs, que els algorismes exactes no són capaços de resoldre el problema general, a causa de l'explosió combinatòria de les possibles solucions. Per a la seua solució aproximada, s'hi han aplicat distintes tècniques computacionals de diferent naturalesa, com ara les heurístiques evolutives, les xarxes de Hopfield, etc. Així, per exemple, els algorismes genètics permeten trobar aproximacions bastant bones (amb un 3% d'error), que es poden aplicar a conjunts molt grans de ciutats (xarxes amb milions de nodes), amb temps d'execució raonables en un superordinador (setmanes o mesos).

La primera formulació del problema clàssic de transport (l'enviament amb un cost mínim de certs béns o productes des dels punts d'oferta fins als de demanda, des dels magatzems o factories als mercats) es deu a Frank L. Hitchcock en 1941 ¹⁶, qui també va proposar un esbós d'algorisme per a solucionar-lo, encara que la formulació precisa, la seua teoria i resolució (basada en el mètode símplex de la programació lineal) es deuen a George B. Dantzig. L'economista Tjalling C. Koopmans, treballant independentment per a la British-American Combined Shipping Board, va investigar i resoldre aquest mateix problema, que, per això, coneixem com a problema de transport de Hitchcock-Koopmans.



Tjalling C. Koopmans

El problema de transport té un antecedent històric de gran rellevància, a saber, el problema de transport de massa. Es tracta d'una versió contínua del problema de transport, primerament estudiat, a finals del segle XVIII ¹⁷, pel matemàtic francès Gaspard Monge, qui va formular-lo en termes de geometria descriptiva. En 1885 Paul Appell va obtenir el Bordin Prize, concedit per l'Acadèmia de Ciències de París, per aportar una solució a aquest problema. Posteriorment Kantoròvitx,

¹⁶ F. L. Hitchcock, "Distribution of a product from several sources to numerous localities", *Journal of Mathematical Physics*, 3, 1941, 224-230.

¹⁷ G. Monge, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1781.

en 1942¹⁸, el va reformular com un problema d'optimització matemàtica en un espai de funcions definides sobre la família de conjunts de Borel d'un espai mètric compacte. Aquesta aproximació abstracta és la que ha permès majors progressos en l'anàlisi teòrica del problema.

Com en l'estudi d'Euler sobre el problema dels set ponts de Königsberg, també ara les matemàtiques precedeixen la tecnologia i s'hi anticipen. Això ens porta a reflexionar sobre la qüestió següent: tota investigació en matemàtiques ha d'estar inspirada per un problema real, al qual es tracta de donar solució a través de les matemàtiques, o l'investigador ha de sentir-se lliure a l'hora de crear matemàtiques i pensar que les aplicacions ja arribaran després? Personalment, em decante per la segona



J. Franklin

opció i em satisfà veure referendada la meua opinió en la següent revelació del prestigiós matemàtic i economista Joel Franklin¹⁹, professor de Matemàtica Aplicada al California Institute of Technology (Caltech): “Una vegada el professor H.F. Bohnenblust em va dir una cosa sobre la investigació. Havia supervisat amb èxit molts projectes de tesi doctoral i també uns pocs que van fracassar. Açò va ser el que va dir: «Els projectes fracassats van començar amb algun vell problema famós (com per exemple, provar la hipòtesi de Riemann), i la seua pretensió era buscar un mètode per a resoldre'l. Els projectes que van tenir èxit van començar amb algun mètode nou i, tot seguit, van buscar un problema a qual aplicar-lo”. Franklin mateix, en un article de l'any 1983, dona una mostra brillant d'aquesta manera

de procedir en investigació matemàtica, en partir del preexistent mètode del símplex i aplicar-lo al problema dels moments, problema de singular importància en teoria de la probabilitat.

Un dels problemes clàssics d'IO, de gran impacte en els orígens d'aquesta disciplina, va ser el problema de la cerca, problema en què es tracta de detectar un objecte de forma eficient. Aquest problema es va abordar per primera vegada de manera científica a començaments de la Segona Guerra Mundial, quan el Navy's Antisubmarine Warfare Operations Research Group (ASWORG) dels EUA va investigar el problema de la detecció de submarins alemanys a l'Atlàntic. De fet, un primer document titulat “Search and Screening”, elaborat per Bernard O. Koopman, fou originàriament matèria classificada per les autoritats militars. El document proposava un enfocament probabilístic a la ubicació òptima d'instruments de detecció. Koopman va ser un dels fundadors, l'any 1952, de l'Operations Research of America (ORSA) i en fou el sisè president (des de 1957).

La moderna teoria de la utilitat es basa en l'estudi sistemàtic de les preferències de l'individu i aspira a obtenir-ne una representació quantitativa. La idea d'utilitat ens remet a Daniel Bernouilli, en la primera meitat del segle XVIII, i l'evolució del

18 L.V. Kantoròvitx, “On the translocation of masses”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 37, 1942, 199-201.

19 J. N. Franklin, “Mathematical methods of Economics”, *Amer. Math. Monthly*, 90, 1983, 229-244.



Daniel Bernoulli

concepte descrita per Savage en el seu llibre de 1954²⁰. Van ser John von Neumann i Oscar Morgenstern els qui, en la segona edició del seu celebrat llibre *Theory of Games and Economic Behavior*²¹, van proporcionar un primer tractament axiomàtic a la teoria de la utilitat. La primera edició d'aquest llibre, en 1944, és considerada el primer tractat sobre els jocs d'estratègia i les seues aplicacions a l'economia i les ciències socials.



John von Neumann

Un altre problema d'IO, sorgit abans del naixement de la programació lineal, és el problema de la dieta. L'any 1945 l'economista George Stigler plantejava el problema següent: si tenim un home moderadament actiu (un professor universitari de 40 anys d'edat, per exemple) i una llista de 77 aliments que poden formar part de la seua dieta diària, quina quantitat de cadascun d'aquests aliments ha d'incorporar a la seua dieta perquè la ingesta de 9 nutrients bàsics no siga inferior a les quantitats mínimes recomanades per les autoritats sanitàries i el cost total dels aliments consumits (o cost de la dieta) siga mínim? Stigler formulava aquest problema d'optimització en termes d'un conjunt de 9×77 desigualtats lineals simultànies i, de manera heurística, però sagaç, determinà una solució no òptima el cost de la qual, amb els preus de l'any 1939, era 39.93\$ a l'any²². Més endavant, en 1947, Dantzig va formular el problema de la dieta com un problema de programació lineal de gran escala, utilitzant el mètode simplex, i amb un cost computacional considerable (120 persones-dies, amb calculadores de taula), va obtenir la solució òptima i va aconseguir estalviar (?) 24 cèntims per any respecte de la solució aproximada trobada per Stigler. La intel·ligència i habilitat demostrades per Stigler, en aquesta ocasió i en d'altres, el van fer digne mereixedor del premi Nobel d'Economia, que obtenia finalment en 1982 pels seus estudis sobre l'estructura industrial, el funcionament dels mercats i les causes i els efectes de la regulació pública.



George Stigler

Ja que la programació matemàtica aborda el vital problema d'assignar òptimament recursos limitats a fi d'aconseguir determinats objectius, es comprèn fàcilment que la programació matemàtica siga considerada la pedra angular de la IO i s'interprete que el seu naixement oficial en 1947 conferisca a la IO la categoria de disciplina científica independent. Un problema de programació lineal és aquell en què es tracta de maximitzar (o minimitzar) una funció objectiu lineal de diverses variables, que estan sotmeses a restriccions expressables en forma de desigualtats o igualtats lineals. El primer a donar aquesta formulació fou

20 L.J. Savage, *The Foundations of Statistics*, \ John Wiley and Sons, New York, 1954.

21 J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 2a edició, Princeton University Press, Princeton, Princeton, 1947.

22 G. Stigler, "The cost of subsistence", *Journal of Farm Economics*, 27, 1945, 303-314.

George B. Dantzig i ben prompte es va evidenciar el fet extraordinari que milers de problemes de decisió que sorgeixen en els negocis, la indústria, l'administració, l'activitat militar, etc. són d'aquesta naturalesa o poden ser aproximats per problemes d'aquest tipus. Tot i que hi hagué alguns intents previs d'expressar el model en termes matemàtics, majoritàriament deguts al prestigiós matemàtic rus Leonid V. Kantoròvitx cap a 1939, la veritat és que només Dantzig pot ser considerat el verdader pare de la programació lineal, en tant que, a més de la formulació precisa del problema, va inventar el mètode simplex per a la seua resolució exacta. Amb aquest mètode va revolucionar el món de la presa de decisions en la segona meitat del segle XX.

En 1975 Kantoròvitx i Koopmans guanyaven el Premi Nobel d'Economia per la seua contribució a la teoria de l'assignació òptima de recursos, cosa que va decebre molts investigadors operatius que consideraven superiors els mèrits de Dantzig. En aquest sentit, Koopmans mateix considerava injusta la concessió i va proposar a Kantoròvitx renunciar al premi. La renúncia de Kantoròvitx era una decisió molt difícil per a ell en tant que el seu treball científic no era degudament reconegut a l'antiga Unió Soviètica, on la utilització de mètodes matemàtics en economia i l'optimització de beneficis es consideraven actituds clarament antimarxistes. Per la seua banda, Koopmans va donar, com a compensació, 40.000 \$ a l'International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA) de Laxenburg (Àustria), el centre on els tres científics van compartir investigacions al llarg dels anys. El mètode simplex es continua ensenyant a les facultats de matemàtiques i economia, a les escoles d'enginyeria i de negocis, etc. de totes les universitats del món, malgrat que uns altres mètodes de resolució han sorgit posteriorment amb el propòsit de millorar-ne l'eficiència computacional (aquest és el cas dels mètodes de punts interiors). El mètode simplex va ser seleccionat com un dels deu algorismes més decisius del segle XX ²³.

L'any 1980 ²⁴ László Lovász va afirmar: “Si un haguera de fer una estadística sobre quin problema matemàtic està consumint més temps d'ordinador, llavors (excloent problemes de maneig de bases de dades, com a busca o ordenació) la resposta seria probablement que aquest problema és el de programació lineal”.

Una altra anècdota il·lustrativa de la importància de la programació lineal és la següent. L'any 1958 Joel Franklin va col·laborar en la realització d'una enquesta, dirigida pel Caltech Computing Center, sobre els usos industrials de grans ordinadors. El vicepresident mateix de la Mobil Oil Corporation va rebre a Franklin al seu luxosíssim despatx. Amb sorpresa, Franklin va adonar-se que el vicepresident era un company del Courant Institute de Nova York, amb qui havia compartit incòmodes despatxos, no excessivament nets i sense aire condicionat. La companyia havia adquirit recentment un gran ordinador que havia costat milions de dòlars. En demanar-li quina era la rendibilitat que esperaven obtenir d'aquella inversió, l'antic col·lega de Franklin (suposadament predestinat, com ell, a una vida no massa folgada) va contestar: “No hi ha problema. Aquest equip

²³ “The top ten algorithms of the century”, suplement a *Computing in Science and Engineering*, 1, 6, IEEE, 2000.

²⁴ L. Lovász. “A new linear programming algorithm - better or worse than the simplex method? *Math. Intelligencer* 2, 1979/80, 141-146.

ja ha sigut pagat amb els beneficis que la companyia n'ha obtingut en dues setmanes". Aleshores Franklin va preguntar: "De quina manera?". La resposta va ser concisa: "Resolent principalment problemes de programació lineal".

La relació entre la programació lineal i la teoria de jocs estava present en les primeres anàlisis de la teoria de la dualitat i la seua relació amb el teorema minimax de Von Neumann. Una petita joia històrica és la conversa que Dantzig i Von Neumann van mantenir al despatx d'aquest últim a la Universitat de Princeton, on Dantzig va acudir a presentar la seua teoria davant del líder científic consagrat que Von Neumann era ²⁵.

En els anys 50 del segle passat, la investigació va estar centrada en algunes subclasses de problemes, importants en la pràctica, que tenen una estructura particular. Per a resoldre'ls, es van proposar algorismes específics que exploten l'estructura del problema en benefici de l'eficiència computacional del mètode. Esmentarem, per exemple, els problemes de transport, transbord, assignació, flux en xarxes, seqüenciació, etc., problemes que sorgeixen en una gran varietat d'aplicacions, en camps com ara la planificació de projectes, les tècniques de localització, el disseny d'itineraris de distribució i, en un context més general, la planificació de grans sistemes logístics.

A meitat dels anys 50, hi ha el desenvolupament de diversos algorismes eficients per a resoldre el problema de programació quadràtica, que és el problema no lineal més senzill, per al qual les condicions de KKT proporcionen informació molt valuosa per a la resolució exacta del problema. Precisament en les condicions de KKT es van basar els mètodes més importants per a resoldre un problema no lineal, proposats en el període 1955-1970 (mètodes de direccions factibles, mètodes de penalització, mètodes de programació quadràtica seqüencial, etc.). No obstant això, fins als anys 90, amb el desenvolupament ple de la informàtica, no va ser possible la seua aplicació eficient a problemes reals.

Avui en dia hi ha grups d'investigació dedicats a la IO, principalment a la programació matemàtica, en moltes universitats espanyoles. Alguns d'aquests grups duen a terme una investigació de caràcter teòric, mentre que d'altres mostren un major interès en les aplicacions o en qüestions algorítmiques i metodològiques. Un indicatiu comú de l'alt nivell d'aquests grups i de la projecció internacional que tenen és la seua presència activa en fóruns internacionals com els grups de treball d'EURO (Association of European Operational Research Societies), la participació en l'organització d'esdeveniments científics internacionals,

25 "The top ten algorithms of the century", suplement a *Computing in Science and Engineering*, 1, 6, IEEE, 2000. "The Story About It Began: Some legends, a little about its historical significance, and comments about where its many mathematical programming extensions may be headed", en *History of Mathematical programming. A Collection of personal Reminiscences*, editat per J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, i A. Schrijver, CWI North-Holland, Amsterdam, 1991.

les nombroses publicacions en les revistes científiques internacionals de major prestigi i la participació destacada en projectes d'I+D+i (en col·laboració amb empreses i institucions).

A continuació, es descriuen les línies d'investigació d'aquests grups. Començarem amb els temes més teòrics i continuarem amb els més algorítmics i amb major orientació a la modelació i les aplicacions. Les línies d'investigació que descriurem tot seguit es caracteritzen per un important potencial de transferència tecnològica.

- 1r Optimització global. Una línia emergent d'investigació es basa a explorar noves tècniques de descomposició en diferència de funcions convexes (d.c.) i l'aplicació als algoritmes numèrics de ramificació i acotació. Hi ha importants aplicacions a l'estadística i l'enginyeria.
- 2n Optimització vectorial. En àrees com la política, l'economia, els negocis, les ciències socials, l'enginyeria o la indústria, és habitual reconèixer l'existència de múltiples aspiracions o objectius, de vegades enfrontats, amb la qual cosa cal estudiar tècniques de decisió basades en la consideració simultània de diversos objectius o criteris (programació multiobjectiu, decisió multicriteri).
- 3r Estabilitat i mal condicionament en optimització. L'anàlisi de les propietats dels principals elements del problema (el conjunt factible, el valor òptim i el conjunt de solucions òptimes), l'estudi de la seua estabilitat i dels diversos tipus de condicionament i les implicacions numèriques d'aquestes qüestions són temes de considerable projecció de futur.
- 4t Programació estocàstica amb variables senceres. Combina els avantatges d'incorporar la incertesa dels models (per mitjà de la representació en forma d'arbre de possibles escenaris) i la capacitat per a la modelització de la programació matemàtica amb variables senceres. Els models que en resulten tenen una dificultat extrema i no existeixen, avui en dia, mètodes generals eficients de resolució.
- 5è Models d'optimització dinàmica, estocàstica i combinatoria. La investigació en aquest tema se centra en el desenvolupament de nous mètodes, formulacions i algoritmes per a la resolució de problemes de planificació i control, en aplicacions que concerneixen els sistemes productius, logístics i financers.
- 6è Problemes combinatoris difícils, per als quals no es coneixen algoritmes eficients (polinomial en la grandària de les dades). L'ampliació de la classe de problemes difícils que poden ser resolts eficaçment és un dels reptes de les matemàtiques en l'actualitat. Entre els més importants, hi ha els d'agregació de preferències, gestió de bases de dades, mineria de dades,

compressió d'imatges i dades, disseny o expansió de xarxes òptimes, planificació de producció i decisió multicriteri. Aquesta línia de treball distingeix clarament dues àrees complementàries: investigació en mètodes generals per a resoldre problemes combinatoris complexos (algorítmica, combinatòria, geometria discreta, geometria computacional, etc.) i investigació en problemes concrets (tarifació en xarxes, expansió de línies de transport urbà, competició i cooperació en mercats, teoria de localització, etc.).

- 7è Minería de dades. És una àrea emergent, a mitjan camí entre la informàtica, la intel·ligència artificial i l'estadística i investigació operativa, que dissenya algoritmes amb què extraure, a partir de les dades, patrons comprensibles que generen coneixement útil. Té importants aplicacions en genòmica, medicina, telecomunicacions, informàtica, finances, etc. Una línia de treball en minería de dades és la utilització de mètodes d'optimització, fonamentalment en el camp de la classificació. Exemples paradigmàtics en aquest camp són les màquines de vector suport i els mètodes de veí més pròxim.
- 8è Modelització i optimització de problemes de gran dimensió i aplicació a problemes reals del nostre entorn social. Els mètodes més idonis en l'optimització de problemes de gran dimensió són els algoritmes de punt interior, la complexitat dels quals és polinòmica. Actualment s'apliquen, per part d'algun grup d'investigació espanyol, a la protecció de dades estadístiques.
- 9è Disseny de rutes òptimes de vehicles. Comporta nous reptes matemàtics i alhora resol importants problemes reals. Actualment és possible resoldre òptimament problemes de grans dimensions, amb grafs associats de més de vint mil nodes, gràcies no tant als avanços informàtics, que sens dubte hi han contribuït de forma important, sinó a les investigacions matemàtiques del poliedre associat a les solucions factibles. La combinatòria polièdrica s'ha revelat com una eina fonamental per a resoldre complexos problemes d'optimització.
- 10è Teoria de jocs. Algunes línies d'investigació en què alguns grups espanyols han fet contribucions significatives són, entre d'altres, l'estudi dels equilibris, de la competència i la cooperació en situacions en què interaccionen diversos agents (en particular en models de teoria de cues, de gestió d'inventaris, de seqüenciació, de xarxes de flux i de planificació de projectes), la determinació de tarifes, el disseny i l'anàlisi d'estructures de votació, la conciliació i l'arbitratge, a més de l'estudi de xarxes socials i econòmiques, amb l'aportació de l'enfocament de la teoria de jocs a conceptes clàssics en sociologia.



Tyrrell Rockafellar

Tinc l'honor de pertànyer al Grup d'Optimització del Departament d'Estadística i Investigació Operativa de la Universitat d'Alacant. És un grup d'investigació molt actiu, i de gran projecció internacional. En els últims cinc anys els seus membres han publicat més de cinquanta treballs d'investigació en les revistes internacionals de major impacte (*Mathematical Programming*, *SIAM Journal on Optimization*, *Mathematics of Operations Research*, *Journal of Convex Analysis*, etc.), treballs que han sigut profusament citats per diversos autors, han generat un bon nombre de tesis doctorals al seu si, han coorganitzat prop de

deu conferències internacionals i han proposat, amb èxit, la nominació com a doctors *honoris causa* per la Universitat d'Alacant dels professors Tyrrell Rockafellar (2000) i Boris Mordukhovich (2009). Aquests són bons indicis amb relació a la implantació dels estudis d'IO a la Universitat d'Alacant i la seua positiva influència en la societat a què la universitat serveix.



Boris Mordukhovich

Moltes gràcies per la seua atenció.