

# Plasmaströmungen großer Amplitude und Ladungstrennung\*

Von R. W. LARENZ

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Hannover

(Z. Naturforschg. **10 a**, 766—776 [1955]; eingegangen am 22. Juni 1955)

Zur Begründung des Einbaus der Ladungstrennung in die Magneto hydrodynamik des kompressiblen Mediums werden eindimensionale schallwellenartige Plasmabewegungen untersucht. Es ergeben sich spezifische, als „Ionen-“ und „Elektronen-Schall“ gekennzeichnete Strömungen großer Amplitude mit periodischer und nichtperiodischer Struktur, die unter geeigneten Bedingungen zu örtlich praktisch vollständiger Ladungstrennung führen können. Für die Begrenzung der Ladungstrennung, die als Temperaturfunktion ermittelt wird, erweisen sich Druckkräfte als wesentlich.

In der vorhergehenden<sup>1</sup> Arbeit war bei der Ableitung von magneto hydrodynamischen Gleichungen für das kompressible Medium örtlich verschiedene Dichte der positiven und negativen Plasmakomponenten und damit also Ladungstrennung zugelassen worden mit dem Hinweis, daß diese berücksichtigt werden müsse, wenn Strömungsgeschwindigkeiten auftreten, die mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind. Es erhebt sich die Frage, inwieweit der Einbau der Ladungstrennung in die Plasmatheorie gerechtfertigt erscheint trotz der vielfach geäußerten Ansicht, daß es auf Grund der gegenüber anderen zwischenatomaren oder -molekularen Kräften sehr großen Coulombschen Anziehung zwischen Ladungsträgern verschiedenen Vorzeichens im Plasma nicht zu einem nennenswerten Aufbau von Raumladungen kommen könne. Wir stellen uns daher mit dieser Arbeit die Aufgabe, einen Überblick über Ausmaß und Grenzen einer eventuell möglichen Ladungstrennung zu gewinnen. Diese Frage ist vor allem auch im Zusammenhang mit dem Verständnis der Entstehung der überthermischen kosmischen Radiostrahlung wichtig, als deren Ursache man u. a. makroskopisch kohärente Plasmaschwingungen vermutet. Bei dem gesetzten Ziel liegt es nahe, die Untersuchung auf den Prototyp mit Dichteschwankungen verbundener Plasmaströmungen zu konzentrieren, nämlich rein longitudinale schallwellenartige Bewegungen. Da wir eventuell existierende Grenzen für die Ladungstrennung angeben wollen, müssen wir versuchen, die hydrodynamischen Plasmagleichungen streng zu lösen, denn nur eine nichtlineare Theorie kann Aussagen über Grenzamplituden liefern. Wir werden also die in der vorhergehenden Arbeit gemachte Voraussetzung kleiner Dichte-

schwankungen, die uns dort eine teilweise Linearisierung der Gleichungen erlaubte, nicht beibehalten. Wir setzen aber auch für diese Untersuchung die Gültigkeit der adiabatischen Zustandsgleichung voraus, betrachten also reversible Strömungsvorgänge in einem aus positiven und negativen Ladungsträgern bestehenden Plasma. Wie in der vorhergehenden Arbeit lassen wir auch hier Abweichungen vom Temperaturgleichgewicht zwischen den Ladungsträgern zu.

## § 1. Die Grundgleichungen für quasistationäre, rein longitudinale Bewegung und erste Integrationen

Entsprechend dem in der Einleitung skizzierten Programm sollen ebene, seitlich nicht begrenzte schallwellenartige Bewegungen eines im Ruhezustand homogenen und elektrisch neutralen Mediums behandelt werden. Die Zustandsgrößen hängen dann nur von einer Raumkoordinate  $x$  und der Zeit  $t$  ab. Um auf gewöhnliche Differentialgleichungen zu kommen, werden wir solche Strömungen untersuchen, bei denen die Zustandsgrößen nur vom Argument  $x^* = x - v_0 t$  abhängen; wir beschränken uns also auf quasistationäre, eindimensionale Plasmabewegungen, bei denen eine konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_0$  auftritt. Ein mit der Geschwindigkeit  $v_0$  mitbewegter Beobachter nimmt dann ein zeitlich nicht veränderliches Strömungsbild wahr. Die gewöhnliche Hydrodynamik kennt zwar für den Fall durchgängiger Gültigkeit der adiabatischen Zustandsgleichung keine quasistationären Bewegungen endlicher Amplitude, solange Gravitationswirkungen keine Rolle spielen<sup>2</sup>. Im Plasma sind jedoch, wie

\* Teilweise vorgetragen auf der Tagung der Nordwestdeutschen Physikalischen Gesellschaft am 24. 4. 1954 in Goslar.

<sup>1</sup> R. W. L a r e n z, Z. Naturforschg. **10 a**, 761 [1955].

<sup>2</sup> In einer inzwischen erschienenen Arbeit von H. L. H e l f e r, Astrophys. J. **119**, 34 [1954], wird letzterer Fall untersucht mit Methoden, die den unserigen in einigen Zügen verwandt sind.

sich zeigen wird, unter dem Einfluß der elektrischen Zusatzglieder in den hydrodynamischen Gleichungen quasistationäre Bewegungen möglich, was uns die mathematische Durchführung des Programms sehr erleichtert.

Bei der Festlegung auf eindimensionale, longitudinale Bewegung muß die Anwesenheit eines Magnetfeldes mit Komponenten senkrecht zur  $x$ -Richtung ausgeschlossen werden, während eine evtl. vorhandene  $x$ -Komponente ohne Einfluß bleibt; ein Eigenmagnetfeld der longitudinalen Plasmaströme kann bei der seitlichen Unbegrenztheit der Strömung nicht auftreten. (Unabhängigkeit von den Koordinaten  $y$  und  $z$ ! Leitungs- und Verschiebungs-Strom kompensieren einander.) Andere Kräfte als solche, die vom Druck und elektrischen Feld herrühren, berücksichtigen wir bei dieser Untersuchung nicht. Wir verzichten also auch auf die Mitnahme von Reibungsgliedern, was wir ohnehin tun müssen, wenn wir die Forderung der Adiabasie bzw. Reversibilität streng beibehalten wollen. In die Zustandsgleichung setzen wir als Polytropenexponenten  $\alpha$  den Wert  $5/3$  für einatomige Gase ein. Nach diesen Voraussetzungen bleibt von den Gln. (1) bis (9) der vorhergehenden Arbeit nach Transformation auf ein Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt, unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Koordinate  $x^* = x - v_0 t$ , Kennzeichnung der Ableitung nach  $x^*$  durch einen Strich und Einführung des elektrostatischen Potentials  $\Phi$

$$P_j = N_0 k T_{0j} (N_j/N_0)^{5/3} \quad \text{mit }^3 j = i, e \quad (1)$$

$$N_i m_i v_i v_i' + P_i' = -N_i e \Phi', \quad (2)$$

$$N_e m_e v_e v_e' + P_e' = N_e e \Phi', \quad (3)$$

$$(N_j v_j)' = 0 \quad \text{oder gleich integriert } v_j/v_0 = N_0/N_j, \quad (4)$$

$$\Phi'' = -4 \pi e (N_i - N_e). \quad (5)$$

An den vorstehenden Ausgangsgleichungen lassen sich sofort einige Integrationen ausführen. Addieren wir (2) zu (3) und setzen (4) und (5) ein, so entsteht

$$N_0 v_0 (m_i v_i + m_e v_e)' + (P_i + P_e)' = \frac{1}{4 \pi} \Phi'' \Phi' \quad (6)$$

und durch Integration <sup>4</sup>

$$\frac{1}{8 \pi} \Phi'^2 = N_0 v_0 (m_i v_i + m_e v_e) + P_i + P_e - \text{const.} \quad (7)$$

<sup>3</sup>  $i$ =positive,  $e$ =negative Ladungsträger, wobei letztere nicht notwendig Elektronen sein müssen.

<sup>4</sup> Diese Integration läßt sich auch für den nichtadiabati-

Dividieren wir (2) bzw. (3) durch  $N_i$  bzw.  $N_e$  und führen (1) ein, so lassen sich diese Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} 1/2 m_j v_j^{2'} + 5/2 k T_{0j} (N_j/N_0)^{2/3} &= -e_j \Phi' \\ \text{mit } j = i, e, e_j = \pm e, \end{aligned} \quad (8)$$

die integriert mit Berücksichtigung der Zustandsgleichung den Energiesatz bezogen auf einen Ladungsträger ergeben:

$$-e_j \Phi = 1/2 m_j v_j^2 + 5/2 k T_j - C_j. \quad (9)$$

Durch Addition der beiden durch (9) repräsentierten Gleichungen entsteht eine von  $\Phi$  freie Beziehung, die man als Energiesatz für ein Trägerpaar bezeichnen kann:

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{5}{2} k T_i + \frac{1}{2} m_e v_e^2 + \frac{5}{2} k T_e - C_i - C_e = 0. \quad (10)$$

## § 2. Fortführung der Integration und Fallunterscheidungen

Mit (7) und (9) sind Ausdrücke für  $\Phi'$  und  $\Phi$  gegeben. Unsere Aufgabe, die Integration des Systems nichtlinearer Differentialgleichungen (2) bis (5), ist gelöst, wenn es gelingt, die Quadratur

$$x^* - x_1^* = \int_{\Phi_1}^{\Phi} d\Phi / \Phi' \quad (11)$$

auszuführen. Hierzu werden wir zweckmäßig dimensionslose Größen einführen und unter Benutzung der adiabatischen Zustandsgleichung und der Beziehung (4) als Variable nur noch  $v_i$  und  $v_e$  in den Gln. (7) bis (11) belassen.  $v_i$  und  $v_e$  sind nach (4) umgekehrt proportional den uns in erster Linie interessierenden Dichten  $N_i$  und  $N_e$ .

Es sei

$$5 k T_{0i} / 3 m_i v_0^2 = K = a_i^2 / v_0^2,$$

$$(2 K^{-3/4} / m_i v_0^2) (C_i + C_e) = C,$$

$$T_{0e} / T_{0i} = \vartheta \geq 1, \quad m_i / m_e = q,$$

$$x^* = x - v_0 t = \lambda \xi / 2 \pi,$$

$$\frac{4 \pi e^2 N_0}{m_e v_0^2} \frac{\lambda^2}{4 \pi^2} = \left( \frac{\omega_e \lambda}{2 \pi v_0} \right)^2 = \frac{\omega_e^2}{\omega^2} = \alpha^2,$$

$$\frac{v_i}{v_0} K^{-3/8} = Y, \quad \frac{v_e}{v_0} K^{-3/8} = Z.$$

sehen Fall durchführen. Für  $\Phi' = 0$  resultiert dann eine der Hugoniot-Gleichungen für die Endzustände vor und hinter einer stationären Plasmastöße.

Mit diesen Einführungen schreibt sich (10)

$$Y^2 + 3 Y^{-2/3} + 1/q Z^2 + 3 \vartheta Z^{-2/3} - C = 0 \quad (12)$$

und der das Problem lösende Quadraturausdruck (11) unter Beachtung von (7) und (9)

$$\frac{\alpha}{\sqrt{q}} (\xi - \xi_1) = \pm \frac{K^{9/16}}{2 \sqrt{2}} \int_{(Y_1)}^{(Y)} \frac{d(Y^2 + 3 Y^{-2/3})}{\sqrt{R}} \quad (13 a)$$

$$\equiv \mp \frac{K^{9/16}}{2 \sqrt{2}} \int_{(Z_1)}^{(Z)} \frac{d(1/q \cdot Z^2 + 3 \vartheta Z^{-2/3})}{\sqrt{R}} \quad (13 b)$$

mit

$$R = Y + 3/5 Y^{-5/3} + 1/q \cdot Z + 3/5 \vartheta Z^{-5/3} - R_0 \sim \Phi'^2, \\ R_0 = \text{const.} \quad (14)$$

Aus diesen Gleichungen können  $Y$  und  $Z$  als Funktion von  $\xi$ , d. h. also die Geschwindigkeiten  $v_i$  und  $v_e$  bzw. die Dichten  $N_i$  und  $N_e$  als Funktion des Ortes bestimmt werden. Auch ohne eine explizite Ausrechnung, die nur numerisch durchführbar ist, liefert eine Diskussion dieser Gleichungen alles Wissenswerte über die möglichen Lösungen, wie folgt.

Das  $\pm$ -Zeichen deutet darauf hin, daß die Lösungen von (13) in der  $Y - \xi$ - bzw.  $Z - \xi$ -Ebene zu einer Achse  $\xi = \xi_0$  symmetrisch sind, wobei die zugehörigen Ordinaten  $Y_0$  und  $Z_0$  Extremwerte sein müssen. Wir können die untere Integrationsgrenze  $Y_1$  bzw.  $Z_1$  an diese Stelle legen und dann  $\xi_0 = \xi_1 = 0$  setzen. Durch (12) – vom 4. Grad in  $Y^{2/3}$  oder  $Z^{2/3}$  – ist in der  $YZ$ -Ebene für positiv reelle  $Y, Z$  (nur solche sind physikalisch sinnvoll) eine geschlossene Kurve festgelegt, die in Abb. 1 qualitativ für drei verschiedene Fälle wiedergegeben ist. Gleichzeitig sind auf dieser Kurve die Extrema des Radikanden  $R$  (proportional dem Quadrat der Feldstärke!) aus dem Integral (13) eingetragen, die auf Grund einer elementaren Rechnung angenommen werden an den Stellen:

$$Y=1, \text{ mit } dZ/dY=0: \quad \begin{matrix} \text{Maximum bzw. Minimum für } & Y > & < Z, \\ Z=(q \vartheta)^{3/8}, \text{ mit } dY/dZ=0: & Z > & < Y, \end{matrix}$$

und für  $Y = Z$ .

Eindeutige Lösungen sind jeweils nur auf einem Teilstück dieser Kurve realisiert, auf dem außerdem noch  $R > 0$  sein muß, das also durch 2 Nullstellen von  $R$  begrenzt wird. Qualitativ zeigt Abb. 2 den Verlauf von  $R$  über einem Teilstück dieser Kurve  $Y(Z)$ . Zwischen den beiden Nullstellen liegt stets ein Maximum, und zwar jenes für  $Y = Z$ , d. h.  $N_i = N_e$ , da das Plasma im räumlichen und zeitlichen Mittel elektrisch neutral sein soll. Je nach Wahl der Kon-

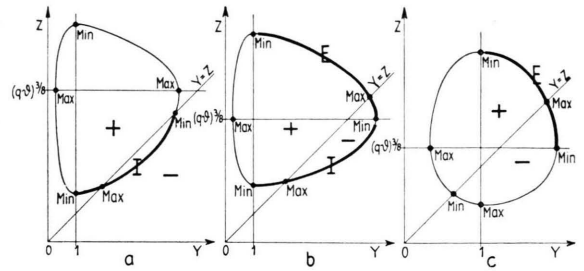


Abb. 1. Zur geometrischen Veranschaulichung der Gl. (12) und Diskussion des Integranden von (13).  $Y \sim 1/N_i$ ,  $Z \sim 1/N_e$ ; + bzw. - Bereiche positiver bzw. negativer Raumladung. (Für  $q \gg 1$  ist die Höherer Streckung der geschlossenen Kurve sehr viel größer als ihre Breitenstreckung.)

stanten  $R_0$  rücken die Grenzen  $Y_1$  und  $Y_2$  des physikalisch realisierten Bereichs auseinander, was zunehmenden Amplituden (und Ladungstrennungen) entspricht, bis eine der beiden Nullstellen oder beide mit einem Minimum von  $R$  zusammenfallen, was einem Strömungsvorgang mit maximal möglicher Ladungstrennung entspricht. Mögliche Lösungen müssen also in den Kurvenbereichen liegen, die von den beiden Minima, die ein Maximum auf der Geraden  $Y = Z$  einschließen, begrenzt sind. Diese Bereiche sind in Abb. 1 bei den verschiedenen, durch die Koeffizienten  $q, \vartheta$  und  $C$  gegebenen Lagen der Kurve mit den Buchstaben I und E gekennzeichnet, deren Bedeutung im nächsten Paragraphen erläutert wird.

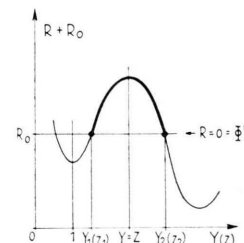


Abb. 2. Zur Demonstration des Verlaufs des Radikanden im Integral (13) innerhalb eines Integrationsgebietes  $Y_1 \dots Y_2$ .

Man erkennt, daß es gewisse, nicht überschreitbare Maximalschwankungen für die Variablen  $Y$  und  $Z$  und damit für die Dichten  $N_i, N_e$  gibt. Offenbar *widersetzt sich der Druck*, der durch das Glied  $Y^{-2/3}$  bzw.  $\vartheta Z^{-2/3}$  in (12) repräsentiert wird, einer beliebig starken Kompression von Ladungsträgern eines Vorzeichens (d. h.  $N_k \rightarrow \infty, Y$  bzw.  $Z \rightarrow 0$ ), die aus den mit dem Strömungsvorgang verbundenen Trägheits- und elektrischen Kräften resultiert. Es sind also nicht die Coulombschen Kräfte zwi-

schen den Ladungsträgern, welche eine Ladungstrennung begrenzen.

Das Aussehen der Lösungen  $\xi(N_k)$  bzw.  $N_k(\xi)$  von (13) wird davon abhängen, ob die Nullstellen von  $R$  auf einem Minimum liegen oder nicht. Wir haben also das Verhalten des Integranden in (13) an den Stellen  $R=0$  ( $\rightarrow \Phi'=0$ ) zu untersuchen, der, wenn wir  $Y$  oder  $Z$  als Integrationsvariable wählen, bis auf konstante Faktoren lautet:

$$\frac{Y(1-Y^{-5/3})}{\sqrt{R}}, \quad (15 a) \quad \frac{Z(1-q \vartheta Z^{-5/3})}{\sqrt{R}}. \quad (15 b)$$

Nimmt  $R$  kein Minimum an, so wird auch keiner der Punkte  $dZ/dY = 0$  bei  $Y=1$ , bzw.  $Z = (q \vartheta)^{3/5}$  erreicht; der Zähler des Integranden bleibt endlich und der Integrand selbst hat an den Stellen

$$R(Y_1, Z_1) = 0 = R(Y_2, Z_2)$$

eine integrierbare Singularität von der Ordnung  $1/2$ . Die Lösung  $N_k(\xi)$  hat daher bei  $R=0$  eine horizontale Tangente; ferner ergibt sich bei Integration von  $Y_1$  bis  $Y_2$  bzw.  $Z_1$  bis  $Z_2$  ein endlicher Wert

$$\alpha \xi_2/\sqrt{q} = \alpha \pi/\sqrt{q}, \quad x_2^* = \lambda/2$$

und wir erhalten damit in diesem Fall das Charakteristikum periodischer Funktionen, hier also periodische Dichteschwankungen der beiden Plasmakomponenten um eine mittlere Ruhedichte, die näherungsweise durch den Wert gegeben sein wird, der durch  $Y=Z$  (Maximum von  $R$ ) festgelegt ist. Wird jedoch mit  $R=0$  das Minimum bei  $Y=Y_2=Z=Z_2$  erreicht (Abb. 1 a), so bleibt wiederum der Zähler des Integranden endlich, aber  $R$  hat eine Nullstelle 2. Ordnung und damit der Integrand eine nicht integrierbare Singularität 1. Ordnung. Die Variable  $\xi$  bzw.  $x^* = x - v_0 t$  wächst damit in positiver und negativer Richtung über alle Grenzen. Es ergibt sich eine nicht-periodische Lösung  $N_j(\xi)$ , die sich von  $N_{j1}$  monoton abfallend ins Unendliche erstreckt. Diese Lösung beschreibt also einen einmaligen, mit der Geschwindigkeit  $v_0$  fortschreitenden Verdichtungsimpuls im Plasma, bei dem die Ruhedichte  $N_0$  im Unendlichen angenommen wird.

Beginnt – als weiterer Fall – die Integration in positiver  $Y$ - oder  $Z$ -Richtung an der Stelle eines  $R$ -Minimums mit  $R=0$  bei  $Y_1=1$ , ( $dZ/dY=0$ ) oder  $Z_1 = (q \vartheta)^{3/5}$ , ( $dY/dZ=0$ ), so verschwinden Zähler und Nenner des Integranden. Wie man sich durch Entwicklung an der Stelle 1 bzw.  $(q \vartheta)^{3/5}$  leicht überzeugt, nehmen die Ausdrücke (15) in der Umgebung

von  $Y_1$  bzw.  $Z_1$  dann eine finite Form an, die wir für (15 a) anschreiben

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1-1}} Y \left\{ 1 - \frac{11 Z_1 - 14}{9(Z_1-1)} (Y-1) + \dots \right\}, \quad Y \geq 1 \quad (16)$$

mit  $Z_1$  aus (12) für  $Y=Y_1=1$ .

Hier beginnt also die Lösungsfunktion für die jeweilig größere der beiden Dichten  $N_j(\xi)$  bei  $\xi=0$  wegen des regulären Integranden mit endlicher Steigung, während die jeweils kleinere Dichte wegen  $dZ/dY=0$  bzw.  $dY/dZ=0$  an dieser Stelle eine horizontale Tangente besitzt. Für eine der beiden Plasmakomponenten bildet sich in diesem Fall, der sowohl bei periodischen als auch aperiodischen Lösungen eintreten kann, eine Dichtespitze aus; die höchstmöglichen Verdichtungen sind also durch die Punkte  $dZ/dY = 0 = dN_e/dN_i$  gekennzeichnet, bei denen die Lösungen des Differentialgleichungssystems (2) bis (5) singuläres Verhalten zeigen. Auf diese singulären Lösungen werden wir in den folgenden Paragraphen bei der Ermittlung der maximal möglichen Ladungstrennung in Abhängigkeit von den Temperaturen  $T_{0i}, T_{0e}$  zurückgreifen.

Mit diesen eben diskutierten Fällen sind alle physikalisch bedeutsamen Möglichkeiten behandelt, so daß wir auf die Behandlung weiterer Spezialfälle, die etwa aus gewissen Grenzlagen der durch Abb. 1 qualitativ skizzierten Verhältnisse resultieren, verzichten können.

Einiger Bemerkungen bedarf es noch bezüglich der Festlegung der Konstanten  $R_0, C, K, \alpha$ . Bei der Aufstellung der Gleichungen in § 1 waren zunächst 3 freie Konstanten in Erscheinung getreten. Es sind die später durch  $K$  ausgedrückte Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_0$  in (4), dann eine Konstante von der Dimension einer Energiedichte in (7), die zu  $R_0$  führte, und schließlich eine auf  $C$  führende Energiekonstante in (10), während  $\alpha$  nur die Rolle eines künstlich hineingebrachten Maßstabsfaktors spielt, der es gestattet, bei periodischen Lösungen  $\xi$  üblicherweise als Winkelvariable aufzufassen. Bei bekannten Ruhegrößen im Plasma hängen die Lösungen von (13) damit jedoch nicht von 3 Parametern ab. Bei periodischen Lösungen hat man nämlich noch die Forderung zu beachten, daß die über eine Periode gemittelten Dichten gleich der Ruhedichte  $N_0$  sein müssen. Dies führt in unseren dimensionslosen Größen zu der Beziehung

$$\frac{\alpha \pi}{\sqrt{q}} = \frac{K^{3/16}}{\sqrt{2}} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{1 - Y^{-5/3}}{\sqrt{R}} dY \quad (17)$$

oder zu einem gleichwertigen Ausdruck in  $Z$ . Für periodische Lösungen sind somit 2 Parameter (innerhalb gewisser Grenzen) frei wählbar, etwa die Frequenz und einer der Amplitudenwerte  $Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ . Die vier letzteren Werte hängen dann über (12) und die Forderung, daß  $R \sim \Phi'^2$  an den äußersten

Integrationsgrenzen verschwinden muß, mit den Konstanten  $R_0, C$  zusammen, während eine weitere Beziehung, die  $\alpha$  und  $K$  enthält, dadurch entsteht, daß das über das ganze Integrationsintervall erstreckte Integral (13)  $\xi = \pi$  liefern soll. Im aperiodischen Fall ist  $C$  und  $R_0$  unmittelbar durch die Ruhegrößen auszudrücken, denen nun die obere Integrationsgrenze  $Y_2 = Z_2 = K^{-3/5}$  zugeordnet ist. Damit ist dann nur noch eine Dichteamplitude oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (in gewissen Grenzen) frei wählbar.

**§ 3. Ionenschall — Elektronenschall**

Ist in § 2 die Integration der Gleichungen (2) bis (5) durch Rückführung auf eine zwar komplizierte Quadratur unter Erläuterung einer Reihe von Gesichtspunkten im Prinzip durchgeführt, so sollen jetzt die Konsequenzen untersucht werden, die sich aus dem Fall ergeben, daß das Massenverhältnis  $q = m_i/m_e$  eine gegen 1 sehr große Zahl wird. (Elektronen als negative Ladungsträger.) Einen Überblick über das Verhältnis der Dichte- bzw. Geschwindigkeitsschwankungen von Ionen und Elektronen erhalten wir durch Bildung des Ausdrucks  $dZ/dY$  an der Stelle, wo beide Dichten gleich sind. Aus (12) erhält man

$$\left(\frac{dZ}{dY}\right)_{Z=Y} = -q \frac{1 - Y^{-3/5}}{1 - q \vartheta Y^{-3/5}}.$$

Bei aperiodischen Lösungen ist  $N_i = N_e$  sicher bei der Ruhedichte  $N_0$ , wo  $Y = Z = K^{-3/5}$  gilt. Auch für periodische Lösungen wird dieser Wert näherungsweise zutreffen, da der „elektrisch neutrale“ Punkt

$N_i = N_e$  stets in der Nähe der mittleren Dichte  $N_0$  liegt, um welche die Dichteschwankungen erfolgen. Damit wird

$$\left(\frac{dZ}{dY}\right)_{Z=Y} \simeq -q \frac{1-K}{1-q \vartheta K}$$

mit  $K = \frac{a_i^2}{v_0^2} \leq 1$ , da  $Y$  stets  $\geq 1$ .

Wenn nun  $q \vartheta K \gg 1$ , d. h. die wegen  $K < 1$  sicher oberhalb der „Ionenschallgeschwindigkeit“  $a_i = \sqrt{5 k T_{0i}/3 m_i}$  liegende Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_0$  kleiner als die „Elektronenschallgeschwindigkeit“  $a_e = \sqrt{5 k T_{0e}/3 m_e}$  ist, hat man

$$(dZ/dY)_{Z=Y} \simeq (1 - K)/\vartheta K.$$

Sofern nun dieser Ausdruck  $< \sqrt{q}$  bleibt, ist der Einfluß der mit  $1/q$  multiplizierten Glieder in (12) und  $R(Y, Z)$  (14) belanglos; sie können daher gestrichen werden, was der Vernachlässigung von Impuls und kinetischer Energie der Elektronen gegenüber den übrigen Größen entspricht. Wir bezeichnen Bewegungen, die den eben genannten Bedingungen genügen, als Ionenschall (in der Abb. 1 durch I gekennzeichnet), weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwischen der oben definierten Ionenschall- und Elektronenschallgeschwindigkeit liegt.

Nach Streichung der mit dem Faktor  $1/q$  behafteten Glieder, läßt sich (12) unmittelbar nach  $Z$  auflösen und in den Nenner des Integranden von (13) einsetzen, womit die Quadratur (13 a) direkt  $\xi(Y)$  oder  $N_i(\xi)$  gibt und damit über (12) auch  $N_e(\xi)$ .

$$\frac{\alpha \xi}{\sqrt{q}} = \pm \frac{K^{9/16}}{\sqrt{2}} \int_{Y_1 \geq 1}^Y \frac{Y(1 - Y^{-3/5}) dY}{\sqrt{Y + 3/5 Y^{-3/5} + 3/5 \vartheta \left\{ \frac{1}{3} (C - Y^2 - 3 Y^{-2/5}) \right\}^{3/2} - R_0}}. \tag{18}$$

Die (18) zugrunde liegende Voraussetzung

$$dZ/dY < \sqrt{q}$$

kann an den Lösungen geprüft werden.

Bei Bewegungen mit Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oberhalb der Elektronenschallgeschwindigkeit sprechen wir von Elektronenschall (Bezeichnung E in Abb. 1). Hier ist  $q \vartheta K < 1$  und dementsprechend

$$-(dZ/dY)_{Z=Y} \simeq q/(1 - q \vartheta K) \geq q,$$

d. h. die Bewegungsamplituden der Ionen sind um einen Faktor  $\geq q$  kleiner als die der Elektronen, was sich im geometrischen Bild (Abb. 1) darin äußert, daß die geschlossene Kurve eine sehr viel

größere Höhen- als Breitenerstreckung aufweist und mit sehr steiler Tangente durch den Punkt  $Z = Y$  im E-Gebiet geht. Wir befinden uns offenbar im Bereich schnell veränderlicher Vorgänge, die, wie die noch abzuleitende Dispersionsformel zeigt, durch Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz gekennzeichnet sind, bei denen — wie aus der Plasmatheorie bekannt — die Ionen wegen ihrer großen Masse praktisch ruhen. Während die Bezeichnung „Ionenschall“ keineswegs so verstanden werden darf, als seien die Ionen allein am Bewegungsvorgang beteiligt, trifft eine entsprechende Deutung des Wortes „Elektronenschall“ praktisch zu. Demgemäß werden wir die von  $Y \sim v_i \sim 1/N_i$  abhängigen Teile in

(12) und (14) an der durch die Ruhedichte gegebenen Stelle  $Y = K^{-3/5}$  nach der kleinen Schwankung  $Y - K^{-3/5}$  bis zu Gliedern erster Ordnung entwickeln und dann (12) in den Integranden von (13 b) einsetzen. Machen wir noch die in § 2 eingeführte Normierung rückgängig und schreiben

$$Z K^{2/5} = v_c/v_0 = w$$

sowie  $q \vartheta K = K_e = 5 k T_{0e}/3 m_e v_0 = a_c^2/v_0^2$ ,

so lautet (13 b) jetzt

$$\alpha \xi = \pm \int_{w_1 \approx K_e^{3/5}}^w \frac{(1 - K_e w^{-5/3}) w dw}{\sqrt{2 w - w^2 + 3 K_e (2/5 w^{-5/3} - w^{-2/3})} - R_0} \quad (19)$$

Dieser Ausdruck enthält nun keine auf die Ionen Bezug nehmenden Größen mehr; er gilt daher allgemein für die Elektronenkomponente eines beliebigen Plasmas, solange Dämpfungseffekte vernachlässigt werden können. Hätte man in den Ausgangsgleichungen (1) bis (5) von vornherein  $N_i$  konstant  $= N_0$  gesetzt, so wäre man ebenfalls auf (19) geführt worden.

Die Gln. (18) und (19) werden wir nun in den folgenden Paragraphen benutzen, um Integrationsbeispiele für Ionen- und Elektronenschall zu diskutieren und die Ladungstrennung zu berechnen.

Schallwellen im Plasma, unterteilt nach Elektronen- und Ionenschwingungen, wurden in einem zusammenfassenden Bericht von Rompe und Steenbeck<sup>5</sup> mit Hilfe kombinierter Kontinuums- und Teilchenvorstellungen in linearer Näherung behandelt. (Für einen Vergleich von Methoden und Ergebnissen sei bemerkt, daß dem Begriff der Gruppengeschwindigkeit in der Form  $v_0 - \lambda dv_0/d\lambda$  in einer nicht-linearen Theorie keinerlei Bedeutung zukommt.) Zwei neuere experimentelle Arbeiten an Gasentladungen von Morgan<sup>6</sup> und Oleson<sup>7</sup> scheinen die in den folgenden Paragraphen behandelten Erscheinungen zu bestätigen, soweit dies aus den kurzen Mitteilungen zu entnehmen ist.

### § 4. Ionenschall — Integrationsbeispiel und Ladungstrennung

In Abb. 3 ist der durch numerische Integration von (18) gewonnene Dichteverlauf für einen aperiodischen Ionenschallimpuls wiedergegeben, der bei einem Temperaturverhältnis  $\vartheta = T_{0e}/T_{0i} = 100$ , wie es in Glimmentladungen vorkommt und auch in den äußersten Teilen der Sonnenkorona vorhanden sein mag, quasistationär mit maximaler Amplitude mög-

lich ist. Wir haben hier also vom Mindestwert  $Y = Y_1 = 1$  ab integriert, bei dem die in § 2 erwähnte Dichtespitze auftritt. Die obere Integrationsgrenze, welche der Ruhedichte entspricht, ist  $Y_2 = K^{-3/5} = Z_2$ , so daß die Ionenverdichtungsamplitude  $d = N_{i,max}/N_0 = Y_2/Y_1 = K^{-3/5}/Y_1$  wird. Wegen  $K = a_i^2/v_0^2$  ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser aperiodischen Ionenschallimpulse gegeben durch

$$v_0^2 = \frac{5 k T_{0i}}{3 m_i} (Y_1 d)^{5/3} > \frac{5 k T_{0i}}{3 m_i}, \quad (20)$$

wobei im Falle quasistationär maximal möglicher Amplitude  $Y_1 = 1$  und  $d$  nur eine Funktion von  $\vartheta$  ist, die wir aus den Nullstellen von  $R$  an den Grenzen des Integrals (18) leicht ermitteln können. Aus (12) folgt, wenn man zunächst  $C$  durch Einsetzen von  $Y_2 = Z_2 = d$  bestimmt (unter Streichung des Gliedes mit  $1/q$ )

$$Z_1 = \left\{ \frac{1}{3 \vartheta} [d^2 (1 + 3 d^{-5/3} (1 + \vartheta)) - 4] \right\}^{-3/2} \quad (21)$$

und aus (14), wenn in gleicher Weise  $R_0$  bestimmt ist,

$$\begin{aligned} & 8^{5/5} + 1^{1/5} (3 \vartheta)^{-3/2} \{d^2 (1 + 3 d^{-5/3} (1 + \vartheta)) - 4\}^{5/2} \\ & = d (1 + 3/5 d^{-5/3} (1 + \vartheta)). \end{aligned} \quad (22)$$

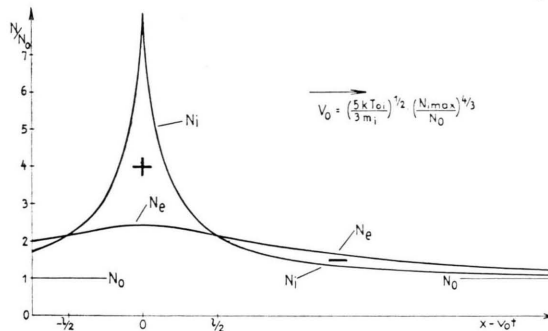


Abb. 3. Quasistationär extremal möglicher, aperiodischer Verdichtungsimpuls bei  $T_{0e}/T_{0i} = 10^2$ .  $v_0$  = Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die durch (22) gegebene maximale Verdichtungsamplitude  $d$  ist in Abb. 4 für den praktisch interessierenden Bereich von  $\vartheta$  aufgetragen. Man entnimmt daraus, daß für  $\vartheta = 30$  bereits eine 5-fache Verdichtung möglich ist, die damit größer ist als diejenige einer stationären Stoßwelle, für die der Wert  $(\alpha + 1)/(\alpha - 1) = 4$  bei  $\alpha = 5/3$  nicht überschritten werden kann. Setzt man die ermittelten Werte für

<sup>5</sup> R. Rompe u. M. Steenbeck, *Ergebn. exakt. Naturw.* **18**, 297 ff. [1939].

<sup>6</sup> G. D. Morgan, *Nature, Lond.* **172**, 542 [1953].

<sup>7</sup> N. L. Oleson, *Phys. Rev.* **92**, 848 [1953].

$d(\vartheta)$  in (20) ein, so sieht man, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser maximalen aperiodischen Ionen Ionenschallimpulse für  $1 \leq \vartheta \leq \infty$  im Gebiet

$$v_0 = 1,62 \div 1,84 \sqrt{5 k T_{0e} / 3 m_i} > \sqrt{5 k (T_{0i} + T_{0e}) / 3 m_i} \quad (23)$$

liegt, also praktisch für  $\vartheta \approx 3$  nur durch die Elektrentemperatur bestimmt wird<sup>8</sup>.

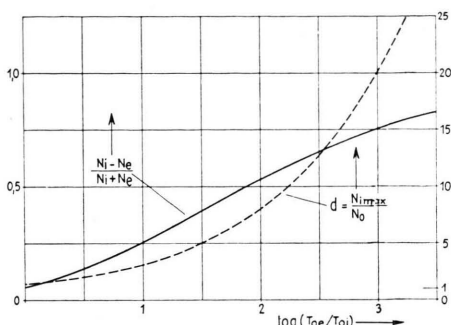


Abb. 4. Maximale Ladungstrennung und Ionenverdichtung im Ionenschallgebiet in Abhängigkeit vom Verhältnis Elektrentemperatur zu Iontemperatur.

Für beliebige adiabatisch-reversible Ionenschallwellen gilt daher<sup>9</sup>

$$\frac{5 k T_{0i}}{3 m_i} < v_0^2 < 3,4 \frac{5 k T_{0e}}{3 m_i} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3,4 \vartheta} < \frac{a_i^2}{v_0^2} < 1. \quad (24)$$

Die in der vorhergehenden Arbeit definierte Ladungstrennung  $(N_i - N_e) / (N_i + N_e)$  ist an der Stelle der Dichtespitze durch

$$\frac{(N_{i \max} - N_{e \max})}{(N_{i \max} + N_{e \max})} = \frac{(Z_1 - Y_1)}{(Z_1 + Y_1)} = \frac{(Z_1 - 1)}{(Z_1 + 1)}$$

gegeben und in Abb. 4 ebenfalls eingetragen. Ihr Anwachsen mit dem Temperaturverhältnis ist im Zusammenhang mit dem Anstieg der Verdichtungsamplitude physikalisch anschaulich so zu verstehen, daß die mit steigendem  $T_e/T_i$  immer stärker werdende Elektronendiffusion die Elektronendichteverteilung auseinanderzuziehen und zu verflachen bestrebt ist, was nur durch gleichfalls stärker werdende elektrische Felder, d. h. Ladungstrennung verhindert werden kann. Die Ladungstrennung läßt sich aber durch Anhäufung von Ionen, wie in § 2 ausgeführt, nicht beliebig steigern und so wird schließlich die Amplitude begrenzt, da die bei weiterer Ver-

<sup>8</sup> Vgl. Rompe u. Steenbeck, l. c. <sup>5</sup>.

<sup>9</sup> Der Zahlwert 3,4 = 1,84<sup>2</sup> folgt aus einer Grenzwertbetrachtung von (22) für  $\vartheta \rightarrow \infty$ .

dichtung auftretenden Druckkräfte nicht mehr kompensiert werden könnten.

Man entnimmt Abb. 4, daß bei vollständigem oder näherungsweise Temperaturngleichgewicht  $\vartheta < 10$  das Ausmaß der quasistationär möglichen Dichteschwankungen mit  $< 100\%$  und der Ladungstrennung mit  $< 30\%$  im hier diskutierten Ionenschallgebiet den Anforderungen genügt, die wir bei der Ableitung des Gleichungssystems (24), (25) mit (21) in der vorhergehenden Arbeit zugrunde legten, nämlich  $\Delta N/N < 1$ . Wenn bei allgemeinen instationären Vorgängen sicher größere Werte für die Dichteschwankungen auftreten können als bei den hier untersuchten quasistationären Vorgängen, so werden letztere doch Richtwerte liefern und man kann daher sagen, daß das abgeleitete Gleichungssystem bei  $\vartheta < 10$  unter Voraussetzung durchgängiger Gültigkeit der adiabatischen Zustandsgleichung als genügend streng gültig anzusehen ist für alle mit dem Ionenschall zusammenhängenden Strömungsvorgänge. Gl. (20) macht aber deutlich, daß mit Ladungstrennung zu rechnen ist, sobald Strömungsgeschwindigkeiten auftreten, die mit der Ionenschallgeschwindigkeit vergleichbar oder größer als diese sind.

Fragen wir zur weiteren Charakterisierung des Ionenschalls nach der Größe der zeitlichen Zustandsänderungen bzw. bei periodischen Vorgängen nach der Frequenz, so müssen wir, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_0$  bekannt ist, eine Schallimpulsbreite oder Wellenlänge ermitteln. Als Impulsbreite  $l$  werden wir für die aperiodischen Lösungen zweckmäßig den Abstand der beiden das Dichtemaximum flankierenden Punkte gleicher Ionen- und Elektrendichte definieren. Setzen wir für diese Stelle  $Z = Y = Y_l$  und berechnen wir für den Fall des Auftretens einer Dichtespitze das Integral (18) in erster Näherung durch das Produkt von Integrationsintervall  $Y_l - 1$  mit dem Integranden in der Form (15 a) an der Stelle  $Y_1 = 1$ , so ergibt sich

$$\left(\frac{\alpha \xi}{\sqrt{q}}\right)_{Y_l} = \frac{\omega_e}{\sqrt{q} v_0} \frac{l}{2} \approx K^{9/16} \frac{4}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_1 - 1}} (Y_l - 1); \quad (25)$$

$Z_1$  ist darin durch (21) gegeben.  $Y_l$  ist als zweite Lösung  $Y = Z$  von (12) für den aperiodischen Fall zu ermitteln: Spalten wir die erste Lösung

$$Y = Z = K^{-3/8} = Y_1 d$$

ab, so wird aus (12)

$$\left(\frac{Y_l}{Y_1 d}\right)^2 + \left(\frac{Y_l}{Y_1 d}\right)^{4/3} + \left(\frac{Y_l}{Y_1 d}\right)^{2/3} = 3 (Y_1 d)^{-8/3} (1 + \vartheta). \quad (26)$$

Berechnen wir die rechte Seite von (25), die wegen  $Y_1$  hier = 1 und der Existenz der Gln. (20) bis (22) eine Funktion von  $\vartheta$  allein ist, so ergibt sich für den untersuchten  $\vartheta$ -Bereich  $\alpha \xi / \sqrt{q} \approx 0,5 \div 0,1$  d. h. die charakteristischen Zeiten liegen zwischen dem  $0,5 \div 0,1$ -fachen des Reziprokwertes der Ionenplasmafrequenz  $\omega_i = \sqrt{4 \pi e^2 N_0 / m_i}$ . Allgemeiner kann man also sagen, daß das Ionenschallgebiet durch Frequenzen unter und in der Umgebung der Ionenplasmafrequenz charakterisiert ist<sup>5</sup>. Als Breite  $l$  dieser Impulse maximaler Ladungstrennung hat man

$$l \approx 2 \left( \frac{\alpha \xi}{\sqrt{q}} \right)_{Y_1} \sqrt{\frac{m_i v_0^2}{4 \pi e^2 N_0}},$$

woraus mit den oben angegebenen Werten von  $\alpha \xi / \sqrt{q}$  und Gl. (23) für die Größenordnung von  $l$  folgt<sup>10</sup>

$$l \approx \sqrt{\frac{5/3 k T_{0e}}{4 \pi e^2 N_0}}. \tag{27}$$

Unter den Verhältnissen der mittleren Sonnenkorona mit  $T_e \approx 10^6$  °K und  $N_0 \approx 10^6$  cm<sup>-3</sup> ergibt sich  $l$  in der Größenordnung Dezimeter.

Mit den bisherigen Ergebnissen lassen sich nun weitere Fragen nach der elektrischen Feldstärke etc. beantworten. Man hat dazu die Gleichungen von § 1 für  $\Phi'$ ,  $\Phi$  etc. heranzuziehen. Zum Beispiel erhält man für die Potentialdifferenz zwischen Dichtespitze  $Y_1=1$  und Ruhezustand bei den aperiodischen Impulsen ausgehend von (9)

$$e \Delta \Phi \approx 1/2 m_i v_0^2 \{1 + 3 d^{-3/3} - 4 d^{-2}\},$$

was für größere Dichteamplituden (z. B. wie in Abb. 4) unter Berücksichtigung von (23) einfach zu  $e \Delta \Phi \approx 2 k T_{0e}$  führt und also unter den schon genannten Koronaverhältnissen  $\Delta \Phi$  in der Größenordnung 100 Volt ergibt. Für die Größenordnung der Feldstärke hat man dann mit (27)

$$\Phi' \approx \Delta \Phi / l \approx \sqrt{N_0 k T_{0e}} = \sqrt{P_e},$$

d. h. thermische und elektrische Energiedichte sind miteinander vergleichbar.

Als auslösendes oder treibendes Agens der aperiodischen Impulse kommt vielleicht eine auf der Rückseite etwas höhere Plasmaruhedichte in Betracht, so daß man die hier untersuchten Verdichtungsimpulse als Relaxationserscheinung und ihre Struktur als Grenzfall der Frontstruktur einer „adiabatisch-reversiblen Plasmastößwelle“ deuten kann. Diese Vorstellung läßt sich durch Vergleich von Impulsgeschwindigkeit nach (20) mit der Geschwindigkeit einer nichtadiabatischen Plasmastößwelle quantitativ erhärten. Das hier vorausgesetzte reversible Verhalten des Plasmas läßt Stoßwellen nicht behandeln; Verfasser hofft, dies in einer weiteren Arbeit tun zu können. Soviel kann aber schon gesagt werden, daß sich vor der Stoßfront ein ähnliches Bild ergibt wie in Abb. 3 und in der Stoßfront ein starkes Überschwingen von Ionen-

und Elektronendichte über die hintere Ruhedichte stattfindet analog der Dichtespitze.

Die Ausbildung der Dichtespitze wird als im Wesen der hier betriebenen Kontinuumstheorie liegend anzusehen sein; jedenfalls erscheint es fraglich, ob sie in einer strengen gaskinetischen Theorie, bei welcher wegen der in der Verdichtung erhöhten Temperatur u. U. auch Strahlungsprozesse zu berücksichtigen wären, ebenfalls auftritt. Wärmeleitung, Strahlung etc. wirken alle im Sinne einer Temperatur- und Druckerniedrigung in der Verdichtung gegenüber dem streng adiabatischen Fall, so daß zur Erreichung des Grenzdruckes die Grenzverdichtung und -Ladungstrennung dadurch heraufgesetzt würde. Man erkennt dies bereits am Beispiel eines „lokal isothermen Plasmas“, bei dem ein unendlich schnell wirkender lokaler Wärmeaustausch zwischen Elektronen und Ionen stattfindet, derart, daß beide an einem Ort stets die gleiche Temperatur  $T$  haben. Die hier durchgeführten Rechnungen lassen sich auch auf ein solches ebenfalls isentropisches Plasma mit der Zustandsgleichung

$$\frac{T_i}{T_0} = \frac{T_e}{T_0} = \frac{T}{T_0} = \left( \frac{N_i N_e}{N_0^2} \right)^{1/3}$$

übertragen und führten bei  $\vartheta \approx 1$  zu einer um 10% höheren Ladungstrennung in der Dichtespitze.

Stellt man sich in Abb. 3 die ins Unendliche reichende Impulsflanke in gewissem Abstand vom Punkte  $N_i = N_e (\neq N_0)$  nach oben gebogen und in eine neue Spitze einlaufend vor, so hat man damit etwa das Aussehen einer periodischen Ionenschallwelle maximaler Amplitude vor sich. Auf weitere Ausführungen über den periodischen Fall können wir verzichten, da wir in der schon angekündigten Untersuchung über allgemeine Wellenlösungen der Gleichungen der vorhergehenden Arbeit noch darauf zurückkommen werden.

### § 5. Elektronenschall — Ladungstrennung — Analytische Integration — Dispersionsformel

Aus den vorhergehenden Paragraphen wissen wir bereits, daß die maximal mögliche Ladungstrennung durch die Stellen höchster Verdichtung einer der Plasmakomponenten unter Ausbildung einer Dichtespitze gegeben ist. Diese Stellen sind durch gleichzeitiges Verschwinden von Zähler und Nenner des Integranden in (13) gekennzeichnet, was uns im Fall des Elektronenschalls in der aus (13b) hervorgehenden Beziehung (19) unmittelbar zur Abhängigkeit der maximalen Verdichtungsamplitude  $d = N_{e \max} / N_0 = 1/w_1$  und der Ladungstrennung vom Verhältnis Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_0$  zu Elektronenschallgeschwindigkeit  $a_e = \sqrt{5 k T_{0e} / 3 m_e}$  führt. Analog zu (20) gilt nun:

$$d = K_e^{-3/5} \quad \text{oder} \quad v_0^2 = \frac{5 k T_{0e}}{3 m_e} d^{5/3} \tag{28}$$

<sup>10</sup> Die minimale Impulsbreite liegt also bei der sog. „Debye-Länge“ (siehe<sup>5</sup>).



und die Ladungstrennung wird jetzt einfach:

$$\left| \frac{N_i - N_e}{N_i + N_e} \right| = \frac{N_e - N_i}{N_e + N_i} = \frac{d-1}{d+1}. \quad (29)$$

In Abb. 5 sind diese Abhängigkeiten dargestellt; jedoch haben wir statt der maximalen Verdichtungsamplitude  $d$  selbst das im nächsten Absatz benötigte Verhältnis der maximalen wahren hydrodynamischen Teilchengeschwindigkeit zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $(v_0 - v_{e \min})/v_0 = 1 - 1/d$  eingetragen.

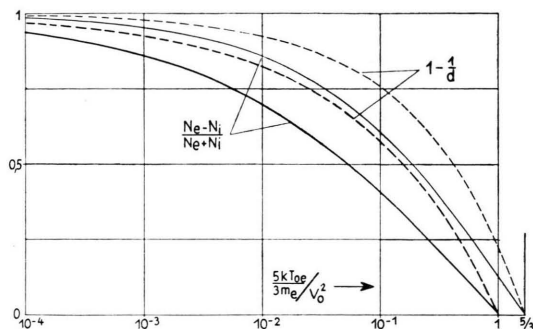


Abb. 5. Quasistationär höchstmögliche Elektronenverdichtung  $d$  und Ladungstrennung für den Elektronenschall in Abhängigkeit vom Verhältnis Elektronenschallgeschwindigkeit zu Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Untere Kurven (dicker ausgezogen): adiabatisches Elektronengas; obere Kurven (dünn ausgezogen): isothermes Elektronengas.

Hätten wir das Elektronengas (unter Verletzung des Energiesatzes) als isotherm behandelt,  $T_e \equiv T_{0e}$ , würden sich die in Abb. 5 dünn eingezeichneten Kurven ergeben haben, die wir hier deshalb reproduzieren, um noch einmal zu zeigen, daß Berücksichtigung von Wärmeleitung etc. die Grenzen für die Ladungstrennung heraufsetzt.

Wie beim Ionenschall sind auch hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten  $v_0$  beliebiger Elektronenschallwellen nach (28) stets größer als die Elektronenschallgeschwindigkeit. Im Gegensatz zum Ionenschall aber folgt aus den Gleichungen hier keine obere Grenze für  $v_0$  wie in Gl. (24). Wenn aber  $v_0$  beliebige Werte annehmen kann, läßt sich auch für die Verdichtung und Ladungstrennung keine obere Grenze als Funktion der Temperatur angeben. Nun wächst mit  $v_0$  aber auch die wahre Strömungsgeschwindigkeit  $v_0 - v_e$  der Elektronen und wir können sinnvollerweise eine Begrenzung dadurch einführen, daß wir verlangen, diese solle einen will-

<sup>11</sup> Die Vermutung, daß sich bei solch großen Elektronenverdichtungen die Ionen wieder merklich am Strömungsvorgang beteiligen könnten, erweist sich als unbegründet. Für  $K_e \ll 1$  läßt sich (13) mit Hilfe elliptischer Integrale berech-

kürlich festzulegenden Bruchteil  $\beta$  der Lichtgeschwindigkeit nicht überschreiten. Es soll also gelten

$$\frac{v_0 - v_{e \min}}{v_0} = \frac{\beta c}{v_0} = 1 - \frac{1}{d} = 1 - K_e^{2/3}. \quad (30)$$

Mit (28) hat man daher

$$d^{2/3} (d-1)^2 = \frac{3 m_e c^2}{5 k T_{0e}} \beta^2. \quad (31)$$

Die somit für beliebige  $\beta$  festgelegten Werte von maximaler Verdichtung und Ladungstrennung sind in Abb. 6 als Funktion der Elektronentemperatur eingetragen. Bei der Wahl von  $\beta$  ist zu bedenken, daß die Elektronen wegen ihrer kleinen Masse schon durch relativ kleine Spannungen auf beträchtliche Strömungsgeschwindigkeiten beschleunigt werden; eine Änderung von  $\beta \approx 1$  wirkt sich in der Darstellung nur in einer Verschiebung der logarithmischen Temperaturskala aus. Wählt man  $\beta$  etwa  $1/3$ , so ergibt sich aus der Abb., daß für Elektronentemperaturen unter  $10^6$  °K mit maximalen Verdichtungen  $d > 10$  auch schon bei kleinen Elektronengeschwindigkeiten praktisch keine Beschränkung in der Ladungstrennung besteht<sup>11</sup>. Daß die Ladungstrennung nach dieser Darstellung mit steigender Elektronentemperatur im Gegensatz zum Ionenschall abnimmt, liegt daran, daß mit zunehmender Temperatur Druck- und Diffusionseffekte mehr und mehr an Einfluß gewinnen.

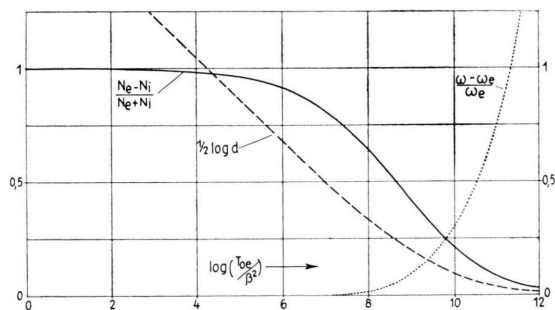


Abb. 6. Temperaturabhängigkeit der quasistationär höchstmöglichen Ladungstrennung, Elektronenverdichtung  $d$  und Abweichung der Frequenz  $\omega$  der Welle maximaler Ladungstrennung von der Plasmafrequenz  $\omega_e$ .  $\beta$  = Verhältnis der maximalen Elektronengeschwindigkeit zur Lichtgeschwindigkeit (s. Text).

Da im Elektronenschallgebiet die Ionen praktisch ruhen, gibt es neben der Stelle  $w = v_e/v_0 = 1$  keinen zweiten Punkt mit  $N_e = N_i$  bei von der Ruhedichte

nen und die im § 3 festgestellte praktische Nichtbeteiligung der Ionen auch für sehr große Elektronenverdichtungen bestätigen.

$N_0$  verschiedener Dichte. Infolgedessen besitzt (19) nur periodische Lösungen. Wir fragen daher nach dem Zusammenhang zwischen Wellenlänge bzw. Frequenz und Fortpflanzungsgeschwindigkeit, m. a. W. nach der Dispersionsformel. Hierzu müssen wir das Integral (19) ausführen.

Glücklicherweise läßt sich die Lösung von (19) näherungsweise durch einen einfachen, für die meisten Zwecke völlig ausreichend genauen, analytischen Ausdruck angeben. Entwickeln wir Zähler und den

$$\alpha \left( \xi - \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{1 - K_e} = \left\{ 1 - K_e \left( 1 + 10/9 (w_1 - 1)^2 \right) \right\} \arcsin \frac{w-1}{w_1-1} - \sqrt{(w_1-1)^2 - (w-1)^2} \left\{ 1 + 5/3 K_e - 10/9 K_e (w-1) \right\}. \quad (33)$$

Die Entwicklung, die zu (32) bzw. (33) führt, gibt zunächst immer ein sehr gutes Näherungsergebnis, solange sich die Funktion  $R(w)$  in der Umgebung ihres Maximums bei  $w=1$  im wesentlichen parabolisch verhält, bevor Glieder 3. und höherer Ordnung in  $w-1$  nach Erreichen eines Wendepunktes in  $R(w)$  Einfluß gewinnen (vgl. Abb. 2). Der Wendepunkt wird nicht oder gerade erreicht, wenn zwischen der Grenze  $w_1$  und  $K_e$  folgende Beziehung besteht

$$K_e \leq 3 w_1^{11/2} / (8 - 5 w_1). \quad (34)$$

Aber auch über den Wendepunkt hinaus bis sogar zur Grenzamplitude  $w_1 = K_e^{3/5}$  selbst gibt (32) bzw. (33) recht genaue Resultate; im letzteren Fall liefert diese Näherung natürlich keine Dichtespitze mit unstetiger Ableitung. In Abb. 7 ist eine Elektronenschallwelle mit der Verdichtung  $d=5$  wiedergegeben. Wäre  $d$  gleich der Grenzverdichtung  $K_e^{-3/5}$ , so würden die Abweichungen der Näherung von der strengen Lösung in dem Maßstab, in dem die Abb. im Druck erscheint, kaum deutlich wiederzugeben sein.

Durch Einsetzen der Grenze  $w = w_1$  in (33) ergibt sich die amplitudenabhängige Dispersionsformel

$$\alpha \sqrt{1 - K_e} \simeq 1 - K_e (1 + 10/9 (w_1 - 1)^2). \quad (35)$$

Führen wir den Brechungsindex  $n = c/v_0$  und die Verdichtungsamplitude  $d = 1/w_1$  ein und berücksichtigen die Bedeutung von  $K_e$  und  $\alpha$ , so lautet (35)

$$\omega_e/\omega \simeq \frac{1 - (5 k T_{0e}/3 m_e c^2) n^2 (1 + 10/9 (1 - 1/d)^2)}{\sqrt{1 - (5 k T_{0e}/3 m_e c^2) n^2}} \quad (35 a)$$

und für kleine Amplituden<sup>12</sup>

$$n^2 \simeq \frac{3 m_e c^2}{5 k T_{0e}} \left( 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \right). \quad (35 b)$$

<sup>12</sup> Für den isothermen Fall in anderer Schreibweise bereits von E. G. Linder, Phys. Rev. **49**, 753 [1936], aus einer linearisierten Betrachtung abgeleitet.

Radikanden  $R \sim \Phi'^2$  im Nenner des Integranden von (19) bis zu Gliedern zweiter Ordnung in  $w-1$  und beachten, daß der Nenner an der Grenze  $w = w_1$  Null werden muß, so geht (19) über in

$$\alpha \xi \simeq \pm \frac{1}{\sqrt{1 - K_e}} \int_{w_1 > K_e^{3/5}}^w \frac{1 - K_e + (1 + 5/3 K_e) (w-1) - 20/9 K_e (w-1)^2}{\sqrt{(w_1-1)^2 - (w-1)^2}} dw. \quad (32)$$

Die elementare Integration führt auf

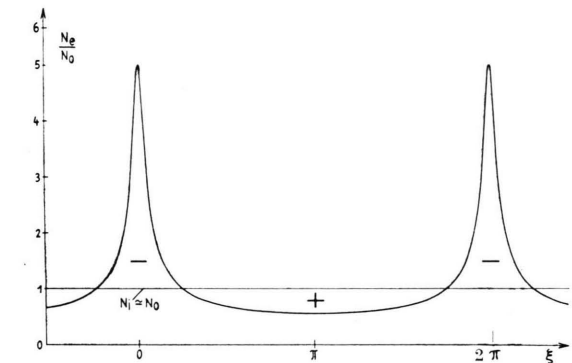


Abb. 7. Elektronen-Plasmawelle großer Dichteamplitude.

Wir ersehen daraus, daß stets

$$\omega \geq \omega_e = \sqrt{4 \pi e^2 N_0 / m_e} \quad \text{und} \quad n^2 \leq 3 m_e c^2 / 5 k T_{0e}$$

entsprechend  $v_0^2 \geq a_e^2$  ist. Amplitudensteigerung wirkt im Sinne von Frequenz- und Geschwindigkeitszunahme. Auch für die Maximalamplituden gilt (35) mit sehr guter Näherung. Dort hat man also mit Gl. (28)

$$\omega_e/\omega = \left\{ 1 - d^{-8/3} (1 + 10/9 (1 - 1/d)^2) \right\} (1 - d^{-8/3})^{-1/2}, \quad (36)$$

wobei  $d = d(T_{0e}/\beta^2)$  nach (31) ist. Die hierdurch gegebene Frequenz, genauer die relative Abweichung von der Plasmafrequenz für die Bewegungen maximaler Ladungstrennung, ist in Abb. 6 mit eingezeichnet. Wir ersehen daraus, daß große Raumladungsschwankungen, wie sie für Temperaturen unter  $10^6$  °K möglich sind, praktisch nur mit der Plasmafrequenz erfolgen können.

Wir wollen nun noch die Größenordnung der bei hohen Dichteamplituden auftretenden Spannungen, Stromdichten

etc. berechnen. Für die Potentialdifferenz zwischen dem positiven und negativen Raumladungsmaximum folgt aus (9)

$$e \Delta \Phi = 1/2 m_e v_0^2 \{w_2^2 - w_1^2 + 3 K_e (w_2^{-2/3} - w_1^{-2/3})\},$$

was im Falle höchstmöglicher Amplituden  $d = K_e^{-3/8} = 1/w_1 \approx 1/(2-w_2)$  übergeht in

$$e \Delta \Phi = 1/2 m_e v_0^2 \{4(1-1/d) + 3/d^2 \cdot [(2d-1)^{-2/3} - 1]\}$$

und für  $d \gtrsim 3$  zu größenordnungsmäßig  $e \Delta \Phi \approx m_e v_0^2$  führt oder nach (28) zu  $e \Delta \Phi > 5/3 k T_{0e} d^{2/3}$ . Mit Verdichtungen  $d \gtrsim 5$  kommen wir damit bei  $T_e = 10^6$  °K bereits zu Spannungen von 10 bis 100 kV, wobei die Strömungsgeschwindigkeiten noch genügend klein gegen  $c$  bleiben. Die Größenordnung der Feldstärke ergibt sich zu

$$\Phi' \approx 2 \Delta \Phi / \lambda = \Delta \Phi \omega_e / \pi v_0 > \sqrt{2 N_0 k T_{0e}} d^{1/3} = \sqrt{2 P_e} d^{1/3}$$

und schließlich für die Stromdichte  $j$

$$j = e N_e (v_0 - v_e) = e N_0 v_0 (d-1) > e N_0 \sqrt{\frac{5 k T_{0e}}{3 m_e}} (d-1).$$

Setzen wir  $N_0 = 10^8 \text{ cm}^{-3}$  ein, einen Wert, wie er etwa für die innere Sonnenkorona bei 1,2 Sonnenradien zutrifft und der zu einer Plasmafrequenz  $\omega_e \approx 2 \pi 100 \text{ MHz}$  führt, so hat man mit den schon benutzten Werten  $T_e = 10^6$  °K und  $d \approx 5$   $\Phi' \approx 1 \text{ kV/cm}$  und  $j \approx 0,1 \text{ A/cm}^2$ .

Vergleichen wir die eben vorgenommenen Abschätzungen mit denjenigen vom Ionenschall, so sehen wir, daß für die überthermische kosmische Radioemission im wesentlichen nur Elektronenbewegungen verantwortlich gemacht werden können. Die radioastronomischen Beobachtungen zeichnen auch deutlich die Elektronenplasmafrequenz aus, die um einen Faktor  $\sqrt{m_i/m_e}$  über der Ionenplasmafrequenz liegt. Beim Anblick der anharmonischen Welle in Abb. 7 wird die Beobachtung von Harmonischen der Plasmafrequenz verständlich<sup>13</sup>. In einer folgenden Arbeit werden wir zeigen, wie die hier behandelten Wellen zu elektromagnetischer Ausstrahlung führen<sup>14</sup>.

Wir müssen hier noch eine Feststellung machen bezüglich der Ausdehnung von kohärent schwingenden Bereichen beim

Elektronenschall ( $\approx \lambda/2$ ) gegenüber einer Bemerkung, die bei Rompe und Steenbeck<sup>5</sup> nachzulesen ist. Nach dieser Bemerkung sollen diese Bereiche groß sein gegen die sogenannte Relaxationsstrecke — d. i. diejenige Strecke, nach deren Durchlaufen ein Elektron im Mittel seine thermische Energie durch Stöße einmal mit seiner Umgebung ausgetauscht hat —, damit die Elektronen ein Raumladungszentrum auf Grund ihrer thermischen Bewegung nicht zu schnell verlassen können. Dies kann aber im astrophysikalischen Bereich keinesfalls zutreffen; jedenfalls nicht für die bei Rompe und Steenbeck angegebenen Relaxationsstrecken nach Druyvesteyn, Gvosdover u.a., denn unter astrophysikalischen Bedingungen ergeben sie sich als so groß, daß sich bei den interessierenden Dichten und Temperaturen keine Plasmaschwingungen der beobachteten Frequenz ausbilden könnten, es sei denn bei unvertretbar hohen Fortpflanzungs- und hydrodynamischen Elektronengeschwindigkeiten. Wir sind vielmehr der Ansicht, daß die thermischen Bewegungen der Elektronen nur in solcher Weise erfolgen können, daß sie mit der Existenz der makroskopischen, von der Gesamtheit der strömenden Ladungsträger gebildeten, elektrischen Felder vereinbar sind, d. h., daß ein Ladungsträger nicht unabhängig von den übrigen in ein Raumladungszentrum eindringen oder sich daraus entfernen kann. Da Ladungsträger wegen ihrer weitreichenden Coulombschen Kräfte sich stets in Wechselwirkung mit ihrer Umgebung befinden, so daß es bekanntlich Schwierigkeiten macht, im Elektronengas so etwas wie Stöße zu definieren, sollte ein Plasma viel besser durch kontinuumstheoretische Vorstellungen beschrieben werden können als ein Neutralgas. Überspitzt ausgedrückt würde man vielleicht sagen können, daß es im Plasma keine obere Frequenz- (wohl aber Amplituden-)Grenze für Ultraschallausbreitung geben sollte, die in Neutralgasen theoretisch und experimentell durch die mittlere freie Weglänge gegeben ist. Auch die Forderung, daß die Ausdehnung eines kohärent schwingenden Bereichs groß sein soll gegen die sogenannte Debye-Länge  $(k T_e / 4 \pi e^2 N_0)^{1/2}$ , ist bereits beim Vierfachen der Plasmafrequenz nicht mehr erfüllt.

Herrn Prof. A. Unsöld und Herrn Prof. G. Burkhardt danke ich für Diskussionen zum Gegenstand dieser Arbeit.

<sup>13</sup> J. P. Wild, J. D. Murray u. W. C. Rowe, Nature, Lond. 172, 533 [1953].

<sup>14</sup> Siehe auch R. W. Larenz, Naturwiss. 42, 253 [1955].