# SITUACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO DESDE LO PUNTUAL Y LO GLOBAL INTEGRANDO CABRI GÉOMÈTRE II PLUS

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
0103307

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI
2011

# SITUACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO DESDE LO PUNTUAL Y LO GLOBAL INTEGRANDO CABRI GÉOMÈTRE II PLUS

**EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA**
**0103307**

**Informe final presentado como requisito para optar por el título de Magister en Educación – Énfasis en Educación Matemática**

**Directores del Trabajo de Investigación:**

**Mg. DIEGO GARZÓN CASTRO**
**Profesor del Área de Educación Matemática, IEP, Universidad del Valle.**

**Mg. JORGE HERNANDO ARCE CHAVES**
**Profesor del Área de Educación Matemática, IEP, Universidad del Valle**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**
**INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA**
**PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
**ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**
**SANTIAGO DE CALI**
**2011**

**NOTA DE ACEPTACIÓN:**

____________________________________

____________________________________

____________________________________

____________________________________

____________________________________

____________________________________

**Firma del Sud-Director de Investigaciones del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle**

____________________________________

**Jurado**
**Prof. Oscar Javier Molina Jaime**

____________________________________

**Jurado**
**Ana Alicia Guzmán Castro**

Santiago de Cali, Miércoles Octubre 19 de 2011.

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**
**INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA**
**MAESTRÍA EN EDUCACIÓN**

**ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

| |
|---|
| *FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 19 de Octubre de 2011* |
| *ESTUDIANTE: EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA - CODIGO: 0103307* |
| *TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN:* **"SITUACIONES PARA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO DESDE LO PUNTUAL Y LO GLOBAL INTEGRANDO CABRI GÉOMÈTRE II PLUS"** |
| *DIRECTOR DE TESIS: Profesor DIEGO GARZÓN CASTRO* |
| *EVALUADORES: Profesora ANA ALICIA GUZMÁN CASTRO*<br>*Profesor OSCAR JAVIER MOLINA JAIME* |
| ***COMENTARIOS DE LOS JURADOS:***<br>***Se debe hacer una revisión de las normas APA e ICONTEC para la presentación de escritos científicos como trabajos de grado de investigación. Por otro lado, se deben reorganizar los apartados "dimensión didáctica", "dimensión cognitiva" y "dimensión histórica-epistemológica" relativos al análisis preliminar del estudio, de manera tal que las secciones queden en el siguiente orden: "dimensión histórica-epistemológica", "dimensión cognitiva" y "dimensión didáctica". Esta reorganización permitiría dilucidar de mejor manera una caracterización de algunas de las actividades diseñadas como situaciones a-didácticas.*** |
| *APROBADO* _x_<br>*APLAZADO* ____<br>*RECHAZADO* ____ |

*Profesor ERIC RODRIGUEZ WORONIUK*
*Subdirector de Investigaciones y Posgrados*

DIEGO GARZÓN CASTRO.
*Prof. DIEGO GARZON CASTRO*
*Director de Tesis*

Alicia Guzmán C.
*Prof. ANA ALICIA GUZMAN CASTRO*
*Jurado - Evaluador*

*Prof. OSCAR JAVIER MOLINA JAIME*
*Jurado - Evaluador*

*Prof JORGE H. ARCE CHAVES*
*Director de Tesis*

*Este documento está dedicado a:*

*A mis* ***Padres****.*

*Y a*

***María Fernanda****.*

**AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a todas las personas quienes por su ayuda, directa o indirecta, han contribuido a la culminación de este trabajo de investigación. En particular, a las siguientes personas que me colaboraron en este proceso:

En primer lugar, al Director y Profesor ***Diego Garzón Castro***, porque aprendí de él a ser equilibrado en la vida académica y muchos otros aspectos académicos que me hicieron evolucionar. También por sus orientaciones valiosas y comentarios acertados.

Al Director y Profesor ***Jorge H. Arce Chaves***, porque en sus enseñanzas, me mostró caminos hacia la Didáctica de la *Geometría* y quien con su perspicacia, me ayudó a detectar puntos críticos en el desarrollo de este estudio. Así mismo, agradezco su modo particular de hacer juicios oportunos que enriquecieron la redacción de este trabajo.

A mi Amigo y Profesor ***Octavio Augusto Pabón Ramírez***, porque siempre confió en mí, y en su momento me proporcionó documentos pertinentes y por su colaboración en la edición final de este documento. Así mismo, le agradezco que me haya motivado a ingresar a la Maestría.

A la Profesora, ***Gloria Castrillón Castro***, quien confió en mis capacidades y me dio oportunidades de ingresar al campo de la Educación Matemática.

A los Directores de la investigación que tuve por momentos en la maestría: los Profesores, ***Manuel Mariño B.***, Profesor de la Universidad de Holguín, Cuba, quien me motivó a aprender *geometría* enseñando *geometría*. Y al Profesor ***Evelio Bedoya Moreno***, por confiar plenamente en mí y enseñarme la Didáctica de las Matemáticas Española.

A mi Amigo y Compañero de muchas batallas, ***Hilbert Blanco Álvarez***, quien siempre estuvo presente en la buenas y en las malas. Me enseñó el orden en los documentos necesarios para este trabajo y además realizó lecturas críticas que a la postre beneficiaron la elaboración del documento.

A ***María Fernanda Mejía Palomino***, quien me estuvo motivando constantemente en la escritura y culminación de este documento y me colaboró incondicionalmente en la *discusión*, *lecturas*, *edición* y *producción* de varios apartados.

A mis ***Compañeros*** de la Línea de Investigación, en el Seminario Permanente ***TIC y EM*** por sus aportes en las discusiones extensas y enriquecedoras.

A los ***Estudiantes*** participantes en la investigación por su buena acogida y su interés en aprender la *geometría* de las *Cónicas*. A ***Laura Paz***, ***José Luís Pantoja*** y ***Andrés Jaramillo*** por su colaboración en la recolección y organización de datos.

# RESUMEN

Esta investigación se asume como una intervención didáctica en el aula, que se ubica dentro del contexto del aprendizaje de las cónicas vistas como lugares geométricos, con la mediación del Ambiente de Geometría Dinámica (en adelante, AGD) el software Cabri Géomètre II Plus. En la misma, se estudia una secuencia de dos situaciones didácticas, donde se plantean problemas de construcción geométrica de estas curvas desde el enfoque puntual hacia el global.

La secuencia se diseñó con el propósito que los estudiantes realizaran en primera instancia, construcciones punto por punto de cada una de las cónicas y luego construcciones geométricas donde se utilizara la figura desde un punto de vista global, para caracterizar geométricamente cada una de las ellas.

La metodología de la investigación se sustenta en una micro-ingeniería didáctica. En el diseño de las situaciones, se efectuó un análisis preliminar, fundado en tres dimensiones: la didáctica, la cognitiva y la histórico – epistemológica.

La pregunta que orientó esta investigación fue: ¿Qué *fenómenos didácticos* genera la *mediación* del AGD *Cabri Géomètre II Plus*, en la *actividad matemática* de los estudiantes que se inician en un curso de *geometría analítica*, en el marco de *construcciones geométricas* de las *cónicas* como *lugares geométricos* desde lo *puntual* y lo *global*?

Para dar respuesta a esta cuestión se propusieron los siguientes objetivos: 1. Diseñar desde los referentes de la *TSD* y de la *micro-ingeniería didáctica* una secuencia de situaciones didácticas para el estudio de las cónicas como lugares geométricos en el AGD Cabri Géomètre II Plus. 2. Analizar la actividad matemática de los estudiantes de un curso universitario de *geometría analítica* cuando se aborda la construcción geométrica de las cónicas en el enfoque puntual y global mediado por el AGD *Cabri Géomètre II Plus*.

Esta investigación se realizó en el contexto de las actividades de un curso de geometría analítica con 25 estudiantes del programa de la Licenciatura en Matemáticas, en una Universidad del suroccidente Colombiano. La información recolectada y su análisis, evidenció que las situaciones didácticas planteadas desde las construcciones geométricas puntuales permitieron emerger construcciones geométricas globales en el AGD Cabri y que a su vez este ambiente permitió retroalimentaciones que permitieron a los estudiantes caracterizar algunas de las propiedades geométricas de las cónicas. El diseño de las situaciones restituye el sentido geométrico de las Cónicas sin desligarse del enfoque usual, el algebraico, trayendo consigo una complementariedad en los enfoques usuales para que los estudiantes comprendan las propiedades geométricas.



PALABRAS CLAVES: cónicas, lugar geométrico, construcciones geométricas, ambiente de geometría dinámica, Cabri, enfoque puntual, enfoque global, situaciones didácticas, visualización, representaciones matemáticas, micro-ingeniería didáctica.

## TABLA DE CONTENIDO

## LISTA DE TABLAS

Página

## LISTA DE FIGURAS

Página

**LISTA DE ESQUEMAS**

Página

## LISTA DE FOTOGRAFÍAS

## LISTA DE ANEXOS

# INTRODUCCIÓN

Investigaciones en Didáctica de las Matemáticas han permitido reconocer la estrecha relación entre el proceso de integración de las *Tecnologías de la Información y la Comunicación* (en adelante, TIC) con las corrientes de pensamiento socio-constructivista. De manera general, las investigaciones dan cuenta de que las TIC permiten poner en práctica principios pedagógicos en virtud de los cuales el estudiante es el principal actor en la construcción de sus conocimientos, y que puede aprender mejor en el marco de una acción concreta y significante y, al mismo tiempo, colectiva (Moreno & Waldegg, 2002).

Como una primera aproximación al proceso de integración de las TIC y de manera particular en cuanto se refiere a su potencial de aplicación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se suele argumentar que las TIC permiten recapturar el sentido experimental de las matemáticas y reabrirlo al estudiante en el interior del aula, ampliando las posibilidades de interacción y manipulación de su parte.

Esta aproximación experimental se asocia a la posibilidad de representaciones ejecutables que permiten al estudiante modificar condiciones, controlar variables y manipular situaciones matemáticas concretas. Otros hechos asociados a la integración de tecnología contemplan la posibilidad de presentar materiales y recursos pedagógicos a través de múltiples medios y canales, de motivar e involucrar a los estudiantes en actividades de aprendizaje significativas, de proporcionar representaciones gráficas de conceptos y modelos abstractos, de mejorar el pensamiento crítico y otras habilidades y procesos cognitivos superiores, de posibilitar el uso de la información adquirida para resolver problemas y para explicar los fenómenos del entorno, permitir el acceso a la investigación científica y el contacto con científicos y bases de datos reales, de ofrecer a profesores y estudiantes una plataforma a través de la cual pueden comunicarse con compañeros y colegas de lugares distantes, intercambiar trabajo, desarrollar investigaciones y funcionar como si no hubiera fronteras geográficas (Moreno & Waldegg, 2002).

Ahora bien, según aunque la mayoría de los investigadores y profesores de matemáticas reconocen la necesidad de integrar las TIC en el ambiente escolar, para lo cual se requiere disponer de instrumentos tecnológicos en buen en número y variedad, son pocas las instituciones educativas que los tienen y sólo algunas están equipadas adecuadamente. En otros casos, las instituciones no están dispuestas a enfrentar los riesgos que implica la integración de tecnología, tales como la preparación y actualización de los docentes y la reestructuración de sus propuestas curriculares (Lagrange, Artigue, Laborde & Trouche, 2003).

De otra parte, se reconoce que una de las mayores riquezas de las TIC usadas para la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias, reside en el hecho de que actúan como catalizadores del cambio. Las TIC constituyen un medio excelente para cuestionar ciertas prácticas pedagógicas que suceden en el aula.

En efecto, cuando las TIC son usadas únicamente como herramientas que se agregan a una práctica de enseñanza tradicional –centrada en la transmisión de conocimientos– muestran muy débilmente sus potencialidades y pueden, incluso, agudizar ciertas prácticas indeseables en el salón de clase, como el excesivo protagonismo del maestro. Sin embargo, cuando son usadas con modelos pedagógicos no tradicionales, pueden incrementar notablemente la participación y la interacción de los estudiantes, logrando su integración e involucramiento en situaciones de aprendizaje.

Este potencial se ve incrementado cuando existe la posibilidad de conectarse a redes de aprendizaje, ricas en información. Se reconoce así que las TIC no son solamente un mecanismo para manejo de información sino ante todo un mecanismo para comunicar e intercambiar, particularmente cuando se considera que la enorme accesibilidad a información diversificada favorece la apertura de los campos disciplinarios.

Estos cambios a su vez aparecen asociados a una nueva visión del trabajo de los docentes, pues se considera que para que la información que circula a través de las TIC a través de las redes de aprendizaje, pueda enriquecerse y transformarse en saber, se debe acompañar de un cambio en el papel del maestro: de ser proveedor de saber en el aula, a ser mediador y facilitador del aprendizaje dentro de un contexto interdisciplinario.

En consonancia con este nuevo panorama se reconoce la importancia de realizar una revisión detallada y cuidadosa de los marcos teóricos y empíricos que fundamentan el proceso de integración de las TIC en el ámbito escolar, que en este caso se refiere al campo de la Educación Matemática.

El presente informe investigación es de intervención didáctica en el aula, pues se colocó en acto una secuencia de dos situaciones didácticas, donde se planteaban problemas de construcción geométrica desde el enfoque puntual hacia lo global de estas curvas. Se ubica dentro del contexto del aprendizaje de las cónicas (parábola, elipse e hipérbola) vistas como lugares geométricos, con la mediación del Ambiente de Geometría Dinámica (en adelante, AGD) Cabri Géomètre II Plus.

El documento se estructura en seis capítulos que se fueron consolidando en el desarrollo de la investigación.

En el primer capítulo se presentan el problema de investigación, los desarrollos en el campo de la Didáctica de las Matemáticas que lo fundamentan e igualmente los objetivos y las hipótesis de investigación. Estos se constituyeron en elementos fundamentales del proyecto de investigación. Es de señalar que el documento de anteproyecto de esta investigación, contuvo las ideas centrales presentadas en este capítulo y fue avalado por el claustro de profesores de esta Maestría en Educación Matemática.

En el segundo capítulo se presentan los fundamentos teóricos del estudio organizados en las dimensiones histórica – epistemológica, cognitiva y didáctica, los cuales giraron alrededor de aspectos que incidieron en el diseño didáctico para el aprendizaje de las cónicas vistas como lugares geométricas en el AGD Cabri Géomètre II Plus.

El tercer capítulo se construyó básicamente con los análisis preliminares proporcionados en el segundo, para llegar a configurar el *dispositivo experimental*, en donde se muestran y se sustenta la organización que se desarrolló en la experimentación. También se presentan los aspectos relativos a la metodología de *micro-ingeniería didáctica* que fundamentan el estudio propuesto y las unidades de análisis.

En el cuarto capítulo se pone de manifiesto el diseño de las situaciones didácticas y sus análisis *a priori*. Nuevamente los análisis *preliminares* dan los insumos para constituirlas, de allí que las situaciones didácticas retomen diferentes aspectos de cada una de las dimensiones y se conviertan en un diseño que se ajusta a las pautas de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

En el quinto capítulo se presenta la experimentación y análisis *a posteriori* de la puesta en acto de las situaciones diseñadas. En este penúltimo capítulo se describen y analizan los resultados de la experimentación de acuerdo con los datos tomados de diferentes instrumentos. Es en este capítulo donde se da la validación de la *micro-ingeniería didáctica,* al confrontarse los *análisis a priori* con los *a posteriori*.

En el sexto capítulo se presentan las conclusiones que corresponden básicamente al análisis de los resultados obtenidos en la puesta en acto de las situaciones diseñadas y sus respectivas interpretaciones. En dónde además se confrontan las hipótesis, la pregunta y los objetivos de investigación en relación a lo obtenido y realizado.

Finalmente es importante mencionar que este trabajo ha sido el fruto de la persistencia y gusto del investigador por los intereses en estudiar las *cónicas* en un AGD desde sus primeros inicios en la investigación en Educación Matemática cuando elaboró su Trabajo de Grado de pregrado en el programa de la Licenciatura en

Matemáticas y Física. Sin embargo, ahora la literatura e investigaciones lo llevaron a considerar otros aspectos a indagar cómo el papel e influencia de lo *puntual* y lo *global* en el aprendizaje de las *cónicas*, dando origen al desarrollo de esta investigación.

# CAPÍTULO 1.
# ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación problematizó algunos fenómenos relativos al aprendizaje de las *cónicas* (parábola, elipse e hipérbola) vistas como *lugares geométricos*, con la mediación del Ambiente de Geometría Dinámica Cabri Géomètre II Plus. Para este propósito, se diseñó y estudió una *secuencia de situaciones didácticas*, donde se plantearon problemas de *construcción geométrica* de estas curvas desde el enfoque puntual hacia lo global.

La metodología que orientó la investigación fue la denominada *micro-ingeniería didáctica*[1], a partir de la cual fue posible diseñar una secuencia que problematizó fundamentalmente las *construcciones geométricas* de las cónicas desde las perspectivas global y puntual. El escenario de experimentación fue un curso de *geometría analítica*[2] de un programa de Licenciatura en Matemáticas, de una universidad oficial[3], el cual contó con la participación de 25 estudiantes.

Para efectos de la presentación de los aspectos generales de la investigación se recurre a una organización en tres apartados, que se soportan en *esquemas*[4] para sintetizar los aspectos más relevantes de los mismos.

En este orden de ideas se presentan algunos aspectos relativos a la *problemática*[5] de las *cónicas* en tanto objeto de conocimiento matemático desde perspectivas como histórica, cognitiva, tecnológica y didáctica.

---

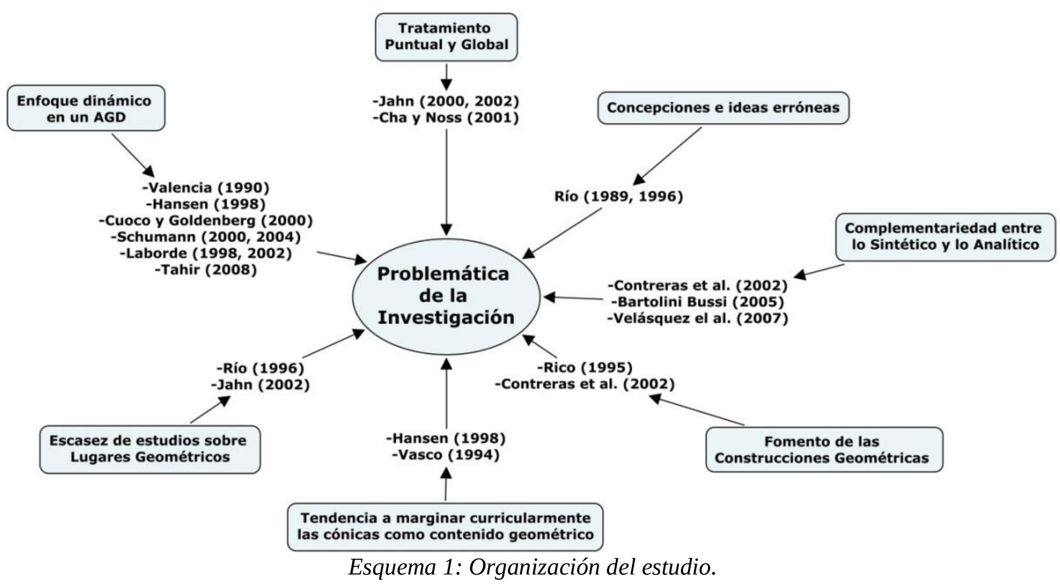
[1] En esta investigación se asumió la micro ingeniería didáctica desde la perspectiva propuesta por Artigue (1995).
[2] La *geometría analítica* se entendió como una rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las figuras geométricas a partir de un sistema de coordenadas, donde se pretende obtener la ecuación dado un lugar geométrico o dada la ecuación, determinar la gráfica o el lugar geométrico. Pero no se tomó en este trabajo a la *geometría analítica* en la perspectiva de la *matemática moderna*, que según Dieudonné (1987), se empezó a estudiarla, a la luz de la *teoría de las funciones analíticas de variables complejas* y *espacios analíticos*.
[3] Se decidió eliminar los datos de la Institución de Educación Superior para proteger el anonimato de los estudiantes participantes.
[4] Se asumieron los *esquemas* como una manera de organizar y sintetizar la información presentada, esto para efectos expositivos de algunas temáticas abordadas.

## 1.1. Presentación de la Problemática de Investigación

En el contexto de investigaciones en *Didáctica de las Geometría*, se problematiza el estudio de las *cónicas* y de esta manera, se reconoció varias categorías tales como:

1. Concepciones e ideas previas erróneas sobre las *cónicas*.
2. Complementariedad entre los enfoques Sintético y Analítico.
3. Fomento de las Construcciones Geométricas.
4. Tendencia a marginar curricularmente las cónicas como contenido geométrico.
5. Escasez de estudios sobre lugares geométricos.
6. Enfoque dinámico para el estudio de los lugares geométricos y las *cónicas* en un AGD; y finalmente,
7. La noción de lugar geométrico desde un tratamiento puntual y global.

En el Esquema 1, se ilustra las categorías anteriores a la luz de los autores tomados en consideración, y que circundan la problemática.



*Esquema 1: Organización del estudio.*

En adelante, se exponen cada una de las categorías señaladas anteriormente.

[5] En este documento, se entiende por *problemática* a un conjunto de problemas relacionados con alguna disciplina, actividad o situación que en este caso, se refiere al campo de la Educación Matemática. Y por *problema*, de acuerdo con el Diccionario de la Real Academia Española a, un planteamiento que se hace sobre una cuestión, asunto o situación cuya respuesta desconocida o solución debe obtenerse a través de métodos científicos.

### 1.1.1. Concepciones e ideas previas erróneas sobre las cónicas.

Según Ruiz (2003), el conocer las concepciones e ideas que los estudiantes tengan acerca de los conceptos matemáticos, le permite al profesor explicar los procedimientos, definiciones, ejemplos y errores que realizan, luego, a partir de un diseño de situaciones de enseñanza, se busca que los estudiantes superen aquellas concepciones o ideas que les provocan errores.

Desde esta perspectiva, algunas investigaciones han puesto en evidencia que existen algunas *ideas* o *concepciones previas erróneas* de la gran mayoría de los estudiantes de la educación media en relación con las *cónicas*:

> El conocimiento que se tiene de las cónicas son de tipo físico y social pero no de tipo lógico–matemático. Físico en el sentido que no solamente se le ha asignado una abstracción empírica; y social en el sentido que se le ha asignado los nombres convencionalmente aceptados a esas curvas en el entorno socio–cultural (Río-Sánchez, 1989. p. 109).

Según Río-Sánchez (1996), entre las ideas erróneas más recurrentes que se observaron en un estudio de 305 estudiantes españoles sobre las *cónicas* con un promedio de edad de 17 años se encuentran:

- Las propiedades intrínsecas de las *cónicas* que se obtienen perceptualmente dándole una forma pero la adquieren de manera equivocada, por ejemplo: afirmando que un óvalo es una elipse, ó que un arco y dos semirrectas tangentes en sus extremos son una parábola,
- Que todas las *cónicas* se pueden dibujar perfectamente empleando sólo regla y compás,
- Que los tres tipos de *cónicas* no guardan ninguna relación estructural entre sí, ni directa ni indirectamente,
- Que una parábola (o cualquier curva) no es un objeto geométrico independiente del sistema de referencia, llevando a considerar que una curva no tiene infinitas ecuaciones dependiendo del sistema escogido sino una sola ecuación,
- Que los alumnos perciben que las *cónicas* están poco conectadas con la realidad.

### 1.1.2. Complementariedad entre los enfoques Sintético y Analítico.

Una de las estrategias que se reconocen como potencialmente útiles para superar algunos de los obstáculos y dificultades que generan algunas de las concepciones erróneas señaladas en el anterior ítem, son aquellas que reivindican la importancia de establecer una *complementariedad* entre el enfoque *sintético* y el *analítico* en el estudio de las *cónicas*. En general, (Bartolini Bussi, 2005; Contreras, Contreras & García, 2002; Velásquez, Apreza, Lluck, Moreno & Valdez, 2007), estos autores se muestran de acuerdo en que esta *complementariedad* juega un papel importante en la adquisición y desarrollo de habilidades conceptuales y procedimentales por parte de los estudiantes en relación con el aprendizaje de las *cónicas*.

Así por ejemplo, Bartolini Bussi (2005), señala que:

> No es posible construir el significado de las cónicas a través de un único enfoque, como por ejemplo, el más difundido, el algebraico. Esto debido a que no es suficiente con estudiar los aspectos analíticos dado que una gran cantidad de significados se pierde con solo este enfoque. (p. 39)

De otra parte, como señala Contreras et al. (2002), el estudio de las *cónicas* ha sido relegado en el currículo de la educación secundaria en España, y la consecuencia es que los estudiantes de primer año de universidad desconocen por completo esta temática. Así mismo, subrayan el tratamiento excesivamente analítico de las *cónicas*, en tanto resultado de desligar lo *sintético* de lo *analítico* en la mayoría de cursos y libros de texto escolares de *geometría analítica*. De esta manera, se reconoce la necesidad de conectar los dos enfoques, lo cual da lugar a una propuesta integradora de la visión sintética y analítica para el estudio de la elipse. Para establecer este puente entre lo sintético y lo analítico, recomiendan que el profesor que oriente este tipo de cursos, integre un "universo de construcciones, tanto sintéticas como analíticas, extenso y rico en significados, incorporando elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas" (Contreras et al. 2002, p. 115).

En este mismo sentido, Velásquez et al. (2007), establecieron que la forma clásica de presentar la *geometría analítica* ha afectado negativamente su aprendizaje. Para estos autores, se entiende que en la presentación clásica de este tipo de *geometría*, predominan los contenidos temáticos desde un punto de vista algebraico y formalista sin tener en cuenta la formación de procesos, estrategias y actitudes en los estudiantes. Los efectos de abordar la forma clásica de esta rama de las matemáticas incluyen entre otros:

> Los alumnos no pueden realizar la representación coordinada de un contenido. En un estudio de Arcos (como se cita en Velásquez et al., 2007) particularmente se dan dificultades en los estudiantes para mirar las figuras geométricas como objetos algebraicos y viceversa.
> Hay limitaciones en la formación de los conceptos principales de la *geometría analítica*, en su lugar, se tiene una memorización de las definiciones carentes de sentidos y significados.
> No contribuye a desarrollar las habilidades matemáticas como comprender, visualizar y comunicar las actividades matemáticas universales que Bishop (1999) enuncia como son: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar.
> Presenta limitaciones en el abordaje de problemas en contextos auténticos que aseguren el interés de los alumnos por resolverlos y, por ende no se contribuye en la formación de recursos intelectuales para trabajar este campo (Velásquez et al. 2007, p. 264).

De lo anterior, se reconoce la necesidad de coordinar los enfoques analíticos y sintéticos como una estrategia para superar la falsa división curricular entre las dos geometrías: una, la sintética, presente en la *geometría* escolar y primeros cursos universitarios; y la otra, la analítica, propia de la Educación Media y de cursos universitarios más avanzados.

### 1.1.3. Fomento de las Construcciones Geométricas.

Las investigaciones en Didáctica de la *geometría analítica*, suelen señalar la importancia de no subestimar ni dejar de lado todo el sistema lógico deductivo de axiomas, postulados, definiciones, teoremas, demostraciones que emergieron en una época anterior a Descartes y también recomiendan tener en cuenta, las *construcciones geométricas* de las curvas *cónicas* como otra competencia básica, y como un proceso importante en la actividad matemática asociada al razonamiento y comunicación de saberes matemáticos. Por lo tanto, se recomienda poner en acto *procedimientos de tipo geométrico*. Estos son descritos por Rico (1995) como:

> Los procedimientos de tipo geométrico son las rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, ya sea para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. También se incluye el dominio y empleo correcto de determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos. También describe unos procedimientos relacionados con gráficas y representación que se desarrollan en los distintos campos de las matemáticas. Cuando se hace una representación lineal de los números, cuando se emplea una gráfica para expresar una relación entre dos variables, o cuando se simboliza una fracción sobre una "figura" se están aplicando

> procedimientos de tipo gráfico que suponen el empleo de determinados convenios para dar una imagen visual de un concepto o una relación. (p. 20)

En este sentido, Contreras et al. (2002) sostienen que para lograr una ruptura con algunas de las ideas previas de los alumnos, respecto a la comprensión de las curvas, se debe facilitar el paso fluido entre los métodos sintéticos y analíticos, donde la vía para efectuar este recorrido es por las distintas construcciones de éstas. Finalmente, señalan, refiriéndose a aspectos de la enseñanza, que es necesario hacer convivir las técnicas[6] sintéticas y analíticas. En este sentido, afirman:

> Pueden conseguirse efectos positivos para los estudiantes, ya que por una parte, estos pueden tener una participación más activa y reflexiva en la elaboración del objeto matemático las cónicas; por otra, se coloca al estudiante en disposición de afrontar los estudios universitarios con amplios conocimientos geométricos sobre las cónicas que, de otro modo, quedarían focalizados en aspectos puramente analíticos. (p. 129)

### 1.1.4. Tendencia a marginar curricularmente las cónicas como contenido geométrico.

Aunque se reconoce que los métodos de la *geometría analítica* son, aspectos claves en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en distintos niveles de escolaridad, desafortunadamente, en el currículo colombiano su enseñanza sigue siendo marginal como consecuencia del poco espacio que se brinda a la enseñanza de la geometría y al exagerado tratamiento algebraico de las ecuaciones de segundo grado que representan las *cónicas*. Estas circunstancias se traducen en la pérdida gradual del conocimiento de las propiedades intrínsecas de las *cónicas*. Al referirse a esta situación en estudiantes que ingresan a la Educación Superior Vasco (1994) señala:

> Las reformas a las matemáticas escolares de los años cincuenta y sesenta eliminaron la geometría como curso paralelo al álgebra; relegaron los temas geométricos para el final de los programas, en donde corrieron el riesgo de quedar sepultados por no llegarse nunca hasta allá en el desarrollo real de los programas en la mayoría de los establecimientos, y trataron de remplazar las pruebas de tipo sintético por elegantes pruebas de tipo algebraico que utilizaban poderosos teoremas del álgebra lineal, o de tipo analítico que

[6] Las "técnicas" en los términos de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (Chevallard, 1999), se definen como las maneras de llevar a cabo o de saber hacer una tarea matemática. En la noción de *técnica* se incluyen desde formas o maneras consideradas como algorítmicas hasta las que no lo son.

> aprovechaban propiedades de las funciones utilizadas para describir los lugares geométricos. (p. 187)

Así mismo, Hansen (1998) opina que la enseñanza de las secciones cónicas vistas como lugares geométricos, debería enfatizar el estudio de estos objetos como secciones planas en superficies *cónicas*, o - para la elipse - en cilindros. También reitera que "al principio esta aproximación puede parecer muy difícil pero hay muchas ventajas valiosas. En particular, esto ayuda a desarrollar el entendimiento espacial" (p. 13). En esta misma perspectiva, Hansen (1998) subraya que "los métodos de la *geometría analítica* son, por supuesto, de importancia fundamental y en la mayoría de los países pertenecen al currículo del nivel medio". (p. 13).

De otra parte, se considera que el enfoque tradicional basado en las descripciones algebraicas de las *cónicas*, ha hecho que su tratamiento sea artificial y muy remoto en aplicaciones, llevándolas a un estado cercano a la desaparición del currículo, lo que se considera como un grave error desde un punto de vista curricular.

### 1.1.5. Escasez de estudios sobre lugares geométricos.

A partir de la revisión de los currículos escolares de España, Río-Sánchez (1996) determinó la ausencia del concepto de *lugar geométrico* cuando se estudian las *cónicas*, que sí aparece cuando se estudian las *mediatrices*, *bisectrices* y *circunferencias*. Este concepto solo logra extenderse a las *cónicas* en los currículos para estudiantes en la modalidad de *bachillerato científico* donde los contenidos matemáticos son estudiados con mayor profundidad y rigor.

Esta problemática también es abordada por Jahn (2000, 2002) quien señala que la noción de *lugar geométrico* es introducida naturalmente en el estudio de las transformaciones, una vez que ellas son definidas como una aplicación que mapea puntos del plano sobre el mismo plano y que no son fácilmente entendidas por los estudiantes. En efecto, a partir del análisis de libros de texto escolares franceses determinó que:

> Esta noción aparece, generalmente, en el contexto de las transformaciones, desde una interpretación funcional o puntual, mostrando que aquellas transformaciones son herramientas muy eficientes para solucionar problemas de lugares geométricos pero muy poco trabajadas en la escuela. Por otra parte, el término '*lugar geométrico*' puede ser utilizado en el contexto de la geometría sintética o perspectiva global cuyo significado no es el mismo que el puntual (Jahn, 2002, p. 78).

En sus investigaciones a nivel de la escuela secundaria, Jahn también encontró que el término *lugar geométrico* se presenta como una trayectoria (punto móvil sobre una curva) de manera dinámica y que esta interpretación aludiendo al movimiento correspondía a una necesidad didáctica: evitar el uso de cuantificadores y del lenguaje de la teoría de conjuntos como una fase intermedia, con la intencionalidad de que los estudiantes puedan comprender la concepción de punto orientado de una transformación.

En cuanto concierne a la integración de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la *geometría,* los tópicos geométricos estudiados por investigadores a nivel internacional han sido muy heterogéneos y se han basado en marcos teóricos dirigidos a abordar la complejidad de los procesos de aprendizaje en la *geometría*, pues así lo señaló el estudio de Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006). La mayoría de temáticas investigadas por estos autores, resaltan que son transversales y son abordadas como actividades de *construcción geométrica* y por supuesto de *demostración,* y que son recurrentes en los temas de investigación en lo última década.

Por ejemplo, Laborde et al. (2006) afirman que los conceptos tradicionales de la *geometría euclidiana* han recibido más atención por parte de los investigadores que otros conceptos tales como las *transformaciones geométricas* y los *lugares geométricos*. Dicha insuficiencia a nivel de la investigación relativa a la utilización de tecnología en la enseñanza sobre el estudio de los *lugares geométricos* es recurrente (Laborde et al. 2006; Jahn, 2002).

En general, la noción de *lugar geométrico* en el estudio de la *geometría escolar* y *universitaria* pasa desapercibida o subsumida en otros conceptos y procesos matemáticos. Esta circunstancia da lugar a que muchos estudiantes no se apropien de una definición clara de esta noción.

#### 1.1.6. Enfoque dinámico para el estudio de los lugares geométricos y las cónicas en un AGD.

La conjugación de los AGD con las *construcciones geométricas*, así como la complementariedad de los enfoques sintético y analítico, es posible que se pongan en armonía en un diseño didáctico relativo a la enseñanza y aprendizaje de la *geometría escolar*.

En este sentido, Valencia (1990) recomienda que se desarrolle la imaginación geométrica, impulsando una concepción geométrica dinámica y ejercitando la imaginación espacial. Para este autor, lo dinámico lo asemeja con una película en movimiento y recomienda además el uso del computador para propiciar el dinamismo de los objetos geométricos. Al comenzar con los temas de la *geometría analítica*, propone plantear primero problemas geométricos que permitan hacer el tránsito de la *geometría* al *álgebra*. Por ejemplo, introduciendo ideas geométricas sin coordenadas, después construir las curvas, para luego hablar de las aplicaciones y finalmente, terminar el estudio con coordenadas, formalizando la resolución y mostrando algunas de las aplicaciones resolviendo algunos problemas prácticos. Dicho de otra manera, este autor destaca que se debe iniciar desde la *geometría sintética* para arribar a la *geometría analítica* cuando se resuelven problemas de geometría.

De manera paralela, en un enfoque complementario al uso de computadores, Hansen (1998) opina que en la enseñanza de la *geometría analítica*, las gráficas hechas en computador pueden resultar útiles para familiarizar a los alumnos con las secciones cónicas, pero también es importante mostrar modelos reales de las formas geométricas que se puedan tocar y sentir.

En la misma perspectiva sobre la enseñanza de las *cónicas*, Cuoco y Goldenberg (2000), declaran que los AGD pueden estimular a los estudiantes para desarrollar imágenes mentales de las *funciones* que se adaptan especialmente para el análisis. En los experimentos mentales realizados por estos investigadores sobre las secciones cónicas vistas como lugares geométricos, encontraban que el comportamiento de fenómenos geométricos de cambio continuo y los aparatos mecánicos (articulaciones, mecanos, construcciones con chinchetas y cuerdas así como otros artefactos por el estilo) pueden proporcionar a los estudiantes experiencias de “puntos móviles” y sus huellas como caminos que se recorren.

También enfatizan que han existido ideas sobre la continuidad (con respecto a la topología de las líneas reales) que han estado implicadas en los trabajos de muchos geómetras clásicos como por ejemplo, en las cavilaciones y respuestas sobre las paradojas de Zenón, que muestran que la idea de movimiento ha estado presente en las mentes de los matemáticos desde la antigüedad. Pero como la continuidad y el movimiento no eran conceptos evidentes en los *Elementos* de Euclides, entonces estas temáticas no fueron explícitamente incluidas en la mayoría de los cursos de *geometría* en la Europa Occidental y en los Estados Unidos. Tales ideas, sin embargo, han sido parte de la pedagogía y la tradición en muchos profesores de secundaria en estos países.

De esta manera, señalan que un AGD les permite a los estudiantes dibujar la traza de un punto sujeto a algunas restricciones. Este “punto traza” se mueve como resultado de la manipulación directa de uno o más puntos de la construcción; en otras palabras, es una *función* de esos puntos. Cuando los estudiantes realizan esas construcciones, están construyendo modelos computacionales de las funciones, y el comportamiento de tales objetos matemáticos puede ser experimentado de manera kinestésica cuando los estudiantes manipulan sus creaciones. Además, algunos AGD permiten a los estudiantes tomar muestras de esas funciones en un conjunto que puede ser manipulado por otra función.

Por otra parte, con respecto a los fenómenos sobre visualizar la traza de puntos cuyo movimiento depende del movimiento de otros puntos, es decir, como un *lugar geométrico* de puntos que se generan en una pantalla de computador, Schumann (2000) ha promulgado directrices para seguir investigando sobre los alcances y limitaciones al emplear los AGD y determina que estos ambientes interactivos pueden ser aplicados para enseñar y aprender *geometría*, en particular, para la generación de curvas y lugares geométricos con los siguientes tratamientos:

> Para investigaciones en la posición y tipo de conjuntos de imágenes en las funciones,
> Para la construcción de curvas algebraicas (por ejemplo para preparar su descripción analítica) y
> Para la investigación de funciones en figuras geométricas (un nuevo enlace entre la geometría y las funciones reales) (Schumann, 2000, p. 12).

Posteriormente, Schumann (2004) propone en esta línea de trabajo sobre lugares geométricos, que se aborde también de manera sistemática el estudio de las *curvas algebraicas*[7] “simples”[8], tales como las *cónicas*[9], en el marco de proyectos de cursos, usando tanto un AGD como un *Software de Álgebra Computacional*[10] en la *geometría escolar* y primeros cursos de *geometría universitaria*. Al trabajar las

---

[7] Según Schumann (2004) y en términos generales, en el campo de la *geometría algebraica* y *geometría analítica*, las curvas algebraicas son representadas de la siguiente manera: una curva algebraica es el conjunto de ceros de un polinomio en $x$ e $y$ tal que:

$$\{(x,y): \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{ij}\, x^i\, y^j = 0\}, \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

en el cual $a_{ij} \in \mathbb{R}$; $\max(i+j)$ con $a_{ij} \neq 0$ es el grado de la curva algebraica. Esta ecuación algebraica es un objeto del álgebra mientras que el gráfico correspondiente es un objeto de la geometría sintética.

[8] Schumann (2004) define una curva algebraica como “simple” en el contexto del uso de un AGD para enseñanza de esta temática, si los parámetros de construcción global son inducidos como coeficientes enteros en la correspondiente ecuación algebraica con respecto a un sistema apropiado de coordenadas cartesianas. Para este investigador, casi todas las curvas algebraicas clásicas pueden ser tratadas como curvas simples.

[9] Generalmente las *cónicas* se definen en la *geometría analítica*, como curvas que al representarlas algebraicamente su ecuación es un tipo de ecuación general de segundo grado en forma de polinomio $P(x,y) = 0$ con la siguiente estructura: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con sus respectivos parámetros dependiendo del tipo de cónica.

[10] De acuerdo con García et al. (1995) los *Software de Álgebra Computacional* (o de *Calculo Simbólico*), comúnmente denominados en la literatura investigativa en el campo de la integración de TIC en la Educación Matemática, por sus siglas en inglés, como CAS (*Computer Algebra System* (o *Software*)), se define como tecnologías especializadas en la manipulación de expresiones algebraicas sobre fórmulas matemáticas con elementos numéricos y/o simbólicos para efectuar cálculos matemáticos. Este tipo de software trabaja con algoritmos algebraicos y permite utilizar expresiones con símbolos sin que estos tengan ningún valor asignado.

curvas algebraicas desde este tratamiento computarizado, señala varios puntos que se favorecen, entre ellos se citan:

> Las curvas algebraicas cierran la brecha entre la *geometría sintética* y la *algebraica*.
> Ofrecen una variedad de problemas, de estrategias de solución y de relaciones de interés matemático.
> Son de una naturaleza que generaliza.
> Apoyan actividades de modelación matemática.
> Mejoran el pensamiento funcional y operativo.
> Juegan un papel importante en la historia de matemáticas.
> Estéticamente son curvas bellas y agradables (Schumann, 2004, p. 2).

Así mismo, propone un método para el tratamiento de las curvas algebraicas, en primera instancia, construyéndolas solo con regla y compás; usando no más que dos parámetros que definen la forma y la posición de la curva. En este sentido, Schumann (2004) afirma que los AGD pueden ilustrar la generación punto por punto usando el modo de traza, el cual apoya la interpretación de conjunto de puntos de las curvas.

Con respecto a las variaciones dinámicas de los valores de los parámetros (por ejemplo, para investigar varios casos y para generar familias de curvas), continúa afirmando que el usuario requiere que sea capaz de generarlas como objetos gráficos referenciables y no solo como estados en la pantalla. La gráfica correspondiente en un AGD es generada por la interpolación dinámica de puntos de apoyo (con coordenadas redondeadas dependiendo del sistema aritmético).

De la misma manera, Schumann (2004) asegura que obtener las ecuaciones algebraicas $P(x, y) = 0$ a partir de la construcción sintética de una curva es una actividad interesante y fructífera desde un punto de vista matemático debido a que esta obtención proporciona, independiente del método experimental e inductivo de conocimiento encontrado, la comprensión matemática y la argumentación para las ecuaciones algebraicas producidas por el AGD Cabri Géomètre.

En el caso de las *cónicas*, una elaboración analítica-geométrica de la ecuación algebraica puede ser obtenida a partir de una *construcción geométrica* adecuada. Esto no es posible en general en el caso de las *curvas algebraicas de grado superior*, debido a que se requiere una representación paramétrica o una representación en coordenadas polares y una eliminación o substitución de los parámetros de esas representaciones, los cuales pueden inducir dificultades en los problemas de cálculo.

En este sentido, argumenta que su método para el tratamiento de las curvas algebraicas “simples”, a partir de su construcción desde la *geometría sintética*, busca combinar el álgebra con métodos inductivos y deductivos requiriendo solo conocimientos algebraicos básicos, y de esta manera propuso un método para el tratamiento combinado de AGD y CAS, el cual contempla siete pasos:

> 1. Construcción. 2. Variación de los parámetros de la construcción. 3. Incrustar la curva algebraica construida en un apropiado sistema de coordenadas cartesianas. 4. Determinación automática de la ecuación algebraica $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$ de la curva algebraica con respecto al sistema de coordenadas seleccionado y evaluar la ecuación. 5. Articulación de los parámetros de la construcción con los puntos de coordenadas enteras y con la cuadrícula instantánea para la restricción de los parámetros enteros de la construcción. 6. Identificación experimental-inductiva de los coeficientes en $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$ y el control de dichos coeficientes como una función de los parámetros de la construcción. (La verificación gráfica inductiva de $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$ para parámetros no enteros al utilizar un CAS, por ejemplo, DERIVE). 7. Verificación Matemática de $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$. La obtención directa analítica-geométrica de $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$ a partir de una descripción de la construcción de la curva o, si no es posible: la obtención de la representación paramétrica o en coordenadas polares a partir de la descripción de la construcción; la generación dinámica de la curva algebraica de acuerdo con dichas representaciones para el control; la eliminación o substitución de las variables o parámetros que están en juego, también usando un Software de Álgebra Computacional (Schumann, 2004, pp. 3-4).

Laborde (1998b y 2002) por su parte, cuestiona que las transformaciones que habitualmente se trabajan en ambiente de papel y lápiz, “en realidad no transforman nada”. Es decir, las transformaciones que se estudiaban normalmente en papel como la traslación, la rotación o la simetría, transforman una recta en una recta, un triángulo en un triángulo, un círculo en un círculo, sin cambiar la forma ni el tamaño. Esto se ha convertido en algo muy banal para los estudiantes ya que no logran ver una transformación de una recta en otra cosa. Con los AGD se puede confrontar a los estudiantes con otros tipos de transformaciones en las que no necesariamente se conserva la forma, el tamaño o la orientación. Por esta vía las transformaciones clásicas recobrarían interés. Este tipo de situaciones didácticas en los AGD son interesantes según Laborde, porque generan una motivación que obliga a encontrar la prueba.

Laborde (1998b y 2002) sugiere que en lugar de plantear un ejercicio formal, el profesor propone un ejercicio que responde a una exigencia intelectual y utiliza una TIC como medio para crear una curiosidad intelectual. Esta investigadora resume que las nuevas tareas que posibilitan la construcción de la noción de objeto variable potenciada por los AGD son:

> Construcción de diagramas dinámicos con una trayectoria impuesta; reproducción de diagramas dinámicos; formulación de teoremas, expresando el resultado como un cambio de condiciones; explicación del comportamiento de las figuras dinámicas y predecir un fenómeno visual tal como los problemas involucrados en la determinación de lugares geométricos (Laborde, 1998b, p. 115).

Por último, en la misma perspectiva de Schumann (2004), Tahir (2008) propuso un enfoque para el estudio de las *cónicas* usando un AGD para explorar sus propiedades a través de las gráficas. Además, recomienda empezar a graficar las *cónicas* y esbozar sus propiedades basados en sus *construcciones geométricas* y afirma que una experiencia presentada de esta manera, permitiría formar y desarrollar el concepto de *lugar geométrico* de estas curvas.

### 1.1.7. La noción de lugar geométrico desde un tratamiento puntual y global.

De acuerdo con Jahn (2000), tradicionalmente, la noción de *lugar geométrico* en el contexto de la *geometría sintética* y *estática*, es percibida como un conjunto de puntos que satisfacen una cierta propiedad, y este conjunto puede ser visto o bien de manera *global* o bien *puntual* (punto por punto). De esta manera, Jahn (2000) define el *lugar geométrico* tal como aparece comúnmente, en muchos libros de texto, de la siguiente manera:

> Son todos los puntos de una figura que satisfacen una misma propiedad, y que todo punto que satisface tal propiedad entonces pertenecen a la figura, decimos en consecuencia que la figura es un lugar geométrico, o el conjunto de puntos que satisfacen los dos mencionados aspectos. (p. 92)

Por esta razón, un *lugar geométrico* es un conjunto de puntos que poseen una cierta propiedad: una condición característica que determina si un punto pertenece al conjunto o no.

En consecuencia, desde un punto de vista curricular, Jahn (2002) encontró que los *lugares geométricos* aparecen en escena en la escolaridad francesa, en dos períodos de tiempo: en los primeros años lectivos, en el marco de la *resolución de problemas* de lugares geométricos que involucran el estudio de las *transformaciones geométricas* vistas como objetos matemáticos que se estudian de manera explícita; y luego vuelve a manifestarse en los últimos años lectivos, una vez que es definido el *lugar geométrico* pero en dos marcos, cuando se estudian *funciones* y cuando se estudian las *transformaciones geométricas* pero esta vez desde una perspectiva *funcional*.

En su estudio Jahn (2002) afirmó que cuando se estudian las *transformaciones geométricas* por primera vez, los lugares geométricos no operan desde una perspectiva *funcional*, pero en cambio sirven como medio de transición entre: la definición de una figura en el sentido euclidiano, operando de manera *Global* en ella (Jahn le denomina nivel 1) y la definición de la figura como un conjuntos de puntos (Jahn le denomina nivel 2). Con esta transición entonces existe un desplazamiento en el significado usando la noción de *lugar geométrico*, y por lo tanto se cambia a una definición que utiliza un conjunto de *puntos* que opera sobre *puntos* del plano sobre el mismo plano, es decir, se convierte en una definición *Puntual*, o bien sobre figuras como partes constitutivas del plano.

De ahí que, Jahn (2000, 2002), propuso analizar las posibilidades que tuvieron los estudiantes para establecer relaciones entre esos dos aspectos, que denominó *Global* (en la *geometría sintética*) y *Puntual* (en una interpretación funcional). Es en este contexto donde destacó la intervención de la noción de *lugar geométrico* y el empleo mediador del AGD Cabri Géomètre para la comprensión de las transformaciones geométricas. De la misma manera, Jahn (2002) recalcó que el *lugar geométrico* tiene un doble significado: éste legitima el cambio de una figura sintética (un punto de vista global) a una figura como un conjunto de puntos, y éste permite recomponer la figura.

De otra parte, Cha y Noss (2001) muestran en su estudio que la comprensión global es la tendencia dominante en los estudiantes cuando ven la figura completa, en contraste a la comprensión local o puntual que no es muy bien recibida, y que aparece cuando se estudian las propiedades de puntos individuales del *lugar geométrico*.

En este punto se considera central la posibilidad de traducir la idea de *lugar geométrico* desde un punto de vista euclidiano a un punto de vista analítico, reconociéndose igualmente la importancia de disponer de diferentes sistemas de representación como los que provee el AGD Cabri Géomètre para el tratamiento de las *construcciones geométricas* incluso antes de que los estudiantes utilicen las representaciones algebraicas y simbólicas.

## 1.2. Presentación y Contextualización del Problema

Las categorías presentadas y sus descripciones correspondientes permitieron reconocer la existencia de una problemática compleja alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las *cónicas* en distintos niveles de escolaridad.

No obstante a nivel nacional recién empiezan a realizarse investigaciones alrededor de estos procesos. A partir de este reconocimiento se diseñó un *dispositivo* dirigido a analizar la correspondencia entre algunas de las caracterizaciones del ámbito internacional y el ámbito local.

Este dispositivo se apoyó fundamentalmente en una serie de encuestas[11] dirigidas a identificar y caracterizar algunas de las ideas previas de los estudiantes participantes de esta investigación antes de que se pusiera en acto la secuencia de situaciones las cónicas en el curso de *geometría analítica*. (Ver Anexo No. 1).

Las encuestas ofrecieron un panorama de las concepciones e ideas previas de los estudiantes que se correspondieron en buena medida con la caracterización de las concepciones e ideas erróneas señaladas por Río-Sánchez (1989). Se destaca el hecho que la mayoría de los estudiantes no conciben las *cónicas* como lugares geométricos y aún esta definición les resultó vaga y ambigua. También se hizo evidente que ellos asociaron la realización de las representaciones gráficas de las *cónicas* usando procedimientos de construcción geométrica utilizando regla y compás de manera análoga a como se efectúan las representaciones gráficas de objetos geométricos usuales en la *geometría euclídea* tales como triángulos, rectas, circunferencias, rectángulos, entre otros.

Estos hallazgos preliminares revelaron la pertinencia e importancia de estudiar aspectos relativos a las *cónicas*, en particular aquellos que apelan a la noción de *lugar geométrico*. Este asunto se torna todavía más complejo cuando se lo analiza en el marco de la integración de los AGD en el ámbito educativo. En este punto se reconoce la posibilidad que ofrecen tales ambientes de estudiar las cónicas enfatizando en las propiedades geométricas intrínsecas de cada una de ellas desde una perspectiva de la *construcción geométrica*, como un complemento al enfoque algebraico tradicional que comúnmente se privilegia en su enseñanza.

Como antecedentes de este tipo de estudios se encuentran los trabajos de Jahn (2000, 2002) que problematizan el uso de las construcciones puntuales y globales en

[11] Es preciso señalar que las encuestas de esta investigación se hicieron con la herramienta ***consultas*** de la plataforma de aprendizaje virtual Moodle. La consulta como herramienta es una actividad sencilla en el ambiente virtual, la cual consiste en que el Profesor hace una pregunta y especifica una serie de respuestas entre las cuales el estudiante debe elegir una. Esta herramienta organiza los datos en diagramas de barras.

un AGD para favorecer el aprendizaje de la *geometría transformacional*. La extensión de este modelo al trabajo con las cónicas se hace en el marco del estudio de la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II Plus a partir de lo puntual y lo global.

De igual importancia para contextualizar la investigación fueron los trabajos de Laborde (1998b, 2002, 2006) y en particular sobre una tipología de tareas diseñadas para este AGD, que fueron utilizadas en el estudio de las *construcciones geométricas* globales y puntuales de las *cónicas* por los estudiantes participantes del estudio.

Los estudios e investigaciones relativos a la integración de los AGD en la enseñanza de la *geometría transformacional* realizados por Jahn (2000, 2002) revelaron que se empieza con el trabajo global de las figuras. En este caso los AGD son considerados como herramientas que pueden hacer revolucionar las concepciones de los estudiantes hacia la noción de *transformación puntual*, propiciándose un avance en el estudio de las funciones matemáticas. Este antecedente sirvió como referente para examinar con cierta profundidad la noción de *lugar geométrico* en las *cónicas* y para estudiar el papel mediador del Cabri Géomètre a partir de la ejecutabilidad de las representaciones que este AGD proporciona.

Las investigaciones de Jahn buscaron analizar las condiciones y posibilidades de la integración de los AGD en la enseñanza de la *geometría transformacional* y de esta manera ofreció evidencia de que el cambio de una *figura sintética* (un punto de vista *global*) a una *figura como un conjunto de puntos* (un punto de vista *puntual*) puede aportar al proceso de recomposición y a un aprendizaje más eficiente de las propiedades geométricas vinculadas a situaciones didácticas relativas a la *geometría transformacional*.

En esta investigación se estudió cómo a partir de la mediación de un AGD, se puede articular el enfoque de construcción geométrica de los lugares geométricos punto por punto de las cónicas con el proceso de construcción de las cónicas de manera global y el impacto de este proceso en el aprendizaje de la noción de *lugar geométrico* por parte de estudiantes universitarios.

A partir de las consideraciones señaladas se formuló el siguiente problema de investigación:

¿Qué *fenómenos didácticos* genera la *mediación* del AGD *Cabri Géomètre II Plus*, en la *actividad matemática* de los estudiantes que se inician en un curso de *geometría analítica*, en el marco de *construcciones geométricas* de las *cónicas* como *lugares geométricos* desde lo *puntual* y lo *global*?

Como hipótesis de investigación (en adelante, HI) asociadas a este problema de investigación se plantearon las siguientes:

**HI 1**:

- La transición de lo puntual a lo global y viceversa en las *construcciones geométricas* estáticas de las cónicas como lugares geométricos puede dar lugar a través de la mediación del AGD Cabri Géomètre II Plus a la emergencia de *construcciones geométricas globales dinámicas*[12] de las cónicas como lugares geométricos.

**HI 2**:

- El aprendizaje de las propiedades matemáticas de las *cónicas* puede iniciarse desde el enfoque sintético, gracias a la puesta en acto de situaciones didácticas relativas a las *construcciones* de lugares geométricos en AGD y a partir de éstas abordarse el análisis algebraico de sus *propiedades*.

[12] Se entiende que una *construcción geométrica* es dinámica, en la medida que se puede realizar en un AGD, y por el hecho de que existen puntos móviles que van a estar sobre un dominio y que pueden arrastrarse sobre éste y que además están conectados con algún otro punto que va generando el lugar geométrico. Esta conexión se hace a través de una *construcción geométrica* que hace invariante las propiedades de este último punto a medida que se mueve un primer punto dado en el dominio.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo General.

- Identificar y analizar algunos fenómenos didácticos que emergen por la mediación del AGD Cabri Géomètre II Plus en estudiantes de un curso de geometría analítica cuando realizan construcciones geométricas de las cónicas como lugares geométricos desde lo puntual y lo global.

### 1.3.2. Objetivos Específicos.

- Diseñar desde los referentes de la *Teoría de las Situaciones Didácticas* y desde la *micro-ingeniería didáctica* una *secuencia de situaciones didácticas* para el estudio de las *cónicas* como lugares geométricos en el AGD Cabri Géomètre II Plus.

- Analizar la actividad matemática de los estudiantes de un curso universitario de *geometría analítica* cuando se aborda la construcción geométrica de las *cónicas* a partir de una caracterización puntual y global mediado por el AGD *Cabri Géomètre* II Plus.

# CAPÍTULO 2.
# ANÁLISIS PRELIMINARES: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL DISEÑO DIDÁCTICO

Este capítulo recoge los *análisis preliminares* realizados en el marco de la metodología de *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995; Douady, 1995). Dentro de los rasgos característicos de esta metodología, se distinguen cuatro fases bien diferenciadas:

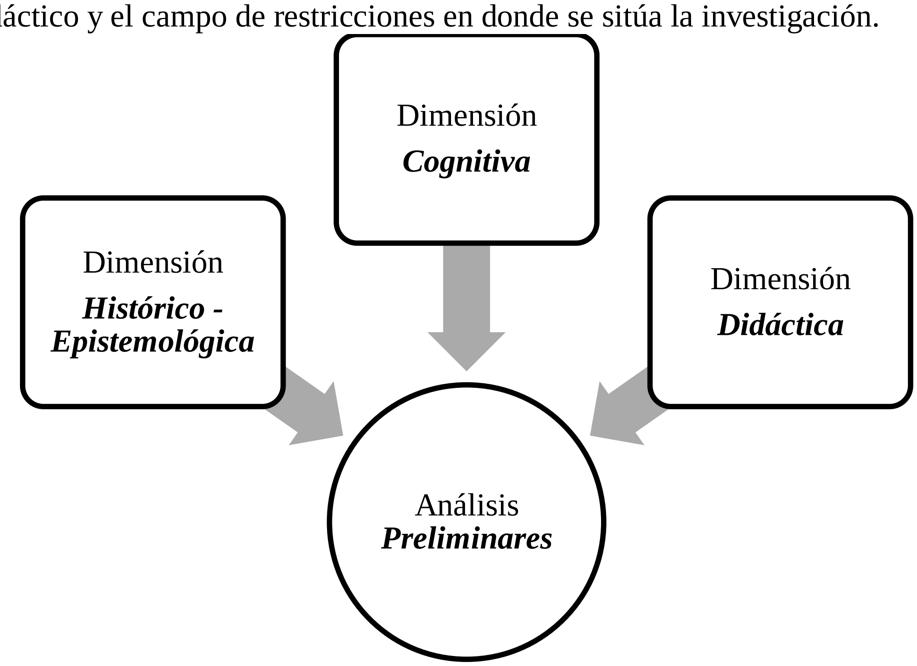
1. Análisis preliminares.
2. Diseño y análisis *a priori* de las situaciones diseñadas.
3. Experimentación.
4. Análisis *a posteriori* y evaluación.

En cuanto se refiere a los *análisis preliminares* es preciso señalar que éstos se basan en unos análisis previos, que según Artigue (1995) son:

> El análisis *epistemológico* de los contenidos de la enseñanza,
> El análisis de la *enseñanza tradicional* y sus efectos,
> El análisis de las *concepciones* de los estudiantes y las *dificultades* y *obstáculos* que caracterizan su desarrollo,
> El análisis del *campo de las restricciones* en las que tendrá lugar la producción didáctica,
> La toma en cuenta de los *objetivos* específicos de la investigación. (p. 38)

Estos análisis previos sirven de base para el diseño de la *micro ingeniería didáctica* que posteriormente será depurada y estructurada durante las distintas fases del trabajo. En esta investigación esta tarea se complementa con la definición de los registros que van a ser estudiados y que van emergiendo a partir del trabajo de los estudiantes participantes. Los *análisis preliminares* se centran en tres dimensiones, que son el resultado de la perspectiva sistémica adoptada (Ver Esquema 2). Estas incluyen entre otras:

- La *dimensión histórico - epistemológica*: que proporciona una historicidad de los conceptos matemáticos (Artigue, 1989) que la enseñanza usual tiende a presentar como objetos universales tanto en el espacio como en el tiempo. También suministra inspiración para el diseño de actividades didácticas que amplían sus efectos pedagógicos con un buen uso de las nuevas tecnologías. (Philippe, Meavilla, & Fortuny, 2010). Y según Higueras (1998), de la evolución de una noción matemática a través de su génesis histórica, sirve para dar una visión profunda sobre la diversidad de concepciones que se le han sido asociadas a lo largo de su desarrollo.
- La *dimensión cognitiva* que pone en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciando las diversas representaciones y modos de tratamiento que le son asociados y como señala Artigue (1995), esta dimensión sirve para interpretar los errores y comportamientos de los estudiantes observados, y
- La *dimensión didáctica* que permite reconocer el estado de la enseñanza de los objetos en cuestión, el diseño, la intervención y gestión didáctica del profesor, y que según Artigue (1995), se puede analizar el funcionamiento del sistema didáctico y el campo de restricciones en donde se sitúa la investigación.




*Esquema 2: Las dimensiones de los análisis preliminares.*

## 2.1. Dimensión Histórica – Epistemológica

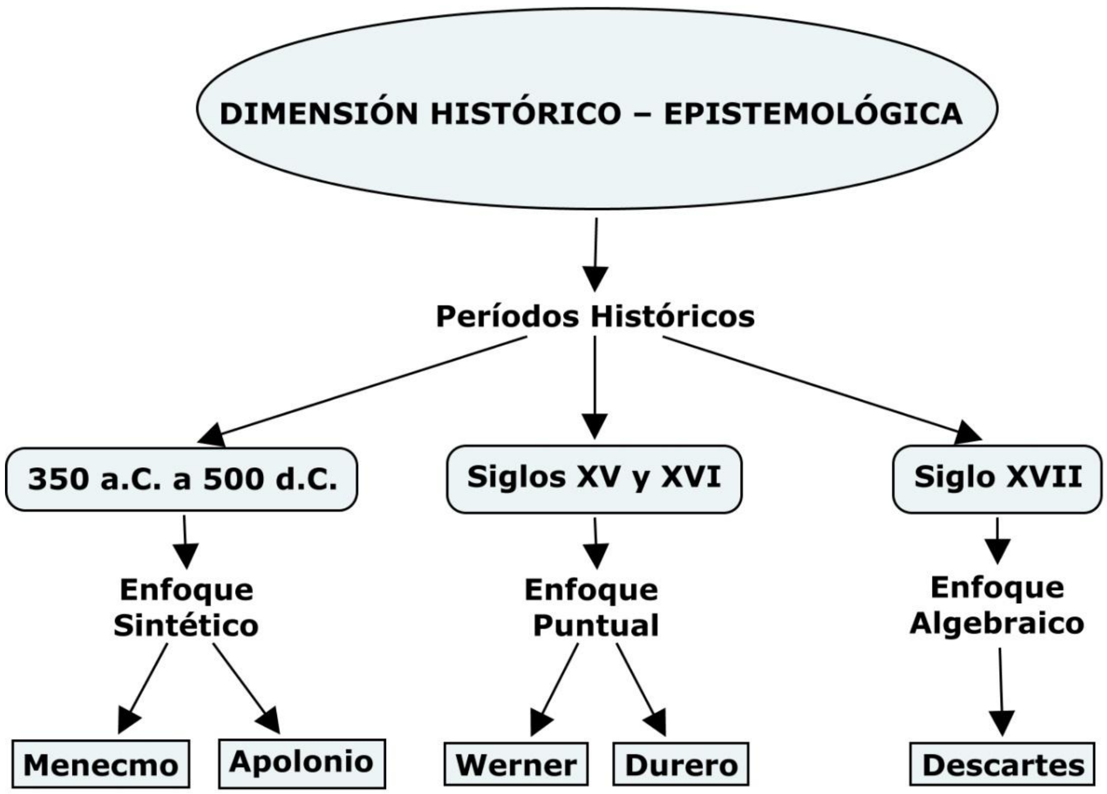
A continuación se reseña el desarrollo de una aproximación *histórica – epistemológica*, como parte fundamental en la construcción de los análisis *preliminares* en relación con la concepción de la secuencia didáctica que se pretendió movilizar. Para ello, la atención se va a centrar en las *cónicas* como lugar geométrico, así como para comprender su naturaleza, significados, y sentido que ha tenido estas curvas a partir desde lo *puntual* y lo *global*. Para ello, se presenta algunos problemas y soluciones que dan cuenta de las relaciones complejas que se han configurado a lo largo de la historia.

Para cumplir con lo mencionado anteriormente, se hará referencia a la evolución histórica del estudio de las *cónicas* mediante tres momentos históricos relacionados con el desarrollo de la noción matemática en cuestión:

- El período desde el 350 a.C. a 500 d.C., donde se dieron los orígenes de estas curvas a partir de hacer cortes a un cono físico, privilegiando los trabajos de Menecmo (fl. 350 a.C.), quien fue el primero en publicar un trabajo acerca de las *secciones cónicas,* y Apolonio (262-190 a.C.), quien constituyó la primera estructura matemática conocida alrededor de estas curvas, con su obra titulada *Las Cónicas*.
- Los siglos XV y XVI, con los aportes de los geómetras y pintores alemanes Johannes Werner (1468-1528) y Alberto Durero (1471-1528). Al primero por reconocérsele un método para construir puntos de una parábola de parámetro $p$ con regla y compás, con el objeto de resolver el problema de la duplicación del cubo. Y al segundo, por haber forjado una influencia en el arte con base en las construcciones geométricas. En particular, se señala el interés de Durero por resolver el mismo problema geométrico *punto* por *punto* de las *cónicas* para plasmarlas en sus obras artísticas.
- El siglo XVII, período donde se reconoce el surgimiento del tratamiento moderno de las *cónicas*, analizando la obra matemática de Descartes (1596-1650) desde lo *puntual* y lo *global*.

Cabe enfatizar que, a pesar de que se reconocen otros momentos históricos y fundamentales que permitieron dar una evolución a los diversos significados de las *cónicas*, se priorizaron los anteriores tres momentos por dos razones: primero, dado que estas curvas se han llegado a cristalizar en los currículos actuales a partir del estudio de la *geometría analítica* y, segundo, que en este análisis interesaba dar cuenta del tratamiento métrico y constructivo de las cónicas partiendo de la *geometría sintética*, y por supuesto de las definiciones usuales de lugar geométrico, que a la postre, fueron elementos que incidieron en el diseño de las situaciones.

Por lo tanto, se descartó los momentos donde las *cónicas* se estudiaron a partir de la *geometría proyectiva*, la *geometría descriptiva*, y la *teoría de las formas cuádricas* desde un punto de vista del *algebra abstracta* (Bourbaki, 1972), ya que ya que desde estas perspectivas, se llegó a una independencia entre *la geometría analítica* y el *álgebra* a partir de los trabajos de *sistemas de transformaciones geométricas* (Piaget & García, 1982). A modo de resumen, se presenta en el Esquema 10, los anteriores momentos históricos:




*Esquema 3: La dimensión Histórico – Epistemológica.*

### 2.1.1. Período 350 a.C. a 500 d.C.

Como se señaló anteriormente, solo se tuvo en cuenta el trabajo de Menecmo y la obra de Apolonio, desde la perspectiva del tratamiento *global* y *puntual* de las *cónicas* vistas como *lugar geométrico*.

#### *2.1.1.1. Menecmo: Las Secciones Cónicas y la duplicación del Cubo.*

Los griegos se plantearon tres problemas clásicos de construcción geométrica: la *trisección del ángulo*; la *duplicación del cubo* y la *cuadratura del círculo*, los cuales debían resolverse con el uso únicamente de la regla no graduada y el compás colapsable. En su intento de dar solución a estos problemas en un número finito de pasos de construcción, los griegos propusieron varias soluciones, no siempre exitosas. En efecto, al experimentar y ensayar con varios intentos, se dieron cuenta de que la solución era imposible utilizando únicamente estos instrumentos en un número finito de etapas. Entonces, algunos geómetras decidieron resolver estos problemas sin la mencionada restricción, y de esta manera dieron lugar al descubrimiento de algunos lugares geométricos (la trisectríz, la espiral, la cisoide, concoide de Nicomedes, la cicloide, las *cónicas*, entre otros) que contribuyeron categóricamente al desarrollo de las matemáticas y en particular, de la *geometría* (Río-Sánchez, 1996).

Los investigadores que han abordado las génesis de estas curvas (Boyer, 1996; Bongiovanni, 2007; Campos, 1994; De Guzmán, 2005; Río-Sánchez, 1996), concuerdan en afirmar que Eratóstenes (276 a.C. - 194 a.C.) y Proclo le atribuyen el nacimiento de las *cónicas* a Menecmo, geómetra griego. Dichos objetos matemáticos jugaron un papel *utilitarista* y *auxiliar* en la solución del problema de la *duplicación del cubo*. En lo que sigue, se explicará este carácter.

En efecto, Menecmo, discípulo de Platón (427 a.C. - 347 a.C.), hermano de Dinostrato[13] (390 a.C.-320 a.C.), descubrió primero la parábola y luego la hipérbola. La elipse fue un subproducto de su investigación cuando él trataba de resolver el Problema de Delos (también denominado el problema de la *duplicación del cubo*). En particular, este problema consiste en construir geométricamente, mediante el uso de regla y compás, el lado de un cubo tal que su volumen sea el doble del volumen de otro cubo de lado dado (Ver Figura 1).

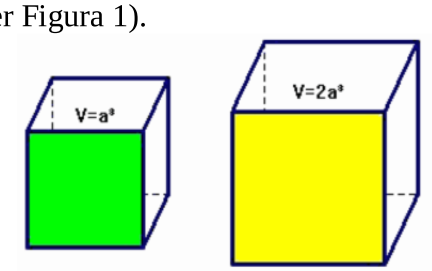



*Figura 1: Cubo de lado a y el cubo de volumen duplicado.*

Por ejemplo, si un cubo tiene como lado la unidad, su volumen será $V_1 = 1$; se pide entonces construir un cubo de lado $x$ tal que $V_2 = x^3 = 2V_1 = 2$, por lo tanto,

[13] Dinostrato también fue geómetra y resolvió la cuadratura del círculo usando la curva denominada *trisectríz* o *cuadratríz*.

habría que resolver la ecuación $x^3 = 2$, que equivale a construir con regla y compás el segmento de longitud[14] $x = \sqrt[3]{2}$. Sin embargo, no se puede construir con estos instrumentos un segmento cuya medida sea $\sqrt[3]{2}$ (Ver Figura 2).

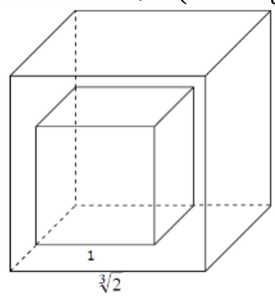



*Figura 2: Cubos con volúmenes* $\mathbf{1}$ *y* $\sqrt[3]{\mathbf{2}}$ *respectivamente.*

De acuerdo a la tradición, Eratóstenes y Proclo reconocen en Hipócrates de Quíos (470 - 400 a.C.), haber sido el primer matemático entre los que se interesaron por la duplicación del cubo. Él logró obtener resultados aceptables para resolver dicho problema, en términos de encontrar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados (Cardona, 2006; Boyer, 1996; Río-Sánchez, 1996).

En efecto, Hipócrates había procedido a resolver el problema de la duplicación del cubo recurriendo a la teoría de las proporciones. Intentó interpolar dos medias $x$, entre dos magnitudes dadas $a$ y $b$. Antes de Euclides, no había problema en construir un segmento de recta que fuera media proporcional entre dos segmentos dados. Esto fue un resultado conocido en la época (exactamente, en la obra Euclidiana, aparece en el libro VI, proposición 13) y se puede sintetizar en que es posible construir un segmento de magnitud $x$ que es media proporcional entre los segmentos de magnitud $a$ y $b$ (Ver Figura 3).

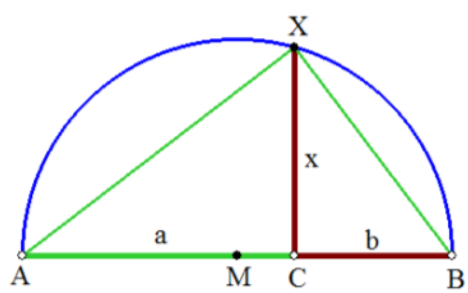



*Figura 3: Construcción de la media geométrica.*

[14] Tal como se afirma en Rice y Walter (2005), hasta 1837, este problema fue demostrado por primera vez y de manera rigurosa gracias a los trabajos del geómetra francés Pierre Wantzel (1814-1848), y a la algebrización del *problema de duplicar el cubo*. Se concluyó que dicha tarea no se puede adelantar con éxito si se limita al uso de la regla y el compás. Este geómetra también se hizo famoso por demostrar en su mismo artículo de 1837, la imposibilidad de *trisecar el ángulo* con solo la ayuda de la regla y el compás.

Hipócrates intentó generalizar este problema, y se planteó el asunto de encontrar dos medias proporcionales a dos segmentos dados. En otras palabras, dados dos segmentos $a$ y $b$, se debe construir otros dos segmentos $x$ e $y$ tales que:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

A este problema de construcción se le denominó la *interpolación de dos medias proporcionales* entre dos magnitudes dadas. Se señala que Hipócrates fue el primero en reconocer o demostrar que la anterior proporción llevaba a la solución del problema de la duplicación del cubo cuando $b = 2a$. Este resultado conduce a: $x^2 = ay$ ; $y^2 = 2ax$. Es decir, cuando se elimina $y$, se llega a la conclusión de que $x^3 = 2a^3$. Por lo tanto, $x$ sería la longitud de la arista del cubo cuyo volumen es el doble del lado (Boyer, 1996; Campos, 1994; Cardona, 2006; Río-Sánchez ,1996).

Posteriormente, Menecmo trató de resolver este problema hallando curvas cuyos puntos verificasen las dos ecuaciones, que en términos modernos se expresa así:

$$x^2 = ay \text{ e } y^2 = 2ax.$$

No obstante, para encontrar estas nuevas curvas, los matemáticos griegos de la época, solo tenían dos métodos:

1. Se realizaba a partir de composiciones de lo que hoy llamamos movimiento uniforme, y
2. Como intersección de superficies geométricas conocidas: planos, esferas, cilindros, conos, poliedros, entre otros.

Menecmo utilizó el segundo método y estableció que las curvas que se formaban al seccionar un cono con un plano, servían para resolver la *duplicación del cubo.* Igualmente, consiguió las *cónicas* seccionando un *cono rectángulo*[15] con un plano perpendicular a una de sus generatrices. La elipse y la hipérbola, surgen al seccionar *conos acutángulos*[16] y *obtusángulos*[17] con planos perpendiculares a una de las generatrices[18]. En la Figura 4 puede observarse la parábola de Menecmo.

[15] Un cono rectángulo es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por la revolución de un triángulo rectángulo isósceles al girar alrededor de uno de sus catetos. La hipotenusa del triángulo es la generatriz, $g$, del cono. El cateto sobre el cual se gira es la altura, $h$. El otro cateto es el radio, $r$, de la base.

[16] Un cono acutángulo es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por la revolución de un triángulo rectángulo al girar alrededor de un cateto mayor.

[17] Un cono obtusángulo es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por la revolución de un triángulo rectángulo al girar alrededor de un cateto menor.

[18] Para ver imágenes en movimiento de los diferentes tipos de conos véase el trabajo de Yarnoz (s.f.), en: http://www.revista.dominicas.org/conicas.htm

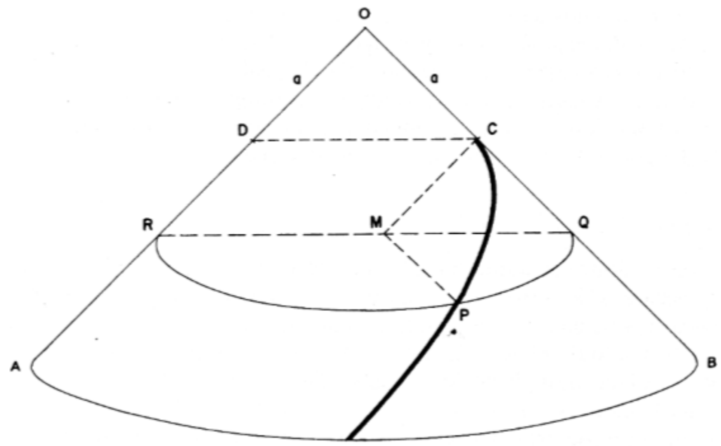


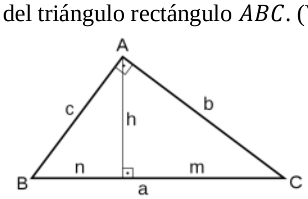

*Figura 4: Cono rectángulo en el vértice O y plano perpendicular a la generatriz OB, para formar la parábola como sección cónica, según Menecmo. (Río-Sánchez, 1996, p. 14)*

Aunque no se han conservado los escritos de Menecmo, su demostración pudo haber sido como la siguiente (Boyer, 1996; Río-Sánchez, 1996):

Considérese un cono rectángulo $OAB$ con el vértice en $O$ (Ver Figura 4) y al seccionarlo por un plano perpendicular a la generatriz $OB$ en el punto $C$ situado a una distancia $a$ de $O$. Por un punto cualquiera $P$ de la curva-sección, pasa un plano paralelo a la base del cono que lo corta en la circunferencia de diámetro $RQ$. Sea $M$ el pie de la perpendicular desde $P$ a este diámetro. Por el *teorema de la altura*[19] se verifica: $PM^2 = RM \cdot MQ$. Además, RM=DC, $\frac{MQ}{DC} = \frac{CM}{a}$ (por ser los triángulos $CMQ$ y $ODC$ semejantes) y $DC^2$= $2a^2$. De estas igualdades se deduce $PM^2 = 2a \cdot CM$. Si en el plano de la sección se toma un sistema de referencia con origen en $C$, eje de abscisas la recta que contiene al segmento $CM$ y eje de ordenadas su perpendicular en $C$, la expresión anterior se escribiría $y^2 = 2ax$, que es la ecuación de una parábola.

La intersección de dos parábolas ($y^2 = 2ax$; $x^2 = ay$) resuelve, como ya se indicó, el problema de la duplicación del cubo, prescindiendo de la condición restrictiva de emplear sólo la regla y el compás.

[19] El *Teorema de la Altura*, establece que en cualquier triángulo rectángulo, la altura relativa a la hipotenusa es la media proporcional entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa. En efecto, sea $h$ la altura del triángulo rectángulo $ABC$. (Ver Figura abajo), $n$ la proyección ortogonal del cateto $c$ y $m$ del cateto $b$:




entonces $h$ divide en dos triángulos rectángulos semejantes, de forma que: $\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$, entonces por la propiedad de las proporciones, se tiene: $h^2 = nm$, por lo que se obtiene: $h = \sqrt{nm}$.

Las curvas de Menecmo se generaban de acuerdo al tipo de cono y fueron denominadas con el nombre de *oxitoma* (sección del cono agudo), *amblitoma* (sección del cono obtuso) y *ortotoma* (sección del cono recto).

Por lo tanto, Menecmo había dado con las *cónicas* como resultado de su afortunada búsqueda de curvas que tuvieran las propiedades requeridas para resolver el problema de la duplicación del cubo. Sus resultados pueden expresarse, usando una notación moderna en términos algebraicos, cuya solución se da al resolver simultáneamente las dos ecuaciones:

$$x^2 = ay \text{ e } y^2 = 2ax$$

Esta solución se complementa, situando las dos parábolas con sus vértices en el origen de coordenadas $O$ y con sus ejes en los ejes $Oy$ y $Ox$, respectivamente, el otro punto de intersección de las dos parábolas tendrá coordenadas $(x, y)$ que satisfacen la proporción continua: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Es decir, $x = \sqrt[3]{2}$, $y = a\sqrt[3]{4}$; así pues, la abscisa $x$ es la arista del cubo buscado (Ver Figura 5).

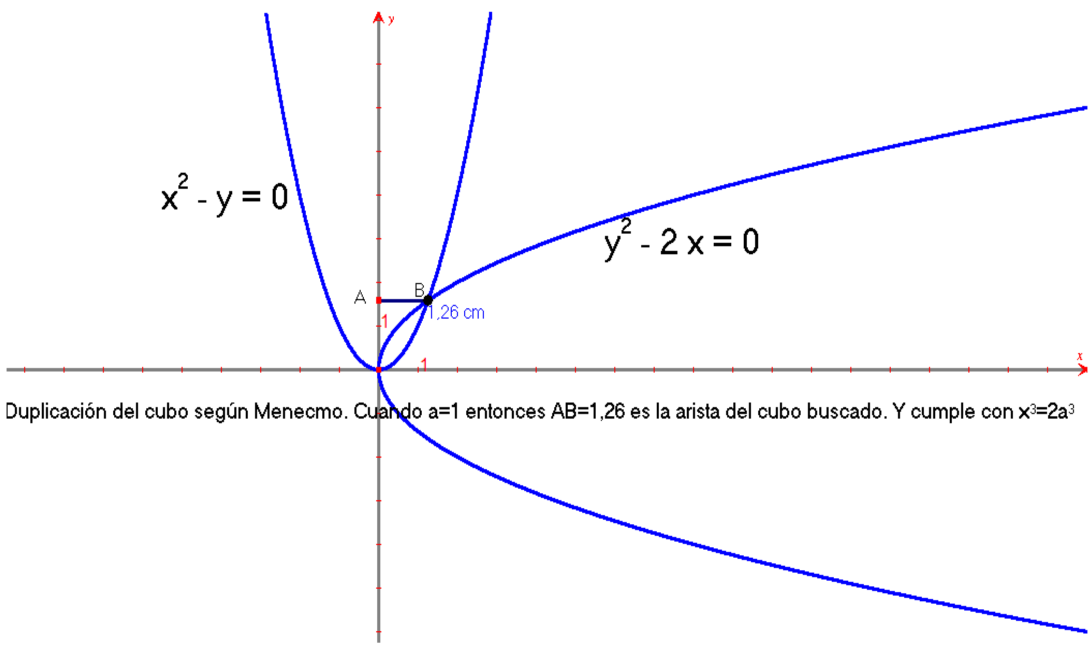



*Figura 5: Duplicación del cubo que cumple con la proporción continúa.*

Algunos historiadores, desde una interpretación moderna, han llegado a señalar a Menecmo como el precursor de la *geometría analítica*, tal como se afirma en el libro *A history of Geometrical Methods* de Coolidge (como se cita en Boyer, 1996). Es decir, se puede inferir la presencia de rastros de orden analítico, particularmente por el recurso de un sistema de referencia y de ecuaciones que surgían de la teoría de las proporciones. Sin embargo, otros investigadores señalan que Menecmo nunca fue consciente del hecho de que una ecuación arbitraria en dos indeterminadas representaba una curva. Más aún, se descarta este nivel de complejidad analítica a la luz de la pobreza en las representaciones algebraicas de la época, al respecto, esta idea se puede apoyar en:

> La idea general de una ecuación en cantidades indeterminadas [las cantidades indeterminadas se pueden inferir como las variables $x$ e $y$] fue ajena al pensamiento griego, y precisamente fueron las limitaciones en la notación algebraica las que obstaculizaron, más que ninguna otra causa, el que los griegos llegarán a conseguir una geometría analítica propiamente dicha. (Boyer, 1996, p. 134)

Para concluir, Menecmo pudo encontrar toda una familia de curvas (las parábolas) que satisfacían la propiedad descubierta por Hipócrates. Ahora bien, cabe destacar dos aspectos, en primer lugar, que se pudo llegar a esta solución a través de cortes con el cono, de manera global. Es decir, considerando que los cortes con el cono eran realizados de manera continua y no punto por punto. Y en segundo lugar, la curva que resolvía este problema era de naturaleza holística, es decir, la concepción de los objetos matemáticos en la *geometría griega* correspondencia a características de la *geometría sintética*, no de la *analítica*. Al respecto, Hegedus y Moreno (2011), aclaran lo anterior con un ejemplo, al afirmar que la naturaleza de un punto en la *geometría euclidiana* es producido por la intersección entre dos rectas sin que implique que las rectas "sean hechas" de puntos. Una recta, un segmento, o una *cónica* para este caso, son objetos holísticos – tienen puntos pero no son construidos a partir de puntos –. En consecuencia, Menecmo y los demás griegos de la época, habían considerado la *cónica* misma, pero no precisamente constituida como una colección de *puntos*.

#### ***2.1.1.2. Apolonio y su tratado:* Las Cónicas.**

Aunque se suele asociar las *secciones cónicas*, con el trabajo del matemático griego Apolonio, estas fueron estudiadas mucho antes (entre II a.C. y I a.C.), por Aristeo (fl. 565 a.C.) y Euclides (fl. 300 a.C.), quienes habían escrito tratados sobre ellas pero que en la actualidad ninguna se conserva. También Arquímedes, presentó algunos resultados sobre este tema. Sin embargo, fue Apolonio, quien lo refinó, despojándolo de irrelevancias (Kline, 1992) y le dio forma sistemática en su obra *Las Cónicas*. Además de sus méritos por sistematizar los conocimientos hallados hasta ese momento de estas curvas, *Las Cónicas* contienen material altamente original, ingenioso, extremadamente hábil, y están bien organizadas hasta su época (Kline, 1992; Boyer, 1996; Río-Sánchez, 1997). Se trata de una obra que cerró prácticamente el tema para los pensadores posteriores, al menos desde el punto de vista puramente geométrico, tal como declara Kline (1992).

*Las Cónicas* consta de ocho libros que contienen 487 proposiciones en total. De ellos se conservan los cuatro primeros reproducidos en manuscritos griegos de los siglos XII y XIII, y los tres siguientes en una traducción al árabe escrita en 1290. El octavo se ha perdido, aunque en el siglo XVII el astrónomo Halley (1656-1742) llevó a cabo una reconstrucción de esta obra, basándose en las indicaciones de Pappus (290-350 d.C.).

Tal y como concluyen Campos (1994); Boyer (1996); Río-Sánchez (1996); De Guzmán (2005) y Bongiovanni (2007), el mérito a las primeras generalizaciones sobre las *cónicas* se lo lleva Apolonio, al haberlas escrito en su obra, algunas de la cuales son:

- No es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono. Este es un paso muy importante en el proceso de unificar los tres tipos de curvas en cuestión.
- Demostró que el cono no necesita ser un cono recto, es decir, tal que su eje sea perpendicular al plano de su base circular, sino que puede igualmente tomarse de entrada un cono circular oblicuo o escaleno y además demostró que las propiedades de las curvas son las mismas, sea que se obtengan como secciones de un cono cualquiera.
- Llevó el estudio de las antiguas curvas a un punto de vista moderno, al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de dos hojas (o un par de conos orientados en sentidos opuestos, por el mismo eje y vértice). Este cambio en el punto de vista, convierte a la hipérbola en la curva de dos ramas tal como se conoce hoy.

En este orden de ideas, también es importante subrayar que en todas las demostraciones, Apolonio recurre a un lenguaje *sintético*, que desde una interpretación moderna permite seguir cada una de las demostraciones traduciéndolas a un lenguaje *analítico*. No obstante, algunos investigadores consideran que debido a esto, es difícil de comprenderlas por el tratamiento cuantitativo entre las magnitudes geométricas que se trabajan y por el estudio de la *geometría* del *espacio* (Rice & Walter, 2005).

Es preciso reiterar que Apolonio no fue el primero en estudiar detalladamente las *cónicas* ni los lugares geométricos. De hecho, aunque en los *Elementos* de Euclides, no aparece el tema de los lugares geométricos, por considerarlos un tema de la matemática superior, se puede encontrar en esta obra, la mayoría de las propiedades que caracterizan algunas figuras elementales como lugares geométricos: la circunferencia, la mediatriz, la bisectriz, el arco capaz, etc. Debe recordarse que los griegos clasificaban los lugares geométricos en tres categorías:

- Los *lugares planos*, que abarcaban las líneas rectas y las circunferencias;
- Los *lugares sólidos*, que incluían a las *cónicas*; y
- Los *lugares lineales*, que contenían las demás curvas (cuadratriz, espiral, cicloide, etc.).

Esta clasificación está en concordancia con los tres tipos de problemas geométricos que planteaban los griegos en esa época:

- Los *problemas planos* son aquellos que son resolubles mediante rectas y circunferencias (regla y compás). Por ejemplo, la determinación del lugar de los puntos que equidistan de dos rectas fijas o de dos puntos fijos es un problema plano.
- Los *problemas sólidos* que se resuelven mediante secciones cónicas. Por ejemplo, la duplicación del cubo es uno de ellos, pues, como ya se ha indicado, puede ser resuelto mediante la intersección de dos parábolas, y
- Los *problemas lineales* que necesitan de otras curvas distintas. Por ejemplo, la trisección del ángulo fue considerada, en principio, como un problema lineal ya que se resolvía usando la curva trisectríz. Aunque, más tarde Pappus lo redujo a un problema sólido, al encontrar una solución empleando una circunferencia y una hipérbola.

Con la clasificación anterior, se puede afirmar que Apolonio se concentró en los *problemas sólidos*, llegando a caracterizar las *cónicas* como lugares geométricos, pero no como se conocen actualmente (por medio de focos y directrices y sus relaciones métricas entre sí), sino en tanto propiedades o "*síntomas*". Con relación a lo anterior, se afirma lo siguiente:

> El nombre dado a la segunda clase [de problemas] venía sugerido sin duda por el hecho de que las cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada, tal como se suele hacer hoy, sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano. Apolonio, al igual que sus predecesores, obtenía sus curvas a partir de un cono en el espacio tridimensional, pero intentó (y consiguió) prescindir del cono lo más rápidamente posible. A partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental o "síntoma" de la sección, que viene a dar una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre la curva, y desde ese momento abandonó ya el cono y procedió a estudiar dicha curva por

> métodos planimétricos exclusivamente, basados en esta propiedad. (Boyer, 1996, p. 197)

De este modo, la naturaleza de las secciones cónicas en Apolonio, empezó a ser asociada con figuras en el plano y no como el "*síntoma*" (ecuación, en términos modernos) mismo. Al respecto, Rice y Walter (2005) afirman: "el síntoma no es una sección cónica; solo expresa una propiedad de una sección existente, cuya generalización es posible solo si se corta un cono con un plano" (p. 482).

A pesar de que en *Las Cónicas* no aparece el concepto de *directriz*, y el hecho de que una *cónica* es el *lugar geométrico* de los puntos cuyas distancias a un punto dado (*foco*) y una recta dada (*directriz*) mantienen una razón constante, esto ya era conocido por Euclides y Pappus (Kline, 1992).

Actualmente las *cónicas* se definen en términos de focos y directrices, pero Apolonio omitió algunas propiedades referentes a estos objetos. Los historiadores de igual manera reconocen otra definición de *cónica*, que se puede dar en términos métricos usando la noción de excentricidad con relación a los *focos* y las *directrices*:

> Tal como se definen las cónicas hoy en día en los libros de texto, los focos juegan un papel de primera importancia, sin embargo, Apolonio ni siquiera le da nombres especiales a estos puntos, y se refiere a ellos sólo de una manera indirecta. Se supone que él mismo, y quizá incluso ya Aristeo y Euclides, estaban bien familiarizados con las propiedades de estas curvas referidas al foco y a la directriz, pero el caso es que nada de esto se menciona ni siquiera en *Las Cónicas*. No hay, obviamente, en los tratamientos antiguos de las cónicas ninguna idea numérica que corresponda a lo que ahora llamamos la excentricidad de una cónica con centro y, aunque el foco de una parábola aparece de manera implícita en muchos teoremas de Apolonio, no está nada claro que fuera consciente del papel de la directriz, tan familiar ahora para nosotros. (Boyer, 1996, pp. 206-207)

Sin embargo, para Apolonio, la condición necesaria y suficiente para que un punto P pertenezca a una elipse o a una hipérbola es que $\frac{PQ}{AQ} = \frac{QA'}{PQ} = k$, siendo k una cantidad positiva constante (Ver Figura 6).

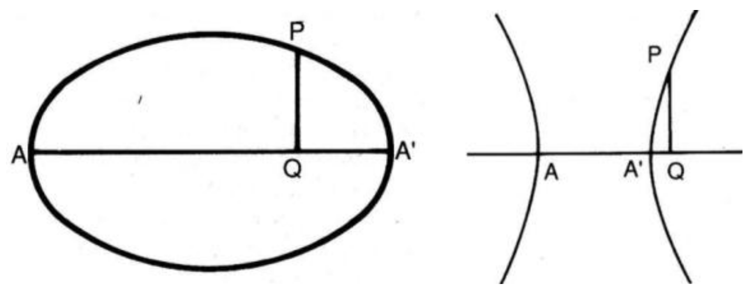



*Figura 6: Se observa que el punto P está en la elipse y en la hipérbola y Q está sobre el eje principal de cada cónica.*

Esta demostración presentada por Apolonio en el Libro I, recurre al álgebra retórica, teoría de las proporciones y fundamentos de la *geometría euclidiana.* Cuando presenta la condición necesaria y suficiente para caracterizar la parábola, llega a que $\frac{PQ}{AQ} = \frac{k}{PQ}$ (Ver Figura 7).

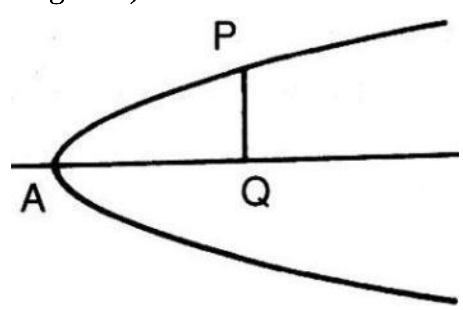



*Figura 7: Se observa que el punto P está en la parábola y Q está sobre su eje.*

Para demostrar que la curva es una elipse, ó una parábola ó una hipérbola, Apolonio demuestra que debe cumplir tal "síntoma", dependiendo de cuál curva sea. De estas condiciones necesarias y suficientes, se desprende que Apolonio le otorgue los nombres a las *cónicas* tal como se conoce actualmente: *elipse* viene del término griego *elleipsis* que significa insuficiencia, *hipérbola* viene de *hipérbole* que significa exceso y *parábola* viene de *parabole* que significa equiparación. Aunque es preciso señalar que el nombre de "parábola" ya lo había establecido Arquímedes en su tratado denominado *La Cuadratura de la Parábola*.

En cuanto concierne al tratamiento *puntual* o *local* de las *cónicas* en Apolonio puede reconocerse lo siguiente:

- En el Libro III de *Las Cónicas*, describe la elipse y la hipérbola tal como se define modernamente, en términos métricos de distancias de puntos de la *cónica* a los focos. No obstante, no hace de esta propiedad, una condición necesaria y suficiente que sea la encargada de definir el *lugar geométrico* como una *cónica*.
- De la misma manera, se puede afirmar que Apolonio parece haber sido consciente de cómo determinar una *cónica* que pase por cinco puntos, pero este problema,

que tuvo más tarde un lugar tan importante en *Los Principia Mathematica* de Newton, está totalmente ausente en *Las Cónicas* (Boyer, 1996).

- Otro hallazgo meritorio en Apolonio, que resaltan los historiadores, es que desarrolló su teoría con la deficiencia de una notación algebraica tal como se conoce actualmente, sin impedirle apreciar la generalidad de lo que había descubierto, gracias a que considerara relaciones cuantitativas entre magnitudes geométricas. De esta manera, *Las Cónicas* fueron construidas sobre técnicas (teoría de las proporciones y el álgebra geométrica) equivalentes, en esencia, a lo que es el álgebra en estos momentos:

  > Los métodos que utiliza Apolonio en *Las Cónicas* son tan semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno que su obra se ha considerado a menudo como una anticipación de la geometría analítica de Descartes en unos 1800 años. (Boyer, 1996, p. 207)

- Además, los lugares geométricos de las *cónicas* tal como se definen en Apolonio no son declaradas con tal nivel de abstracción como se hace actualmente, sino que primero se establecía su existencia a partir de la experiencia sensible, con el cono o con un método cinemático, para después caracterizarla desde el punto de vista “algebraico”. En este sentido, se expresa lo siguiente:

  > Podemos decir de la geometría griega que *las ecuaciones vienen determinadas por las curvas*, pero no que *las curvas vengan determinadas por las ecuaciones*. Las coordenadas, variables y ecuaciones fueron, pues, conceptos *subsidiarios* derivados de una situación geométrica concreta, y se puede asegurar que desde el punto de vista griego no era suficiente en absoluto para definir curvas el darlas de manera abstracta como lugares geométricos de los puntos que satisfagan condiciones dadas sobre sus dos coordenadas. Para garantizar que un *lugar geométrico* era realmente una curva, los antiguos griegos consideraron necesario o bien producirla de una manera estereométrica como una sección de un sólido o describir su construcción de una manera cinemática. (Boyer, 1996, p. 207)

### 2.1.2. Siglos XV y XVI.

Es este el período del *Renacimiento*, caracterizado por un renovado interés por recobrar los valores y el aprendizaje de la antigüedad clásica, en especial por la cultura griega y romana, surgieron muchos científicos y pensadores después de un largo período de decadencia cultural y estancamiento, los cuales buscaron comprender los fenómenos reales con explicaciones más racionales que las viejas creencias heredadas del Medioevo o rescatadas de los textos clásicos que poco a poco se iban traduciendo e imprimiendo. En uno u otro caso, la *geometría* jugó un papel cada vez más importante como lenguaje idóneo para expresar los nuevos conocimientos. En este sentido Cardona (2006) afirma:

> Para los pintores, en este período adquirieron técnicas que les permitió representar en forma más convincente los espacios que exigían la presencia de la tercera dimensión. En tanto que, los científicos se vieron motivados a discutir matemáticamente los fenómenos asociados con la percepción, y los matemáticos se abrieron a la posibilidad de construir y desarrollar una nueva rama adscrita a sus disciplinas, la Geometría Proyectiva. (p. 7)

El vínculo estrecho entre *ciencia* y *arte* produjo beneficios que se pueden ver reflejados en la realización de construcciones geométricas de las *cónicas* presentadas en las obras de Werner y Durero.

#### *2.1.2.1. Werner y su construcción puntual de la parábola.*

Desde Pappus, no se había dado de nuevo un interés por las *cónicas*. Con Werner, geógrafo y geómetra alemán, se renovó el tema y el tratamiento de estas curvas cuando escribió su obra *Elementos de las Cónicas*. Allí se puede ver una vez más que surgieron otras opciones para resolver el problema de la *duplicación del cubo*.

Tal y como lo describen investigadores sobre las construcciones de las *cónicas* en el *Renacimiento* (Boyer, 1996; Río-Sánchez, 1996; Cardona, 2006), se puede apreciar que Werner estudió sólo la parábola y la hipérbola centrándose en la resolución de la duplicación del cubo y, entre las pocas novedades que presenta con respecto al tratado de Apolonio, se destaca el siguiente método original para construir puntos de una parábola de parámetro $p$ con regla y compás, así por ejemplo, en Río-Sánchez (1996) aparece el siguiente proceso de *construcción geométrica* y la traza de la parábola hecha *punto* por *punto* (Ver Figura 8):

> Se dibujan dos rectas perpendiculares r y s que se cortan en un punto V. Sobre $r$ se señala un punto $O$ a una distancia $2p$ de $V$. Se trazan circunferencias con el centro en la recta $r$ y que pasan por $O$; éstas cortan a la recta $s$ en puntos $A$, $B$, $C$,... y a la recta $r$ en $A´$, $B´$, $C´$ ... Se trasladan paralelamente los segmentos $VA$, $VB$, $VC$,... a los puntos respectivos $A´$, $B´$, $C´$, ... obteniéndose los puntos $A´´$, $B´´$, $C´´$,... los cuales pertenecen ya a la parábola de vértice $V$ y parámetro $p$ (junto con sus simétricos respecto de $r$). La justificación es sencilla puesto que la "ordenada" de cada punto, $A´A´´$, por ejemplo, es igual a $VA$, y $\mathrm{VA}^2 =$

$2p \cdot VA'$. (por el teorema de la altura aplicado al triángulo rectángulo $OAA'$). (pp. 31-32)

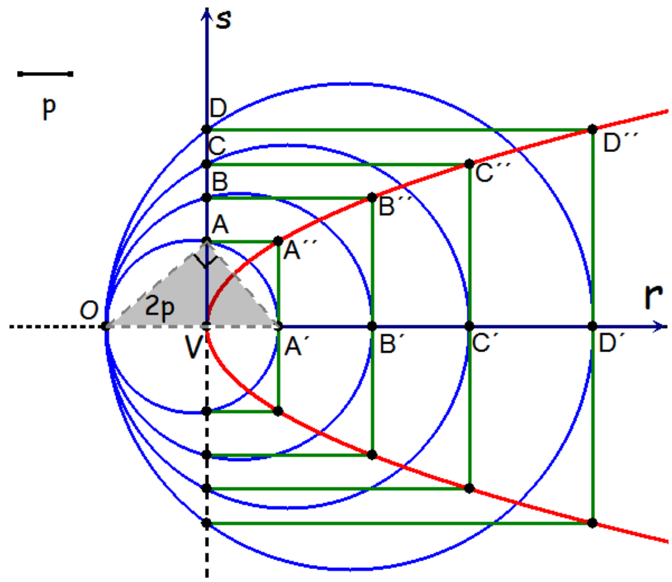


*Figura 8.Trazado de la parábola de Werner punto por punto.*

Estos mismos investigadores ven en la obra de Werner una clara evidencia de la influencia de los estudios antiguos sobre las *cónicas* y su esfuerzo por representar fielmente puntos sobre el plano de manera sintética.

Por último, es de señalar que esta misma construcción geométrica se adaptó y se modificó, en el diseño didáctico de esta investigación, particularmente en la Situación Problema No. 1b (Ver Anexo No. 4) proporcionando a los estudiantes, el procedimiento de construcción punto por punto pero brindándoles la oportunidad de que encontraran una construcción geométrica dinámica de manera global, de tal forma que contuviese la nube de puntos, y en donde se buscó que se movilizará, en Cabri, la parábola de Werner como lugar geométrico.

#### *2.1.2.2. Durero y su tratamiento puntual y global en el trazado de las cónicas.*

Tres años después de aparecer la obra de Werner, se publicó un libro del artista Alberto Durero, titulado "*Tratado sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*". Aunque no fue un tratado teórico, sino que se dirigió a técnicos y artistas a los que él pretendió enseñar diversos métodos para trazar algunas figuras geométricas, siempre se adjuntó la justificación de los preceptos o reglas que se enunciaban en dicho tratado, evitando caer en un simple recetario y elevando esta obra a la categoría de "ciencia aplicada".

En efecto, Durero después de haber viajado por Italia para conocer el nuevo arte renacentista, afirmó que "el nuevo arte debe estar basado en la ciencia, en particular, en las matemáticas, como la más exacta, lógica y gráficamente constructiva de las ciencias" (O'Connor & Robertson, 1996, párr. 12).

En este tratado, Durero enseñó la construcción de algunas espirales, *cónicas*, polígonos regulares, poliedros y técnicas de la pintura, influenciada por todo el movimiento del renacimiento italiano. Durero tuvo como filosofía que la *geometría* y las medidas eran la clave para entender el arte italiano de esa época y, a través de él, el arte clásico.

Durero, motivado por resolver el problema de la duplicación del cubo, inventó un procedimiento novedoso y de análisis para concebir una *cónica* a partir de sus *esquemas de planta y alzado* (su método para trazar una *cónica* mediante una doble proyección ortogonal), trazándolas punto por punto y después de manera global. Este método aparece en su tratado y al respecto Panofsky (1982, p. 265, como se cita en Cardona, 2006) aclara la sutileza de dicho método de la siguiente manera:

> En vez de investigar las propiedades matemáticas de la parábola, la hipérbola y la elipse, [Durero] intentó construirlas de la misma manera que había intentado construir sus espirales y epicicloides; y lo logró mediante la ingeniosa aplicación de un método conocido de todo arquitecto y carpintero, pero que hasta entonces no se había aplicado nunca a la solución de un problema puramente matemático, y menos aún al problema ultramoderno de las secciones cónicas: el método de la proyección paralela. (p. 114)

El comentarista se refiere al hecho de que Durero hiciera uso de las representaciones en alzado y planta, muy utilizada en la época para resolver problemas de arquitectura pero nunca explotadas para la solución de problemas matemáticos. El mismo Panofsky señala que, si bien el pintor Brunelleschi (1377-1446), parece haber sido el primero en utilizar esquemas parecidos a la duplicación representativa en planta y alzado, fue el pintor Piero della Francesca (1416-1492), quien más tarde describió en forma precisa, en su *Prospectiva Pingendi*, el método en mención.

Debido a que Durero no contó con expresiones en alemán para referirse a las secciones cónicas, decidió aportar nombres para dichas curvas. A la elipse la denominó *línea de huevo* [*Eierlinie*]; a la parábola, *línea de incandescencia* [*Brennlinie*], y a la hipérbola, *línea en horca* [*Gabellinie*]. En Cardona (2006) se puede apreciar la construcción global o continua de toda la figura trazada por Durero y una recreación de la misma en Cabri Géomètre. La Figura 9 ilustra los trazados clásicos que aparecen en el tratado de Durero para construir elipses utilizando su método.

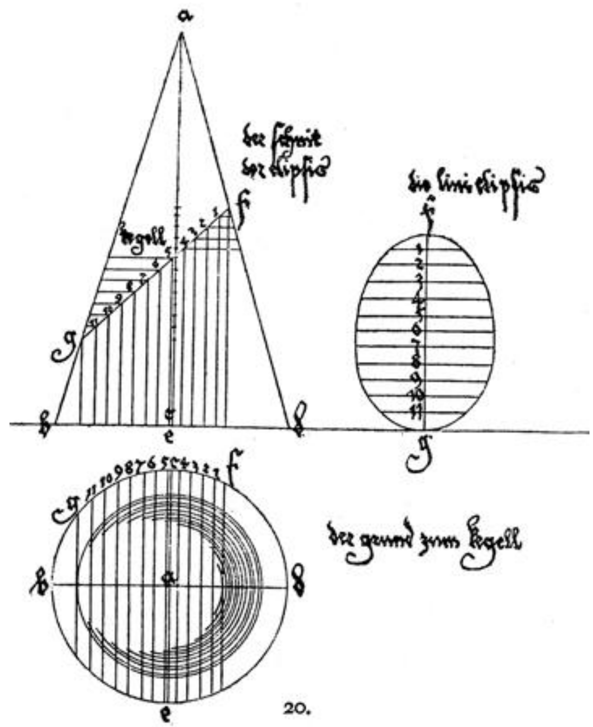


*Figura 9: Método de Durero para el trazado de la elipse.*

### 2.1.3. Siglo XVII.

En este período, hubo una serie de matemáticos y geómetras que trabajaron alrededor de las *cónicas*. Algunos de ellos fueron: Kepler (1571-1630), Mydorge (1585-1647), Desargues (1591-1661), Pascal (1623-1662), La Hire (1640-1718), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Wallis (1616-1703) y De Witt (1625-1672). De todos los anteriores, se consideró conveniente tomar en cuenta exclusivamente el tratado matemático Cartesiano.

Esta selección se debió a dos razones principalmente. En primer lugar, dado que el interés de este estudio es en la caracterización de las *cónicas* como curvas, por medio de construcciones geométricas, para luego llegar a caracterizarlas usando la representación algebraica, de la misma manera que Descartes planteó su *programa de* *investigación*[20] para escribir su obra matemática (Font, 2001). Y en segundo lugar, debido al tratamiento matemático que realizó Descartes a estas curvas (tratamiento analítico), tal y como se expondrá en este apartado. En consecuencia, no se tomó en consideración el otro artífice de la *geometría analítica*, Fermat, porque mientras Descartes tuvo por objetivo obtener expresiones simbólicas a partir de las curvas, Fermat se preocupó por deducir las propiedades geométricas de las curvas partiendo de su ecuación (Collette, 2000).

- **Descartes y el cambio en el nivel de abstracción de las cónicas.**

Para tener en cuenta la génesis y evolución de las *cónicas* en esta época, se consideró pertinente revisar los albores de la *geometría analítica*. De esta manera, se reconoce en la historia de las matemáticas que ocurrió la introducción, en siglo XVII, de un nuevo enfoque que distingue un cambio en el punto de vista sobre la teoría de curvas: el *método de las coordenadas*, que permitió estudiar las curvas en el plano sin hacer referencia a aspectos intuitivos como el cono. Debido al uso del álgebra a manera de instrumento operatorio (Piaget & García, 1982), Fermat y Descartes dieron vida al mundo de la representación analítica. Esta *geometría* comenzó a formarse como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos. La importancia de lo realizado por estos geómetras franceses proviene del hecho de haber permitido traducir cualquier problema de *geometría plana* en un problema algebraico equivalente. Este fue el primer *puente* entre dos áreas diferentes de las matemáticas, el álgebra y la geometría. (Dieudonné, 1987, p. 79 como se cita en Ruiz, 1998).

Es en la obra *La Géométrie*, escrita por Descartes, donde se puede comprender de qué manera se llegó a dar esta articulación entre estos dos tipos de representaciones, las gráficas y las simbólicas, gracias a su nuevo método, así mismo a darle un tratamiento diferente y una evolución en la naturaleza de las *cónicas* como lugares geométricos, tal como se expondrá en los siguientes apartados. Este tratado está dividido en tres libros. En la Tabla 1, que aparece a continuación, se puede ver tanto la forma en qué se organizó, así como los títulos de cada uno de ellos.

[20] Se utiliza la expresión "*programa de investigación*" en el sentido de Lakatos (1983). Según este matemático y filósofo de la ciencia, un programa de investigación está formado por: un núcleo firme o "centro firme" del programa; un cinturón protector de hipótesis auxiliares; y, la heurística, o conjunto de procedimientos aplicables a la solución de los problemas.

*Tabla 1: Organización y títulos de cada uno de los libros de la obra Cartesiana.*

| ***La Géométrie*** | |
|---|---|
| **Libro** | **Título** |
| **I.** | "Sobre los problemas que pueden construirse utilizando solo círculos y líneas rectas". |
| **II.** | "Sobre la Naturaleza de las líneas curvas". |
| **III.** | "Sobre la construcción de sólidos o más que sólidos". |

En lo que sigue, se expondrá brevemente cada uno de los libros, para luego entrar a analizar la naturaleza de las curvas *cónicas* en Descartes, en particular, el manejo que hizo el geómetra para considerar la traza de ellas como *un conjunto de puntos* $(x, y)$ que satisfacían una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, para llegar a concluir que el autor de *La Géométrie*, llegó a cristalizar una generalidad llegando a alcanzar un grado de abstracción, hasta ese momento, sin igual, de construir relaciones matemáticas constituyéndose en una nueva estructura matemática.

En primer lugar, se puede afirmar, según Álvarez (2000) y Montesinos (2000), que Descartes hizo una lectura nueva de la *geometría euclidiana* "aritmetizándola". A pesar de que había fuertes resistencias de matemáticos de esa época porque consideraban que la aritmética iba a contaminar la *geometría* por su poca rigurosidad y además porque, la postura del francés era reducir lo visual y sensible a estructuras independientes existentes en la mente. En efecto, este tratamiento se evidencia en el Primer Libro de *La Géométrie*, ya que determinó los segmentos como longitudes y de esta manera, se podía efectuar las operaciones clásicas de la aritmética: *suma*, *resta*, *multiplicación*, *división* y *extracción de raíz*, a través de sus correspondientes construcciones geométricas, usando la regla y el compás. Se alcanza a constatar lo anterior en las primeras líneas de este libro, de la siguiente manera: "Todos los problemas geométricos pueden ser reducidos fácilmente a términos, tales que no sea necesario posteriormente para construirlos sino de solo conocer la longitud de algunas líneas" (Descartes, 1637/s.f., p. 389).

En segundo lugar, y a la luz de las anteriores consideraciones, Álvarez (2000), aclara que el objetivo global de Descartes es hacer una lectura algebraica de la *geometría euclidiana* que eliminara la diferencia entre las distintas magnitudes geométricas mediante la búsqueda de una forma única de magnitud, dada a través de los segmentos. Así $a^2$ y $a^3$ ya no se interpretaban como un área y un volumen, respectivamente según los griegos, sino como segmentos simples. Esto le permitió tratar expresiones algebraicas con exponentes mayores a 2. Con esta base teórica, tipifica los problemas en dos clases: problemas *determinados* e *indeterminados*. (Wussing, 1998). Los primeros, significan que se pueden resolver ecuaciones por medio de construcciones geométricas. Y los segundos, de encontrar lugares geométricos por medio de ecuaciones que representan la curva o que dependen de variables, tales como el famoso *Problema de Pappus*.

De esta manera, Descartes logró, con esta perspectiva, resolver problemas geométricos ya que opera homogéneamente las magnitudes, recurriendo al álgebra y en consecuencia emergen las ecuaciones. Por tanto, en el Primer Libro, no se trata necesariamente de reducir la *geometría* al *álgebra*, sino más bien de realizar una *construcción geométrica* que permita encontrar las raíces de polinomios, como solución a los problemas planteados. Esto lleva a considerar que las dos cantidades desconocidas en una ecuación, eran segmentos lineales más que números. (Collette, 2000). Por último, explica que con su método, puede resolver el *Problema de Pappus* pero esta resolución la efectuó en el siguiente libro.

El Segundo Libro está dedicado al estudio detallado de la curvas de diferentes órdenes (actualmente, según el grado de su ecuación), así como a su clasificación y propiedades. Para los griegos, las clasificaban como lugares *planos*, *sólidos* y *lineales*, tal como se explicó en la primera parte de esta dimensión de análisis, mientras que Descartes propuso una nueva clasificación en curvas *geométricas* y *mecánicas*. Las primeras, si se puede imaginar descrita por un movimiento continuo (con regla y compás) o por varios movimientos sucesivos de manera que los últimos vengan determinados por los anteriores, mientras que las segundas, son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida.

En otras palabras, la curva es *geométrica* si se da una traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla se transmite por diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Esta manera de entender la curva —y la introducción implícita del sistema de coordenadas— hace que Descartes pueda encontrar su expresión algebraica. Actualmente, las geométricas como la recta, la circunferencia o las *cónicas*, se conocen como curvas *algebraicas* que se pueden describir exactamente. En tanto que las mecánicas, como la cuadratríz y la espiral logarítmica, son curvas *trascendentes*, descritas inexactamente (Collette, 2000).

Sin embargo, lo culminante en este libro, fue el haber resuelto el famoso *Problema de Pappus*[21], para el caso de cuatro rectas (Ver Figura 10). Se da cuando Descartes, procediendo por el método de razonamiento, que ya lo sabían usar los griegos en las resoluciones de problemas geométricos y en las demostraciones,

[21] El enunciado de este problema geométrico *indeterminado* es: Dado cuatro líneas $AB$, $AD$, $EF$ y $GH$, se deben encontrar una infinidad de puntos como $C$, […en términos modernos, el lugar geométrico de todos los puntos $C$], desde el que, habiendo trazado las cuatro líneas rectas dadas, $CB$, $CD$, $CF$ y $CH$, de modo que los ángulos dados, $CBA$, $CDA$, $CFE$ y $CHG$, y de modo tal que el resultado de $CB$ multiplicado por $CF$ produzca un resultado igual a $CD$ multiplicado por $CH$. Ver Figura 10.

primero el *análisis*[22] y luego, en un segundo momento, la *síntesis*[23], y mediante consideraciones geométricas, haciendo uso de variables apropiadas, $x$ e $y$, variando una y fijando la otra, así como efectuando un tratamiento algebraico, concluye y "demuestra[24]" que toda ecuación de segundo grado de la forma:

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2,$$

representa una *cónica*.

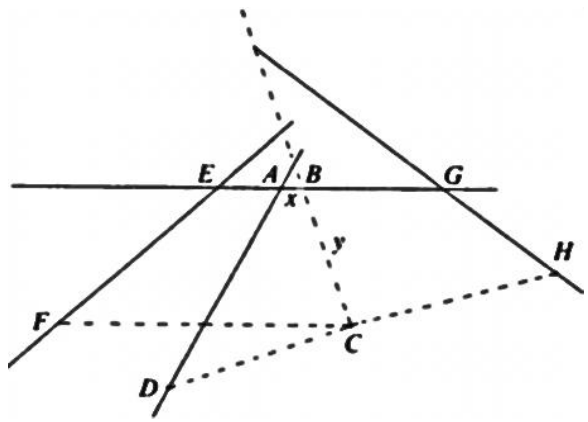



*Figura 10: Algebrización del Problema de Pappus para cuatro rectas (Collette 2000, p. 15).*

Según Collette (2000), esta última expresión algebraica, pasa por el origen de coordenadas pero, para Descartes, los coeficientes literales deben ser considerados como positivos. A continuación indicó las condiciones que hacían falta imponer a los coeficientes para que la *cónica* se convierta en una recta, una parábola, una elipse o una hipérbola. Vale la pena mencionar que a pesar de que la ecuación sea, según Pla (s. f.) algo *subsidiario,* el geómetra francés advirtió la importancia que tiene conocer la ecuación de esta, para poder así determinar elementos geométricos característicos, los cuales son el centro, el vértice, los ejes, los diámetros, los focos, etc., es decir, las propiedades geométricas que describirían ese objeto geométrico. En la última parte de este libro, planteó tanto un método para calcular las tangentes a una curva cualquiera en un punto, de manera algebraica, así como un estudio sobre los óvalos como curvas especiales que responden a consideraciones fijadas sobre las tangentes o normales.

En el Tercer Libro de *La Géométrie*, el objetivo principal es la construcción de una teoría general de resolución de ecuaciones y la utilización de los lugares geométricos como recursos algebraicos (Ribnikov, 1987). Para ello, Descartes se dedica a resolver ecuaciones de tercer hasta sexto grado con medios geométricos, reduciendo el

[22] el *análisis* es la suposición de que se ha aceptado lo que se busca para llegar, mediante las consecuencias de esto, hacia algo que se admite como verdadero. El análisis, entonces empieza por lo más general, procediendo después por descomposición.

[23] La *síntesis* es la suposición de que algo se acepta [como verdadero] y se llega a través de sus consecuencias a lo que se busca. La síntesis comienza por examinar casos particulares, de los cuales pasa poco a poco a conceptos generales.

[24] Descartes según Álvarez (2000), no hace ninguna demostración rigurosa como se entiende actualmente, sino que básicamente, escribió su tratado para explicar su método para encontrar soluciones a problemas geométricos.

problema de la construcción a dos medias proporcionales, y también a resolver dos problemas clásicos de la *geometría griega*, la *trisección del ángulo* y la *duplicación del cubo*, solucionándolos con ayuda de dos secciones cónicas y encontrando las raíces de ecuaciones de tercer grado.

- ***La Géométrie*: tratamiento de curvas y resolución de ecuaciones**

La mayoría de los historiadores se inclinan en afirmar que esta obra tiene un contenido esencialmente geométrico, aunque sólo sea por su título. Otros imaginan al contrario, que se trata de establecer las directrices para solucionar el problema antiguo de la *resolución de ecuaciones*, sin embargo, Warusfel (2009), declara que *La Géométrie* es un tratado sobre las dos cosas a la vez, se refiere a las *curvas geométricas* y de manera simultánea, también se trata acerca de las *ecuaciones algebraicas*, no obstante, a veces se torna confuso porque aparecen dos tipos de enunciados de problemas geométricos (según Descartes, los *determinados* e *indeterminados*) que parecen contradictorios, pero esenciales, de acuerdo con este mismo historiador. Para aclarar esta confusión en este tratado, Warusfel (2009) se remite a presentar las dos *técnicas* de resolución para cada uno de estos problemas:

> Problema 1: Construir (*punto por punto)* toda la curva algebraica dada en geometría, es decir, según la definición de una igualdad algebraica $f(x,y) = 0$ donde $f$ es un polinomio (Descartes, 1637/s.f., p. 316).
> Problema 2: Resolver geométricamente [… es decir, a la antigua, mostrando segmentos cuyas longitudes son las raíces buscadas] toda ecuación algebraica definida por una igualdad $P(x) = 0$ donde $P$ es un polinomio entonces se debe encontrar las raíces (tomado del Primer y Tercer Libro). (p. 2)

Considerando lo anterior, este historiador (Warusfel, 2009) afirma que Descartes, según el enunciado del problema 1, sabía cómo construir *punto* por *punto*, cualquier curva definida por una ecuación algebraica $f(x,y) = 0$; que en *La Géométrie* la denotaba como $C(p)$ a su *técnica* de construcción de las curvas de grado $p$ (Descartes le denominaba de orden $p$). En cambio, en el problema 2, sabía cómo construir gráficamente las raíces de cualquier ecuación $P(x) = 0$, independientemente de su grado, que se denota $E(n)$ a su *técnica* de la resolución gráfica de ecuaciones de grado $n$.

Así mismo, a la luz de lo anteriormente presentado, se puede afirmar que Descartes realizó un tratamiento totalmente diferente a las curvas, de acuerdo con el papel que desempeñaran en la resolución de problemas, de esta manera, se tratarían *puntual* o bien *global*, en relación a dos aspectos (Bos 1981, citado en Bartolini Bussi, 2005), se encuentran en el Segundo Libro de su obra:

> O bien a su papel en la *solución de un problema* ó bien, en relación al *hallazgo de soluciones*. En efecto, cuando se ve como una *solución a un problema* geométrico, es suficiente una construcción *puntual* de una cónica por medio de regla y compás, sin embargo, cuando en un problema es necesario encontrar *soluciones* por medio de intersecciones de cónicas, entonces ya no es suficiente una construcción puntual. Por lo que se requiere un criterio más fuerte, es necesario entonces tener un método para trazar la curva por medio de "algún movimiento regular" que permita encontrar *todos* los puntos (construcción global) de la curva, de tal manera que las intersecciones con otras rectas o curvas sean precisamente construibles. (Bartolini Bussi, 2005, p. 42).

Por lo tanto, a partir de la resolución de los problemas geométricos, surgen dos problemas fundamentales, inversos entre sí pero para nada contradictorios, que se describen en cualquier libro de *geometría analítica* actual: "*dada una figura geométrica o la(s) condición(es) que debe cumplir los puntos de la misma, entonces se debe encontrar la ecuación que la determina*." (Lehmann, 2002, p. 32). Esto se puede afirmar debido a que Descartes comienza con un problema de *lugar geométrico* para luego obtener su correspondiente expresión algebraica, según Collette (2000). Por otra parte, en *La Géométrie*, no se encuentra ninguna curva trazada directamente a partir de su ecuación, que es lo que precisamente sucede en el otro problema fundamental de la *geometría analítica,* pero que fue rescatado en la obra de Fermat (González, 2007): "*dada una ecuación ó su expresión algebraica de la forma* $f(x,y)=0$, *entonces de debe construir la gráfica o interpretarla gráficamente*" (Lehmann, 2002, p. 49).

También se puede inferir que a Descartes no le interesaban los lugares de puntos que satisfacen una ecuación dada, sino la posibilidad de *construir* estos puntos, con base a lo que luego se llegó a institucionalizar como la correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números (actualmente, son los números reales). Pues así lo afirma Álvarez (2000):

> La ecuación de la curva es susceptible de ser "construida con regla y compás", entonces no debe entenderse que con regla y compás será posible trazar la curva que determina el lugar geométrico de los puntos $C$[25], sino que con regla y compás es posible encontrar los valores de $x$, determinados a través de esta ecuación a partir de los distintos valores asignados a $y$". (p. 50)

[25] El punto $C$, es el punto $(x,y)$, es decir las coordenadas que satisfacen el problema o la ecuación y pertenece a la curva.

Con la última parte de la anterior cita, se puede observar que la idea de un "objeto matemático" muy sutil, empezaba a surgir con Descartes, que "florecería progresivamente sólo por una maduración lenta por parte de Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Dirichlet: el de *función*". (Warusfel, 2009, p. 23). De esta manera, *La Géométrie*, en la cual se pueden leer varias ecuaciones de curvas, no indica explícitamente en ninguna parte la forma simple y particular $y = f(x)$, pero sí se puede observar en forma implícita, en la ecuación de la *hipérbola equilátera*[26]. Es evidente que todo apuntaba hacia la constitución de este nuevo objeto matemático. Es de recordar que no es de interés hacer una epistemología e historicidad de este objeto.

Sin embargo, es de recalcar que de esta manera aparece una relación funcional entre las magnitudes que varían, idea fundamental para Descartes dentro de su filosofía que estaba permeada por las propiedades de *movilidad* en la materia, (Ribnikov, 1987), que ahora se denomina *variables* en la ecuación cartesiana. De acuerdo a esta tendencia, la magnitud variable se introdujo en *La Géométrie* en forma dual, según Ribnikov (1987):

> En forma de la coordenada variable de un punto, que se mueve a lo largo de una curva y en la forma de un elemento variable del conjunto de números, el cual corresponde a los puntos de un segmento coordenado dado. (p. 158)

Esta idea primitiva de *función* en matemáticas es lo que se le anota como contundente en el paso de una modalidad de existencia hacia un nivel de abstracción cada vez más refinado del objeto matemático denominado curvas *cónicas* vistas como *lugar geométrico*. Aunque Apolonio, tal y como lo afirma Gardies (2004) y Boyer (1996), ya había dado los primeros pasos en el establecimiento dicha relación funcional cuando empezó a caracterizarlas relacionando las abscisas con sus correspondientes ordenadas o "*síntomas*" de la curva. Por tanto, es el geómetra griego quien se llevó el mérito de encontrar por primera vez tal relación entre las secciones cónicas y donde las expresa gracias a dos términos. Al respecto, Gardies (2004) declara lo siguiente:

> La geometría de Descartes se apoya más sobre Apolonio que sobre Arquímedes. Sustituye a la consideración directa del objeto geométrico por el de las funciones quien es la propiedad. Las funciones son las que ya hablan de las propiedades de las curvas. (p. 62)

Como se puede apreciar, nace otra confusión entre la función y la curva misma. Vale señalar que cuando se tiene un "objeto matemático", se tiene que hacer una

[26] Una *hipérbola equilátera*, también denominada *hipérbola rectangular*, tiene como ecuación $xy = k$, donde $k$ es una constante cualquiera diferente de cero, de lo cual es fácil expresarla en términos de una función de la forma $y = f(x)$.

aclaración de tipo ontológico y representacional: la representación de un objeto matemático *no* es el objeto mismo. De esta manera Gardies (2004), diserta al respecto:

> Ciertamente, si a toda función, Descartes le hace corresponder una curva considerada en un plano, una confusión puede establecerse, en el espíritu de un observador superficial, entre la curva en un plano que *tiene* la propiedad en cuestión y la función misma, quien *es* esta la propiedad; puesto que al final no es necesario perder de vista que dicha curva es solamente el objeto más simple, el más elemental, que uno puede encontrar que tiene esa propiedad y está en un plano. (p. 62)

En otras palabras, por primera vez, se sostuvo la concepción de que una ecuación en términos de $x$ y de $y$, era un medio para introducir la dependencia entre dos cantidades variables, relacionándolo asimismo con la naturaleza de la noción de curva geométrica lo cual condujo a que el concepto de *variable* adquiera otra significación diferente (Ruiz, 1998). De esta manera, se comenzó a estudiar las propiedades de los puntos de una curva a través de las relaciones entre las "coordenadas" de estos.

### 2.1.4. Consideraciones finales de la dimensión histórica – epistemológica.

Es posible afirmar a luz del enfoque ontológico logicista de Gardies (2004), que las *cónicas* como todos los objetos matemáticos, han pasado por diferentes modalidades de existencia lógica. En este caso, se manifestaron en un primer momento a partir del hallazgo a una solución a un problema clásico de la *geometría antigua*, que no existía antes, que luego fue declarado en la historia en tanto descubrimiento efectuado por Menecmo. Este proceso de constitución en objeto matemático, según Gardies (2004), empezó desde el momento en que se le asignaron nombres a estas curvas, teniendo como referente el mundo de la experiencia sensible (el cono rectangular), por lo que se ubica en un primer nivel de existencia lógica, posteriormente se le da una nueva existencia lógica con Apolonio, cuando presenta predicados sobre propiedades geométricas de las *cónicas*, es decir, cuando habla acerca de las particularidades (los *síntomas*) y su formalización en un *corpus* teórico con una lógica interna, prescindiendo de las *sustancias primeras*[27] (las intersecciones del plano cortante con el cono) que las originó y cristalizando en *Las Cónicas*.

[27] Según el diccionario de términos filosóficos de Martínez y Martínez (1997), en Sócrates, Platón y Aristóteles, las sustancias primeras son entidades individuales y sujetos compuestos de materia y forma, seres concretos, dotadas de existencia independiente. Se les denota como primeras porque en ellas descansan las otras determinaciones genéricas que les pueden sobrevenir como ser hombres, sillas, perros, plantas. Su única designación sería el señalamiento mediante el dedo índice o mediante un nombre propio.

Según este enfoque, sería Apolonio quien predica acerca de estos objetos matemáticos, llegándose a dar un segundo modo o nivel de existencia en una lógica de segundo orden, pues son predicados en términos de predicados de *sustancias primeras* (Arboleda, 2007).

Sin embargo, es Descartes quien le da tratamiento distinto, cuando en la construcción de la curva, ocurrió una separación entre lo visual y lo verbal y por lo tanto, empezó a hablar de las propiedades constitutivas usando otro tipo de representación. Evidentemente, hubo un cambio de representación en el objeto matemático *cónica*. En consecuencia, se redujo a disponer de la posibilidad de enunciar proposiciones de proposiciones y se llegó a un tercer modo de existencia lógica. Lo anterior se debió a que el autor de *La Géométrie* se apoyó en la idea de borrar las distinciones entre las magnitudes homogéneas y no homogéneas, y entre magnitudes continuas y discretas (Álvarez, 2000) que actuasen como *representantes* para hacer operaciones mediante predicados de segundo orden, arribando a este nivel superior, donde dicho objeto matemático se tornó puramente abstracto y donde no tenía interés ni ninguna relación con lo concreto o lo físico. Lo que en realidad Descartes halló fueron las bases para formar lo que actual y matemáticamente se le denomina como la constitución de un *campo algebraico* (Ribnikov, 1987), ampliando la estructura euclidiana, los objetos, las relaciones y sus operaciones.

De esta manera, el autor de *La Géométrie* llegó a un *encapsulamiento* del significado de las *cónicas* en una sola expresión algebraica, en la cual se puede acceder a las características geométricas de manera general de familias enteras de curvas, de tal manera que simultáneamente se pueden descubrir propiedades similares o análogas en una infinidad de curvas. Actualmente en los libros de *geometría analítica* se le conoce a esta expresión como la definición analítica de *cónica*. Es decir, que las ecuaciones de segundo grado como $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representan a las *cónicas*, de manera inversa, todas las *cónicas* se designan mediante este tipo de ecuación de segundo grado. Lo que significa que gracias a la noción de *lugar geométrico*, al designarse como ecuaciones algebraicas de dos variables sobrepasó a la "*geometría antigua*", y como consecuencia de esto se podían comprender las propiedades de las figuras de una manera más general y sin limitaciones (Piaget & García, 1982).

Por lo tanto, las *cónicas* son un claro ejemplo de *generalización* y *tematización*[28] en la historia de las matemáticas, es decir, que pasa por un proceso de abstracción al

[28] Según Arboleda (2003), la tematización es el procedimiento en virtud del cual el pensamiento del objeto en el mundo de la cantidad (por ejemplo, la parábola como lugar geométrico de una relación entre segmentos), es trascendido por el pensamiento del objeto como ecuación (la parábola como una expresión analítica). Este procedimiento difiere de la generalización por abstracción de una cualidad primaria y es análogo a la constitución de un nuevo objeto operando una relación de equivalencia en la clase predeterminada de objetos (la ecuación de

pasar de un nivel de complejidad a otro superior apoyado en relaciones de equivalencia (Gardies, 2004). O como afirma Arboleda (2007), el mismo objeto matemático introduciéndose en un “cascada de sucesivas abstracciones” basadas siempre en niveles previos de existencia, y, reduciendo siempre tales existencias a enunciados cada vez más abstractos.

Otra conclusión con respecto a los lugares geométricos es que Descartes rompe así, con la tradición que distinguía las curvas que se construyen con regla y compás, a otras curvas que requerían de otros instrumentos, por lo que se abrió el camino a una clasificación de las curvas basadas sobre la naturaleza de las expresiones que las representan (Collette, 2000). Esto conllevó a que la naturaleza de las curvas cambiara, ya no como objetos holísticos (globalmente) sino hechas de puntos pero sustituidos por pares de números para resolver problemas matemáticos.

Hasta esa época, se puede inferir que gracias al trabajo Cartesiano, se podía comprender las curvas *cónicas* como: secciones de un cono; o bien como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones; o como una ecuación algebraica de dos variables, cada vez agregando nuevos elementos representacionales para dar significado a las *cónicas* constituyéndose así en un objeto matemático complejo.

grado dos y la familia de cónicas). Cuando se instaura una tematización, el pensamiento trasciende la simple generalización y la convierte en un caso particular suyo.

## 2.2. Dimensión Cognitiva

Esta dimensión se fundamentó en cinco aspectos considerados pertinentes desde la literatura de investigación. En primer lugar, se describieron algunos enfoques relativos a la caracterización *global* y *puntual* de los objetos matemáticos, para luego tomar una postura frente a esta revisión desde la representación gráfica, de tal manera que se viera reflejado en los diseños de las situaciones.

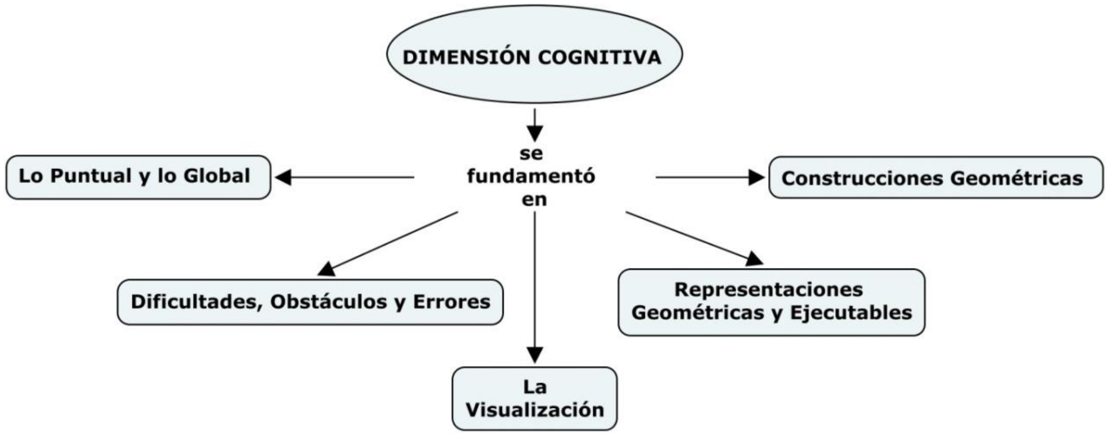
En segundo lugar se señalaron algunas *dificultades*, *obstáculos* y *errores* que tuvieron la población de estudiantes universitarios de esta investigación, acerca de la comprensión de las *cónicas*, a modo de evidenciar las concepciones e ideas previas. Estas fueron *a priori*, es decir, antes de que los sujetos fuesen involucrados al curso y a las situaciones didácticas diseñadas.

En tercer lugar se indicaron ciertos elementos conceptuales alrededor de los fenómenos de *visualización* matemática en este estudio. Para ello, se destacó como núcleo importante para entender las dificultades del aprendizaje y el papel que juega en la comprensión de la *geometría*. Luego, se precisó una postura que tuvo en consideración la integración de las TIC en las clases de matemáticas. Así mismo, se presentó algunas características y recomendaciones sobre los fenómenos de *visualización*.

En cuarto lugar se dieron argumentos a favor del papel que juegan las *representaciones matemáticas* para el favorecimiento del entendimiento de los objetos matemáticos, en particular, para la *geometría* de las *cónicas*. Se abordó las características que traen los *sistemas de representación ejecutables* con las tecnologías computacionales al servicio de las matemáticas como instrumentos de *mediación* para la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas, los cuales favorecen las articulaciones entre las representaciones, la interacción y el dinamismo, así como se justificó el valor de las *representaciones gráficas* que ofrecen estos ambientes informáticos.

Por último, se señaló una serie de consideraciones cognitivas acerca de las *construcciones geométricas* como ejes articuladores de la actividad matemática, de tal manera que los estudiantes puedan graficar las *cónicas* desde lo *global* y lo *puntual*. Así mismo, se argumentó por qué razón las construcciones llegan a constituirse en una estrategia didáctica que hacen vincular los *fenómenos visuales* con las *representaciones dinámicas ejecutables* en un AGD, y de esta manera puedan superar las dificultades asociadas a la comprensión de las figuras.

Para resumir la *complejidad cognitiva*, en el Esquema 4, se muestra el orden de los aspectos en esta dimensión:



*Esquema 4: La dimensión Cognitiva.*

### 2.2.1. La caracterización global y puntual de los objetos matemáticos desde un punto de vista cognitivo: el caso de los lugares geométricos.

En lo que sigue, se contempló una revisión de algunos estudios didácticos que a criterio del investigador, se consideraron pertinentes para comprender las caracterizaciones *globales* y *puntuales* de las nociones matemáticas. Esta forma de "ver" dichas nociones genera diferentes conceptualizaciones en el aprendizaje, que en algunos casos son complementarias y necesarias en la construcción del *saber matemático*. En el último segmento de esta sección, se presenta una postura frente a lo global y puntual.

Diversos investigadores han planteado enfoques para abordar la complejidad de lo *global* y lo *puntual* de los objetos matemáticos en la *Educación Matemática* y en las *Matemáticas* mismas. En particular, se analizó los aportes de Duval (2001), Lacasta y Pascual (1998), Ruiz (2003), Jiménez (2003), Serfati (2008), Jahn y Clarou (1998) y Jahn (2000, 2002).

Por ejemplo, para Duval (2001), una representación gráfica cartesiana, se puede "ver"[29] de tres maneras diferentes:

- Una *puntual*, cuando se retienen puntos considerados aisladamente, es decir, cuando se da un valor de un punto en coordenadas cartesianas.

[29] Para Duval, "ver" no es visualización, porque la aprehensión local se limita a operaciones puntuales y sucesivas de codificación o decodificación (lectura), mientras que para la manera de ver icónica y global efectivamente se refieren a la visualización.

- Una *icónica*, cuando se determina la imagen de una “tendencia”, es decir, se observa los desplazamientos de subida o de bajada, en relación con un nivel horizontal, en analogía con cambios de posición en el espacio físico real y
- Una *global*, también denominada por este investigador como “aprehensión global cualitativa”, en donde se visualiza una relación entre dos variables definidas sobre dos conjuntos de valores.

> Esta es la manera de ver más útil en matemáticas, porque los gráficos cartesianos se utilizan siempre en articulación con otros registros de representación, en particular, con los registros de la escritura algebraica, y permiten tratamientos cualitativos propios a este modo de visualización: como la *interpolación* o *extrapolación.* (Duval, 2001, p. 66)

Por lo tanto, para Duval (2001) es necesario llegar a una aprehensión global, aunque uno de los problemas del aprendizaje sea el hacer pasar a los alumnos de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global. Así mismo, afirma que el llegar a una aprehensión global permite una coordinación con las representaciones algebraicas y por lo tanto, los gráficos pueden funcionar como una forma de visualización.

Entre tanto, para Lacasta y Pascual (1998), al describir los diferentes funcionamientos y clasificación de los gráficos de acuerdo con su utilización, es común encontrar que cuando a los alumnos se les solicita que representen gráficamente una función entonces lo que hacen es construir una tabla de valores $(x, f(x))$ y luego ubican cada uno de los puntos correspondientes en el plano cartesiano. A este procedimiento de representación *puntual*, desde estos didactas y matemáticos españoles, se le denomina *ábaco*[30], es decir, un *lugar geométrico*, cuyas coordenadas se pueden leer sobre los ejes. Este procedimiento en la representación punto por punto persiste en los niveles superiores, favorecida por el uso de calculadoras, y suele venir acompañada en los primeros cursos universitarios con un conocimiento muy limitado del análisis de funciones.

Sin embargo, para estos mismos, cuando el gráfico contiene informaciones de orden topológico, aunque más difusas que las de carácter métrico, tales como continuidad, límites, etc., entonces las propiedades de la gráfica de la curva ya no son de *ábaco* sino una descripción *global*. En esta representación global, debido a que se hacen intervenir todos los números reales de un intervalo, presentando características tales como el crecimiento, decrecimiento, monotonía, etc., cuestiones que no se

[30] Para Lacasta y Pascual, uno de los cinco funcionamientos de acuerdo a los usos del gráfico, lo clasifica como ábaco o nomograma, el cual consiste en representar funciones y ecuaciones de varias variables mediante una gráfica llamada nomograma o ábaco, el cual permite calcular el valor de cada variable, conocidos los valores de las otras variables. Así pues, la nomografía o el cálculo nomográfico es diferente del cálculo meramente gráfico, que exige alguna *construcción geométrica* para hallar cada valor.

pueden analizar en una figura utilizable como ábaco. Así pues, las propiedades topológicas empleadas implícitamente con los gráficos, son importantes para que el alumno pueda llegar a utilizarlos como procedimientos para dibujar la curva.

En cambio para Ruiz (2003), al llevar a cabo un análisis didáctico de las concepciones y procedimientos de los alumnos acerca de la definición de un mismo objeto geométrico, afirma que pueden surgir dos concepciones desde el punto de vista matemático:

- Una *global*: si se considera como una curva ("figura geométrica") y
- Otra *puntual*: si se considera como un conjunto de puntos.

Estas dos concepciones que precisan los objetos geométricos tiene cada una elementos que la determinan de manera específica.

Por otra parte, para Jiménez (2003), las nociones matemáticas se presentan con una doble naturaleza o de una manera dual en dos aspectos. Uno *global* y otro *puntual*. Una noción puede presentarse en un primer nivel como *puntual*, es decir, se puede encontrar un significado local y estático. Y en un segundo nivel, *global*, es decir, que la noción no está ligada a un punto específico, y por lo tanto su definición no depende de un punto elegido. La noción desde lo global adquiere un significado desde el punto de vista funcional como cualquier valor permitido de la variable independiente o desde el punto de vista geométrico como cualquier punto que pertenece a la curva.

Se trata así de un significado global y dinámico. Lo global y lo puntual son para este investigador, aspectos equivalentes para una noción matemática. Sin embargo, desde el punto de vista cognitivo, Jiménez (2003) afirma que lo puntual, lo operacional, lo instrumental va antes que lo global. Y que lo global, lo estructural, lo relacional debe de ir después de lo puntual. Al respecto, en un estudio de Sfard (como se cita en Jiménez, 2003) se encontró que las concepciones puntuales (instrumentales u operacionales) deben preceder cognitivamente a las globales (estructurales o relacionales).

Sin embargo, no está del todo claro, aunque parezca obvio, que las concepciones globales crecen y se desarrollan sobre la base de las concepciones puntuales. En otras palabras, no hay evidencia empírica suficientemente sólida sobre el hecho de asimilar una concepción puntual sea el prerrequisito o la condición necesaria para construir sobre ella una concepción global según Heugl (como se cita en Jiménez, 2003).

Desde una posición más radical, hay quienes afirman que el haber asimilado previamente una concepción puntual puede eventualmente constituirse en un *obstáculo epistemológico* para arribar a la concepción global correspondiente (Lagrange 1999, citado en Jiménez, 2003). También hay quienes afirman que probablemente la cognición requiera de una relación dialéctica entre ambas concepciones, con alternancias y reforzamientos mutuos entre lo puntual y lo global (Duval, 1998, como se cita en Jiménez, 2003), entre lo algorítmico y lo conceptual (Artigue, 2001, como se cita en Jiménez, 2003).

En Jiménez (2003), se plantea que en la epistemología de las matemáticas, se puede apreciar que el desarrollo de los conceptos matemáticos ha pasado por un proceso de evolución gradual desde su interpretación intuitiva hasta su definición formal, y que tener en cuenta la génesis de una noción matemática permite tener elementos para el diseño de las actividades de enseñanza de los conceptos matemáticos donde se incorpore esta doble relación dialéctica que se manifiesta en el proceso de gestación y evolución de dichos conceptos, por un lado, como tensión entre lo puntual y lo global, y por el otro, entre las interpretaciones estática y dinámica de tales conceptos. Así mismo, esta dualidad debe ir relacionada con la expresión analítica (o algoritmo) que refleja la naturaleza de tal concepto, y que en la ciencia matemática se presenta como la definición formal de la noción matemática.

Entre tanto, para Serfati (2008), en las discusiones dadas en el seminario denominado "*las relaciones entre lo local y global en matemáticas y física elementales: desde consideraciones epistemológicas hasta algunos problemas didácticos*", del Instituto Henry Poincaré de París, se afirma que desde el punto de vista matemático, los conceptos y propiedades matemáticas se presentan en primer lugar o bien como de carácter *local* o de carácter *global*. Tal es el caso de las definiciones formales que hacen intervenir una mezcla sutil de cuantificadores existenciales y universales, lo que conlleva a plantear problemas didácticos, que surgen cuando por ejemplo se estudian problemas del Análisis Matemático como la continuidad, la derivabilidad o la uniformidad.

Sin embargo, en este seminario se afirma que en *Análisis Matemático* y en *geometría* la distinción entre estos dos puntos de vista es esencial, donde uno de los objetivos frecuentes es *globalizar* una propiedad *local*. Así, en *geometría* o *topología*, definir un objeto por propiedades de las vecindades de cada uno de sus puntos no asegura en general una caracterización global, entonces hay que añadir a eso las propiedades globales; es por ejemplo el caso de las variedades.

Así mismo, Serfati (2008) agrega que para los estudiantes comprender si una noción es *local* o *global* no es inmediato, por varias razones didácticas e incluso epistemológicas. Por una parte, el punto de vista local es casi inexistente en el *liceo*[31].

[31] El liceo es dentro de la estructura del sistema educativo en Francia, la segunda y última parte de la Educación Secundaria que incluye los tres últimos años lectivos.

Por otra, los procesos de globalización siguen siendo exclusivos del nivel universitario. Además, algunos enunciados tienen una versión local y una global, sin que esto siempre sea dicho. Por último, la utilización de lo local suele basarse en una existencia no explícita, que parece inhabitual en los estudiantes. Este doble punto de vista local-global se encuentra en física elemental, en particular en los procesos de modelización. La aplicación de las leyes de la física a las situaciones estudiadas pone así en juego diversos niveles posibles, con frecuencia las idas y vueltas entre lo local y lo global.

Entre tanto, Cha y Noss (2001) afirman que en contraste con lo global, la comprensión puntual es local, el cual significa ver las propiedades individuales de puntos de un *lugar geométrico*. En otras palabras, la idea puntual la consideran fundamental en la *geometría analítica*, ya que se empieza por puntos arbitrarios los cuales satisfacen condiciones geométricas dadas y luego generalizan un punto en una forma algebraica de tal manera que el *lugar geométrico* pueda ser trazado en el plano cartesiano.

#### *2.2.1.1. La postura de lo global y lo puntual.*

Para llegar a una postura acerca de lo *global* y *puntual* en los objetos matemáticos, se consideró el enfoque cognitivo que analizó Jahn y Clarou (1998), en particular, las investigaciones que realizó Jahn (2000; 2002) al estudiar las propiedades y definiciones de *lugar geométrico* y sus estrechas relaciones con las *transformaciones geométricas* cuando se integró el Ambiente de Geometría Dinámica Cabri Géomètre II Plus en situaciones didácticas. Así mismo, se tuvo en cuenta el enfoque cognitivo de Duval (2004) para construir figuras geométricamente.

La caracterización *global* o por *trazo continuo*[32] tomada en cuenta, consiste en que se efectúa la totalidad de la figura geométrica usando algún instrumento que guie la mano o bien que la sustituya, si es el caso en el ambiente de lápiz y papel, trazándose una figura geométrica a partir de puntos particulares para luego unirlos y formar en su totalidad la figura, al respecto Duval (2004) afirma:

> Las figuras geométricas no se dibujan a mano alzada, sino que se construyen con la ayuda de un instrumento que guía el movimiento de la mano, o bien que la sustituye. ¿Por qué? Por la regularidad que se impone al movimiento del

[32] La palabra continuo se ha tratado de evitar a toda costa, debido a que la noción de continuidad, desde el punto de vista matemático es compleja y esto conlleva una serie de consideraciones didácticas que aluden al campo de la didáctica del Cálculo, sin embargo, en esta investigación no es de interés el profundizar en esta temática.

> trazado, y por tanto por la invarianza visual que se introduce en el trazado, un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica, y esta forma visual constituye la primitiva del instrumento. (p. 164)

Por ejemplo, para el caso de trazar un polígono, entonces se dibujan primero los vértices usando regla y compás y luego se unen rectilíneamente; para el caso de un segmento, se dibujan los dos puntos extremos y luego se unen; para el caso de la circunferencia se localizan su centro y un punto cualquiera que vaya a pertenecer a la circunferencia y luego se usa el compás u otro instrumento; para el caso de una elipse, lo *global* para trazarla es primero ubicar el punto centro, localizar las coordenadas del punto centro, luego localizar cual va a ser el eje focal, los vértices del eje focal y los vértices del eje menor, para luego unir con un trazado[33] *suave* y *continuo* los vértices formándose la curva elipse o de otra manera tal como se hace con el *método del jardinero*[34] usando instrumentos rudimentarios. En todos estos casos, la figura se forma de manera total al trazarla.

Por otro lado, la caracterización *puntual* consiste en realizar una nube de puntos a partir de *construcciones geométricas* que usualmente no son *dinámicas* sino *estáticas* y requieren del uso de instrumentos de dibujo geométrico, ya que requieren de la elaboración de varios casos particulares que cumplan una condición geométrica dada. Ó si se da la representación algebraica del objeto geométrico en dos variables entonces se tabula obteniéndose suficientes puntos para luego realizar una nube de puntos.

Estas situaciones puntuales, a partir de una condición característica, buscan determinar si un punto pertenece al conjunto de puntos. Por ejemplo, existen varias construcciones puntuales de la mediatriz de un segmento dada su definición, una de ellas es considerar los vértices $C_n$ de la familia de triángulos $ABC_n$ isósceles que comparten la misma base (AB). Otro ejemplo, es la construcción de una nube de puntos que pertenecen a una circunferencia por medio de una construcción iterativa, como construir varios segmentos con la misma longitud y un mismo extremo (el centro), lo que se forma sería el conjunto de puntos extremos (que no son el centro) de los segmentos. En estos casos puntuales, se enfatiza que el resultado del proceso es la obtención de una nube de puntos que da la forma de la figura pero no es la figura, es solo un arreglo de puntos.

---

[33] El trazado se hace a mano alzada, donde se recomienda que existan suficientes puntos por donde hacer pasar la curva o bien usando un instrumento que guie la mano. Usualmente al trazarlos en un ambiente de lápiz y papel, y en el marco de *dibujo técnico* o *diseño gráfico*, se usa un curvígrafo,

[34] Este método famoso y antiguo consiste en clavar dos estacas o maderos en el suelo (los focos de la elipse) o sobre cualquier superficie, separados a una distancia cualquiera y se utiliza una cuerda de longitud mayor que la distancia entre las dos estacas, luego se debe tensar la cuerda y recorrerla con una vara o lápiz para ir delineando sobre la superficie el dibujo de la elipse.

Vale la pena recalcar que en un contexto de la *geometría sintética* y *estática*, la noción de *lugar geométrico* es percibida como un conjunto de puntos que satisfacen una cierta propiedad geométrica. Este conjunto puede ser considerado o bien *globalmente* (global) o *puntualmente* (punto por punto ó puntual). Sin embargo, las *cónicas* en la *geometría analítica*, no son exclusivamente estudiadas desde lo *global* y lo *puntual* como se concluyó en el análisis de libros texto presentado anteriormente.

Por último, aunque lo *global* y lo *puntual* no se ve exclusivamente en las representaciones gráficas, vale la pena reiterar que es una *caracterización* del objeto matemático, y por lo tanto, puede estar presente en cualquier otro tipo de representaciones matemáticas. Así mismo, se entiende que lo *global* y lo *puntual* son formas de procedimiento (un proceso) al representar matemáticamente el objeto.

### 2.2.2. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las cónicas. Una indagación sobre las concepciones.

El objetivo general en este apartado es analizar las *dificultades*, *obstáculos* y *errores* en el aprendizaje de las *cónicas* a nivel universitario. Se asume que los errores de los estudiantes no son casuales, ya que están basados en conocimientos y experiencias previas, y tienen diferentes causas que los motivan. Así, pueden asociarse a dificultades didácticas, epistemológicas, cognitivas o de actitudes.

Por otra parte, los errores forman parte del proceso de construcción del conocimiento y pueden ser el motor que provoque un cambio en el aprendizaje del estudiante, transformándose así, en un elemento constructivo e innovador dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con Socas (1997), el error va a tener diferentes procedencias, sin embargo, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el estudiante de un esquema *cognitivo* inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste.

En este sentido se diseñó un instrumento de recolección de *ideas previas* para 25 estudiantes del curso de *geometría analítica*, denominado cuestionario (Ver Anexo No. 1), constituido por 35 preguntas en forma de consulta, antes de que los estudiantes trabajaran con las situaciones didácticas diseñadas para esta investigación, tomando como referente las *ideas previas* de las *cónicas* que estudió Río-Sánchez (1989) para conocer el nivel de dificultades, realizaciones, respuestas a cuestiones esperadas por los alumnos. De esta manera, se deseó conocer los estadios generales de desarrollo intelectual, así como sus modos de pensar, razonar y abordar el tema alrededor de las *cónicas* como elemento valioso para el diseño de las situaciones.

En el análisis del cuestionario, se constató que la mayoría de los estudiantes asegura que las *formas* de una elipse, de una hipérbola y de una parábola son, aproximadamente, las reflejadas en la Figura 11 y reconocen, asimismo, que todas son curvas planas y simétricas, que la longitud de la parábola es infinita y que la elipse es cerrada.

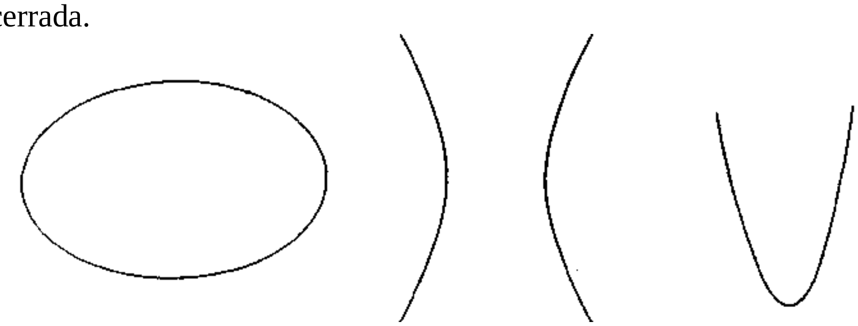


*Figura 11: Formas aproximadas de una elipse, hipérbola y parábola.*

Como consecuencia, las definiciones de elipse, hipérbola y parábola, aceptadas de modo casi general, están constituidas por una sucesión de propiedades obtenidas *perceptualmente* que intentan describir de manera exhaustiva la *forma* de la curva, más no sus propiedades *métricas*. Por ejemplo:

- Una elipse se define como una curva plana, cerrada y simétrica en la que sus puntos no equidistan del centro. Esto es un error que se evidencia en la Consulta No. 19 (Ver Anexo No. 1).
- Una parábola se define como una curva abierta, simétrica e ilimitada que se caracteriza por ser la gráfica de una función. Esto es otro error que se evidencia en la Consulta No. 35 (Ver Anexo No. 1).

Las ideas que tuvieron los estudiantes acerca de las definiciones de elipse y parábola no tenían en cuenta las propiedades métricas, ni mucho menos la noción de *lugar geométrico*, porque carecían totalmente de su conocimiento[35], así por ejemplo, se puede apreciar que tan solo el 48% del total de los estudiantes afirma que el siguiente enunciado es verdadero:

- Una elipse se define como el *lugar geométrico* de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es siempre la misma.

[35] En el cuarto capítulo de este documento, es decir, en el análisis *a priori* del diseño de las situaciones didácticas, se muestra un breve estudio de las concepciones que tenían los estudiantes del curso de *geometría analítica* acerca de las nociones de *lugar geométrico*, *conjunto de puntos*, *gráfica de una función*, *correspondencia biunívoca* y *figura geométrica* antes de que ellos efectuaran las situaciones.

Otras ideas previas erróneas más destacadas tanto en Río-Sánchez (1989) como en las ideas previas aparecidas en el grupo de estudiantes de este estudio, fueron las siguientes:

- Que un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia, como el de la Figura 12, es una elipse. En la Consulta No. 2 (Ver Anexo No. 1) se evidenció este error con un 68% del total de los participantes del curso.

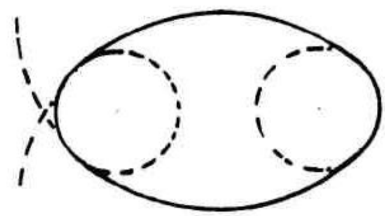


*Figura 12: Un óvalo como este es una elipse.*

- Que un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos, como muestra la Figura 13, forman una parábola. En la Consulta No. 2 un 52% del total de estudiantes respondieron que efectivamente era una parábola.

*Figura 13: Una parábola construida de un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes.*

- Que todas las *cónicas* pueden dibujarse perfectamente empleando sólo la regla y el compás.

En este sentido, los análisis de los tres últimos errores presentados anteriormente coinciden con la investigación que realizó Río-Sánchez (1989). Esta última idea, que las *cónicas* pueden dibujarse solo con estos instrumentos y las dos anteriores, que son una aplicación de ella, además de ser la manifestación de un pensamiento *perceptivo*, pueden estar motivadas, entre otros factores, por la influencia de las *construcciones geométricas* que hicieron los mismos estudiantes de figuras más sencillas que las *cónicas*, tales como la circunferencia o polígonos regulares, en la asignatura de *geometría euclidiana*, curso que fue prerrequisito al de *geometría analítica*. Dichas construcciones realizadas, evidentemente, según Río-Sánchez (1989), carecieron de un *aprendizaje significativo*.

Con respecto a lo anterior, es preciso señalar dos aspectos: a) cuando se construyen las *cónicas* con estos instrumentos, lo único que se puede trazar son una serie de puntos que pertenecen a la gráfica de la *cónica* y b) si se realizó bien la construcción entonces dichos puntos satisfacen la condición de ser cónica, pero no se puede dibujar toda la figura, debido a las limitaciones físicas del instrumento. En otras palabras, no se puede dar un significado de manera *global*, usando solo la regla y compás para representar a una cónica, así como cuando se dibuja una figura rectilínea sencilla tal como una línea recta o un polígono regular.

En cualquier caso, se trata de ideas previas erróneas bastante extendidas entre los estudiantes de colegios y que, según Río-Sánchez (1989), se detecta también con mucha frecuencia en estudiantes universitarios de ciencias y adultos en general. Esto pone de manifiesto la resistencia al cambio que poseen las concepciones e ideas previas. Lo anterior se evidenció en las Consultas No. 9, 20 y 29 donde se preguntaba por la elipse, la parábola y la hipérbola respectivamente, manifestándose un error, en promedio, de más del 46% del total de los estudiantes y más de un 92% del total de los estudiantes españoles reseñados por Río-Sánchez (1989).

- Que una curva ligeramente inclinada como la que se muestra en la Figura 14 no es una parábola.

*Figura 14: Esta figura no es una parábola.*

Al respecto, así lo afirmaron un 36% de los estudiantes encuestados. Lo que se puede manifestar acerca de esta *cónica* en esa posición, es que si bien, la gran mayoría de los encuestados conocen la representación gráfica de una parábola, ellos están acostumbrados a verlas abriendo hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo pero en ningún momento pueden ser rotadas alrededor de un punto. En consecuencia, cuando se les presentó lo que aparece en la Figura 10, afirmaron que no lo era. De modo que en este caso, el dibujo de esta curva es conocida en general, en una ubicación estándar o prototípica (también denominada gráficas estereotipadas o prototipo, en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos geométricos) en donde usualmente se muestra así, y que es enfatizada en los libros de texto escolares y reforzada normalmente por los profesores en su clase magistral cuando la explican en el tablero al introducir este tema, pero que comúnmente no se presentan giradas alrededor de un punto.

- Que los tres tipos de *cónicas* (elipse, hipérbola y parábola) son independientes, no guardan ninguna relación estructural entre sí, ni directa ni indirecta (a través de un elemento externo como podría ser una superficie cónica). En este sentido, aproximadamente el 50% de los estudiantes de esta investigación, (Ver las Consultas No. 12 y 17 en el Anexo No. 1) contestaron que es falso que tengan una relación entre sí. Esto evidenció la carencia de diversos significados que se presentan de las *cónicas* en los últimos grados del bachillerato y comienzos de los estudios universitarios, tal como lo afirma Bartolini Bussi (2005) en sus investigaciones en Italia.

- Una parábola (y, en general, cualquier curva) no es un objeto geométrico independiente del sistema de referencia; por el contrario, primero existe el sistema de referencia como algo dado *a priori* y después la curva completamente encadenada a él; esto implica que una curva no tiene infinitas ecuaciones dependiendo del sistema escogido, sino una sola. Así se manifestó en la Consulta No. 32 (Ver Anexo No. 1) donde un 68% de los estudiantes de este estudio así lo aseguró.

Otros errores reseñados por Río-Sánchez (1989; 1996) y que no se tuvieron en cuenta, a pesar de que este estudio no se interesó por los estudios fenomenológicos de las *cónicas* sino por los objetivos centrales descritos en el primer capítulo, se pudo apreciar que los estudiantes encuestados consideraron que las *cónicas* están poco conectadas con la realidad y los pocos casos en que advierten su presencia tienen características singulares tales como:

- Las órbitas de los planetas o de las partículas atómicas (aunque la mayoría reconoce que son elipses, se trata, sobre todo, de un conocimiento social). Así se puede observar en la Consulta No. 13. Ver Anexo No. 1.
- La zona de una cancha de baloncesto tal como aparece en la Figura 15 (es percibida erróneamente como una parábola por la mitad de los estudiantes y los mismos resultados encontró Río-Sánchez, (1996)). Ver Consulta No. 18 en el Anexo No. 1.

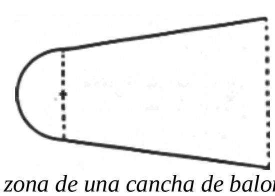


*Figura 15: La zona de una cancha de baloncesto.*

- El 76% de los estudiantes indagados aseguraron que la forma de los huevos de gallina es como una elipse. Ver Consulta No. 24 en el Anexo No. 1.

Estos errores son suficientes para mostrar la importancia que tiene la evaluación diagnóstica de cara a diseñar una adecuada estrategia didáctica que consiga afianzar y desarrollar las ideas previas correctas y cambiar las ideas erróneas por otras que sean matemáticamente válidas.

### 2.2.3. Fenómenos de Visualización.

Respecto a las investigaciones recientes y el interés que se ha suscitado la *visualización* en el campo de la *Educación Matemática*, se fundó un grupo de investigación internacional denominado *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (Hitt, 2002). Desde 1998 se conformaron en el interior de éste, varios subgrupos de trabajo conformado por académicos, profesores e investigadores de reconocidas universidades e institutos de investigación mundial (Bishop, 1986; Kaput, 1987; Presmeg, 2000; 2006; Zimmerman & Cunningham, 1991; Gorgorió & Jones, 1996; Duval, 2002; 2004; Arcavi & Hadas, 2000; Santos-Trigo, 2000; Hitt, 1998; 2000; 2001; 2002). Uno de tales subgrupos precisamente se denomina: *Working Group: Representations and Mathematics Visualization*. En éste, se han discutido diversas posiciones teóricas acerca de la visualización analizando el papel que desempeñan las *Representaciones* y la *Visualización* en el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes, exponiendo diversas definiciones y tipos. De esta manera, se han llegado a refinar las definiciones que provinieron inicialmente de la *Psicología Cognitiva*.

Una de las principales conclusiones a las que llegó este grupo se refiere al papel que juegan las *representaciones visuales* y a los *fenómenos de visualización matemática* en la enseñanza y aprendizaje de la *Geometría*, en particular, se subrayó que son núcleos fundamentales para comprender las dificultades que se presentan ante estos procesos, lo cual ha conllevado a que se fomenten de manera incremental estudios. También se han generado muchas publicaciones debido a desarrollos investigativos sobre la integración y usos efectivos de los ambientes informáticos en las últimas tres décadas, tanto en el campo de las *Matemáticas* como en la *Educación Matemática*, que han creado un *renacimiento* y un *boom* a nivel mundial y de esta manera se ha empezado a recuperar la enseñanza de la *geometría* a nivel mundial.

En efecto, en las *Matemáticas*, gracias a que en las tecnologías computacionales, se han desarrollado cada vez mejores y diversas técnicas de graficación por computador, entonces los matemáticos han sacado provecho de esto para estudiar fenómenos de recurrencia, iteración de procesos matemáticos, determinación de patrones y generación de imágenes fractales, lo cual ha conllevado a estudiar la naturaleza de las matemáticas cuando se trabajan en ambientes computacionales (Zimmerman & Cunningham, 1991; Balacheff, 1994).

Por otra parte, en *Educación Matemática*, se han tenido en cuenta aspectos cognitivos que mejoran la comprensión de la *Geometría* como resultado de los procesos y habilidades que se favorecen con la visualización matemática en los estudiantes, y además, gracias a la integración de los AGD en la enseñanza, que han ofrecido nuevas maneras de realizar actividades geométricas, según Laborde et al. (2006).

Para comprender este resurgimiento se debe considerar un aspecto epistemológico de la *Geometría*. Ya ha sido señalado por varios didactas interesados en la relación entre la enseñanza de la *geometría* y los fenómenos visuales, entre ellos Zimmerman y Cunningham (1991), Laborde (2002), Laborde et al. (2006) y Mariotti (2006). Ellos han afirmado que los aspectos didácticos de la *geometría* puede ser entendidos solo si se tiene en cuenta su naturaleza dual, al considerarla, por una parte, como el estudio de conceptos y relaciones lógicas, que históricamente provinieron de un análisis extenso del espacio, pero que más tarde se convirtió en un campo de investigación y discusión de los fundamentos axiomáticos separados de cualquier experiencia espacial, es decir, la tendencia a considerarla abstracta, formal y estructuralista.

Y por otra parte, la *geometría* referida a conceptos espaciales, procedimientos y relaciones usadas dentro de la sociedad para varios objetivos, como la arquitectura, construcciones de pueblos o ciudades, para el diseño de paquetes de mercancías para el almacenaje y así como otros objetivos y actividades, es decir, la tendencia a comprenderla desde un punto de vista intuitivo y concreto.

Esta dualidad fue enfatizada por uno de los grandes matemáticos fundadores del enfoque axiomático de la *Geometría*, David Hilbert, pues así lo han destacado los didactas de la *geometría* citados anteriormente, quiénes declaran que él reclamó la coexistencia de estas dos tendencias, una hacia la abstracción y la otra hacia la comprensión intuitiva de la Geometría.

Esta primera postura de ver las matemáticas de manera general conllevó a que en el siglo pasado, la literatura matemática fuese predominantemente algebraica, y en consecuencia, cobró mayor fuerza los procesos analíticos y simbólicos, dejando de lado la segunda tendencia. Esto se acentuó más con la reforma curricular que hubo en muchos países en la segunda mitad del siglo pasado, denominada las *Matemáticas Modernas* (Kline, 1986), donde se enfatizó en la parte formal de la *geometría* mientras se evitaba recurrir a toda costa de los dibujos y figuras.

Este *renacimiento* se atribuyó en particular, al impulso que le ha dado la integración efectiva de los AGD y que ha dejado claro el carácter estructural de los dibujos que se generan en pantalla de computador o en una calculadora.

Por lo tanto, es importante clarificar algunos aspectos relacionados con los AGD y la visualización. Estos ambientes permiten a los estudiantes, no sólo construir figuras con ciertas propiedades y por lo tanto *visualizarlas*, sino que también les permite transformar construcciones en tiempo real. Para tal efecto, los AGD tales como el Cabri[36] Géomètre, permite la *experimentación* de las figuras geométricas.

En dicho ambiente computacional, el estudiante (o el profesor) puede *manipular* directamente las figuras construidas en la pantalla mediante el arrastre (dragging) de ciertas partes de ellas. De hecho, una vez elaborada, el estudiante puede reconocer mediante el AGD, cuáles son las partes constitutivas (de dicha figura) que pueden ser arrastradas. Es fundamental señalar que esto ocurre, sin alterar las relaciones estructurales entre los elementos constitutivos de la figura.

En el anterior sentido, tal como afirma Moreno (2002b) "la manipulación directa de los objetos geométricos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el estudiante" (p. 92). Además, su conocimiento queda marcado por la relación dialéctica entre la *visualización* y *conceptualización* durante la interacción con la interfaz del sistema. Así mismo, afirma que: "Dado el control formal del entorno geométrico, las experiencias desarrolladas dentro de dichos ambientes pueden considerarse como genuinas experiencias geométricas" (Moreno, 2002b, p. 91).

Sin embargo, al experimentar en un AGD, se ha vuelto a plantear un problema reconocido en el interior del campo de la Didáctica de la *Geometría*, que es la falta de distinción por parte de los estudiantes entre el *dibujo* y el *objeto geométrico* representado, cuando se trata de comprender aspectos relativos a la figura geométrica. En este sentido, afirman que frente a un *dibujo* realizado con papel y lápiz, el estudiante tiene un fuerte obstáculo cognitivo, pues el estudiante no logra comprender las relaciones geométricas que existen en el dibujo y no entiende que la *figura geométrica* se refiere a un objeto teórico. De esta manera, es de señalar que ésta es una tarea de difícil realización para él si su profesor no tiene conciencia de esta dificultad y no le colabora a superar este obstáculo.

Así en las clases de *Geometría,* y en los libros de texto escolares usualmente no se diferencian las dos caras de la misma moneda (el dibujo que es la representación visual, frente al objeto matemático que es lo que se quiere representar).

Según Laborde (1998a), la *figura geométrica* consiste realmente en la estrecha relación que hay entre el *dibujo* y el *objeto geométrico* abstracto del cual se está aludiendo. Por consiguiente, para esta investigadora, al conceptualizar la figura

[36] El Cabri Géomètre es uno de los software más utilizados e investigados en la Didáctica de la *geometría escolar* a nivel mundial, según Strässer (2002), y el cual fue usado en este trabajo,

geométrica se deben diferenciar tanto el significado como el significante del objeto geométrico, determinando así que el significado es el referente conceptual con toda su familia de dibujos, y el significante es un caso particular o dibujo, realizado en un soporte material, de toda la familia de dibujos que conforman el referente. En otras palabras, se tiene que la unión de los dos aspectos del objeto geométrico $(referente + dibujo)$ constituyen la figura geométrica. Así mismo, esta investigadora resalta que "el dibujo se refiere a una entidad material mientras que la figura se refiere a un objeto de la teoría geométrica" (Laborde, 1998a, p. 34). Dicha transición del dibujo a la figura geométrica es un paso que da el sujeto cognoscente por medio de su propia interpretación, su propio conocimiento y su propio contexto.

En este sentido, Laborde y Capponi (1994) subrayan que un objeto geométrico en tanto significante indica que el dibujo tiene dos dominios, el primero de funcionamiento, es decir que el dibujo tiene unas propiedades pero no las expresa por sí mismo de tal manera que es necesario hacer explícito, de manera discursiva (verbal o escrita), las características del dibujo dado. El segundo dominio es de interpretación implicando de esta manera que todas las propiedades espaciales del dibujo no pueden ser interpretadas como que remiten a propiedades del objeto, por no ser explícitas dichas propiedades.

Así pues, la visualización matemática, considerando la naturaleza de la *Geometría,* su evidente uso en ella, así como el dinamismo producido y ayudado por los AGD, se torna diferente de otras posturas, por lo que se tomó la definición de Zimmerman y Cunningham (1991):

> la visualización es el proceso de producir o usar representaciones geométricas o gráficas de conceptos matemáticos, principios o problemas a mano o computador. […] la visualización da profundidad y significado al conocimiento matemático, y sirve como guía para resolver problemas, e inspira descubrimientos creativos. (pp. 4-5)

Es de enfatizar que la visualización se acepta en este trabajo como un *proceso* para formar imágenes mentales y también como una *habilidad* que se adquiere para luego trazar con una figura o bien con lápiz y papel, o con ayuda de una calculadora o de un computador. La figura sirve para representar un concepto matemático o un problema matemático y refuerza la comprensión. Así mismo, se adopta de estos investigadores que la visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir la imaginación, el entendimiento matemático. Es decir, cuando uno se forma tales imágenes, es para descubrir y entender las matemáticas así como para usarlas como un apoyo para resolver problemas no rutinarios. Visualizar como *proceso* y como *habilidad* es algo que se adquiere y por lo tanto se debe auxiliar a los estudiantes a obtenerlo.

En consonancia con Laborde (1998b), la visualización juega un papel importante en la resolución de problemas geométricos, más aun cuando la visualización se hace concreta en una pantalla de computador gracias a un programa informático. Esta investigadora señala que la evidencia visual y el análisis geométrico que se pueda realizar en un software suscita nuevas interpretaciones y experimentaciones en el ambiente informático.

Otra característica tomada de Bishop (1986) que se ajusta y se complementa a la definición de Zimmerman y Cunningham (1991), es que la visualización alude a involucrar la habilidad de dominar, manipular, deformar, transformar o invertir mentalmente un objeto matemático en diferentes representaciones *externas* o *internas*[37].

En el anterior sentido, las representaciones matemáticas empleadas en la comprensión de los conceptos y nociones matemáticas, gracias a las TIC se empiezan a fomentar representaciones *dinámicas*. Las representaciones *estáticas*, que usualmente generan los profesores de matemáticas al usar tableros convencionales, se empiezan a dejar a un lado para dar paso al *dinamismo* introducido por las tecnologías digitales. En efecto, las representaciones *estáticas* son mejoradas si se integran aspectos dinámicos con el apoyo de los ambientes computacionales. De esta manera, tal como Arcavi y Hadas (2000) lo ratifican de la siguiente manera:

> este dinamismo puede contribuir hacia la formación del hábito de *mover* y transformar (o bien mentalmente o por medio de una herramienta) un ejemplo particular, para estudiar las *variaciones*, visualmente da indicios de invariantes, y posiblemente facilita las bases intuitivas para dar justificaciones formales de *conjeturas* y proposiciones matemáticas. (pp. 25-26)

De igual forma, la visualización basada en las tecnologías computacionales, bien sea estática, dinámica o interactiva, es únicamente una faceta del papel que los ambientes computacionales juegan en las matemáticas. Arcavi y Hadas (2000)

[37] Hiebert y Carpenter (1992) muestran que la primordial funcionalidad de las representaciones *externas* es la posibilidad de comunicar ideas, mientras que con las representaciones *internas* permiten realizar operaciones mentales entre ellas. De la misma manera, Goldin y Kaput (1996) afirman que las representaciones *internas* se refieren a las posibles configuraciones mentales que tienen los estudiantes cuando resuelven un problema matemático y cuya característica no es observable. En tanto que las representaciones *externas* se refieren a lo plasmado físicamente, a las configuraciones observables tales como las palabras, las gráficas, las imágenes, las ecuaciones, los mecanos, los materiales manipulativos y lo que se muestra en una pantalla de computador o se construye en un AGD.
Por lo tanto, estos dos tipos de representaciones interaccionan (Goldin & Kaput, 1996) entre sí, produciendo dos procesos, el de "*externalización*" y el de "*internalización*". El primero tiene como fin sacar algo de la mente de alguien y plasmarlo en un soporte material ó simbólico. En tanto que el segundo, en cambio, se da como resultado de un proceso de reconstrucción que sucede en la mente cuando se realiza una operación externa (significante, en la tradición Piagetiana), de acuerdo con Vigotsky (1979) citado en Siguán y Blanck (1987).

declaran que la visualización debe estar relacionada con los aspectos numéricos y simbólicos de las matemáticas para conseguir resultados. Algunas de las más interesantes e importantes aplicaciones de la visualización involucran problemas en los cuales se utiliza procesamiento numérico y procesamiento simbólico así como también procesamiento gráfico. En otras palabras, con los ambientes informáticos, se amplía la visualización, tal como las gráficas dinámicas, que incrementan el conocimiento matemático cuando existen ideas que son difíciles de representar en la mente. Es decir, con las TIC aumenta las clases de imágenes (mentales o no) de una manera diferente a como lo hacen otros medios.

En consecuencia, se coincide tanto con Segovia, Ruiz y Villegas (2007), así como con Zimmerman y Cunningham (1991) en que la visualización y las representaciones gráficas deben estar conectadas con otras formas de representación matemática, lo que implica hacer uso de algún tipo de lenguaje simbólico o pictórico. Es decir, que la visualización transforma lo algebraico en lo geométrico, ofreciendo un método para observar lo oculto y favorecer el proceso de conocimiento y descubrimiento geométrico. Desde este punto de vista, estos mismos investigadores declaran que las consideraciones visuales muy frecuentemente explican los pasos analíticos, los cuales de otra manera parecerían artificiales y arbitrarios. Así mismo, afirman que la experiencia visual es sumamente importante como una base sólida para el acercamiento algebraico.

Por otra parte, en la visualización matemática también existen dificultades, en los trabajos de Eisenberg y Dreyfus (1991) y Vinner (1989) se conoce que existe un predominio del pensamiento algebraico sobre el visual, y que los estudiantes presentan una cierta resistencia al uso de la visualización, prefiriendo más las estructuras simbólicas que las visuales a la hora de enfrentarse a la actividad matemática. Una de las posibles causas de ello es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige pensar algorítmicamente. Por su parte, Monk (1994) y Swan (1988) afirman que los estudiantes no tienen problema en entender los datos representados gráficamente de manera *local*, pero surgen serias dificultades frente a un enfoque *global*.

De esta manera, en el comportamiento *global* de las gráficas por computador, Zimmerman y Cunningham (1991), recomiendan usar color ya que resultan inapreciables al apreciar el todo de una gráfica y favorecen el descubrimiento de minucias del comportamiento *local* escondido debajo de la masa de cálculos que se deben hacer. Por ejemplo, darle un falso color a las funciones bajo un dominio, es una técnica difundida en las matemáticas aplicadas que ha producido imponentes imágenes que han abierto los ojos de los matemáticos hasta ahora insospechadas a fenómenos en las dinámicas de funciones no lineales.

En este sentido, el papel que juega la visualización matemática es muy importante para que se desarrolle el *pensamiento geométrico* en los estudiantes, dado que este tipo de pensamiento evoluciona en la medida que se da una relación dialéctica entre las representaciones externas, que se ubican en un nivel de *percepción visual* y el saber geométrico situándose en el nivel *teórico*. En investigaciones sobre los efectos de la visualización y la medida en el Cabri, Olivero y Robutti (2001) así como Laborde (2005a; 2005b) y Sandoval (2009) coinciden en afirmar que este medio, constituyen un *puente* entre el nivel *perceptivo* y el *teórico*, y puede ser una ayuda para dicha interacción.

Pero el potencial didáctico del uso adecuado de los AGD va más allá de su poder ilustrativo. Tal como afirma el Ministerio de Educación Nacional (2004a), se trata de problematizar la visualización, de hacerla operativa, de manera que surja de forma natural la necesidad de explorar, conjeturar, predecir, verificar. Por lo tanto, la elaboración de proposiciones geométricas adquiere sentido para los estudiantes al responder a esa necesidad explicativa de los fenómenos observados.

Pero, ¿cómo problematizar la percepción de los hechos geométricos en un AGD dado que precisamente por su carácter de evidente, en la acción de manipular directamente los puntos básicos de la construcción, se muestra la solidez o la consistencia del hecho que se ve en la pantalla?.

Debido a las características del ambiente informático, el *arrastre* es la respuesta a la anterior pregunta. Ya se ha mencionado que en un AGD lo que se pretende trabajar es mucho más que un dibujo, entonces se trabaja es con una categoría de dibujos, cada uno de los cuales es un caso de una misma figura geométrica. Al mismo tiempo el ambiente, proporciona a los estudiantes una herramienta para la validación de las propiedades que pueden percibirse en la pantalla: una propiedad o solución será válida sólo si se mantiene válida mientras se arrastran los puntos libres de la construcción.

Al respecto, Jones (2000) resalta que este criterio de validación no depende entonces de la apariencia perceptiva del producto de la construcción sino de la apariencia que se muestra del objeto geométrico cuando se modifica al utilizar el modo de arrastre. Para pasar el "test del arrastre" la figura tiene que ser construida de tal manera que aquella sea realizada consistentemente con la teoría geométrica. En palabras de Balacheff (2000), una propiedad geométrica es un invariante perceptual.

Así mismo, Balacheff enfatiza que la evidencia perceptual es tan fuerte en los estudiantes que incluso puede hacer que ellos no lleguen a entender por qué es necesario demostrarlo. Hasta cierto punto, la eficiencia del software ha eliminado la necesidad de la *demostración*.

De acuerdo con lo expresado anteriormente, respecto a la visualización y las representaciones *externas*, se atiende otro problema medular e importante que ha despertado interés a nivel investigativo en el aprendizaje y de la enseñanza de la Geometría. Dicho problema consiste en estudiar los procesos de *argumentación* y *demostración* cuando se integra los AGD en las clases. Sin embargo, esta temática no es materia de investigación en este documento.

Por último, es de recalcar que como profesores, se debe estar atento a los fenómenos de visualización que se dan cuando se integran estas tecnologías, por ejemplo, infundir la prudencia en los estudiantes ante actividades visuales ya que la simple visualización de hechos geométricos en una pantalla no siempre da validez de afirmaciones geométricas. Incluso las retroalimentaciones que da el ambiente puede que no sean obvias para los estudiantes, aunque puede parecer obvia para los ojos del experto. De esta manera, Balacheff y Kaput (1996) mencionan que los profesores deben ser conscientes de las características del ambiente, y desde el punto de vista didáctico, recomiendan que el profesor se involucre en una negociación específica con los estudiantes a fin de dar un estatus claro a estas características.

### 2.2.4. Las Representaciones en Geometría y las Representaciones Ejecutables.

Varios investigadores (Janvier, 1987; Kaput, 1987; 1992; Duval, 1992; Castro & Castro, 1997; Rico, 2009; Arcavi & Hadas, 2000; Bedoya, 2002; Font, 2001; Glasersfeld, 1995; Hitt, 1998; 2002; Lupiáñez & Moreno, 2001) coinciden en afirmar que *para comprender un concepto, noción, procedimiento, estructura o saber matemático, es necesario hacerlo presente mediante varias representaciones*. Es decir, acceder a diversas maneras de representación de un mismo objeto matemático proporciona una caracterización global y una buena comprensión de éste. Así mismo, han llegado a *que no hay una única representación que sea capaz de agotar en su totalidad lo complejo de las relaciones que cada objeto matemático encierra*.

Pero las *representaciones matemáticas* en *geometría* tienen su complejidad. Por eso este apartado se divide en tres partes. La primera explica los *sistemas de representación*[38] en *Geometría*, la segunda los sistemas de representación *ejecutables*

[38] Kaput (1987), Goldin y Kaput (1996) y Goldin y Shteingold (2001), en sus trabajos para comprender como actúan las representaciones en el mundo matemático, sugieren que las representaciones matemáticas no son entidades *aisladas*, sino parte de un *sistema* que incluyen un conjunto de propiedades y reglas (una estructura) necesarias para operar dentro y entre dichas representaciones. El conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática han de responder a su carácter sistémico (Kaput, 1987), por ello se habla de *sistema* o *sistemas de representación*. Como ejemplo, dan lo siguiente: "una fórmula específica, o una ecuación, o un gráfico en coordenadas cartesianas, en particular, sólo tiene sentido como parte de un sistema más amplio dentro del cual el sentido y las convenciones han sido previamente establecidas" (Goldin y Kaput 1996, p.

(Kaput, 1992; Balacheff & Kaput, 1996; Moreno, 2002b, 2002c; 2002d; 2002e; 2002f; Lupiañez & Moreno 2001; Moreno & Sriraman, 2005; Moreno, Hegedus & Kaput, 2008; Moreno & Hegedus, 2009; Hegedus & Moreno, 2011) que dan nuevas formas de interactuar con los objetos matemáticos, creando un ambiente donde el estudiante tiene una exploración dinámica y se da una mediación en la construcción del conocimiento geométrico. Y la última, acoge las sugerencias del tratamiento las representaciones ejecutables desde la perspectiva de Arcavi y Hadas (2000).

### *Los Sistemas de Representación en Geometría.*

En el campo de la *didáctica de la geometría* se ha señalado reiteradamente que una de las dificultades más notoria para la comprensión de la *Geometría*, al transitar de un *pensamiento geométrico* informal hacia uno formal, es la falta de distinción entre el *dibujo* y el *objeto geométrico* representado. Moreno (1998) argumenta que este problema se da porque en *Geometría*, en un primer momento, se proporciona una única forma de representación, la figural. Sin embargo, Duval (1992) como muchos otros investigadores, incluyendo Moreno (1998), concuerdan en declarar que: "para construir un concepto matemático, se necesitan al menos dos sistemas de representación que vayan dotados, además, de un mecanismo de traducción de uno hacia el otro" (Moreno, 1998, p. 11).

Un ejemplo claro se puede ver en la *geometría analítica*. En efecto, allí se tiene una representación algebraica y una representación geométrica de un *mismo* referente (el objeto matemático) y se tiene también un mecanismo que permite transitar de uno a otro sistema de representación. En los casos en que sólo se tiene un sistema de representación, es prácticamente imposible desprender la "parte conceptual" de esa sola representación. Cada representación puede ser interpretada como un modelo del objeto matemático en cuestión. Solo que el acceso al objeto necesariamente pasa por la *integración* de los sistemas de representación. En el caso de la *geometría euclidiana*, lo predominante es la *articulación* de dos sistemas de representación: el *gráfico*, *visual* o *figural* con el *verbal*, o como le denomina Duval (1992), con el *discurso* teórico en *lengua natural*.

En cambio, en la *geometría analítica* es reconocido que el predominio del tipo de representaciones es eminentemente algebraico, donde la influencia de los símbolos es notable, sino fuese así, no tuviese la connotación y naturaleza matemática de *analítica*. No obstante, se deben complementar las representaciones algebraicas con

400). Por lo tanto, las formas en que los estudiantes representan y conectan el conocimiento matemático, funcionan como un vehículo para comprender ese conocimiento profundo y así lo puedan utilizar en situaciones de resolución de problemas.

las gráficas, las geométricas, las icónicas, las *dinámicas* y *ejecutables* para que la intuición entre a jugar un papel fundamental de manera tal que pueda potenciar el pensamiento matemático y los fenómenos de visualización matemática.

### *Los Sistemas de Representación Ejecutables.*

En la actualidad, para analizar la complejidad de la integración y usos didácticos de las herramientas en la *Educación Matemática*, en relación al aprendizaje de las matemáticas, a menudo es citado dos enfoques teóricos cognitivos: el *instrumental* y la *mediación semiótica* (Maschietto & Trouche, 2010). En este trabajo se tomó el enfoque de la *mediación*, particularmente, a partir del principio de *mediación instrumental*[39] de Wertsch (como se cita en Moreno & Waldegg, 2002). El cual declara que *todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico*.

Dado que el conocimiento depende de la *mediación* y de acuerdo con los trabajos de Moreno y Waldegg (2002) y Moreno y Hegedus (2009), entonces la persona piensa es a través de un sistema de representación cuando ha sido incorporado a su propia cognición, lo que implica que, no existe una comprensión de los objetos matemáticos al margen de una actividad representacional. Así mismo, la cognición matemática, puede ser entendida en términos del surgimiento de sucesivos sistemas de representación *evolutivos* que tienen implicaciones epistemológicas para comprender dichos objetos (Kaput, 1992; Moreno et al. 2008). De esta manera, lo ratifican estos investigadores para darle una entrada a los nuevos sistemas de representación matemáticos que se pueden encontrar en las tecnologías computacionales.

De modo que una representación matemática en un ambiente informático posee una cualidad (Moreno & Hegedus, 2009), que está ausente en el medio *estático*, a saber, la *ejecutabilidad* de la representación. Esta es responsable de la clase de interacciones que el estudiante puede tener cuando las matemáticas quedan "incrustadas" en el medio digital. Moreno (2002e) afirma que en la actualidad, los ambientes informáticos de matemáticas, encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: son *ejecutables*, y virtualmente producen

[39] La *mediación instrumental* aparece como un principio central para pensar y analizar las funciones por las cuales el Cabri (como instrumento) influye en la construcción del conocimiento matemático del estudiante, mediante sus acciones y co-acciones. Ya que el Cabri no llega a constituirse en un instrumento neutral o auxiliar en la actividad matemática sino que hace parte activa de los esquemas cognitivos del estudiante. En lo que sigue de la temática sobre las Representaciones en esta investigación, se observará que los Sistemas de Representación Matemáticos y Ejecutables se constituyen también en instrumentos de mediación.

*funciones cognitivas* que anteriormente eran privativas de las personas. Moreno y Sriraman, (2005), dan un ejemplo al respecto:

> Una *función cognitiva* es la graficación de funciones. La graficación de funciones es diferente al realizarla con un ambiente informático que cuando se hace mediante lápiz y papel. En este último ambiente, se requiere cierto nivel de destreza en la manipulación algebraica pero en un ambiente informático se requiere que deba interpretar la gráfica. Estos dos [ambientes] son complementarios pero no equivalentes. (p. 481)

Otra característica de los usos de los ambientes informáticos matemáticos es que ofrecen diversas representaciones del mismo objeto matemático y en las cuales se puede interactuar, hacer relaciones matemáticas entre el mismo sistema de representación, y lo que es más importante, permiten pasar de un sistema de representación a otro, es decir, hacen posible de manera automática la articulación entre más de un sistema de representación (Kaput, 1992).

Con ellas, se pueden obtener propiedades y relaciones matemáticas de los objetos matemáticos, distintas a las que se observan mediante lápiz y papel. Moreno (2002e) afirma que esto no convierte al estudiante en un "desempleado" y que esto tiene consecuencias diversas para el proceso de construcción del conocimiento, pues ahora, su trabajo consiste más en interpretar, analizar matemáticamente (Kaput, 1992) y reflexionar sobre los fenómenos y los objetos nuevos, que aparecen en la pantalla y que son el resultado de la ejecución (Moreno & Sriraman, 2005).

De esta manera, el carácter estático que poseen los sistemas de representación tradicionales se puede complementar con las representaciones *ejecutables,* las cuales son manipulables, dinámicas, con capacidades visuales, gestuales y que "la ejecutabilidad de la representación del objeto matemático incrementa la expresividad matemática". (Moreno, Hegedus & Kaput, 2008, p. 102). Así mismo, permiten actuar directamente sobre ellas e intervenir matemáticamente. Estos investigadores se refieren a esta intervención con el término de *co-acción* que se explicará a continuación.

### *Las Representaciones Ejecutables y Dinámicas en los AGD.*

Desde una *perspectiva evolutiva*[40] Moreno et al. (2008) afirman que los sistemas de representación matemáticos han tenido una transición desde lo estático hasta lo

[40] La *perspectiva evolutiva* viene de los trabajos de los autores referenciados (Moreno et al, 2008). Ellos afirman que la comprensión del objeto matemático evoluciona cuando es sometido a un proceso iterativo de representaciones. Y que el objeto siempre está en construcción. Cada representación añade una nueva arista a la comprensión del objeto y de esta manera se constituye el objeto en evolución. De esta manera declaran que la

dinámico. Por ejemplo, las exploraciones matemáticas en un AGD como Cabri, están mediadas por sistemas de representación ejecutables que son activos. Todas estas características que presentan los sistemas de representación ejecutables, se enfocan primordialmente en el *medio* en el cual el usuario (estudiante o profesor), opera. Para describir este cambio, introducen el término *co-acción*, el cual significa que quien ejecuta la acción con un AGD, puede pensar y explorar al guiar y ser guiado por el mismo ambiente informático, como una actividad fluida, siendo la co-acción más que una iteración de las interacciones entre el usuario y el ambiente computacional. En este sentido, Hegedus y Moreno (2011) afirman lo siguiente:

> La noción de *co-acción* explica cómo los usuarios de tecnología están involucrados en algo más que una empresa semiótica tradicional cuando interactúan con un "interfaz" digital; en cambio, ésta nos permite pensar y explorar al guiar y ser guiado por el mismo ambiente informático. Esto es una relación reciproca –*co-acción*– y no sólo un arreglo unilateral de interacción. Un ambiente [como Cabri] que permite a los usuarios construir cosas y ver la interacción entre sus acciones de-constructivas y re-constructivas presenta un intercambio físico y dinámicamente entre la fuerza presionada en el ratón [del computador] para la acción programática. Vemos que las acciones de nuestra fuerza presionada han estado estructurando una acción pensada. (p. 3)

Al respecto de este tipo de representaciones en los AGD, Kaput (1992) afirma que son interactivas, porque precisamente se pueden modificar interactivamente: transportándolas por toda la pantalla del computador o de una calculadora gráficadora, rotando las figuras, alargándolas, modificando valores de una función y observando la *variación* en el resultado instantáneamente e incluso dinamizándolas. Por ello, se dice que la *geometría* que se puede trabajar y estudiar con Cabri es una *Geometría Dinámica*. Cabe destacar que las representaciones dinámicas son geométricas y pueden ser ejecutadas por el usuario o por el ambiente mismo, pero también están disponibles en contextos algebraicos como numéricos.

Lo que permite que el estudiante tenga acceso a realizar conjeturas y a generalizar lo que está ejecutando cuando arrastra los puntos que se dejan mover sobre un objeto, el cual dinámicamente va re-dibujando y actualizando la información, en tiempo real, sobre la pantalla a medida que el estudiante arrastra el ratón. Al hacer esto, él puede eficientemente probar grandes iteraciones de la *construcción geométrica*.

objetividad se incrementa a medida que se añade un sistema de representación. De modo que la complejidad del objeto no sólo es "matemáticamente pura" sino que involucra la dimensión cognitiva.

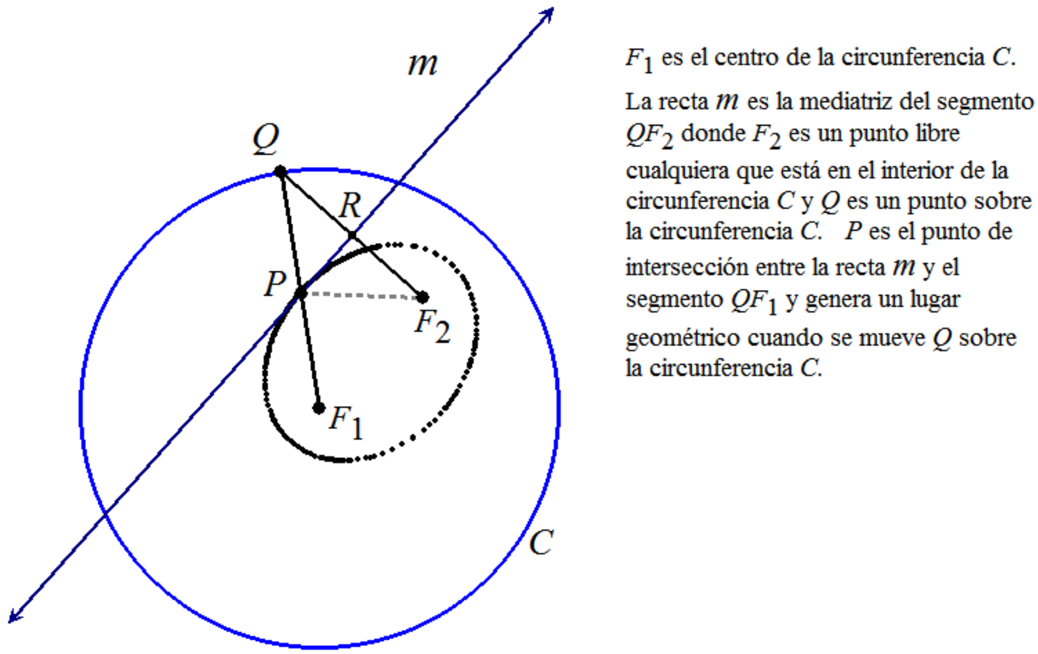



*Figura 16: Una representación ejecutable y dinámica de un lugar geométrico. (Moreno et al., 2008, p. 104)*

En la Figura 16, se aproxima a ilustrar este dinamismo a través de una fotografía de tal acción física, sin embargo, es de aclarar que esta imagen estática no comunica adecuadamente la verdadera naturaleza de las representaciones dinámicas. En este ejemplo, a medida que el usuario mueve $Q$, el AGD va actualizando la representación dinámica de todas las posibles iteraciones, o "soluciones" de las restricciones de la *construcción geométrica* y va generando un *lugar geométrico*. La manera en que los objetos fueron construidos geométricamente, restringe el camino de $P$ para formar una elipse. En efecto, como se forman dos triángulos rectángulos $RPQ$ y $RPF_2$ por ser $m$ la mediatriz del segmento $QF_2$, los dos triángulos son congruentes, lo cual implica que $PQ$=$PF_2$ y como se cumple que $F_1Q = F_1P + PQ$, reemplazando $PQ$ por $PF_2$ en la anterior suma, se tiene: $F_1Q = F_1P + PF_2$, cuya suma es constante ya que $F_1Q$ es el radio de la circunferencia $C$. En consecuencia, este *lugar geométrico* generado por la familia de puntos $P$ cumple con la definición de elipse.

Ciertamente, en la Figura 16, según Moreno et al. (2008), se ha discretizado este movimiento físico y no sólo el usuario ha construido activamente la elipse sino que también ha tenido a mano la posibilidad de un medio *flexible* donde los figuras pueden ser deformadas con la ingeniería preservada, a través de una acción dinámica. Para ejemplificar lo anterior, si se arrastra un foco cualquiera de la elipse, sea por ejemplo, $F_1$ o $F_2$, el medio *re-acciona* produciendo una nueva elipse. Dicha acción dinámica permite una serie de construcciones que pueden ser instantáneamente creadas, revelando así la *plasticidad* del objeto que no pierde su identidad de ser elipse.

Moreno et al. (2008) continúan señalando que el medio puede mantener tanto la traza de la construcción como las acciones, pero más aún, las *co-acciones* entre el usuario y el ambiente. Al observar este resultado, Moreno y Hegedus (2009) enfatizan que:

> el estudiante no permanece en un estado cognitivo neutro, sino que es estimulado a desencadenar una nueva acción generando así un proceso interactivo. En el medio digital, la acción no le pertenece al actor/estudiante, sino que es compartida entre el actor y el medio. La exploración matemática en un medio digital está mediada por los sistemas de representación activos [ejecutables]. (pp. 516-517)

No obstante, en la manipulación de los objetos matemáticos aparece un problema representacional y es que tales objetos se dejan tratar como si fuesen reales, es decir, se dejan "agarrar" y arrastrar, y al actuar sobre ellos, Balacheff y Kaput (1996) han resaltado que esto es un valor agregado y beneficioso que trae consigo los ambientes computacionales para la exploración matemática pero siempre basados en el *proceso de reificación*[41] de los objetos abstractos y las relaciones matemáticas entre ellos. Así mismo, esto conlleva a promover una transformación de la experiencia matemática del estudiante que es de *orden epistemológico*.

En consecuencia, Laborde (1998), Balacheff (2000) y Moreno y Hegedus (2009) afirman que ocurren cambios en los objetos matemáticos cuando se trabajan en estos ambientes debido a las características que le otorga la *ejecutabilidad* del sistema de representación. Lo que conlleva a que el conocimiento que emerge, mediado por estas tecnologías, sea diferente al generado en ambientes estáticos como el del lápiz y papel. Estos cambios de las representaciones de los objetos pueden ser tan profundos que pueden llegar a transformar no solo la naturaleza de los objetos matemáticos sino también la naturaleza de las *co-acciones* (Laborde (1998), le denomina *retro-alimentaciones* a las interacciones entre el estudiante y el medio) y por ende, los problemas planteados a los estudiantes también cambian.

Moreno y Hegedus (2009) afirman que la ejecutabilidad es la causante de la *co-acción* entre el estudiante y el *medio* que responde a sus acciones respetando y relacionando las restricciones (Trouche, 2005) del *universo interno*, grabado en el procesador del computador, la *interfase*, por ejemplo las representaciones en pantalla y el *universo externo*, lo que se puede hacer con lápiz y papel. Este nuevo realismo

[41] La palabra *reificación* significa pensar, tratar algo ó reducir algo que es abstracto a la condición de que fuese un objeto real y tangible.

matemático, como lo denomina Moreno (2002b), cuando se articuló con el hecho de que el computador llega a ser un nuevo compañero en el *contrato didáctico*, de acuerdo con la *Teoría de las Situaciones Didácticas*, obliga a extender la *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1997) de las matemáticas a una *Transposición Informática* (Balacheff, 1994; 2000).

Balacheff (1994; 2000) acuña el término *Transposición Informática* denominando al proceso que conduce a la especificación y posterior puesta en práctica de un modelo de conocimiento. Balacheff (1994) la define como: "se refiere al trabajo necesario para cumplir los requisitos de la representación simbólica y la puesta en práctica de esta representación en un dispositivo informático". Dado que no es posible encontrar una solución que evite una desviación entre las representaciones y lo que intentan representar, estos problemas podrían tratarse cambiando las cuestiones relacionadas con la fidelidad por aspectos relacionados con la delimitación del *dominio epistemológico de validez* de la modelización o de la representación escogida (Balacheff, 2000). Pero en este caso acontece otro problema: el de la *fidelidad* de la representación de los objetos matemáticos.

En efecto, en la literatura especializada acerca de los fenómenos didácticos al trabajar los usuarios (profesores o estudiantes) de las TIC, aparece que este problema se refiere a la relación entre una representación matemática que se quiere dar a comprender y lo que se representa en una pantalla, que la comunidad de informáticos alude en términos de *fidelidad*. Este nuevo realismo también conduce a cambios cada vez más profundos en el currículo y en los contenidos (Balacheff, 2000), y esto representa un desafío para suposiciones ampliamente conocidas acerca de qué matemáticas son susceptibles de ser aprendidas y por cuáles estudiantes y cuándo pueden ellos aprenderlas.

***¿Y de qué manera se sugiere la relación entre las representaciones usuales de las cónicas con las representaciones ejecutables de las mismas?.***

Por último, para responder a esta pregunta, siguiendo las recomendaciones de Arcavi y Hadas (2000), las representaciones matemáticas usuales de las *cónicas* en *geometría analítica* son simbólicas o algebraicas, que en el ambiente tradicional de lápiz y papel son *estáticas* y absorben el trabajo del estudiante, disociando lo visual y lo dinámico de un problema geométrico. Así que la sugerencia es la introducción de este tipo de representaciones matemáticas vaya *después* de que se dé la interacción entre el estudiante y el medio informático. En otras palabras, la representación simbólica debe ir al final de la *co-acción,* de la exploración y que según estos autores (Arcavi & Hadas, 2000), lo anterior desempeñaría una extensión más explicativa, interpretativa y corroborativa de lo que sucede en una pantalla de un AGD.

### 2.2.5. Las Construcciones Geométricas.

En este último apartado de la *dimensión cognitiva*, se presenta la conexión entre las figuras y los instrumentos para construirlas, de tal manera que sirva para el reconocimiento de propiedades geométricas en las mismas y se explican sus razones.

Luego se precisa una definición de lo que significa una *construcción geométrica* a partir de la *geometría sintética*. Inmediatamente, se presentan dos tipos de *construcciones geométricas* en los AGD, las *robustas* y las *blandas*. Por último, se presenta una argumentación acerca de cómo este tipo de construcciones sirven de puente entre el nivel *espacio – gráfico* y *teórico* de las figuras geométricas. Por último, se señalan las interrelaciones y diferencias entre las robustas y blandas.

#### *Las construcciones como actividades de entrada y relación entre las figuras y los instrumentos.*

Duval (2004) reconoce esta importancia de trabajar alrededor de las figuras para poder reconocer sus propiedades geométricas. De esta manera, hace una clasificación de las actividades didácticas propuestas a los estudiantes para desarrollar procesos de *pensamiento geométrico*, en función del papel que se les otorga a las figuras y la utilización que se hace de ellas. Reconoce cuatro tipos de acercamientos a las actividades y las denomina: el *botánico*, en el cual los estudiantes deben reconocer, distinguir y clasificar formas euclídeas; el *agrimensor geómetra*, donde deben medir longitudes (distancias, bordes de superficies, etc.) sobre un terreno o sobre un dibujo; el *constructor*, donde deben producir con instrumentos de construcción, configuraciones de formas o figuras y el *inventor manitas*, el cual deben trasformar o reconfigurar las figuras dadas en otras.

Según Duval (2004), los tres primeros acercamientos son las más frecuentes y las más practicadas en la enseñanza de la *Geometría*. Sin embargo, reseña una quinta entrada (Duval, 2004) que es la *visualización matemática* la cual consiste en descomponer las figuras en unidades figurales.

Al respecto se toma postura por la tercera *entrada* que Duval (2004) plantea. En consecuencia, las *construcciones geométricas* son una estrategia que posibilita *tanto* la integración de los AGD en las clases de *geometría analítica*, en particular para la comprensión de las *cónicas* se usan representaciones geométricas, *como* para la formación de *pensamiento geométrico.*

De esta manera, Duval (2004) precisa que es la entrada obligatoria para el estudio de las figuras geométricas ya que para realizarla, primero que todo, no se puede dibujar a mano alzada, y segundo, explicita la necesidad de un instrumento para su elaboración y su relación con la figura. Así mismo, agrega que para producir formas visuales en un soporte físico, llámese papel, o en pantallas de computador, por medio de un instrumento entonces cambia completamente la relación con las formas percibidas y con las configuraciones de las figuras, de tal manera que los estudiantes no solo tomen consciencia de lo perceptual sino de lo teórico.

> En efecto, la utilización de un instrumento da la posibilidad de experimentar, de alguna manera, las propiedades geométricas como limitaciones de construcción: para cada forma visual que no está producida directamente por un instrumento, se necesitan varias operaciones de trazado. Y lo más a menudo, es que haya un orden para efectuar estas operaciones. No tenerlo en cuenta hace que la construcción sea imposible. Sin embargo, todo cambio de instrumento entraña un cambio en las propiedades geométricas que deben ser movilizadas de manera explícita. Es a través de la utilización de un instrumento como los alumnos pueden verdaderamente tomar conciencia de que las propiedades geométricas no son solamente características perceptivas. (Duval, 2004, p. 165)

Prolonga su explicación, detallando que la actividad de construcción debe de ser explicitada por los estudiantes a través de una actividad de descripción:

> Cada operación de construcción puede ser formulada en una instrucción, esta formulación debe evidentemente implicar la denominación de los objetos y las propiedades geométricas movilizadas. Es esta la posibilidad la que se ha puesto sistemáticamente en marcha en todas las situaciones donde hay que describir un procedimiento de construcción que permita a otro alumno reproducir la figura. (Duval, 2004, p. 165)

Y es precisamente con este tipo de actividades donde los didactas de la *geometría* se han dado cuenta que ingresa la ayuda de instrumentos informáticos tales como los AGD para la enseñanza de la Geometría. Duval (2004) también reconoce que a lo largo de los últimos veinte años, se ha visto un *renacimiento* del estudio de la *geometría* en el ámbito escolar al integrar las TIC.

Otra ventaja de los AGD, además de la ya considerable ejecución automática de las actividades de construcción, es la de suprimir completamente las aproximaciones compensadoras de la mano en la utilización de los instrumentos. En otras palabras, para fijarse en las propiedades geométricas entonces se recomienda realizar una *construcción geométrica* con la mediación de un AGD como Cabri.

El papel que Duval le concede a los instrumentos en el reconocimiento de las propiedades geométricas hace visible un argumento que claramente va en contravía de aquellos planteamientos que se apoyan en las concepciones derivadas de la *Matemática Moderna* (Kline, 1986) desde las cuales se proscribió el uso de instrumentos para la construcción de conocimiento geométrico.

***Definición de construcción geométrica a partir de la Geometría Sintética.***

A continuación se presenta una contextualización desde la *geometría Sintética* de lo que significa una *construcción geométrica*.

Las *construcciones geométricas* nacieron en los albores de lo que se conoce como *geometría sintética*, sin embargo, puede que este término sea el rival de la expresión que aparece repetidamente en este trabajo: *geometría analítica.* Para explicitarlo, Klein (1927) escribió las diferencias entre estas *Geometrías*, así como su postura desde el punto de vista matemático, en el segundo tomo de su obra *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. En este volumen, discurrió sobre la *geometría* en general y en particular sobre las *figuras geométricas*. Allí, él determinó la diferencia entre la *Sintética* y la *Analítica* de la siguiente manera:

> Ante todo, quisiera yo examinar la diferencia entre *geometría analítica y sintética*. En su primitivo significado, las palabras *análisis* y *síntesis* [[42]], se refieren a dos diferentes métodos de exposición […] También en la Geometría escolar se acostumbra hablar de un *Análisis de las construcciones geométricas*, cuyo prototipo es el siguiente: Consideremos el triángulo buscado como conocido, descompongámosle en cada una de sus partes, etc.. En la Matemática superior, estas palabras tienen otro significado muy distinto, pues se llama *geometría sintética, aquella en la cual las figuras se estudian en sí mismas sin intervención alguna de fórmulas, mientras que en la analítica éstas se aplican constantemente mediante el uso de los sistemas de coordenadas*. (p. 73)

Luego Klein aclara que esta diferencia entre ambas especies de *geometría* estriba en un aspecto puramente *cuantitativo,* a saber:

> Según que predominen las *fórmulas* o las *figuras*, se tiene una u otra Geometría, ya que una *geometría analítica* no puede, sin perder su nombre, prescindir en absoluto de la representación geométrica, ni, por el contrario, la

[42] Los modos de razonamiento matemático de análisis y síntesis en matemáticas son descritos en otro pie de página cuando se alude al problema de Pappus en la dimensión histórica – epistemológica de este capítulo.

> geometría sintética puede ir muy lejos sin expresar de un modo preciso, con fórmulas adecuadas, sus resultados. (Klein, 1927, p. 74)

Haciendo está pequeña aclaración y digresión, se precisa la conexión con lo sintético para pasar a exponer la perspectiva histórica pertinente. Es precisamente el hacer una *figura* y con qué instrumentos formarla. En efecto, uno de los temas favoritos y que más cautivó la atención de los geómetras griegos antiguos, fue el de las *construcciones* de *figuras geométricas*. La tradición de los geómetras clásicos, entre ellos *Euclides*, era de hacer uso exclusivo de los instrumentos: regla y compás. Los historiadores han atribuido a *Platón* el establecimiento de esta restricción, de utilizar tales instrumentos como una normatividad del *juego* intelectual (Eves, 1969 y Martin, 1998) entre los matemáticos griegos de la época, de modo que para jugar debían remitirse exclusivamente a su uso. En consecuencia, se volvió para éstos, algo normal el utilizar la regla y el compás para construir figuras. Aunque no todos los griegos siguieron la restricción de usar únicamente estos instrumentos, pues Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) utilizó métodos mecánicos para construir curvas geométricas complejas tales como las espirales.

En todo caso, el énfasis que se desea hacer con respecto al uso de la regla en las *construcciones geométricas* realizadas por los griegos, es que la utilizaban para dibujar líneas rectas usando el borde rectilíneo. Dicho instrumento no tenía marcas, por lo tanto no se podía usar para medir, señalar distancias o transportar distancias. Y el compás era *colapsable*[43].

Pero es precisamente en la obra Euclidiana, donde aparece sistemáticamente lo que es una construcción pero sin que Euclides la hubiese definido. Para entender el sentido de las *construcciones geométricas euclidianas* y el significado de un *problema de construcción geométrica* desde la *geometría sintética*, es necesario precisar algunos elementos de la estructura axiomática de los *Elementos*. Al respecto se tuvo en cuenta a Martín (1998) cuando señala:

> Una definición es una abreviación. Las definiciones pueden abreviar conceptos matemáticos tanto con símbolos como con palabras, que son, después de todo, también símbolos. […] Algunos sostienen que el arte principal de la creación de las matemáticas es la formulación de las definiciones adecuadas. Todos los estudiantes saben que en las matemáticas lo primero que se debe dominar en cualquier clase de matemáticas son las definiciones. Como decía Sócrates, el principio de la sabiduría es la definición de los términos. (p. 2)

[43] El compás colapsable, también denominado compás plegable, o compás euclidiano, es un instrumento idealizado por los geómetras griegos de la antigüedad que permite trazar una circunferencia con un radio arbitrario pero no permite transportar las distancias o aberturas. Es como si cuando el compás se levanta del plano de trabajo, se le perdiera la abertura inicial que tenía.

Así que Martin (1998), define lo que es una *construcción geométrica*, a la luz de un estudio que le hace a las proposiciones que aparecen en los *Elementos*. Afirma que las proposiciones en esta obra son de dos tipos: *teoremas* y *problemas*. Los *teoremas* son enunciados que tienen una demostración basada en una serie de postulados y teoremas demostrados previamente. En tanto que los segundos, los *problemas*, son enunciados donde se pregunta por alguna nueva entidad geométrica creada a partir de unos objetos geométricos dados. Martin le denomina *construcción* a la solución de tal problema. Esta *construcción* por sí misma es un teorema en Euclides, que requiere una demostración y por último, presenta una analogía cuando se refiere a que la *construcción* adquiere la forma de una receta:

> Esta construcción es en sí misma un teorema, que requiere una demostración y adquiere la forma de una receta: Si uno hace esto, aquello y lo otro, entonces conseguirá eso. Esta receta matemática es llamada un algoritmo. Así que una construcción es un tipo especial de teorema que es también un algoritmo. (Aquí se muestra la siguiente analogía: *Problema*: haga un pudín. *Construcción*: es la receta y la *Demostración*: es probarlo y comerlo para saber si quedó bien hecho). (Martin, 1998, p. 2)

Sin embargo, a pesar de que Martin (1998) describe las *construcciones geométricas* a partir de una secuencia (Enunciado del Problema – Construcción – Demostración) que sirve para solucionar un determinado problema geométrico, afirma que por lo general se entiende como el *algoritmo geométrico* o los pasos que permitieron realizar la representación del objeto geométrico solicitado, no obstante, resalta que debería de significar también el dibujo al que se refiere el enunciado, usando los instrumentos mencionados. Así llega a afirmar que la *construcción* en la *geometría sintética* es la combinación de la secuencia *enunciado – construcción – demostración*, que en sí misma llega a ser un teorema y además es la *figura* producida, refiriéndose a la *figura* como *un conjunto de puntos en el plano*. Asimismo, considera el término *boceto* o *bosquejo* a una representación gráfica que es informal, es decir, a un *dibujo* realizado a mano que puede referirse a la *construcción*. Por lo tanto, para Martin (1998) un *dibujo* tampoco llega a ser una *figura* porque para realizar una *figura*, se debe emplear instrumentos, tal como afirma Duval (2004).

Ahora bien, según Santos-Trigo (2007) y Santos-Trigo, Espinosa y Reyes (2008), expresan que un paso común en el análisis de la información que se presenta alrededor de una *construcción geométrica* es esbozar la representación mediante un dibujo. Según Schoenfeld (1992, como se cita en Santos-Trigo, 2007), generalmente el estudiante separa una construcción de una demostración y pocas veces tiene la oportunidad de discutir la importancia y *plausibilidad* de una construcción, así como de su exactitud realizada de la figura bajo la construcción.

> La apariencia del bosquejo puede ser *plausible* y utilizarse libremente para establecer una cadena de razonamientos que eventualmente culmine con alguna afirmación. Aquí la validez de la afirmación se asocia con la *precisión* del bosquejo. Resulta evidente que con la ayuda del software [se refiere al uso de un AGD], el estudiante puede realizar una construcción *exacta* de la situación y partir de información más confiable de la que le puede proporcionar un bosquejo o representación aproximada de la situación. Los estudiantes no sólo pueden mirar, sino también medir, comparar y cambiar figuras de manera directa. Además, con el software dinámico tienen oportunidades de aprender a experimentar y detectar los casos que son susceptibles de un análisis matemático. (Santo-Trigo, 2001, p. 60)

***Las construcciones geométricas en los AGD.***

Ya se ha señalado que las *construcciones geométricas* ocupan un papel importante en la *geometría sintética* y se constituyen en un medio para articular las representaciones gráficas con las representaciones verbales de enunciados geométricos, al hacer explícitas relaciones geométricas en el uso de los instrumentos de construcción. La congruencia, el paralelismo, la perpendicularidad, la equidistancia, la curvatura, entre otras propiedades, se hace evidente al usar un compás, una regla, u otro instrumento de dibujo. De la misma manera, los AGD, favorecen que los estudiantes se familiaricen con los objetos geométricos, así como con sus construcciones. Igualmente ayuda al establecimiento de las propiedades geométricas de los objetos construidos al visualizar y reconocer los cambios que se producen al modificar parámetros de su construcción y detectar los invariantes que se mantienen al ponerlos en movimiento o frente a las transformaciones de los objetos construidos, para luego, por ejemplo, formular conjeturas.

Así mismo, como se ha mencionado anteriormente, la acción del el *arrastre* es la que permite el movimiento de los objetos geométricos construidos, lo que conlleva a que los estudiantes tengan una *experiencia gráfica* que hace que observen una figura en la que se desplazan los elementos variables. Laborde (2005b) precisamente aludiendo a las nociones de *variable* y *variación* en matemáticas, explicita que en los AGD se dan dos paradigmas en el uso de la variación: “el paradigma de las *construcciones robustas* y el paradigma de las *construcciones blandas*” (Laborde, 2005b, p. 2).

***Construcciones Robustas y Construcciones Blandas en los AGD.***

Para presentar una definición de estos dos tipos de construcciones en los AGD, Laborde (2005b) inicia su producción teórica afirmando que la variación es la esencia de los *Ambientes de Geometría Dinámica*. Y que la dualidad variación/invariante permea a todas las matemáticas, incluyendo a la *Geometría*. En este marco, expresa que todo teorema en *geometría* lleva inmerso una propiedad invariante y afirma que la variabilidad, por lo general, los estudiantes no lo notan, más aun, no se percatan de una generalidad inmersa en el teorema:

> Una propiedad geométrica es un invariante satisfecho por un objeto variable en la medida que este objeto varía en un conjunto de objetos que satisfacen algunas condiciones comunes. La variabilidad de los objetos geométricos es generalmente invisible porque la formulación de una propiedad geométrica es tratada la mayoría de las veces con referencia a un objeto estático único, siendo los cuantificadores implícitos. […] Esto no deja de causar problemas para los estudiantes quienes no perciben la generalidad de los teoremas o las propiedades. (Laborde, 2005b, p. 1)

Por lo tanto, los AGD exteriorizan dicha dualidad de una manera tangible por medio del movimiento en el plano, gracias al arrastre. Al respecto, afirma:

> Cuando una figura es construida para satisfacer un conjunto de condiciones, las propiedades que se derivan de ellas son preservadas en el arrastre de un elemento de una figura. Dichas propiedades permanecen invariantes en el modo arrastre emergiendo a partir del contraste con las propiedades cambiantes de la figura en el modo arrastre. (Laborde, 2005b, p. 1)

En consecuencia, las *construcciones robustas* son *construcciones geométricas* hechas en un AGD de una figura que satisface unas condiciones geométricas para las cuales el modo de arrastre preserva sus propiedades. Tales construcciones deben ser hechas usando objetos geométricos y relaciones geométricas que caractericen la construcción obtenida. En tales construcciones, la variación gracias al arrastre es usada como un medio de verificación o *criterio de validación* (Jones, 2000), de tal forma que puedan visualizar nuevas propiedades sobre las figuras construidas. En las *construcciones blandas* o *suaves* (esta palabra proviene de la traducción al español de la palabra *soft*), la variación es parte de la construcción en sí misma y una propiedad se hace visible sólo cuando otra se satisface (o se cumple). La satisfacción simultánea de dos propiedades permite suponer que una es consecuencia de la otra. Es decir, en las *blandas*, la construcción que se hace de una figura, no satisface todas las propiedades. Éstas, por lo general, se hacen *a ojo*, sin aludir a la teoría y son invalidadas por el modo de arrastre dado que se hace visible que algunas de las condiciones no son satisfechas. De acuerdo a Laborde (2005b), es posible mostrar como el paradigma *suave* puede contribuir al aprendizaje. Igualmente señala que las construcciones *blandas* por una parte pueden ser parte de lo “privado” del trabajo de los estudiantes y se debe ayudar a identificar las relaciones de dependencia entre las propiedades. Al respecto, Healy (2000) señala unas diferencias entre las robustas y *blandas*, que emergen alrededor del tema de la dependencia y que estas dos clases de construcciones llegan a ser complementarias:

> En las construcciones robustas la dependencia es demostrada por el hecho que una relación permanece invariante a través del arrastre. Durante la prueba del arrastre la atención puede moverse de lo general a lo específico, a medida que una ´familia´ de Cabri-dibujos con la misma estructura es producida. En las construcciones blandas, este no es el caso. En lugar de eso, el arrastre es parte de la construcción no de la verificación y los estudiantes observan como la propiedad de dependencia se hace evidente en el punto en el cual otra propiedad es manualmente (y visualmente) satisfecha. Esto es, el caso general puede emerger a partir de lo específico durante la búsqueda minuciosa del conjunto de puntos de un lugar geométrico en el cual las condiciones dadas son satisfechas. (Healy, 2000, p, 111)

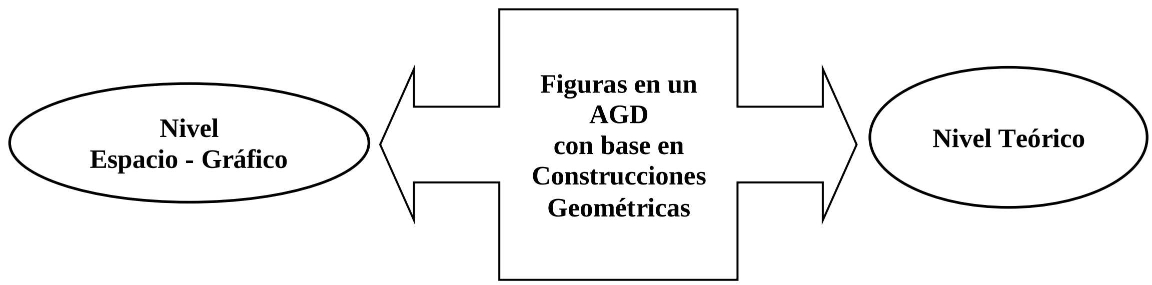
En este sentido Laborde (2005b) indica que estos dos tipos de construcciones pueden ser usadas en la enseñanza de las matemáticas estudiar el funcionamiento de enunciados y conectores de la lógica simbólica tales como la implicación, una propiedad válida, hipótesis y conclusiones.

En los ejemplos que Laborde (2006) da sobre estos dos paradigmas, afirma que en la exploración hecha con el AGD, el estudiante puede descubrir un teorema diferente al hacer una *blanda* y que se pueda revelar una propiedad diferente ante una robusta.

### *El nivel Teórico y el nivel Espacio – Gráfico que se entrelazan cuando se construyen figuras en un AGD.*

Laborde (2005b) asevera que se adoptaron las construcciones robustas al comienzo de la incorporación de la *Geometría Dinámica* en la enseñanza de la *Geometría*, ya que se estilaba solicitar a los estudiantes tales construcciones, debido a que se consideraban importantes, y hacían superar las dificultades de los estudiantes (Laborde, 2005a), el cual consistía en hacerlos pasar del nivel espacio – gráfico de las figuras a un nivel teórico. La primera que acuñó los términos *robustas* y *blandas* fue Healy (2000) y así mismo declaró que las construcciones *blandas* siempre han estado desde el comienzo de los AGD, pero sólo se reconocieron después de 15 años de su nacimiento, cuando efectuó un meta-estudio a las investigaciones con AGD, al tener en cuenta los registros y observaciones en el aula (Healy, 2000). Pues ocurre que siempre que el profesor exige a los estudiantes que hagan una figura, el profesor en definitiva, está esperando es que realicen una construcción robusta, es decir, espera que trabajen en el nivel de la *Geometría*, que acudan a la teoría o al *saber matemático*, mientras que los estudiantes usualmente se quedan en el nivel perceptual o espacio – gráfico y tratan de satisfacer únicamente restricciones visuales o deduciendo propiedades empíricamente al verificar el dibujo.

En el Esquema 5, se puede resumir esta interrelación.




*Esquema 5: El papel que juegan las figuras en un AGD gracias a las construcciones.*

En efecto, Laborde (2005a) menciona que las figuras en la *Geometría* de dos dimensiones, juegan un papel oculto y ambiguo: por un lado, el *nivel espacio – gráfico* se refiere al dominio donde se instancian los objetos geométricos, por medio de dibujos en el papel, o en una pantalla de computador, o por medio de movimientos producidos por un punto articulado a un mecano o artefacto mecánico. En estas representaciones externas que son entidades gráficas, se pueden realizar mediciones particulares, en las cuales es posible realizar acciones físicas, y además expresar ideas de ellas, interpretaciones, opiniones y juicios. Por otro lado, está el nivel *teórico*, referente o dominio donde se encuentra la teoría geométrica, los objetos teóricos, los teoremas, las reglas de acción, relaciones y operaciones de esos objetos, así como también juicios acerca de estos, que pueden ser expresados en varias representaciones.

Por lo tanto, considera que la interrelación entre estos dos niveles es parte esencial del significado de la *geometría* (Laborde, 2005a). Pero están estrechamente entrelazados, en las figuras hechas en un AGD, porque estas deben de resultar de una construcción donde se usen una serie de primitivas geométricas, expresadas en términos geométricos, seleccionadas por el usuario. Laborde (1998) establece: "El dispositivo obliga a la distinción entre trazado y procedimiento de trazado" (p. 44), con lo cual se fomenta el pensamiento algorítmico. Y una característica importante de esas figuras es su cuasi-independencia del usuario, una vez que ellas han sido creadas:

> Cuando el usuario arrastra uno de los elementos de la figura, ésta puede ser modificada de acuerdo a la geometría [a la naturaleza] de su construcción más que a los deseos del usuario. Esto no sucede en el caso de los dibujos realizados con lápiz y papel, en el cual puede ser ligeramente tergiversado por los estudiantes para encontrar sus propias expectativas. (Laborde, 2005a, p. 165)

En consecuencia, Laborde (2005a) asume que los AGD favorecen esta conexión entre los aspectos *espacio – gráficos* y los *geométricos* como invariantes al desplazar la figura, y este movimiento exterioriza la necesidad de ciertas condiciones en contraste con la contingencia de otras (Laborde, 2005b). Así mismo, gracias al desplazamiento, se puede descalificar las propiedades *espacio – graficas* no necesarias (Laborde, 2006).

De lo anterior se puede afirmar que los AGD, gracias a las *construcciones geométricas* realizadas en ese ambiente, son un puente (Cuoco & Goldenberg, 2000; Olivero & Robutti, 2001; Sandoval, 2009) que permite la transición del nivel de percepción visual al nivel teórico y viceversa. Al respecto, Laborde (2005a) considera lo siguiente:

> Lo que es importante es que los problemas en el ámbito escolar requieren del uso de ambos dominios [el espacio – gráfico y teórico] y varios pasos entre ellos. […] Consideramos que este proceso de ida y vuelta entre T [se refiere a lo teórico] y a lo SG [se refiere a lo espacio – gráfico] toma lugar aún entre expertos en la geometría escolar tales como los profesores. (p. 162)

Por ejemplo, las exploraciones que surgen con el arrastre al usar la herramienta de medida de un AGD, se quedan en el nivel espacio – gráfico, (Olivero & Robutti, 2001; Garzón & Fernández, 2006) por la necesidad que les surge a los estudiantes cuando intuyen una relación *métrica* entre dos objetos geométricos al comparar (ser más grande o ser el doble que el otro) o para confirmar si efectivamente la intuición es verdadera o es falsa. Sin embargo, los estudiantes al lanzar conjeturas sobre el hecho geométrico que están acaeciendo ante sus ojos, el *medio* entra a colaborar y al ser guiados por las *retroacciones* que se obtienen, entonces empiezan tomar consciencia (Laborde, 2005b; Duval, 2004) ellos mismos o tal vez por las intervenciones del profesor, que la medida no es suficiente, entonces es menester pasar al nivel teórico, ya que buscan validar sus conjeturas en el marco de una teoría y finalmente demostrar ese hecho.

Ante esta dificultad que suelen los estudiantes presentar con respecto a las figuras y reseñada en la serie de trabajos investigativos de Laborde (1998b; 2002; 2005a; 2005b; 2006), Sandoval (2009) expresa una razón que tal vez sea la posible generadora: las *construcciones geométricas* en los ambientes tradicionales de lápiz y papel no dejan ver las relaciones estructurales que se pueden quedar guardadas (no tienen una historia de cómo se efectuó la construcción) ante una construcción robusta: "una posible causa puede ser el tipo de *representación estática* que se utiliza para movilizar las ideas geométricas durante una clase. Por lo tanto, sería necesario describir y analizar lo que sucede cuando se utiliza la *Geometría Dinámica*" (Sandoval, 2009, p. 6).

Vale aclarar que antes de que Healy (2000) le diera el nombre y significado a las construcciones *robustas* y *blandas* en los AGD, otras investigadoras, Santinelli y Siñeriz (1999), en el primer CabriWorld, habían hecho una clasificación similar pero no rigurosa. En efecto, a las que se le denominan *robustas*, ellas le llamaron construcciones *exactas*, pero esta connotación la presentaron a partir de la *geometría euclidiana*, donde los griegos realizaban *construcciones geométricas* independientes de la medida y usando la regla y el compás:

> Una construcción exacta es un algoritmo compuesto de un conjunto de pasos que permiten resolver el problema mediante la construcción de lugares geométricos con regla no graduada y compás. Una construcción es exacta si y sólo si es justificable mediante una *prueba de constructibilidad*[[44]]. (Santinelli & Siñeriz, 1999, p. 1)

Lo que sucedía con esta definición, es que la extendían a una definición en AGD cuando los usuarios usaban las herramientas primitivas de construcción del Cabri. En cambio a las que se le denominan *blandas*, le llamaron construcciones *optímales* debido a que hacían uso de las herramientas de medición de Cabri para copiar los datos de una construcción y permitía resolver un problema geométrico con al menos un *grado de libertad*[45].

Para finalizar, se pueden señalar algunas diferencias entre las construcciones robustas y construcciones *blandas*, tal como señalan Laborde (2005a; 2006) y Healy (2000).

- Las construcciones blandas ofrecen una transición del nivel *espacio – gráfico* o empírico intuitivo al nivel *teórico* de la *Geometría*.
- Las construcciones *blandas* están al servicio de las robustas. Pues, las *blandas* son aún más importantes para ayudar a obtener las construcciones robustas.

---

[44] Santinelli y Siñeriz (1999) le denominan *prueba de constructibilidad* a una demostración en la cual a "un objeto que es construible con regla y compás se le demuestra su existencia a partir de un encadenamiento lógico de proposiciones basadas en los cinco postulados de Euclides. (y la continuidad del plano, asumida tácitamente)" (p. 1)

[45] Santinelli y Siñeriz (1999) afirman lo siguiente al respecto: "Si el problema tiene $n$ datos y hay $x$ de los $n$ datos que pueden modificarse arbitrariamente, decimos que la construcción es optimal con $x$ grados de libertad" (p. 4).

- En las construcciones robustas, se requieren conocimientos que los estudiantes podrían no tener.
- Las dos clases de construcciones pueden contribuir a la comprensión de una propiedad geométrica como una implicación. Por ejemplo, una construcción robusta permite verificar sí las condiciones supuestas que proporcionan la consecuencia esperada son satisfechas. En las construcciones robustas, se requiere un mínimo de conocimiento de las condiciones o algunas ideas de estas. Y las construcciones *blandas* traen ideas acerca de una implicación misma o sobre las condiciones que deben de ir para que se obtenga una consecuencia.

### 2.2.6. Consideraciones finales de la dimensión cognitiva.

En este punto, se presentan varias consideraciones finales, de acuerdo con los factores que incidieron en este análisis, mostrando la complejidad *cognitiva* que se entreteje entre ellos.

En primer lugar, las caracterizaciones de los objetos geométricos desde lo *global* y *puntual* pueden partir de *representar* las *cónicas* desde lo *gráfico* para luego *articular* la comprensión con lo *algebraico*, pero las idas y vueltas entre lo global y lo puntual se hace necesario para la comprensión, de la misma manera que el efecto que tiene la articulación entre las representaciones matemáticas. Si se va representar una figura geométrica, tal como una *cónica*, que de por sí tiene su complejidad, ya que no son como las formas euclidianas elementales, debido a que no se pueden representan gráficamente como líneas poligonales, entonces este aspecto puede sugerir que los estudiantes pueden aprender las *cónicas* empezando a estudiarlas al realizar *construcciones geométricas* donde la *representación* de las mismas sea *punto* por *punto* para luego construirlas *globalmente*, de manera *dinámica* con el AGD. De esta manera, se podría superar dos aspectos detectados al respecto:

Primer aspecto: verificar si efectivamente se podría dar una corroboración a la HI 1 planteada al final del Capítulo 1. De esta manera se podría tratar de superar el *obstáculo epistemológico* que establece que un concepto matemático nace previamente desde lo *puntual* y a partir de lo *intuitivo*, antes de desarrollarse en lo global y *teórico* que es lo más difícil de comprender.

Y el segundo aspecto: vencer la concepción de los estudiantes, que salió a flote cuando se efectuó la encuesta, la cual estableció que no comprendían que una *cónica* no se puede dibujar de *forma completa* o *total* usando los instrumentos de dibujo tradicionales. Por lo tanto, debe ser labor del *profesor*, recalcar y precisar a los estudiantes que lo único que se hace con regla y compás, son tan solo puntos que cumplen con las propiedades geométricas de una *cónica*. Pero que si se desea representarla *globalmente*, entonces se necesita un instrumento, que para este trabajo sería el Cabri que proporciona representaciones dinámicas, y que a la postre, juega el papel de *mediar* instrumentalmente a través de los *sistemas de representación ejecutables* gracias al carácter experimental con la gestión de las actividades de *construcción geométrica*. Con esto se llegaría a formalizar matemáticamente cuando se les solicitase que *articulen* lo hecho en el ambiente informático con las *representaciones algebraicas*. De esta manera, de lo *global* se conseguiría lo *formal*, partiendo de lo *puntual* e *intuitivo*.

En segundo lugar, con respecto a la encuesta, se pudo observar que fue una pieza fundamental para encontrar muchas *dificultades*, *obstáculos* y *errores* entre el grupo de estudiantes. Entre las más importantes por resaltar están:

- Las posiciones de las *representaciones gráficas* de las cónicas y el desconocimiento de sus relaciones métricas: si bien han escuchado algo de las *cónicas,* lo que se observó es que conocen de sus *representaciones gráficas* en posición estándar, pero que si se les presentan ligeramente rotadas, entonces dejan de serlo, ó que un óvalo es una *elipse*, ó que un arco y dos semirrectas tangentes en sus extremos son una *parábola*, pero no conocen de sus propiedades geométricas intrínsecas, ni mucho menos que existen en su definición unas relaciones métricas subyacentes.
- El desconocimiento de la filiación matemática de las *cónicas*: la mitad del grupo no sabe que las *cónicas* guardan una estrecha familiaridad geométrica, pues se relacionan estructuralmente. Y que por esta razón siempre se estudian juntas.
- La concepción de que toda representación gráfica de una *cónica* debe tener un sistema de referencia: El estudio arrojó un porcentaje considerable de estudiantes que creen que para estudiarlas primero debe de existir el plano cartesiano. Esto último finalmente sirvió para justificar la manera en que se empezaba la gestión de las situaciones *a-didácticas*, sin usar un sistema de referencia.

En consecuencia, se pudo apreciar que los estudiantes tuvieron conocimientos mínimos al respecto de las *cónicas.*

En tercer lugar, ante estos *errores*, la *visualización*, como *proceso* y *habilidad*, fortalecida por las características que traen consigo los AGD, puede llegar a constituirse en un factor crucial para superarlos. Por ejemplo, se recomendaría infundir prudencia y crear consciencia en los estudiantes por parte del profesor ante *situaciones didácticas* que involucran *representaciones gráficas* en un AGD, ya que la simple *visualización* de hechos geométricos en una pantalla no siempre da validez a las afirmaciones geométricas. Con esto posiblemente se estaría resolviendo un problema medular que se ha presentado a lo largo de este análisis cognitivo: la falta de distinción entre *figura* y *dibujo*, y en consecuencia, se podrían hacer las idas y vueltas entre lo *intuitivo* y lo *teórico*, entre el nivel *espacio – gráfico* y el nivel *teórico* de la *geometría*. Por esta razón, se debe fomentar la acción del desplazamiento de *puntos libres*[46] o *semi-libres*[47], u objetos que se dejen mover, gracias al modo de arrastre en un AGD. Sin embargo, este hecho dinámico debe crecer de manera espontánea en los estudiantes, para que puedan *explorar, validar, conjeturar, predecir, verificar* y de este modo, la *visualización* entraría a jugar un papel importante ante las conceptualizaciones que puedan emerger durante las retroacciones con el *medio* informático.

Es de recalcar que la toma de consciencia empezaría por el arrastre al dejarse guiar y ser guiados por las retroacciones. En consecuencia, con el análisis de estos errores, se generaría una urgencia en diseñar estrategias didácticas en donde la entrada al estudio de las cónicas sea por medio de *construcciones geométricas*, acompañada de una solicitud descriptiva de la construcción por los estudiantes, bien sea escrita u oral, y que tomen en cuenta las *articulaciones* entre las representaciones.

En cuarto lugar, la visualización como *proceso* y *habilidad*, también fomentaría el hábito de pensar en mover, desplazar, manipular, deformar, transformar, invertir, en últimas, de accionar mentalmente un objeto matemático en diferentes representaciones, lo cual beneficiaría la formación de *pensamiento geométrico*. Así mismo, se puede afirmar que la visualización ayuda a *articular* las representaciones de las *cónicas*, transformando las *algebraicas* en *geométricas* y viceversa. Sin embargo, algunos profesores que fomentan las expresiones algebraicas en sus estudiantes, tal vez influenciados por el movimiento de *Matemáticas Modernas* (Kline, 1986), dejan de lado las gráficas y cuando los estudiantes se acostumbran a trabajar *algebraicamente*, sucede que se resisten al uso de las *gráficas*, tal vez porque la visualización tiene una demanda cognitiva superior.

En quinto lugar, de acuerdo a la anterior consideración, se puede inferir la siguiente recomendación: en este caso, se debería ser equilibrado en fomentar el uso de los *sistemas de representación* y procurar la *articulación* entre estos, pues las *representaciones* no pueden ir solas. Se necesita complementar las representaciones proporcionadas por el ambiente tradicional de lápiz y papel, las algebraicas y estáticas, con las representaciones ejecutables, proporcionadas por el AGD, es decir, las gráficas y dinámicas, por medio de *construcciones geométricas* como ejes que articulan todo el trabajo. Con este enfoque, se recuperaría el sentido y el corazón de

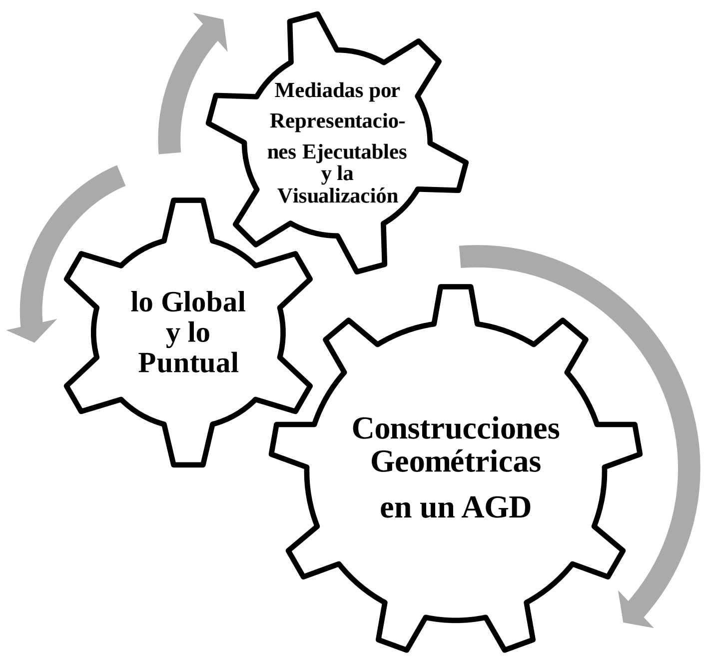
---

[46] Los puntos *libres* son puntos construidos en un AGD, en los cuales se pueden mover a partir del *modo de arrastre* por todo el plano de trabajo del ambiente. Se le denomina que tienen más de un grado de libertad.

[47] Los puntos *semi-libres* o también denominados *puntos en ruta* o *puntos variables*, son puntos construidos en un AGD, que son casi libres, que se mueven bajo el modo de arrastre pero solamente sobre el objeto que han sido creados. Estos puntos se les dice que tienen un grado de libertad. Por ejemplo, en el Cabri, se crean a partir de la herramienta "Punto sobre un objeto".

los saberes alrededor de las *cónicas*, que subyacen en la *geometría sintética*. Al efectuar este análisis surgió otra sugerencia en la forma de gestionar las representaciones matemáticas en las clases de *geometría analítica*, en la cual las *representaciones algebraicas* deberían de introducirse después de las que los estudiantes hayan trabajado con el AGD.

A la luz de estos apartados, se considera que las *construcciones geométricas* son actividades principales de entrada para estudiar las *cónicas* desde lo *puntual* y lo *global*, y en consecuencia se pueden llegar a constituirse en ejes *articuladores* con las representaciones geométricas, las representaciones ejecutables, los fenómenos de visualización a través de la mediación de dichas representaciones dinámicas de un AGD, de tal forma que las propiedades intrínsecas de estas curvas puedan ser aprendidas, y por ende, se puedan superar las dificultades reseñadas por anteriores investigadores que han trabajado esta temática (Ver Esquema 6).




*Esquema 6: Las construcciones geométricas como eje articulador entre la caracterización puntual y global para representar cónicas.*

En sexto lugar, debido a que la *visualización* no es un fin, entonces jugaría el papel de *medio* para llegar a la comprensión de las propiedades geométricas de las cónicas y así sería útil para solucionar problemas, concretizar lo abstracto, ayudado por la *reificación* de los objetos geométricos en un AGD. Lo anterior conllevaría a un problema representacional, aunque los estudiantes no se den cuenta que los objetos matemáticos son de naturaleza abstracta y que no son tangibles.

En séptimo lugar, se recomienda que a los estudiantes se familiaricen con diferentes *sistemas de representación* de un objeto matemático, para que luego piensen, actúen con ellos, y de este modo, sirvan de mediadores para que se produzca el conocimiento deseado.

En octavo y último lugar, se pudo observar con este análisis que existe un fuerte vínculo entre lo *puntual* y lo *global*; los *errores*; la *visualización*; las *representaciones* y las *construcciones geométricas*, que se amalgaman entre sí pero que aumentan la *complejidad* cognitiva. En consecuencia, es recomendable tener presente estos aspectos de orden cognitivo en el proceso de aprendizaje de las propiedades geométricas de las *cónicas*.

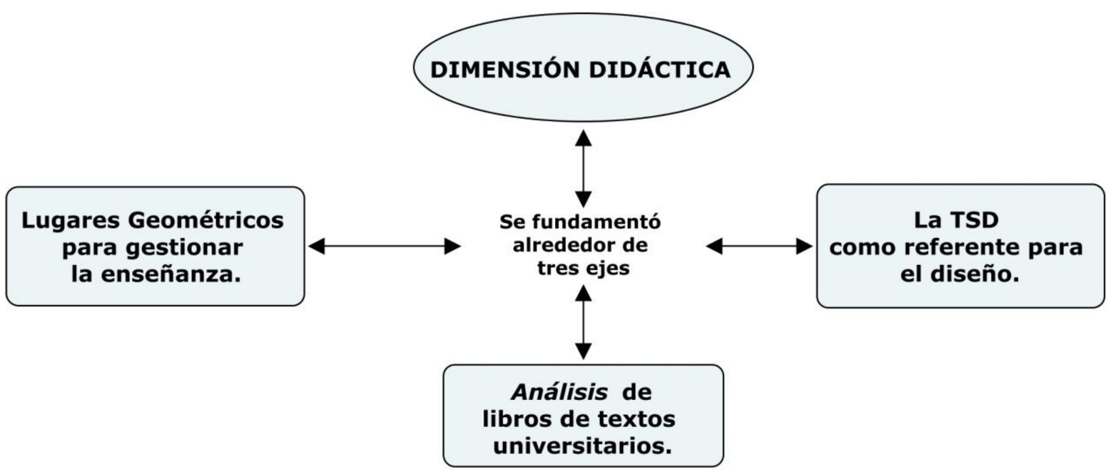
## 2.3. Dimensión Didáctica

Esta dimensión de análisis se organizó alrededor de tres ejes. El primero corresponde al estudio de los *lugares geométricos* como piezas claves para gestionar la enseñanza de las *cónicas* en la *geometría analítica*. En este primer apartado se revisaron varios factores asociados a la noción de *lugar geométrico* tanto desde el punto de vista matemático como desde el didáctico. De esta manera se hizo evidente la existencia de ciertos elementos que condicionaron el *ambiente de aprendizaje* y en consecuencia la *gestión de la clase* por parte del profesor.

El segundo desarrolló una revisión curricular alrededor de las cónicas a partir del análisis de tres libros de texto universitarios. Básicamente se conoció cuáles eran los saberes matemáticos generales y relativos a las cónicas que se estilan en los cursos universitarios, así como sus enfoques didácticos.

Y el tercero fundamentó la utilización de la *Teoría de las Situaciones Didácticas* para orientar el diseño de una secuencia de enseñanza y también para comprender los *fenómenos didácticos* que surgen en la puesta en acto de las situaciones. En éste se problematiza el AGD Cabri Géomètre como el *medio a-didáctico* y se ofrece una tipología de tareas geométricas usadas en las situaciones.

Los aspectos centrales de esta dimensión didáctica se ilustran en el Esquema 7.




*Esquema 7: La dimensión Didáctica.*

### 2.3.1. Los lugares geométricos como piezas claves para gestionar la enseñanza de las cónicas en la geometría analítica.

Un aspecto central del análisis propuesto fue el reconocimiento de la naturaleza particular del *saber matemático* puesto en juego en las situaciones didácticas, lo cual demandó el estudio de varios factores asociados a la noción de *lugar geométrico*. Algunas de las diversas definiciones asociadas a esta noción, aparecen en diferentes *geometrías*, y se consideran claves para llegar a establecer una definición que se conjugue con los rasgos y particularidades del AGD Cabri Géomètre.

En ese sentido, se estudiaron los *lugares geométricos* desde lo matemático, para luego estudiar cuáles fueron las herramientas propias de Cabri Géomètre que hacen posible que se puedan representar los *lugares geométricos* en el mencionado ambiente. Por último se presentó una aproximación didáctica que se considera adecuada para abordar el estudio de los lugares geométricos. Cada uno de estos factores didácticos condiciona el aprendizaje y, consecuentemente, la gestión de la clase por parte del profesor.

#### *Diversas definiciones de la noción de lugar geométrico.*

Al hacer una revisión de libros de texto universitarios y diccionarios de matemáticas (Warusfel, 1972; Riddle, 1997; Filloy & Hitt, 1997; Zill & Dewar, 2001; Lehmann, 2002; Hemmerling, 2002; Garzón & Valoyes, 2005), donde aparece la noción de *lugar geométrico*, se pudo reconocer una diversidad de conceptualizaciones tales como:

- Desde la *geometría euclidiana*: “El conjunto de todos los puntos, y solo de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas” (Hemmerling, 2002, p. 347). El análisis de esta definición hace evidente que *no permite el movimiento*, en otras palabras, es de naturaleza *estática*.

- Desde los aportes de la denominada *Matemática Moderna* (Kline, 1986), específicamente desde la *Teoría de Conjuntos*, es evidente que esta noción abolió cualquier rasgo intuitivo que pudiese tener, como se puede observar en el siguiente enunciado:

  > En un conjunto E en el que una propiedad P tenga sentido, se puede considerar el subconjunto $E_p \subset E$ de los elementos de E para los cuales P es cierto y su

complementario $E_{\text{no P}} = \complement_E E_P = E - E_P$. $E_P$ es el conjunto de verdad de P, y el complementario el de (no P). Si se puede escribir en E la implicación

$$P \Rightarrow Q$$

se deduce la inclusión $E_P \subset E_Q$; así mismo la equivalencia $P \Leftrightarrow Q$ se traduce por la igualdad $E_P = E_Q$. La reunión y la intersección de los conjuntos de verdad de P y Q corresponden a las propiedades (P o Q) y (P y Q). En geometría se estudian con frecuencia los subconjuntos de puntos

$$M \in E_P \subset \mathbb{R}^2 \text{ (ó } \mathbb{R}^3 \text{ ó } \mathbb{C}^2 \text{ ó } \mathbb{C}^3 \text{ )}$$

que poseen la propiedad P, en los espacios reales o complejos de dimensión 2 ó 3. $E_P$ se llama el *lugar geométrico* de M, o conjunto característico de M, o conjunto de las posiciones de M (se lee incluso a veces: conjunto de M). […] El *lugar geométrico* $E_P$ depende considerablemente del conjunto E en el cual se opera. Salvo excepciones, si E es $\mathbb{C}^2$ o $\mathbb{C}^3$, donde existen puntos con coordenadas complejas, el *lugar geométrico* $E_P$ es una curva o una superficie (Γ) entera. (Warusfel, 1972, pp. 262-263)

- Desde la *geometría transformacional* se define *lugar geométrico* (o curva) en términos *físicos* o de naturaleza *dinámica* aludiendo al *movimiento* de un punto: "Un *lugar geométrico* es la *trayectoria* que describe un punto que se mueve de acuerdo con una o más condiciones previamente dadas" (Garzón & Valoyes, 2005, p. 15).

- Desde la *geometría analítica* se define *lugar geométrico* como: "Un conjunto de puntos que satisfacen alguna relación algebraica, y si esta relación está dada por una ecuación, a ésta la llamaremos ecuación del *lugar geométrico*" (Filloy & Hitt, 1997, p. 105). Catalogándose como una definición algebraica.

- Otra definición de la *geometría analítica* que es mucho más específica que la anterior, y que igualmente aparece en otros de libros de texto (Kindle, 1990; Riddle, 1997; Zill & Dewar, 2001; Lehmann, 2002), es: "El conjunto de todos los puntos $(x, y)$ en el plano, y solamente aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una propiedad geométrica, que puede estar dada por una ecuación $f(x, y) = 0$, se conoce como *lugar geométrico* o *grafica* de la ecuación" (Lehmann, 2002, p. 33). También, esta definición se puede clasificar como analítica debido al tipo de representaciones simbólicas y por qué aparece símbolos en una relación algebraica

En general puede señalarse que el concepto de un *lugar geométrico* alude a:

Un *conjunto de puntos* puede ser un punto o varios puntos o cualquier figura geométrica rectilínea o curva, por ejemplo: una línea recta, un polígono regular o irregular, una *cónica* o un dominio cualquiera de puntos en el plano. Usualmente en el contexto de la resolución de problemas geométricos, se debe hallar un conjunto de puntos que satisface una(s) determinada(s) condición(es), o relación(es), por lo que las respuestas a estos problemas pueden tener una única solución o varias soluciones, pero que por regla general, son figuras geométricas representadas gráficamente y conocidas en *geometría*, donde la principal tarea es *conjeturar*[48] y caracterizar qué tipo de figura es la solución, y solicitando que se demuestre por qué la figura cumple con las condiciones geométricas dadas en el enunciado del problema, contextualizando los saberes asociados al tipo de *geometría* en donde se esté trabajando.

***Una definición de lugar geométrico que se considera apropiada para trabajar en un AGD.***

A pesar de la diversidad presentada, es posible reconocer una definición, desde otro punto de vista *dinámico*, que se ajusta para el trabajo en un AGD como Cabri Géomètre, y que ha empezado a aparecer en algunos libros de texto escolares en Francia. De acuerdo con Jahn (2002), una manera más específica y funcional de caracterizar a un *lugar geométrico* cuando se integran los AGD a las clases de matemáticas, es:

"Llamamos *lugar geométrico* de un punto $M$ al variar otro punto $Q$ sobre un objeto dado como el conjunto de posiciones que toma $M$ al mover $Q$ sobre ese objeto" (Jahn, 2002, p. 78).

[48] En la literatura internacional en Didáctica de la Geometría y la relación con la demostración al usar un AGD, autores como Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) y Mariotti (2006), definen la generación de conjeturas al utilizar un AGD como Cabri, basados en la interpretación que el usuario del software hace a partir de movimientos y dependencias entre objetos geométricos a través de la acción del arrastre y que lo expresa en términos de una dependencia lógica. En otras palabras, tal y como lo afirma Baccaglini-Frank y Mariotti (2010), "el sujeto debe ser capaz de transformar un dato perceptual en una relación condicional entre lo que llegará a convertirse en una premisa y la conclusión de una conjetura" (Mariotti 2006, p. 174). Tarea compleja y para nada trivial que implica el proceso de comunicar en términos matemáticos.

Es de resaltar que esta investigación no se siguió esta dirección, sino que desde un punto de vista experimental, la conjetura se entendió como una proposición o afirmación que el estudiante plantea o comunica a partir de lo que está experimentando y/o haciendo en el AGD, por ejemplo, arrastrando puntos y observando movimientos y dependencias o invariantes y que imagina que pueda ocurrir, de acuerdo a sus observaciones, exploraciones dinámicas o indicios realizados, y que supone como una frase cierta. Pero en ningún momento los estudiantes debían formular la conjetura en términos de una expresión condicional que relacione las premisas y la conclusión, ya que esta perspectiva lleva a considerar una segunda fase: la *demostración* en *geometría analítica* como un proceso importante, debido a que no se tuvo en consideración ningún objetivo investigativo en este sentido. La *demostración* al igual que la *conjetura* en esta investigación son nociones *paramatemáticas*, en el sentido de Chevallard (1997).

De esta manera, esta noción deja de ser *estática* para convertirse en *dinámica* gracias a las *representaciones ejecutables*[49].

Por último, el método general y clásico en un ambiente de lápiz y papel para abordar un *lugar geométrico* usando representaciones gráficas y verbales, recomendado en libros de texto universitarios de *geometría euclidiana*, es:

> *Paso I*: Localizar varios puntos que satisfagan la o las condiciones dadas.
> *Paso II*: Trazar una línea o varias líneas (rectas o curvas) que pasen por estos puntos.
> *Paso III*: Deducir una conclusión referente al lugar geométrico y describir con exactitud la figura que represente la conclusión.
> *Paso IV*: Probar la conclusión demostrando que la figura o más precisamente que cualquier punto sobre la curva obtenida satisface las condiciones inicialmente dadas del lugar geométrico y, recíprocamente, probar que todo punto que satisface las condiciones dadas está sobre la curva. (Hemmerling, 2002, pp. 348-349)

Se recalca que en el paso IV, lo que se solicita es una *demostración formal*. Por lo general en la *geometría euclidiana*, esto se efectúa usando una representación verbal y argumentativa. A continuación se estudia la connotación de los lugares geométricos en la *geometría analítica*, presentando la forma en que cambia este último paso.

Se puede afirmar que el enfoque más difundido para estudiar las cónicas es el *analítico*. Sin embargo, junto con la existencia de diversos enfoques para comprender el significado de las *cónicas*, también existen diversos significados de la noción de *lugar geométrico*, circunstancia que revela la necesidad de una toma de posición dependiendo del ambiente en el cual se desea trabajar.

### *La connotación de los lugares geométricos en la geometría analítica.*

La noción de *lugar geométrico* se aborda usualmente en la *geometría analítica* cuando se establecen los dos problemas fundamentales:

- *primer problema fundamental de la geometría analítica*: dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.

[49] Las *representaciones ejecutables* son una categoría correspondiente a teorizaciones propias del trabajo en los AGD y aluden a la posibilidad de manipular las representaciones simbólicas y visuales.

- *segundo problema fundamental de la geometría analítica*: dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

En el primer problema, entra a jugar un papel central la noción de *lugar geométrico* ya que los puntos que se obtengan gráficamente deben de satisfacer la ecuación dada y recíprocamente, que cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación entonces deben de pertenecer a la gráfica obtenida.

Así mismo, este primer problema remite al acto de trazado, de efectuar una gráfica, de encontrar una curva o lo que es lo mismo, un *lugar geométrico*. En este sentido al tratamiento de la ecuación dada y su representación gráfica, usualmente se le denomina en *geometría analítica*, el problema de *construcción de curvas*. Por ejemplo, Lehmann (2002) recomienda que el trazado de una curva, se aborde en seis pasos:

1. Determinación de las intersecciones con los ejes coordenados.
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen.
3. Determinación de la extensión (dominio) de la curva.
4. Determinación de las ecuaciones de las asíntotas verticales u horizontales que la curva puede tener.
5. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.
6. Trazado de la curva.

(pp. 43-44)

En lo concerniente al *segundo problema fundamental*, la figura geométrica dada se presenta en términos de una ley o propiedad que deben obedecer los puntos de la *curva*. Frecuentemente, la *curva* se define en términos de *lugar geométrico* (Riddle, 1997; Zill & Dewar, 2001; Lehmann, 2002), descrito por un punto que se mueve siguiendo una ley específica. Lehmann (2000) al respecto, afirma así: “Consideremos que estamos definiendo una *curva* plana del tipo $C$ por medio de una propiedad $P$ que únicamente posee $C$. Entonces, entre todas las curvas planas, una *curva* es del tipo $C$ *si y solamente si* posee la propiedad $P$” (p. 49).

Ahora bien, en este *segundo problema*, el objetivo es hallar la representación algebraica del *lugar geométrico* dado, en la forma $f(x,y)=0$. Para ello, Lehmann (2002) sugiere un procedimiento para obtener la ecuación de un *lugar geométrico* en cuatro pasos:

1. Se supone que el punto $P$, de coordenadas $(x, y)$ es un punto cualquiera que satisface la condición o condiciones dadas, y, por tanto, un punto del lugar geométrico.
2. Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación o ecuaciones en las coordenadas variables $x$ y $y$.
3. Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida en el paso 2 de tal manera que tome la forma $f(x, y) = 0$.
4. Se comprueba el recíproco: sean $(x_i, y_i)$ las coordenadas de cualquier punto que satisfacen $f(x, y) = 0$ de tal manera que la ecuación $f(x_i, y_i) = 0$ sea verdadera.

(p. 51)

Nótese que estos cuatro pasos constituyen el paso IV que se presentó en el apartado anterior, cuando se explicitó el método general y clásico en la *geometría euclidiana*. En otras palabras, se evidencia que se debe efectuar una demostración en doble vía, demostrando una condición *necesaria y suficiente* para que la ecuación corresponda con ese *lugar geométrico*.

### *Los lugares geométricos en Cabri Géomètre.*

Como se señaló anteriormente existe una escasez de estudios alrededor de este tema, resaltándose el hecho que los problemas geométricos que involucran el uso de *lugares geométricos* suelen plantear dificultades asociadas a la visualización (González-López, 1999), de *materializar* la graficación a partir de la descripción sintética del *lugar geométrico* correspondiente. Por ejemplo, muchas veces no es trivial *imaginar* ni tampoco es fácil dibujar sobre un papel, un lugar geométrico de un punto sujeto a una construcción, cuando dicho punto recorre una determinada trayectoria.

Es el caso del siguiente problema de construcción: *Dado una recta cualquiera **d** y un punto exterior a ella denominado **F**. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto **P** que se mueve de tal manera que su distancia al punto **F** es igual su distancia de la recta **d**?* No obstante, se trata de una *parábola*. Lo anterior hace que no se haya aprovechado la oportunidad de articular dicha descripción sintética (o analítica si la recta y el punto se dan en términos algebraicos) con su representación visual. Una forma de aprovechar el dinamismo para enseñar *geometría* es a partir de la construcción de curvas como *lugares geométricos* en un AGD como Cabri. Al respecto Santos-Trigo (2007) afirma:

> El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triángulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. (p. 143)

Se considera que el trabajar con un AGD, constituye no sólo una actividad de gran atractivo geométrico sino que pueden hacer posible que los estudiantes reconozcan las relaciones existentes entre objetos geométricos que, generalmente, se estudian de manera aislada.

A continuación se mostrará cómo se pueden llevar a cabo tales construcciones geométricas en el ambiente Cabri, por ejemplo, construyendo una *cónica* como *lugar geométrico*. Para tal efecto, se toman como referentes las *construcciones geométricas robustas*[50] y *dinámicas,* utilizando la regla y el compás virtual de un AGD para determinar, por ejemplo, punto por punto (un enfoque puntual), las partes constitutivas de un lugar de puntos. También se acude al uso de la herramienta "Lugar" de un AGD para hallar la figura geométrica en su forma completa (un enfoque global) como *lugar geométrico* solicitado. Un ejemplo de tal situación es cuando se solicita construir la *parábola* como un lugar de puntos de manera puntual, tales que cumplen su definición esencial:

> Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. (Lehmann, 2002, p. 149)

Al estudiar los aspectos involucrados en la representación gráfica de un lugar geométrico punto por punto en el ambiente tradicional de regla y compás, se hace evidente que sería un proceso muy dispendioso y repetitivo el efectuar las construcciones correspondientes a cada punto que satisface las condiciones de ser parábola: la equidistancia entre dos objetos, el foco y la directriz. Por ejemplo, si se supone para cada punto M que "viva" sobre la recta directriz, se tendría que realizar una construcción para generar un punto P correspondiente. Dado que el dominio matemático es una recta y la recta está "hecha" de infinitos puntos (Ver Figura 17), entonces existirán infinitos P´s relacionados a los puntos M´s. Lo anterior tiene el propósito de generar una nube de puntos suficientes (enfoque *puntual*) para luego conectarlos por medio de una interpolación a mano alzada, y de esta manera obtener

[50] Las *construcciones geométricas robustas* en un AGD se detallan en la dimensión cognitiva de este informe de investigación.

una curva continúa. Es evidente que con los instrumentos convencionales no se generaría sino solo una nube de puntos pero no una figura.

Por el contrario, si se desea hacer lo mismo en el ambiente informático y computacional provisto por un AGD, se tendría que considerar una sola construcción geométrica, usando únicamente un punto M que esté sobre la recta, teniendo en cuenta las propiedades estructurantes de la parábola, para generar interactivamente el resto del conjunto de los puntos P que cumplen con la propiedad de ser una parábola, a medida que el punto M es movido. Con este ambiente informático se generaría *una* gráfica que daría la idea de ver toda la figura, (enfoque *global*). En el ambiente tradicional esto no es posible usando regla y compás porque sería un proceso iterativo infinito, y además el conjunto generado sería discreto.

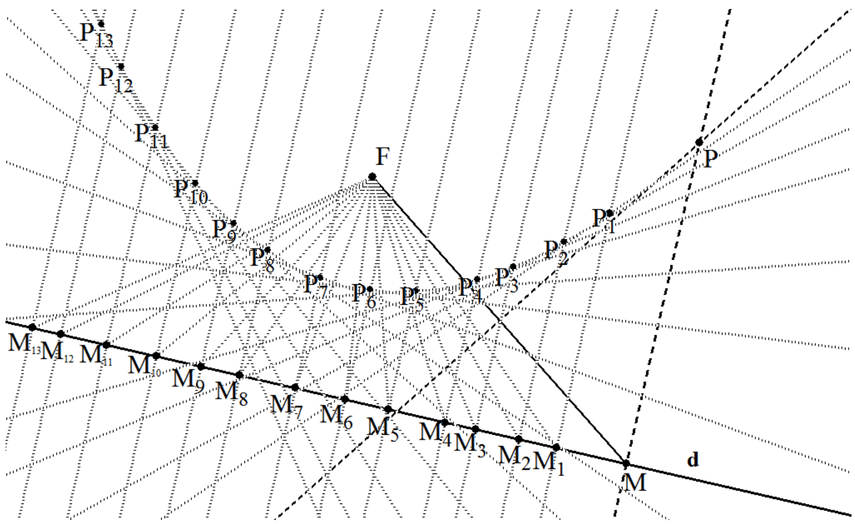


*Figura 17: Puntos que pertenecen a la parábola.*

En el AGD Cabri Géomètre podría recurrirse al uso de la herramienta “Lugar” o bien de la herramienta “Traza” que podrá dar cuenta de dicha figura solicitada. No obstante, la distinción entre trayectoria y lugar geométrico se ve reflejada de dos maneras, de acuerdo a estas dos herramientas.

En efecto, un *lugar geométrico* tal como se produce al usar la herramienta “Lugar”, se comporta de muchas maneras como otro objeto de Cabri. Por ejemplo, puede permanecer visible en la pantalla, moviéndose a medida que se manipulan los elementos geométricos que lo determinan. También ocurre que un punto puede ser construido sobre el lugar geométrico y moverse de la misma manera como un punto sobre otro objeto Cabri y así mismo, puede ser definido como un objeto final en una *macro-construcción*[51].

Además, es posible obtener un *lugar geométrico* de objetos tales como rectas, rayos (semirrectas), segmentos y circunferencias y por lo tanto generar sus envolventes (Ver Figura 18).

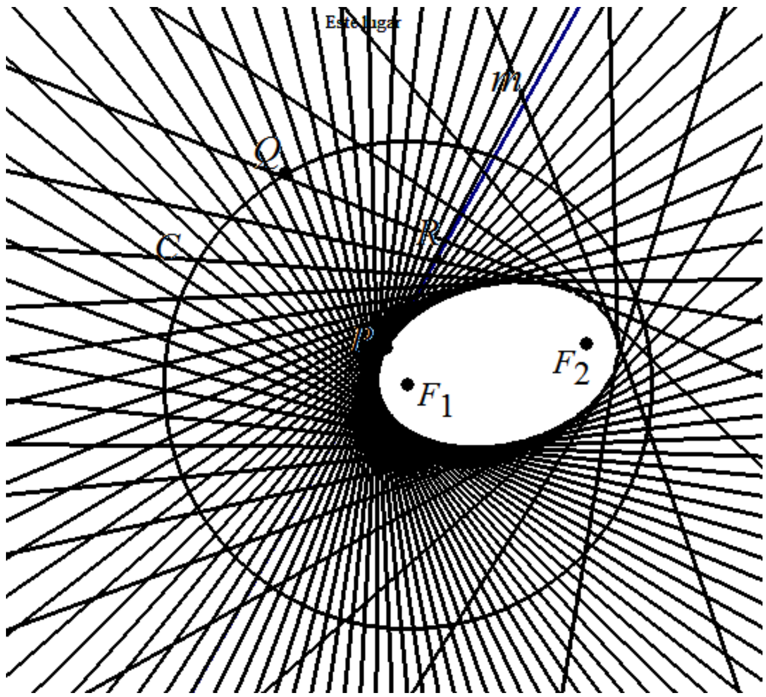



*Figura 18: Elipse como envolvente de una recta.*

También en la versión de Cabri Géomètre II Plus, la herramienta "Lugar" puede ser usada para la resolución de problemas de construcción geométrica teniendo en cuenta el *método de los lugares geométricos* (Eves, 1969) que usualmente se recomienda en los libros de *geometría métrica*, el cual consiste en que la solución de un problema puede obtenerse por medio de la intersección de dos lugares geométricos, correspondientes a dos condiciones dadas. Con esto se podrá hallar el punto *clave*, que es la intersección de los lugares geométricos. Para operar con este método se prescinde[52] momentáneamente de una de las condiciones, representando gráficamente el lugar a que corresponde la otra condición. Haciendo lo mismo con la

[51] Una *macro-construcción* en un AGD se define más adelante en esta dimensión, donde se exponen las tipologías de Tareas en estos ambientes.

[52] Según Santos-Trigo (2007) esta es una estrategia para resolver problemas, donde se busca alguna condición especial del problema. A veces se refiere a ella en términos de deshabilitar o relajar unas de las condiciones del problema para buscar la solución en la familia de soluciones resultante.

segunda condición, al prescindir de la primera, se obtendrá el punto *clave* de intersección (o los puntos *claves* de intersecciones) que satisface(n) al problema. En las versiones anteriores del Cabri Géomètre II Plus, no era posible aplicar este método porque al usar la herramienta "Lugar", la curva que se producía no se dejaba intersectar sus puntos con otro objeto geométrico, pero en esta versión si se deja, tal como se cumple en la *Geometría*. Este que era un rasgo característico de la primera versión del Cabri, claro ejemplo de cómo la *Transposición Informática*[53] (Balacheff 1994, 2000) es un asunto crucial en el diseño de actividades en los AGD.

En el caso de los lugares de puntos, la herramienta "Lugar" de Cabri Géomètre II Plus, produce un conjunto de puntos, $L$, tal que cada elemento es definido en función de un elemento del conjunto $E$. En efecto: $L = \{P = f(M),\ M \in E\}$ y aparecerá sobre la pantalla como un dibujo (una representación gráfica de una curva o curva envolvente) del conjunto $L$ para un número finito de $f(M)$[54].

Para definir tal lugar geométrico es necesario seleccionar un punto $M$ de la construcción y luego seleccionar el punto $P$ sobre el cual $M$ dependa (donde una relación funcional existe entre $P$ y $M$). El punto $M$ es un punto "variable" que pertenece a un conjunto (dominio matemático $E$) particular de puntos del plano (una recta, una circunferencia, un segmento de recta, etc.) y el punto $P$ está relacionado a $M$ por medio de una construcción geométrica. Los puntos $P$ del lugar geométrico son calculados por el software y obtenidos directamente y no es necesario arrastrar el punto $M$. El lugar geométrico es inmediatamente representado en su totalidad el cual no era este el caso en Cabri I donde la herramienta "Lugar" estaba relacionada con el arrastre (es decir, tenía un aspecto dinámico). De hecho, en la primera versión del software, al utilizar la herramienta "Punto sobre objeto" $M$ (punto *en ruta* o también punto *variable*) y un punto $M'$ (punto *dependiente* o *de intersección*[55]) que dependía de $M$, el lugar geométrico del punto $M'$ era producido como la traza de sus sucesivas posiciones cuando $M$ era arrastrado.

Un lugar geométrico también puede ser producido de forma *manual* al seleccionar cualquier punto sobre la pantalla incluyendo puntos libres o semilibres y observando la trayectoria generada cuando este punto es arrastrado. Esta segunda utilización de la herramienta "Lugar" de Cabri I corresponde a la herramienta "Traza" en Cabri II.

De esta manera, la "Traza" permite al usuario mostrar ciertos objetos sobre la pantalla que dejan una "huella" cuando ellos son movidos, o bien manualmente

[53] La *transposición informática* se asume en el sentido propuesto por Balacheff (1994; 2000) y que alude a desviación entre las representaciones y lo que se intentan representar en los ambientes informáticos y computacionales

[54] $n$: número de puntos del lugar geométrico, con $5 \leq n \leq 5000$.

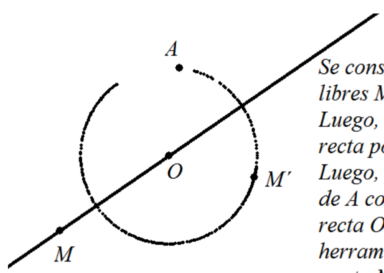
[55] Los puntos dependientes o de intersección son puntos en un AGD en los cuales no pueden ser arrastrados, ni separados del objeto geométrico al cual dependen. También se les dice que tienen cero grados de libertad.

usando el ratón del computador ó a través del uso de la herramienta “Animación”. Por lo tanto, la traza que deja un punto, no existe como un objeto de Cabri, únicamente existe como un conjunto de píxeles resaltados sobre la pantalla. Resumiendo, en Cabri Géomètre II Plus, tal como afirma Jahn (2002), la herramienta “Traza” enfatiza en una *interpretación dinámica* de la representación de una trayectoria de un *punto*, da la sensación que la huella fuera una curva discontinua (o discreta como lo afirma Schumann & Green, 1997) si se arrastra muy rápido y continuo si se arrastra lentamente, y además, según Schumann (2004), la traza refuerza la idea de una interpretación de una curva como un conjunto de puntos.

Mientras que la herramienta “Lugar” es caracterizada de una manera *funcional* por medio de una correspondencia uno a uno entre dos puntos $P$ y $M$ representando, al menos implícitamente, la imagen total de un conjunto de puntos para una cierta función. Lo que implica que la curva sea caracterizada de manera *global* como se entiende en este trabajo.

Bajo las condiciones descritas anteriormente, no todos los lugares geométricos pueden ser obtenidos a través del uso de la herramienta “Lugar” de Cabri. Jahn (2002) declara las restricciones:

> Las restricciones están relacionadas al tipo de transformaciones y configuraciones geométricas que son posibles al utilizar el modo de arrastre. Por ejemplo, [en la Figura 19] como el punto M es un punto libre, solo es posible trazar el lugar geométrico requerido (una circunferencia) usando la herramienta “Traza”. (p. 79)




*Se construyen tres puntos libres M, O y A. Luego, se hace pasar una recta por O y M. Luego, M′ es el simétrico de A con respecto a la recta OM. Y se activa la herramienta Traza al punto M′. Por último, se arrastra aleatoriamente el punto M y M′ describe una curva.*

*Figura 19: Visualización del lugar geométrico de M′ usando la herramienta “Traza”. Tomado de Jahn (2002, p. 79)*

Mientras que en la Figura 20, se presenta un caso en el cual, aunque la herramienta “Lugar” pueda ser utilizada, una construcción auxiliar se requiere, de tal manera que el *lugar geométrico* deseado (la mediatriz de $AB$) pueda ser generado:

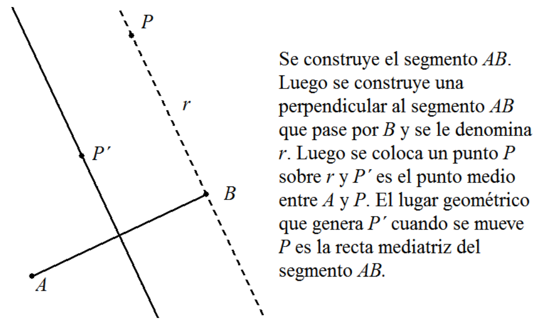



*Figura 20: Mediatriz de AB al usar la herramienta "Lugar" del Cabri.*

### *Los lugares geométricos desde la dialéctica Herramienta – Objeto.*

Para tener en cuenta la forma en que las nociones matemáticas (en este caso, las cónicas lugares geométricos) se presentan en la actividad matemática de los estudiantes, se consideró el enfoque didáctico de la dialéctica *Herramienta – Objeto*.

En el campo de la *Didáctica de las Matemáticas*, según Douady (1986, 1993), los conceptos matemáticos precisan de dos aspectos en el aprendizaje de las Matemáticas. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de *herramienta*, en tanto que sirven o ayudan para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto, aunque no sea consciente de su empleo. Tal como lo resume Peltier (1993), antes de que un *objeto matemático* o *noción* se institucionalice o se constituya en su devenir en un *saber* matemático, cumple el papel de *herramienta* en la resolución de un problema.

Por otro lado, también significa identificar las nociones y teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí donde se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de *objeto*. Al adquirir ese estatus, están *descontextualizados* y *despersonalizados* debido a la necesidad de comunicar a la comunidad científica, y por lo tanto, las nociones deben ser expresadas de la forma más general posible, para integrarse a un cuerpo de conocimiento construido.

Ahora bien, en el diseño de las situaciones didácticas que se presentan en el capítulo cuatro, se tratará de observar, al hacer el análisis de las mismas, que la noción de *lugar geométrico* en el estudio de las *cónicas* puede presentar esta *dialéctica*, tal como se señala en trabajos previos del autor (Fernández & Angulo, 2006; Fernández, 2007; 2008a; 2008b; 2009; 2010).

Por ejemplo, en Polya (1985), se plantea el siguiente problema de construcción: "*Inscribir un cuadrado en un triángulo dado, tal que dos vértices del cuadrado deben hallarse sobre la base del triángulo y los otros dos vértices del cuadrado sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo respectivamente*" (p. 42). Entonces para solucionarlo, se propone que el profesor dialogue con el estudiante, haciéndole preguntas, y lo induce a que use el *método de los lugares geométricos* para que descubra el punto *clave* y pueda solucionar el problema. Cuando se recurre al *lugar geométrico* lo hace como *herramienta*, o tal como lo afirma Schumann y Green (1997), como una *ayuda para encontrar la solución en problemas de construcción*, de tal manera que sirve para encontrar un punto buscado (el *clave*, que usualmente en este tipo de heurísticas, es un punto de intersección) para luego realizar otra construcción de la figura geométrica deseada (Ver Figura 21).

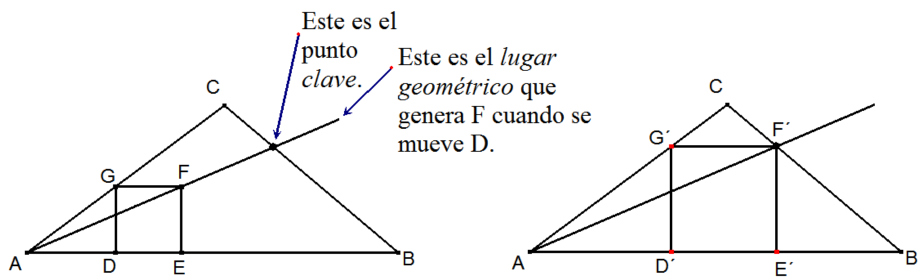



*Figura 21: El lugar geométrico que genera el cuarto vértice del cuadrado en el problema planteado por Polya (1985, p. 42).*

Ahora bien, por un lado, resulta que esta misma estrategia del uso del *lugar geométrico*, se puede hacer con problemas de construcción que involucran *cónicas*.

Pero por otro lado, existen *situaciones didácticas donde prevalece el estudio de las cónicas como lugares geométricos* (Fernández & Angulo, 2006; Fernández, 2007; 2008a; 2008b; 2009; 2010) donde es pertinente estudiar aspectos de la teoría intrínseca de estas curvas desde la *geometría analítica*, y en donde el estudio de sus propiedades geométricas, sus teoremas y demostraciones son susceptibles de ser estudiados a partir de una caracterización *puntual* (estudiando y caracterizando las propiedades de puntos individuales ó por lo menos a que encuentren puntos particulares que cumplen con la condición geométrica pedida) del *lugar geométrico* a encontrar, para luego pasar a una caracterización *global*, donde se pasa a estudiar las relaciones entre los *elementos constitutivos*[56] de la *cónica* como *lugar geométrico* pero vista como una sola y completa figura geométrica.

[56] Los elementos constitutivos de una figura son, desde la perspectiva de la visualización y tomando como referente a Duval (2001), los elementos que componen la figura y que son rasgos característicos de la misma, en la misma dimensión de representación o en dimensiones inferiores. Por ejemplo, una figura en bidimensional se verá

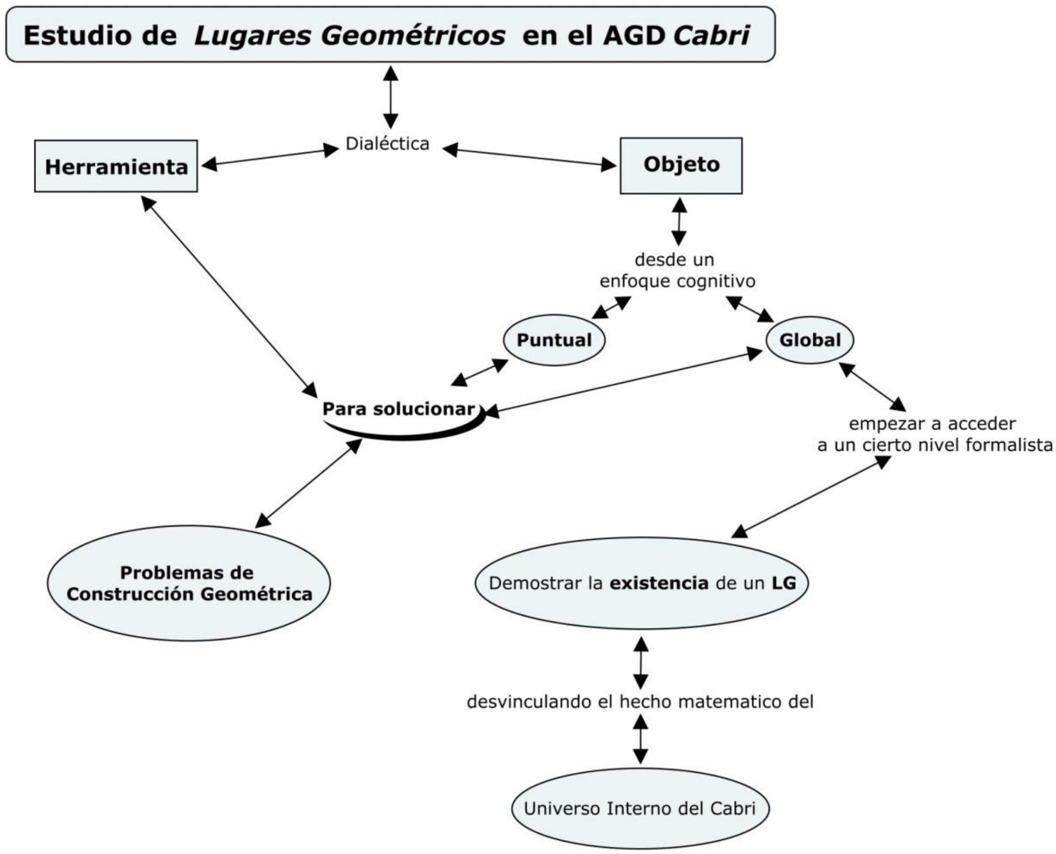
La generación de un lugar geométrico en el Cabri ciertamente tiene ventajas, sin embargo, tal como afirma Schumann y Green (1997) y Jahn (2002), se debe complementar este enfoque al poner a hacer un lugar geométrico a mano y con regla y compás, ya que estos dos ambientes involucran habilidades y experiencias muy diferentes. Además Schumann y Green (1997) afirman que estos dos ambientes son "métodos valiosos". No obstante, Schumann y Green (1997) anotan que la selección del ambiente para generar lugares geométricos depende de los objetivos didácticos que persiga el profesor. Para efectos investigativos, se optó por usar el ambiente Cabri como un *medio* que permitía abordar los objetivos y además permitía relacionarse estrechamente con el enfoque didáctico de *Herramienta – Objeto* de Douady (1986; 1993).

Por último, con el AGD Cabri, se podría acceder al estudio de los lugares geométricos desde esta dialéctica, para alcanzar un cierto nivel de *formalización* cuando se exija una demostración del lugar geométrico obtenido. De esta manera, cuando se presentan las nociones matemáticas en el ámbito escolar a través de situaciones didácticas, usando el ambiente Cabri es recomendable tener en cuenta esta dialéctica.

Los aspectos centrales de esta dialéctica se ilustran en el Esquema 8.

---

formada por figuras bidimensionales, unidimensionales (segmentos o curvas) o de dimensión cero (puntos). En el caso de las cónicas, están los puntos vértice(s), foco(s), centro, directriz (ces), eje focal, eje menor, cuerda focal, lado recto, radio focal o radio vector, diámetro.




*Esquema 8: La dialéctica Herramienta - Objeto en esta investigación.*

### 2.3.2. Una revisión curricular del tratamiento de las cónicas a partir de análisis de libros de texto universitarios.

Esta revisión se realiza con el propósito de estructurar un diseño curricular que integre la temática de las *cónicas* en cursos universitarios de Educación Superior, como los de *geometría analítica*. Este es un asunto complejo dado que no existen pautas ni directrices nacionales sobre la estructuración curricular de un curso universitario, por la autonomía que se le otorga a las instituciones de Educación Superior y en general por el poco espacio que se otorga al estudio de la *geometría* en muchas disciplinas académicas. En este sentido se optó por revisar algunos programas de curso de los primeros cursos de matemáticas de algunas universidades del Suroccidente Colombiano, específicamente en Cali y Pasto[57].

[57] En el Anexo No. 3 aparecen los programas de cursos universitarios de Cali y de Pasto. La selección de estas ciudades se debe a que son dos de las más importantes del suroccidente colombiano y porque tienen programas académicos de Licenciatura en Matemáticas, con grandes similitudes en su estructura.

Esta indagación también puede ofrecer una visión de conjunto sobre cuáles son los *saberes matemáticos* y la mirada *puntual y global* relativos al tema de las *cónicas* que se estilan en los cursos universitarios de *geometría analítica*. En consecuencia, con estas revisiones se podrá dar un panorama general de lo que se estudia sobre las *cónicas* en la Educación Superior en el Suroccidente Colombiano.

A partir de esta revisión de los programas se escogieron tres libros de texto universitarios, en los cuales circula la temática de las *cónicas*, a saber: *Geometría Analítica* de Riddle (1997), *Álgebra y Trigonometría* de Zill y Dewar (2001) y *Geometría Analítica* de Lehmann (2002). Sus portadas aparecen en la Figura 22.

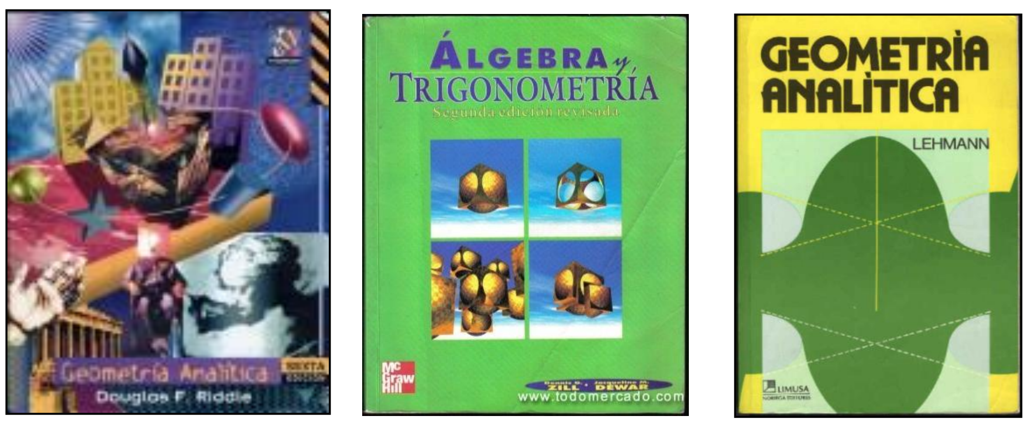



*Figura 22: Portadas de los libros seleccionados en el análisis curricular*.

Los criterios para la selección de los textos para ser analizados, en gran medida se corresponden con la presencia de consideraciones sobre la integración de las TIC o de actividades que involucran de manera explícita el uso de calculadoras gráficadoras. Tal es el caso del libro de Riddle (1997), el libro de Zill y Dewar (2001) que es utilizado en cursos para ingenieros o carreras de ciencias económicas y políticas en las universidades del suroccidente y el libro de Lehmann (2002). Este último aparece como el más citado en los programas de estudios de los cursos de *geometría* para licenciados en matemáticas, matemáticos y físicos; además es el libro que siguen los estudiantes que participaron de esta investigación.

A partir de la revisión de los programas de curso, se puede concluir que el contenido temático *cónicas* no es usual en los cursos para estudiantes que se están formando como profesionales en las facultades de ingenierías, ciencias económicas y políticas. Sin embargo este contenido se estudia al final del semestre de los cursos, en un tiempo aproximado de un mes, con una intensidad de 4 a 5 horas semanales presenciales. En general se pudo observar que este contenido temático es usual para los profesores en formación inicial de los programas de pregrado de matemáticas, física y licenciatura en matemáticas.

Ahora bien, este contenido temático parece reservarse para el final de los cursos y no hay garantía que se desarrolle completa y adecuadamente. Se evidencia que se destina poco tiempo para el estudio de la *geometría analítica*, quedando subsumido en cursos como *geometría*[58], *geometría básica*, *álgebra* y *funciones* y *matemáticas fundamentales*, ofrecidos en los primeros semestres (Ver Anexo No. 3).

Sólo para el caso de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, se incluye en su pensum académico, el curso de *geometría analítica y vectorial*, donde se da un tiempo razonable para el estudio de las *cónicas*. En estos cursos, se hace uso de AGD como el Cabri Géomètre en su versión para computadores o en las calculadoras Voyage 200 o TI-92 Plus, además del uso de la regla y el compás para el estudio de *construcciones geométricas* (Ver Anexo No. 3). En general se reconoce un uso marginal de estos instrumentos, asociado básicamente con los intereses y concepciones particulares del profesor que orienta el curso.

### *Un análisis de los libros de texto universitarios seleccionados.*

El análisis de los libros de texto se planteó con la intención de describir los *saberes matemáticos* que circulan en ellos y las propuestas de enseñanza asociadas. Inicialmente se ofrece una visión panorámica que gradualmente lleva a aspectos muy específicos del tratamiento de las *cónicas*. Estos análisis[59] se refieren fundamentalmente a los contenidos y actividades, y se organizan en tres etapas:

1. La primera analiza una *estructura temática general del libro de texto*, resumiendo los capítulos con sus respectivas temáticas en tablas.
2. La segunda presenta una *estructura temática de la unidad* o *capítulo sobre cónicas*, y centra la mirada en la parábola, la elipse y la hipérbola.
3. Y la última, esboza una mirada a las *construcciones geométricas de las cónicas como lugar geométrico*, sus *representaciones gráficas* para finalizar con la verificación del tratamiento *puntual y global* en las gráficas que aparecen en cada libro de texto.

[58] En un sentido estricto este nombre debería de ser *geometrías* porque se plantean procesos y temáticas de la geometría plana, geometría del espacio y la analítica.
[59] La propuesta de la organización y estructuración del análisis de los libros de texto es retomada de Guacaneme (2001).

### *Libro de texto Universitario No. 1: Geometría Analítica de Riddle (1997).*

En Riddle (1997) se presenta el estudio de las cónicas, explícitamente en uno de los capítulos, sin embargo es un tema transversal como se puede apreciar en la Tabla 2. Posteriormente, se explica generalmente la manera en que se aborda cada una de las temáticas, a excepción de las temáticas de transformaciones de coordenadas, coordenadas polares y ecuaciones paramétricas[60].

*Tabla 2. Contenido del libro Geometría Analítica de Riddle (1997).*

| Capítulos[61] | | Temáticas |
|---|---|---|
| I. | Geometría Analítica plana | I.7. Gráficas y Puntos de Intersección<br>I.8. Ecuación de un Lugar Geométrico |
| II. | Vectores en el plano | |
| III. | La línea recta | |
| **IV.** | **El Círculo** | IV.1. Forma Estándar[62] de la Ecuación de un Círculo<br>IV.2. Condiciones para determinar un Círculo |
| **V.** | **Secciones Cónicas** | V.1. Introducción<br>V.2. La Parábola<br>V.3. La Elipse<br>V.4. La Hipérbola |
| VI. | Transformaciones de Coordenadas | VI.1. Traslación de Secciones Cónicas<br>VI.2. Traslación de Ecuaciones Generales<br>VI.3. Rotación<br>VI.4. La Ecuación General de Segundo grado |
| VII. | Trazo de Curvas | VII.6. Trazado Directo de las Cónicas |
| VIII. | Coordenadas Polares y ecuaciones Paramétricas | VIII.5. Secciones Cónicas en Coordenadas Polares |
| IX. | Geometría Analítica de sólidos | |

El estudio de las *cónicas* inicia desde el capítulo I con las temáticas *I.7 Gráficas y Punto de Intersección*, y se presenta dos ejemplos, en uno se grafica un círculo[63] de centro el origen de coordenadas y radio 5 ($x^2 + y^2 = 25$) y en el otro se realizan y comparan las gráficas de la parábola $y = x^2$ y $y^2 = x$ y se diferencian cuáles de las dos relaciones es una *función* utilizando la prueba de la recta vertical. Se específica que al graficar en una calculadora es necesario despejar $y$ en la expresión algebraica (*función explícita*) y que se debe tener presente que las expresiones deben corresponder a funciones.

[60] No se tienen en cuenta estas temáticas en todos los libros de texto porque este estudio no se centró explícitamente en estos saberes matemáticos.

[61] Para cada libro de texto se ha escogido una manera diferente de ordenar los capítulos de manera que se distingan de un texto a otro. Los libros de texto seleccionados se dividen en unidades o capítulos, que son partes del libro dedicadas a temáticas especiales.

[62] Denominada también como la forma canónica, típica u ordinaria.

[63] En este libro de texto, no se diferencia el concepto de *círculo* y *circunferencia*, por lo que se puede inferir por el tratamiento matemático que le dan a este tema, que se trata de *circunferencia*. tal vez por la traducción al español que le hicieron a este libro. Debido a que en idioma inglés, la palabra *circle* expresa el concepto de circunferencia (curva cerrada plana equidistante del centro), mientras que *circumference* significa perímetro del círculo (la longitud de la circunferencia). Sin embargo, *disk* se asocia al concepto de círculo (superficie plana limitada por una circunferencia). También se utiliza la palabra “circle” para encerrar algo en un círculo.

Finalizada cada temática, se propone una sección llamada *problemas*, dividido generalmente en tres partes: *actividades rutinarias*, *aplicaciones* y *uso de la calculadora gráficadora*. Al final del capítulo se presentan algunos *problemas de repaso*.

En esta sección de *problema*, se solicita realizar gráficas en *lápiz* y *papel* y en *calculadora*, de varias expresiones algebraicas, para luego distinguir cuales expresiones son funciones o hallar puntos de intersección y resolver algunas preguntas referentes a diversas situaciones descritas en lenguaje cotidiano y simbólico.

Otra característica de los capítulos son las notas históricas donde se mencionan algunos de los aportes de diversos matemáticos en el desarrollo de la *geometría analítica*. Por ejemplo, en el capítulo VI se reconoce como inventor de la *geometría analítica* a Fermat. En el capítulo V se presenta a Menecmo como el descubridor de las *secciones cónicas* al tratar de resolver el problema de la *duplicación de un cubo*[64]. Se menciona a Pappus en la demostración de la propiedad del foco directriz de las secciones cónicas y a Kepler quien demostró que las orbitas de los planetas son elípticas.

En la siguiente temática *I.8 Ecuación de un Lugar Geométrico*, se propone el *segundo problema fundamental* de la *geometría analítica*. En el segundo y tercer ejemplo se hace alusión a una elipse y una parábola. En la solución se utiliza la expresión algebraica de distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y se muestra la gráfica. Entre los *problemas* propuestos se le pide al estudiante hallar la ecuación del conjunto de puntos que satisfacen las condiciones dadas, como “la suma de sus distancias a $(0,4)$ y $(0,-4)$ es $10$”.

El estudio de las cónicas continúa en el capítulo *IV: El Círculo*. La definición de círculo corresponde a la de circunferencia, se infiere que ha sido una traducción equívoca de la versión original del libro de texto en inglés. En el capítulo *V: Secciones Cónicas*, se determina a la circunferencia como un caso particular de la elipse. Para ampliar los contenidos del capítulo V, se presenta un el Esquema 9.

[64] Este problema geométrico, el problema de la duplicación del cubo, se explicita en la dimensión histórico – epistemológica de este informe.

**Cónicas:** Primero las define como curvas formadas por la intersección de un plano con un cono circular recto en el espacio.

Luego la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, (forma general) el cual $A$, $B$ y $C$ no son cero a la vez, representa a las secciones cónicas, con algunas excepciones.

**Cónicas Tradicionales**

**Cónicas Degeneradas**

**Parábola**

**Elipse**

**Hipérbola**

Por último, aparecen las cónicas tradicionales:

- Definiciones: como lugar geométrico y a partir de la excentricidad.
- Expresión algebraica a partir de la definición en relación a la representación gráfica de la cónica.
- Ejemplo de actividades del paso de la representación algebraica al gráfico.
- Aplicaciones en la ciencia.
- Sección de *problemas* o *ejercicios*, se propone con el uso de calculadora.
- Nota Histórica.

*Esquema 9: Estructura del capítulo V: Secciones Cónicas.*

En los capítulos IV y V, se definen: *circunferencia*, *parábola*, *elipse* e *hipérbola* como un lugar geométrico. En éstas, se incluyen las definiciones nominales de radio, centro, focos y directriz, según corresponda. También las cónicas se definen en términos de la excentricidad. Asociadas a cada definición de lugar geométrico se miran algunos teoremas relacionados con las expresiones algebraicas de las cónicas (general y estándar). Algunos de estos teoremas son demostrados algebraicamente, otros son utilizados en los ejemplos.

En el capítulo V, terminando cada una de las temáticas V.2., V.3. y V.4. de parábola, elipse e hipérbola se presentan algunas de sus aplicaciones en la ciencia. En el caso de la parábola se menciona su propiedad de reflexión y su utilidad en el cálculo de las órbitas de los planetas y en la construcción de puentes. En el caso de la elipse se menciona su uso en el modelo de Kepler del movimiento de los planetas y su propiedad reflectora en los espejos elípticos. Igualmente las hipérbolas se relacionan con sus propiedades reflectoras en la construcción de telescopios y con la mecánica celeste.

En los *problemas* de los capítulos IV y V, se le pide al estudiante encontrar la expresión algebraica dada la gráfica, deducir la expresión algebraica a partir del vértice, un punto, el centro, los focos, la directriz entre otros elementos de la cónica, realizar demostraciones y comprobaciones, graficar utilizando calculadora y resolver situaciones en contextos de la vida diaria o de otras disciplinas. Todas las secciones de *problemas* se dividen en este tipo de actividades.

En relación a las gráficas, en los capítulos V y VII se proponen métodos en el ambiente de *lápiz* y *papel* de cada una de las cónicas tradiciones. En la Tabla 3, se resume las características de la manera de graficar en *lápiz y papel*. Estos métodos parten de lo puntual, antes de obtener la figura de manera global.

*Tabla 3. Métodos para graficar cónicas en Lápiz y Papel.*

<table>
<tr><th>Capítulo</th><th>Parábola</th><th>Elipse</th><th>Hipérbola</th></tr>
<tr><td>V</td><td>Para realizar la gráfica se determina los extremos del lado recto y el vértice (determinación de tres puntos), trazándose la curva de manera global.</td><td>Se convierte la expresión algebraica a su forma estándar (Ej.: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$). Con estas expresiones se establecen el centro, los vértices, lo covértices, los focos y la longitud del lado recto. Con estos datos se traza la gráfica de manera global.</td><td>Se convierte la expresión a su forma estándar (Ej.: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$). Se establece el centro, sus vértices, focos, asíntotas y lados rectos. Con estos valores se traza la curva de manera global.</td></tr>
<tr><td>VII</td><td colspan="3">Se establecen el valor de $B^2 - 4AC$, cuyo valor o signo determina el tipo de cónica. Una vez que se establece el tipo de cónica, se aplica la fórmula cuadrática. Las dos expresiones que se obtienen permiten hallar la gráfica de la cónica, al sumar sus ordenadas para un determinado valor de la abscisa. El método de emplear la suma de las ordenadas en hipérbolas, elipses y parábolas tiene una desventaja, es que las dos curvas se deben trazar con bastante exactitud.</td></tr>
</table>

***Libro de texto Universitario No. 2: Álgebra y Trigonometría de Zill y Dewar (2001).***

Este libro integra diferentes conocimientos matemáticos, algunos relacionados con la Teoría de Conjuntos, Conceptos fundamentales de Álgebra, Trigonometría, Probabilidad y *Geometría Analítica*. Consta de 12 capítulos, en la Tabla 4 se presentan una panorámica general.

*Tabla 4: Contenido del libro Álgebra y Trigonometría de Zill y Dewar (2001).*

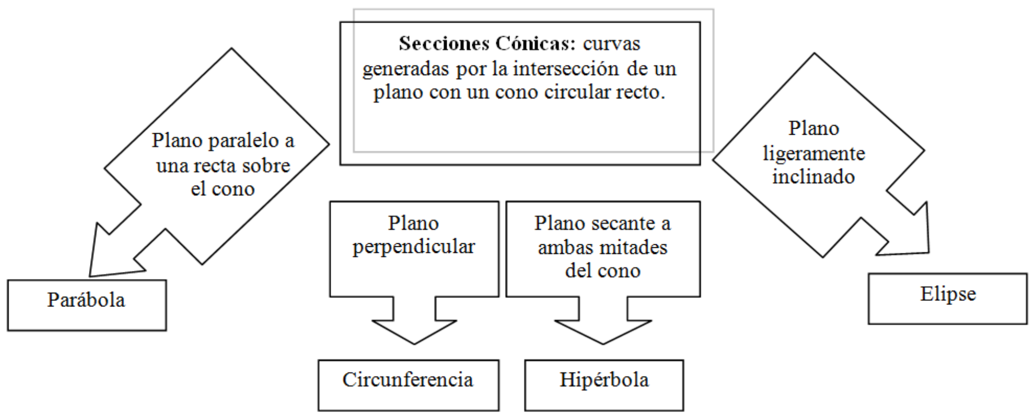
| CAPÍTULOS | TEMÁTICAS |
|---|---|
| 0. Lógica y Conjuntos. | |
| 1. Conceptos fundamentales del Álgebra. | |
| 2. Ecuaciones e Inecuaciones. | |
| **3. Funciones y Gráficas.** | 3.2. Fórmula de la distancia y de la circunferencia. |
| 4. Funciones Polinomiales y Racionales. | |
| 5. Funciones Exponenciales y Logarítmicas. | |
| 6. Trigonometría del Triángulo. | |
| 7. Trigonometría Analítica. | |
| 8. Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones. | |
| 9. Matrices. | |
| **10. Temas de Geometría Analítica.** | 10.1. La Parábola.<br>10.2. La Elipse.<br>10.3. La Hipérbola.<br>10.4. Traslación y Rotación de Ejes.<br>10.5. Coordenadas polares.<br>10.6. Ecuaciones polares de las secciones cónicas.<br>10.7. Vectores. |
| 11. Sucesiones, Series y Probabilidad. | |

En la temática 3.2 se halla la expresión estándar de la circunferencia utilizando la fórmula de distancia teniendo en cuenta la definición de circunferencia como *lugar geométrico*. En los ejemplos que se presentan en este libro de texto, se halla el centro y el radio de la circunferencia dada la forma estándar o general y la ecuación de la circunferencia conociendo el centro, el radio o un punto de la circunferencia.

En la sección de *ejercicios* de esta temática, proponen realizar actividades similares a los ejemplos, como hallar el centro y el radio dado la expresión algebraica, demostrar que la ecuación dada representa una circunferencia, hallar la expresión algebraica de la circunferencia dado un punto, el centro, el radio, los extremos del diámetro, rectas tangentes y realizar la gráfica de dada una relación (igualdades y desigualdades).

En cuanto a la iniciación del capítulo 10, muestra cada una de las temáticas a tratar y una nota histórica corta sobre Hypatia. En éste apartado, se resalta el tratado de esta matemática griega que escribió un libro sobre las *cónicas* titulado "*On the Conics of Apollonius*" y que popularizó el trabajo de Apolonio y repercutió en los trabajos de Galileo y Kepler.

En el capítulo 10 se determinan las *secciones cónicas* en relación a la inclinación de un plano que intersecta un cono circular (Ver Esquema 10). Aunque se dice que la circunferencia es una cónica, se inicia con el estudio de la parábola (Ver Tabla 4, temática 3). Cabe señalar que aunque las definiciones de las cónicas se dan en términos de *lugares geométricos*, en la introducción se definen aludiendo a los diferentes cortes de un plano con un cono desde un punto de vista intuitivo.




*Esquema 10: Secciones cónicas en Álgebra y Trigonometría de Zill y Dewar (2001).*

En el capítulo 10, se recuerda que las parábolas son las gráficas de la función cuadrática en relación a su forma desarrollada $y = ax^2 + bx + c$ (vinculo presentado en la temática 4.1) y se definen como *lugar geométrico*. En la gráfica de una parábola se determina el eje focal o de simetría, el vértice, la directriz y el foco; esta gráfica a diferencia de las otras se distingue porque el eje de simetría no es ni horizontal o vertical. Luego para deducir la ecuación de la parábola, se hace alusión a la fórmula de distancia entre dos puntos y dado que el foco se ubica en $(0, p)$, se llega a la obtención de la expresión $x^2 = 4py$, esta forma estándar es equivalente a la forma desarrollada de la parábola. Los ejemplos buscan obtener el foco y la directriz al dar la expresión algebraica o por el contrario, hallar la expresión algebraica dada el foco y la directriz. Las parábolas de los ejemplos tienen como eje focal al eje $y$.

En las explicaciones se muestra que la parábola es simétrica respecto a su eje focal. También se introducen las parábolas cuya ecuación es $y^2 = 4px$. En una tabla se resumen las características de estos dos tipos de parábolas. Se dan cuatro ejemplos de parábolas con el vértice en el eje de coordenadas.

Posteriormente se introducen las parábolas con vértice $(h, k)$, cuando $h$ y $k$ son distintas de 0. Se dice que estas parábolas son el resultado de traslaciones verticales y horizontales. También se presenta una tabla que resumen todos los posibles casos de parábolas, sus características en posición estándar o prototípica y su representación algebraica. De la misma manera, cuando el vértice es $(h, k)$, se presentan otros cuatro ejemplos. Finalizando esta temática se muestran las aplicaciones de las parábolas en óptica, espejos, en el diseño de puentes y la trayectoria de proyectiles.

En los *ejercicios* propuestos, se solicitan diversos tipos de actividades que se pueden agrupar así: hallar el foco, el vértice, el eje de simetría y la directriz de las parábolas dada su expresión algebraica, encontrar la forma estándar de una parábola dada algunas condiciones como el foco o puntos de la parábola y resolver algunas situaciones en contextos de las matemáticas, la física o de la vida diaria en donde se requiera para su solución una parábola.

En cuanto a la realización de la gráfica de la parábola, dada la expresión algebraica, los ejemplos muestran que la ecuación se escribe en la forma estándar para luego determinar el vértice, el eje de simetría, el foco y dos puntos, cada uno en una de las dos ramas de la parábola, con tres puntos de la parábola se realizan la gráfica, este procedimiento se parte de una mirada *puntual* para luego generar la *globalidad* de la figura. De la misma manera se realiza la gráfica de la elipse y de la hipérbola, dada la representación simbólica, se escribe en la forma estándar, en el caso de la elipse se dibujan los vértices para luego trazar la figura de manera *global* mientras que para la hipérbola se halla los vértices, el eje focal y las asíntotas antes de trazar la figura de manera *global*. En el trazo de las cónicas se tiene presente su propiedad de simetría.

En relación a las temáticas de la elipse (temática 10.2) y la hipérbola (temática 10.3), éstas se presentan de la misma manera que la parábola. Cada una de ellas se define en términos de *lugares geométricos*, se deduce la ecuación estándar con los focos sobre el eje $x$ y simétrica al eje $y$, se hace uso del centro de la elipse y de la hipérbola en el origen de coordenadas, y se utiliza la fórmula de distancia. En este caso la expresión de la elipse es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y en la hipérbola la expresión es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Posteriormente se introducen las expresiones $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ para la elipse y $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ para la hipérbola, en el caso de que los focos estén sobre el eje $y$. Las características de estas elipses e hipérbolas se resumen en una tabla.

A partir de una gráfica se determinan los elementos de cada una de las cónicas, en el caso de la elipse se presentan el eje mayor, el eje menor, los focos, vértices (los cuatro vértices) y el centro; en el caso de la hipérbola se presentan los focos, el centro, los vértices, el eje transverso, el eje conjugado y las asíntotas. Se determina la relación de $a, b$ $y$ $c$ en los elementos de la elipse y la hipérbola. Para cada caso en el que la elipse o la hipérbola están centradas en el origen de coordenadas, se presentan cuatro ejemplos. Así mismo, se muestran para cada una de estas cónicas, unas notas que indican los cambios en la expresión algebraica.

Luego, por cada caso, elipse o hipérbola, se estudia cuando tienen el centro en $(h, k)$. Se determinan las ecuaciones $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ o $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ para la elipse y las ecuaciones $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ para la hipérbola. La deducción de las ecuaciones no se explica.

Se finalizan las temáticas 10.2 y 10.3 con las explicaciones de algunas aplicaciones de la elipse y la hipérbola a la astronomía y la acústica. En cada una de las temáticas, los ejemplos son similares a las actividades propuestas en la sección *ejercicios*.

En la temáticas 10.4, se consideran las traslaciones y rotaciones con centro $(h, k)$, teniendo en cuenta un nuevo sistema de coordenadas, redefiniendo la expresión algebraica de las *cónicas* en relación a ese sistema, para luego terminar expresando la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sin demostrarla que su gráfica corresponde con tal ecuación y sin especificar las constantes $A$, $C$, $D$, $E$, y $F$. La constante $B$, la explican cuando se elimina el término $xy$ mediante una rotación de ejes a través de un ángulo.

### *Libro de texto Universitario No. 3: Geometría Analítica de Lehmann (2002).*

Este libro se divide en dos grandes partes: la geometría del plano y la del espacio. El desglose de los temas en relación a estas grandes temáticas, y en particular a las cónicas, se presenta en la Tabla 5.

*Tabla 5. Contenido del libro Geometría Analítica de Lehmann (2002).*

| **Capítulo** | | **Temáticas/Artículos[65]** |
|---|---|---|
| **GEOMETRÍA PLANA** | Primer Capítulo:<br>Sistemas de Coordenadas | 11. Demostración de teoremas geométrico por el método analítico |
| | **Segundo Capítulo:<br>Gráficas de una Ecuación y Lugares Geométricos** | 13. Dos problemas fundamentales de la geometría analítica<br>14. Primer problema fundamental. gráfica de una ecuación<br>22. Segundo problema fundamental<br>23. Ecuación de un lugar geométrico |
| | Tercer Capítulo: La línea recta | |
| | **Cuarto Capítulo:<br>Ecuación de la circunferencia** | 39. Ecuación de una circunferencia, forma ordinaria.<br>40. Forma general de la circunferencia<br>41. Determinación de una circunferencia sujeta a tres condiciones dadas<br>44. Tangente a una curva<br>45. Tangente a una circunferencia<br>46. Teoremas y problemas de lugares geométricos |

[65] Los artículos son divisiones en cada uno de los capítulos como las temáticas y van enumerados de manera secuencial a lo largo de todo el libro de texto.

| Capítulo | | Temáticas/Artículos[65] |
|---|---|---|
| | | relativos a la circunferencia |
| | **Quinto Capítulo: Transformación de coordenadas** | 50. Traslación de los ejes coordenados<br>51. Rotación de los ejes coordenados |
| | **Sexto Capítulo: La Parábola** | 54. Definiciones<br>55. Ecuación de la parábola de vértice en el origen y un eje coordenada<br>56. Ecuación de una parábola de vértice $(h, k)$ y eje paralelo a un eje coordenado.<br>57. Ecuación de la tangente a una parábola<br>58. La función cuadrática<br>59. Algunas aplicaciones de la parábola |
| | **Séptimo Capítulo: La Elipse** | 60. Definiciones<br>61. Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse.<br>62. Ecuación de la elipse de centro $(h, k)$ y ejes paralelos a los coordenados<br>63. Propiedades de la elipse |
| | **Octavo Capítulo: La hipérbola** | 64. Definiciones<br>65. Primera ecuación ordinaria de la hipérbola<br>66. Asíntotas de la hipérbola<br>67. Hipérbola equilátera o rectangular<br>68. Hipérbolas conjugadas<br>69. Segunda ecuación ordinaria de la hipérbola<br>70. Propiedades de la hipérbola<br>71. Primer resumen relativo a las secciones cónicas |
| | **Noveno Capítulo: Ecuación General de Segundo Grado** | 77. Sistemas de cónicas<br>78. Secciones planas de un cono circular recto |
| | Décimo Capítulo: Coordenadas Polares | |
| | Undécimo Capítulo: Ecuaciones Paramétricas | |
| | Duodécimo Capítulo: Curvas planas de grado superior | |
| **GEOMETRIA ANALÍTICA DEL ESPACIO** | Decimotercero Capítulo: El punto en el espacio | |
| | Decimocuarto Capítulo: El plano | |
| | Decimoquinto Capítulo: La recta en el espacio | |

| Capítulo | | Temáticas/Artículos[65] |
|---|---|---|
| | Decimosexto Capítulo: Superficies | |
| | Decimoséptimo Capítulo: Curvas en el espacio | |

Dentro de estas temáticas el estudio de las cónicas inicia con la noción de lugar geométrico en el segundo capítulo. En este se especifican dos problemas fundamentales en la *geometría analítica*:

- Dada una ecuación interpretarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.
- Dada una figura geométrica, o la condición que debe cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Para mirar el primer problema se determina qué es una gráfica de una ecuación o lugar geométrico, los interceptos con los ejes, la simetría, la extensión de una curva y las asíntotas. Con estos datos se procede a explicar la construcción de curvas. En las construcciones se presenta un caso especial de ecuaciones, las factorizables, que reducirían algunos pasos en la construcción. Como tema final de este capítulo se presentan las intersecciones de curvas. En algunos de los *ejercicios* se espera que los estudiantes realicen la gráfica de la ecuación, teniendo en cuenta las intersecciones, simetría y extensión.

El segundo problema se aborda teniendo en cuenta la definición de la curva. Se dice que frecuentemente es un *lugar geométrico* descrito por un punto que se mueve siguiendo una ley específica. Para hallar la ecuación de un lugar geométrico se define que “la ecuación $f(x, y) = 0$, cuyas soluciones reales para los valores correspondientes de $x$ y $y$ son todas las coordenadas de aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos, que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico” (Lehmann, 2002, p. 51). A partir de esta definición, se presenta el procedimiento para obtener la ecuación de un lugar geométrico. Este procedimiento se aplica a dos ejemplos. Los *ejercicios* que se proponen son hallar la ecuación del lugar geométrico y construir la curva.

El cuarto capítulo está estrechamente relacionado con las cónicas, particularmente empieza con la circunferencia. Ésta se define como lugar geométrico y se determina la ecuación a partir de un teorema, que se demuestra previamente a la presentación de los teoremas. En los *ejercicios*, se solicita hallar la ecuación de la circunferencia según los datos dados.

En una de las explicaciones se presenta el desarrollo de la ecuación ordinaria de la circunferencia para obtener la ecuación general, una de las preguntas se relaciona con determinar cuando la ecuación general corresponde a una circunferencia. Se propone completar el cuadrado en la ecuación general y analizar la expresión para determinar cuándo es una circunferencia. Algunos de los *ejercicios* proponen hallar la ecuación ordinaria de una circunferencia dada una ecuación general. Si es una circunferencia se solicita realizar la gráfica y hallar su centro y su radio. Otros *ejercicios* solicitan hallar la ecuación, radio y centro de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, demostrar que dos circunferencias son tangentes o concéntricas.

En otra de las temáticas del cuarto capítulo se demuestran dos teoremas relativos a la circunferencia, el primero sobre el ángulo inscrito en una semicircunferencia y en el segundo sobre el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Para resolverlos se recomienda remitirse al artículo 11 (demostración de teoremas por el método analítico) y 23 (ecuación de un lugar geométrico). Los artículos en este libro son las partes en que se dividen cada uno de los capítulos. La numeración de los artículos inicia en el primer capítulo y finaliza en el último capítulo.

En el capítulo sexto se define la parábola como una curva plana y como un lugar geométrico y no se hace referencia hasta ese momento de los cortes de un plano con un cono recto. Con la definición se determina la ecuación de la parábola, primero se presentan las parábolas con vértice en el origen y posteriormente las que tienen el vértice en $(h, k)$ y el eje de simetría paralelo a un eje coordenado. Algunos *ejercicios* son hallar el foco, la ecuación de la directriz, la longitud del lado recto para la ecuación dada, realizar la gráfica de la parábola y discutir el lugar geométrico correspondiente.

En el artículo 57 sobre la ecuación de la tangente a una parábola, se tiene en cuenta el artículo 44 sobre tangencia junto con la expresión estándar de la parábola y la ecuación implícita de la línea recta. A partir de la deducción algebraica de la ecuación se plantea el siguiente teorema: “la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva tiene por ecuación $y_1y = 2p(x + x_1)$” (Lehmann, 2002, p. 162). También se presenta la ecuación de la recta tangente dada la pendiente. En los *ejercicios* se solicita además de realizar la gráfica, que deben hallar la ecuación de la tangente para la parábola dado el punto de contacto o la pendiente. En otros *ejercicios* se solicita hallar el ángulo formado por las rectas que interceptan a la parábola o dos parábolas.

En el artículo 58 sobre la función cuadrática y su relación con la parábola, se recomienda estudiar las propiedades analíticas de la función cuadrática a partir de las propiedades geométricas de la parábola. Al completar el cuadrado en la ecuación

$y = ax^2 - bx - c$ se deduce la ecuación estándar o clásica de la parábola es $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2}{4a} - c)$. De esta expresión se deduce el vértice y se determina que todas las parábolas de la expresión estándar tendrían su eje de simetría paralelo al eje $y$.

Se aclara que si $a > 0$ entonces la parábola abre hacia arriba y su vértice sería el punto mínimo y si $a < 0$ entonces la parábola abre hacia abajo y su vértice sería el punto máximo. Se analiza además cuando los valores de la función son positivos o negativos teniendo en cuenta el valor de $a$ y los puntos de corte con el eje $x$. En el ejemplo se solita hallar el valor máximo dado la expresión de la parábola. En los *ejercicios* que se proponen, se solicita dibujar la parábola además de hallar el máximo o mínimo de la función cuadrática, hallar los valores de $x$ para los cuales la desigualdad cuadrática es verdadera, la función cuadrática es positiva, negativa o cero; también se pide hallar los valores de $x$ dado los valores de los ceros de la función cuadrática y hallar la función cuadrática que permite encontrar la solución a una situación.

Se finaliza el capítulo sexto con el artículo 59, en donde se presentan algunas aplicaciones de la parábola como arco parabólico y la propiedad focal. Dentro de los usos se explican las propiedades de la parábola en la ley de reflexión.

El capítulo séptimo trata sobre elipses y el capítulo octavo sobre hipérbola. Al igual que en el capítulo sexto sobre parábola se inicia con la definición de estas curvas como lugar geométrico, en esta definición se determina un punto *dinámico* que describe una curva. En estas explicaciones se determinan los focos, los vértices, los ejes de simetría, el eje normal, la cuerda, la cuerda focal, el lado recto, el diámetro, la excentricidad entre otros aspectos. Estas definiciones se acompañan de la gráfica de la elipse y la hipérbola. De la definición se deduce las ecuaciones estándares o clásicas de la hipérbola y la elipse simétricas a los ejes coordenados y al origen. En algunos de los *ejercicios* se solicita dibujar la figura, hallar las coordenadas de los vértices y los focos, las longitudes del eje transverso y conjugado, la excentricidad y la longitud del cada lado recto de una hipérbola, hallar la ecuación y la excentricidad de una hipérbola dado sus vértices y focos, o su centro, eje transverso, foco y excentricidad.

También se considera el estudio de la elipse y la hipérbola con centro en $(h, k)$ y ejes paralelos a los ejes coordenados. En los *ejercicios* propuestos se les solicita deducir la propiedad intrínseca de la elipse, hallar la ecuación de la elipse dados algunos datos, discutir sobre la ecuación general o estándar, hallar la ecuación estándar de la elipse para centro $(h, k)$ y ejes paralelos a los ejes coordenados y las coordenadas del centro, el vértice y los focos. En cada uno de los ejercicios se solicita dibujar la gráfica. En el caso de la hipérbola se presentan las ecuaciones para hallar las rectas asíntotas y se analiza las hipérbolas equiláteras y las conjugadas.

En el artículo 63 se presentan las propiedades de la elipse relacionadas con sus tangentes y su aplicación en la construcción de cámaras secretas (superficies de reflexión). Brevemente se mencionan otras aplicaciones en arcos elípticos y el recorrido de los planetas alrededor del sol. Algunos de los *ejercicios* finales solicitan demostrar algunos teoremas y hallar las ecuaciones de las tangentes a una elipse.

Al igual que en la elipse, se presentan las propiedades de las hipérbolas relacionadas con las tangentes y la propiedad focal, en ninguno de las dos propiedades se menciona sus utilidades. Algunos problemas solicitan demostrar, hallar las ecuaciones para la tangente, la normal, las longitudes de la normal, la tangente, la normal, subtangente y subnormal para una hipérbola dada, hallar el ángulo formado por tangentes a una hipérbola y demostrar que una elipse y una hipérbola son ortogonales.

En el artículo 71 se resumen todo lo relacionado con la parábola, la elipse y la hipérbola. Se dice que son secciones cónicas o cónicas, las que satisfacen la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y representan un lugar geométrico. Se incluyen en la descripción las cónicas degeneradas o las formas límite de las cónicas. Se específica que la circunferencia es un caso especial de la elipse. Se incluye una tabla que resume lo más importante de los tres capítulos, se aclara que es necesario añadir otros datos como las ecuaciones de las tangentes de las cónicas (Ver Tabla 6).

En el capítulo noveno de ecuación general de segundo grado, en el artículo 77 sistemas de cónicas se analizan los valores de cada de los coeficientes la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para que sea una cónica. Como caso particular se presentan las cónicas homofocales. El artículo 78 es sobre secciones planas de un cono circular recto, es donde por primera vez se designa a la parábola, la hipérbola y la elipse como secciones cónicas. Se muestran los tres casos en que el plano que intercepta al cono forma la elipse, la parábola y la hipérbola.

*Tabla 6: Resumen de los capítulos VI, VII y VIII del libro de Lehmann (2002)*

**PRIMER RESUMEN RELATIVO A LAS CÓNICAS**

| Curva | | Parábola | Elipse | Hipérbola |
|---|---|---|---|---|
| Definición | | Art. 54 | Art. 60 | Art. 64 |
| Constantes | | $p$ = distancia del vértice al foco = distancia del vértice a la directriz<br>Foco sobre el eje | $2a$ = longitud del eje mayor<br>$2b$ = longitud del eje menor<br>$2c$ = distancia entre los focos<br>$c^2 = a^2 - b^2$<br>Focos sobre el eje mayor | $2a$ = longitud del eje transverso<br>$2b$ = longitud del eje conjugado<br>$2c$ = distancia entre los focos<br>$c^2 = a^2 + b^2$<br>Focos sobre el eje transverso |
| Primera ecuación ordinaria<br>Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el origen | Eje focal coincidente con el eje $X$ | $y^2 = 4px$<br>Directriz: $x = -p$; foco $(p, 0)$<br>(Art. 55, teorema 1) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>Focos $(c, 0)$, $(-c, 0)$<br>(Art. 61, teorema 1) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$<br>Focos $(c, 0)$, $(-c, 0)$<br>(Art. 65, teorema 1) |
| | Eje focal coincidente con el eje $Y$ | $x^2 = 4py$<br>Directriz: $y = -p$; foco $(0, p)$<br>(Art. 55, teorema 1) | $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$<br>Focos $(0, c)$, $(0, -c)$<br>(Art. 61, teorema 1) | $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$<br>Focos $(0, c)$, $(0, -c)$<br>(Art. 65, teorema 1) |
| Segunda ecuación ordinaria<br>Vértice de la parábola y centros de la elipse e hipérbola en el punto $(h, k)$ | Eje focal paralelo al eje $X$ | $(y-k)^2 = 4p(x-h)$<br>(Art. 56, teorema 2) | $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$<br>(Art. 62, teorema 2) | $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$<br>(Art. 69, teorema 3) |
| | Eje focal paralelo al eje $Y$ | $(x-h)^2 = 4p(y-k)$<br>(Art. 56, teorema 2) | $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$<br>(Art. 62, teorema 2) | $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$<br>(Art. 69, teorema 3) |
| Longitud del lado recto | | $4p$ | $\frac{2b^2}{a}$ | $\frac{2b^2}{a}$ |
| Excentricidad | | $e = 1$ | $e = \frac{c}{a} < 1$<br>(Para la circunferencia, $e = 0$) | $e = \frac{c}{a} > 1$ |
| Ecuación general de la cónica careciendo del término en $xy$:<br>$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ | | Ya sea $A = 0$ ó $C = 0$<br>(Art. 56, teorema 3) | $A$ y $C$ del mismo signo<br>(Art. 62, teorema 3)<br>Para la circunferencia, $A = C$<br>(Art. 40, teorema 2) | $A$ y $C$ de signo distinto<br>(Art. 69, teorema 4) |
| Casos excepcionales | | Dos rectas coincidentes; dos rectas paralelas<br>(Ningún lugar geométrico)<br>(Art. 56, teorema 3) | Punto<br>(Ningún lugar geométrico)<br>(Art. 62, teorema 3) | Dos rectas que se cortan<br>(Art. 69, teorema 4) |

### *Comparación y análisis de los tres libros de texto universitarios.*

Una de las características del libro de texto de Riddle (1997) es la posibilidad de integrar el uso de calculadoras gráficadoras. A diferencia de los otros libros de texto que sólo admiten procedimientos de lápiz y papel, en éste, todas las secciones de *problemas* proponen actividades con el uso de la calculadora. De esta manera, en este libro de texto, las TIC empiezan a ser integradas a la actividad matemática, sin embargo, es uno de los pocos libros de texto que tiene en cuenta su uso.

En los capítulos de transformación de coordenadas se reconoce que algunas gráficas hechas en el ambiente de lápiz y papel pueden ser engorrosas para los estudiantes, porque los procesos son largos y se recomienda el uso de gráficadores electrónicos. Se reconoce la importancia de la utilización de las calculadoras y el lápiz y papel, otorgándosele a cada una actividades específicas. El libro de texto se caracteriza por darle importancia a las técnicas para elaborar gráficas de curvas.

Los libros de texto de Riddle (1997) y de Lehmann (2002) se caracterizan por la secuencialidad de las temáticas. En la mayoría de los capítulos se retoman lo presentado en los capítulos anteriores. En el caso de las cónicas vemos que desde las primeras temáticas se estudian y aunque se amplía su estudio en un capítulo o en varios como en el libro de texto de Lehmann (2002), siguen estando presentes a lo largo de todos los capítulos.

En cuanto al libro de texto de Zill y Dewar (2001), se observa que en un solo capítulo se aborda una gran cantidad de temáticas que en los libros de texto de Riddle (1997) y de Lehmann (2002) se presenta en varios capítulos. El libro de texto de Zill y Dewar (2001) a pesar de no ser especializado en *geometría analítica* le permite al estudiante tener una visión panorámica de las cónicas, con muy poca profundidad, con respecto a los libros de texto de Riddle (1997) y de Lehmann (2002).

El libro de texto de Lehmann (2002) a diferencia de los dos anteriores enfatiza más sobre la noción de lugar geométrico y le da un carácter *dinámico* a sus definiciones, propicias para trabajarlo en AGD. En la sección de *ejercicios,* al final de cada capítulo, existen preguntas relacionadas con la demostración de teoremas, en el sentido de demostrarlas siguiendo el procedimiento del método analítico: se emplea un sistema de coordenadas; y se coloca la figura en éste, en la posición más simple, es decir, en un posición tal que las coordenadas de los puntos de la figura simplifiquen lo más posible los cálculos algebraicos; y por último, se procede algebraicamente dependiendo de las propiedades particulares que se van a demostrar. Al final del libro de texto, se presentan las respuestas de algunas preguntas, a excepción de las demostraciones.

Las actividades propuestas en los tres libros de texto, en las denominadas secciones llamadas *problemas* o *ejercicios* se observa un vasto trabajo desde lo algebraico, aunque dichos procedimientos se acompañen de la elaboración de la gráfica de la cónica. En estos libros de texto, son *inexistentes* las actividades propuestas que se vinculan con la *construcción geométrica* de lugares geométricos, a excepción del libro de texto de Lehmann (2002) que presenta unos dos casos.

Si bien todos estos libros de texto expresan las definiciones en términos de *lugar geométrico*, no se explicitan las *construcciones geométricas exactas*[66]. Las elaboraciones conceptuales que se presentan son eminentemente algebraicas, dados los *elementos constitutivos* de la cónica (focos, directrices, vértices, etc.), con el fin de deducir su ecuación. Pero no hacen referencia a lo que se entiende por *construcciones geométricas*. Y en cada una de las gráficas, se señalan las partes constitutivas de las cónicas tales como eje focal, vértices, focos, directrices, de tal forma que se pueda obtener las ecuaciones que las representan. En algunos casos las gráficas aluden a algunos aspectos transformacionales de manera estática: simetrías, rotaciones, traslaciones de las cónicas. En todos los métodos de graficación se toman algunos puntos relevantes en relación a las características de las cónicas como su simetría, antes de generar la figura de manera *global*.

### 2.3.3. La Teoría de las Situaciones Didácticas como referente para el diseño.

A continuación se expondrán las principales ideas de esta teoría que contribuyen orientar el diseño de secuencias de enseñanza. Para examinar el papel de los AGD en la enseñanza de las matemáticas se presenta algunas consideraciones didácticas del Ambiente Cabri como *medio* para el diseño de situaciones a-didácticas y la manera en que el profesor debe gestionar una clase de *geometría* con el uso de la tecnología informática desde un punto de vista didáctico.

La *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Brousseau (1986; 1997; 2007) pretende estudiar, modelizar y contrastar empíricamente los *fenómenos didácticos* que ocurren cuando un profesor se propone enseñar una noción, teorema o procedimiento a sus estudiantes. Básicamente, Brousseau fundó esta teoría desde el enfoque de *aprendizaje por adaptación* a partir de la teoría de Piaget (Siguán & Blanck, 1987) en la cual el sujeto (en este caso el estudiante) obtiene un conocimiento a partir de las interacciones con un *medio* sin la intervención directa de un profesor.

[66] Las *construcciones geométricas exactas* se refieren a aquellas que se realizan siguiendo procedimientos estandarizados de la geometría euclidiana

> El alumno aprende adaptándose a un *medio* que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este *saber*, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau, 2007, p. 30)

En esta teoría, se presenta la distinción y sus relaciones entre *situación didáctica* y *situación* a-*didáctica* y la manera en que interviene el *medio* en el *aprendizaje por adaptación*.

### *Situación didáctica, Situación a-didáctica, Contrato Didáctico y Fases.*

En la TSD, la *situación didáctica* se refiere al conjunto de interrelaciones entre los tres componentes del sistema didáctico: un *saber* (a enseñar), un profesor (que desea enseñar ese *saber*) y un alumno (que desea aprender ese *saber*). En ésta, se manifiesta directa o indirectamente una voluntad de enseñar, es decir, es una situación de clase, que es construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un *saber* determinado. Dentro de esta dinámica se incluye otra dimensión: la *situación a-didáctica*.

En la *situación a-didáctica* el profesor prepara tanto un problema o una secuencia a los estudiantes en la que se fomenta el *aprendizaje por adaptación*, así como unas condiciones a través de un *medio*. Una *situación a-didáctica* está desprovista de intencionalidad didáctica. En efecto, es el estudiante quien construye el conocimiento sólo si se interesa personalmente en solucionar el problema propuesto. De esta manera, la motivación del estudiante es generada por el mismo problema y no por las acciones e intenciones explicitas del profesor por enseñar.

Así mismo, en una *situación a-didáctica* se da una interacción entre el *sujeto* y un *medio* para resolver un problema. Como el *medio* es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno. Es decir, con el *medio* se va a realizar unas acciones, que produzca unas retroacciones adecuadas (que puedan ser interpretadas por los estudiantes para validar sus acciones). En otras palabras, el estudiante se verá en una *micro-comunidad científica* resolviendo *situaciones problema* sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el *saber* adquirido.

Al respecto de lo que provoca las *situaciones problema* en esta teoría, Obando y Munera (2003) afirman lo siguiente:

> La situación problema debe permitir al estudiante desplegar su *actividad matemática* […] la situación problema debe tener, como parte de los

> elementos que la constituyen, dispositivos que permitan a los alumnos desarrollar, de manera autónoma, procesos de exploración tales como la *formulación de hipótesis*, su *validación*, y si es del caso, su *reformulación*. Este trabajo permite la *elaboración conceptual de los objetos matemáticos presentes en la situación*. (p. 186)

Según Chamorro (2003; 2005), para que una situación sea *a-didáctica*, se deben cumplir las siguientes condiciones:

> 1. El alumno debe poder entrever una respuesta al problema planteado (debe tener los conocimientos que le permiten comprender cuál es el desafío de la situación).
> 2. La estrategia de base debe mostrarse rápidamente como insuficiente (de lo contrario no se produciría una evolución hacia la estrategia óptima que se busca).
> 3. Debe existir un *medio* de validación de las estrategias (la propia situación, sin la intervención del maestro, debe decir al alumno si su estrategia es o no válida para resolver el problema propuesto).
> 4. Debe existir incertidumbre, por parte del alumno, en las decisiones a tomar (el alumno no sabe de antemano si el procedimiento que va a usar dará resultado, tiene que probarlo para saberlo).
> 5. El *medio* debe permitir retroacciones (la información sobre el resultado de sus acciones debe venir de la propia situación, no del profesor).
> 6. La situación debe ser repetible (debe poder repetirse varias veces sin que se desvele cuál es procedimiento adecuado, de lo contrario el alumno estaría obligado a aprender a la primera, no habría espacio para el error).
> 7. El conocimiento buscado debe aparecer como el necesario para pasar de la estrategia de base a la estrategia óptima [estrategia ganadora]. (Chamorro 2003, pp. 74-75)

Si se desea comprender el funcionamiento de una clase de matemáticas, no basta con observar lo que hace el profesor y los estudiantes; tampoco es suficiente describir los hechos didácticos que utilizan (los unos para estudiar, el otro para dirigir su estudio) ni el dominio que muestran de las mismas. Al respecto Chevallard, Bosch y Gascón (1997) afirman lo siguiente: “Para entender los hechos didácticos que pueden observarse en una clase de matemáticas, es preciso interrogarse sobre la estudiabilidad de la cuestión matemática planteada y sobre las restricciones que emanan del *contrato didáctico*.” (p. 195). En este sentido estos mismos autores declaran que el profesor debe tener en cuenta que el *saber* matemático está obligado a adaptarlo, a modificarlo, a recortarlo, a reorganizarlo. A este conjunto de transformaciones que sufre el *saber* a efectos de ser enseñado, se le denomina en

Didáctica de las Matemáticas, *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1997), de tal manera que emerja un *conocimiento*[67] entre los estudiantes.

Con respecto a esto último, Chamorro (2005) señala:

> Este concepto [la Transposición Didáctica] reenvía pues, de forma inmediata, al pasa del saber-sabio[[68]] al saber enseñado, lo que indica ya la necesidad de ejercer una vigilancia epistemológica sobre la distancia, necesaria, entre estos dos saberes, vigilancia que corresponde a la Didáctica de las Matemáticas. (p. 82)

Pero dado que al interior de una clase se dan múltiples relaciones entre los actores del sistema didáctico, este conjunto de relaciones determina, de manera implícita en la mayoría de las veces, una serie de reglas que determinan las obligaciones de cada una de las partes implicadas en el proceso. Estas relaciones giran alrededor de dos hechos fundamentales: el maestro debe proponer al estudiante las situaciones apropiadas para que éste al trabajar con ellas aprenda el conocimiento que se le quiere enseñar, pero a la vez el estudiante debe asumir su responsabilidad de trabajar en la propuesta que le realiza su profesor. Dichas reglas determinan el llamado *contrato didáctico*. Claro está que estas reglas no son un contrato en el sentido estricto de la palabra ya que sus cláusulas algunas veces permanecen implícitas, y no hay manera de que éstas se hagan explícitas. Resumiendo, el *contrato didáctico* comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente.

Según Chevallard, Bosch y Gascón (1997), uno de los principios de la *Didáctica de las Matemáticas* es pretender buscar y explicar *fenómenos didácticos* que aparecen cada vez que alguien se ve llevado a estudiar matemáticas. Las explicaciones didácticas deben partir de la descripción de la *actividad matemática* que realizan conjuntamente profesor y alumnos en el aula y fuera de ella, así como de las cláusulas del *contrato didáctico* que rigen esta actividad. De esta manera, por ejemplo, al estudiar las interacciones que acontecen en una *situación didáctica*, Brousseau (1986; 1997; 2007) ha identificado algunos *efectos* que pueden inhibir o interrumpir la construcción de conocimiento que lleva a cabo el estudiante dentro del *medio* didáctico que el profesor elabora. Básicamente, son actitudes que generan efectos negativos en el proceso enseñanza y aprendizaje, o bien, en la definición del *contrato didáctico*. Brousseau (1986; 1997; 2007) al explicar la TSD indica cinco *efectos*: el

---

[67] En la TSD, se diferencia *saber* y *conocimiento*. El *conocimiento* es una experiencia personal, mientras que el *saber* es institucional, es decir que recibe la sanción de una comunidad de "sabios", quienes deciden lo que es ese saber.

[68] El saber-sabio designa el conjunto de resultados admitidos por verdaderos por la comunidad científica de referencia, los matemáticos en este caso, en tanto que el saber enseñado es la parte de las matemáticas que son enseñadas finalmente, de forma efectiva en un nivel escolar determinado.

*Topaze*, el *Jourdain*, el *deslizamiento meta-cognitivo*, el *uso abusivo de la analogía* y el *envejecimiento de las situaciones de enseñanza*. Estos se encuentran detallados en su obra.

Como se ha observado, en la TSD el conocimiento emerge del proceso de resolver problemas matemáticos. Sin embargo, para gestionar este conocimiento, la teoría ha clasificado las situaciones *a-didácticas* en situaciones de *acción*, *formulación* o *comunicación* y de *validación*, tal y como lo señala Artigue y Houdement (2007) en su estudio:

> El *conocimiento matemático* se atribuye a funciones diferentes que están ligadas a tres categorías de situaciones [didácticas]: situaciones de acción, de comunicación, y de validación. Emerge primero como un medio para la acción a través de modelos que pueden permanecer implícitos, pero no pueden desarrollarse sin la construcción de un lenguaje apropiado y tiene entonces que llegar a ser parte de un cuerpo coherente de conocimiento. Estos pasos diferentes dependen de dialécticas distintas; dialécticas de acción, formulación y validación, las cuales requieren, para llegar a ser efectivas, organizaciones distintas de las relaciones de los estudiantes con el conocimiento matemático. (p. 366)

En la dialéctica de *acción*, ligadas a las situaciones del mismo nombre, según Chamorro (2003) afirma que el estudiante *formula*, *prevé* y *explica* la situación, organizando sus estrategias a fin de construir una representación de la situación que le sirva de modelo y le ayuda a tomar decisiones. Las retroacciones proporcionadas por el *medio* funcionan como *sanciones*[69] positivas o negativas, según el caso de sus acciones, lo que permite al sujeto adaptarlas a efectos de aceptar o rechazar una *hipótesis*, o escoger entre varias soluciones. Cada estrategia lleva asociados una serie de conocimientos específicos, diferentes de una a otra, y portadora en ocasiones de concepciones diferentes.

Por lo tanto, la TSD sugiere que el estudiante debe transitar por unas fases escolares (Peltier, 1993) de *acción*, *formulación* y *validación*, mientras que la fase de *institucionalización* recae por completo en la exposición del profesor.

Al respecto, Peltier (1993) afirma que los procesos de diseño de las situaciones didácticas, se organizan en estas tres fases principales, cada una de ellas debería

[69] Las sanciones se entienden como las validaciones o invalidaciones que hace el sujeto ante las retroacciones y acciones que hace usando el medio, es decir, para decidir si alcanzó o no lo que se proponía. Si la acción que realizó el sujeto no alcanza lo que quería, entonces la validación es negativa, y el sujeto modifica su acción para poder alcanzar lo que se propone. Si la acción es lo que el sujeto quería, la validación es positiva y el sujeto refuerza dicha acción.

desembocar en una *situación a-didáctica*, es decir, en un proceso de confrontación del estudiante ante un problema dado, en el cual construirá su conocimiento.

Fase de *acción* ó de *investigación*: En ella se propicia la interacción de los estudiantes con el problema a resolver, en esta etapa, los estudiantes buscan las soluciones posibles y plantean alternativas que resultan exitosas, para llegar a respuestas prácticas al problema. En esta fase los estudiantes, aparte de generar acciones con el *medio*, anticipan, conjeturan, formulan hipótesis, y las prueban. Esta fase también es generadora de una actividad matemática. Según Peltier (2003):

> La *actividad matemática* en el estudiante consiste en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento que permita anticipar el resultado de una *acción* aun no realizada – o actual – sobre el cual se dispone de información. El rol de la anticipación es fundamental. (p. 7)

Fase *de formulación*: En esta etapa, los estudiantes deben ser capaces de comunicar la solución del problema, mediante el uso de un lenguaje que corresponda a sus ideas y sea suficientemente descriptivo y asequible a sus compañeros. El profesor también puede ser un interlocutor con quien intercambien información. Según Peltier (1993):

> En una situación de comunicación entre pares, aparecerá la noción de prueba necesariamente donde se verán aparecer en los estudiantes diferentes niveles de pruebas: *pruebas pragmáticas*, fundadas en la acción, sobre la experiencia. Y *pruebas intelectuales,* fundadas sobre un razonamiento. (p. 7)

Fase *de validación*: una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal con el *medio*, deben justificar la pertinencia o validez de la estrategia puesta en marcha, elaborar la verificación, deben ser capaces de demostrar mediante pruebas, que su solución al problema es correcta y funcional, lo cual obliga a la conceptualización adecuada y ordenada del fenómeno analizado, a la relación con otros fenómenos y a la formulación de conclusiones.

### *El AGD como el medio.*

En la TSD, Brousseau (1986; 1999; 2007) ha considerado que en el proceso de elaborar una solución por parte del estudiante, esta se da gracias a la interacción entre las acciones del estudiante con un *medio*, el cual le permiten efectuar algunas clases de acciones para resolver el problema, y así mismo el *medio* ofrece una retroacciones a sus acciones que le permitan validar o invalidar sus acciones.

Margolinas (2009) le da al *medio* la connotación de *a-didáctico*, y debe tener el significado de un *medio* "matemático", donde considera que lo "matemático" es en el sentido de la intencionalidad matemática que persigue la situación.

Según Acosta (2010), el medio debe ser seleccionado o diseñado de manera cuidadosa para que los *conocimientos*, producto del *aprendizaje por adaptación*, sean lo más parecidos posible al *saber* que se quiere enseñar. De esta forma, se considera que el Cabri Géomètre II Plus es un *medio* adecuado para que surja el *aprendizaje por adaptación* de la *geometría* en el ámbito escolar, pues el *universo interno* de este AGD, garantiza que todos los fenómenos (*estáticos* y *dinámicos*[70]) asociados con la construcción y la manipulación de figuras geométricas se corresponden con la teoría de la *geometría euclidiana* y *analítica*.

Se debe enfatizar que este *medio* favorece *procesos* y *habilidades* para desarrollar *pensamiento geométrico* y así mismo, permite que los estudiantes se involucren en situaciones donde pueden hacer *actividades matemáticas* propias del quehacer del matemático.

### *La gestión de las clases mediadas por los AGD: tipologías de tareas.*

En un AGD la comunicación con el estudiante (ó el usuario del software) está basada en la *visualización* que, además, tiene la peculiaridad de ser *dinámica*. Así, una actividad imprescindible es relacionar los *hechos geométricos* con la información observada en un dibujo que se mueve, o en una figura en el que se pueden desplazar ciertos elementos para obtener nuevos dibujos con las mismas propiedades geométricas que el dibujo originalmente dado.

Este aspecto *dinámico* es fundamental y novedoso, según Laborde (1998b), en la *visualización* e incide en la *generalización* y en la *abstracción*, en el *descubrimiento* de propiedades invariantes y en la posibilidad de *conjeturar* y *experimentar* el cumplimiento de propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas.

La intervención del profesor como *gestionador* de la actividad cognitiva en la clase es fundamental cuando se trabaja *geometría* con los estudiantes usando un AGD debido a que se trata de fomentar en el alumno la reflexión encaminada a dar

[70] Los fenómenos *estáticos* y *dinámicos* son *fenómenos visuales* en Cabri, que Acosta (2010) presenta en sus investigaciones. Para éste investigador, un fenómeno *estático*, es por ejemplo, un dibujo estático que aparece en la pantalla producido al activar una herramienta del AGD pero que corresponde a la teoría geométrica en la cual se está trabajando. En cambio, un fenómeno *dinámico* lo define en términos del desplazamiento que sufre los objetos geométricos en el Cabri, de manera que se conservan ó bien todas las propiedades declaradas explícitamente (al usar una herramienta de construcción) ó aquellas que se deducen teóricamente de ellas.

significado a las *percepciones visuales dinámicas*; en definitiva, de conseguir que los estudiantes establezcan relaciones entre diferentes sistemas de representación para un mismo concepto geométrico (Hitt, 1998; 2000; 2002). Y puedan así, lograr la comprensión del hecho geométrico.

De tal manera, que para el diseño didáctico se tendrá en cuenta la importancia de las tipología de tareas geométricas que se pueden proponer a los estudiantes cuando se integra los AGD, sacando provecho del uso de las representaciones matemáticas *ejecutables* y *dinámicas* propias del ambiente. Está caracterización que se presentará ha sido adaptada de los trabajos investigativos de Laborde (1998a; 1998b; 2001; 2008).

***Tareas Tipo I: construcción de figuras.***

En el ambiente tradicional de una clase de *geometría* sin computadores, una de las actividades típicas presentadas por el profesor es darle a los estudiantes un enunciado verbal (hablado o escrito) donde se les exige trazar una figura geométrica hecha con papel y lápiz. Esta tarea se refiere a que los estudiantes tienen que pasar de una representación verbal dada a una representación gráfica produciendo el (los) objeto(s) geométrico(s) usando instrumentos de dibujo geométrico, tales como la regla y el compás.

Pero esta misma actividad llevada a un AGD es diferente por la misma naturaleza y las especificidades que trae consigo el ambiente informático. Según Laborde, (1998a; 1998b; 2001; 2008), si en este tipo la propuesta al estudiante consiste en producir figuras, usando un AGD, entonces se puede hacer algunas variaciones en la gestión de este tipo de tareas. En consecuencia, se pueden observar tres categorías, las cuales son: I-A, I-B y I-C.

***I-A). La construcción de una figura geométrica donde sea ostensible la permanencia de los invariantes geométricos cuando se somete al modo de arrastre.***

Evidentemente, se trata de una actividad de construcción geométrica donde el profesor le da el enunciado al estudiante y también le proporciona el AGD, de tal forma que debe realizar el dibujo del objeto geométrico. Sin embargo, no es fácil para los estudiantes porque ellos tienen que recurrir a sus conocimientos geométricos, definiciones, conceptos y propiedades para generar la figura geométrica pedida. El proceso de validación del trazado es por medio del modo de arrastre. En últimas, el profesor solicita una construcción geométrica *robusta* y no *blanda*[71]. El estudiante en este tipo de tareas, según Laborde (2003), debe recurrir al uso de *conocimiento geométrico* pero también al *conocimiento instrumental* que él tiene del AGD.

***I-B). La construcción de una figura pero cumpliendo ciertas condiciones geométricas.***

Debido a que en los AGD las figuras geométricas son de naturaleza dinámica, en la actividad de construcción se puede incrementar el grado de dificultad agregándole a las condiciones que debe cumplir el problema, un cierto comportamiento a la figura solicitada cuando es sometido al movimiento de ciertos elementos geométricos básicos. Para realizar este tipo de tarea, se requiere el análisis de las figuras en el ambiente informático, en términos del grado de libertad de los elementos básicos. Las condiciones que deben cumplir los puntos fijos y los puntos móviles pueden requerir un orden diferente en el procedimiento de la construcción.

Dentro de este tipo de tarea, por ejemplo, se les puede preguntar a los estudiantes acerca de cuál es el *lugar geométrico* de los puntos que cumple con cierta(s) condición(es) dada(s). Que la construyan, que conjeturen y luego verifiquen, con las herramientas que proporciona el ambiente, que la figura geométrica que ellos creían que era efectivamente esa, y luego que la curva o figura obtenida deba cumplir con las condiciones, características y definición de tal *lugar geométrico*.

***I-C). La construcción de una figura pero usando ciertas herramientas del software.***

Esta actividad es cuando el profesor les pide a sus estudiantes que construyan un objeto geométrico, pero usando exclusivamente cierto tipo de herramientas del menú que ofrece el ambiente. El tipo de herramientas lo decide el profesor, por eso él debe conocer todas las herramientas que dispone el ambiente informático.

El ambiente Cabri permite personalizar los menús para cada sesión de trabajo con los estudiantes, de tal manera que el profesor puede llegar previamente a configurar los menús, restringiendo o desapareciendo algunas herramientas y así los estudiantes se verían obligados a crear estrategias nuevas para resolver el problema, recurriendo únicamente a las herramientas que el profesor consideró que eran necesarias.

[71] Las construcciones geométricas blandas en un AGD se detallan en la dimensión cognitiva de este informe de investigación.

### *Tareas Tipo II: descripción verbal.*

En la clase de *Geometría*, es común solicitar a los estudiantes que dada una representación gráfica en el papel (o en el tablero), ellos deban describirla verbalmente, bien sea por escrito ó de manera hablada. Es decir, que los estudiantes deben comprender el dibujo que están mirando y dar una representación verbal.

Por lo tanto, las representaciones gráficas hechas en el ambiente tradicional de papel y lápiz, son dibujos estáticos, pues no se tiene movimiento ni el profesor puede saber si se preserven los invariantes geométricos. En cambio, cuando se lleva este tipo de tarea al AGD, lo primero que el estudiante observa en la pantalla es un dibujo, sin embargo, puede empezar a explorarlo, ya sea por medio del arrastre para encontrar invariantes o recurriendo a otras herramientas tales como la medición de magnitudes o bien por la comprobación de propiedades. Por ejemplo, al trabajar con Cabri, si se les pasa a los estudiantes una figura geométrica, entonces los estudiantes tienen que "develar" el proceso de construcción que produjo esa figura, para ello, recurren a explorar cuáles son los puntos que se dejan arrastrar de la figura, qué invariantes aparecen cuando se arrastra alguno de sus objetos iniciales, llega a utilizar las herramientas de medir, comprueban si los puntos de la figura son colineales, si pertenecen a un objeto matemático, si cumplen con ciertas características de los objetos matemáticos que ellos creen que posiblemente sea, y por lo tanto, se atreven a dar una explicación verbal, a argumentar o a realizar una demostración del *hecho geométrico* que dicen que son consecuencia de la exploración del objeto construido.

Según Laborde (1998b), esta tarea que el estudiante realiza usando un AGD, es importante porque inicia el camino hacia la sistematización y verificación ordenada de los aspectos de la teoría geométrica misma, como la formulación de conjeturas en una forma condicional que luego a través de una demostración llega a validarse. Asimismo, afirma que el ambiente informático puede facilitar la apropiación de la actividad de la explicación a los estudiantes, dándole importancia al fenómeno visual que ellos aprecian en la pantalla.

Concluyendo acerca de este tipo de tarea, se hace ostensible la necesidad de realizar una descripción discursiva ante tales situaciones. Debido a que, por un lado, según Laborde (1998b), para eliminar las ambigüedades o equívocos que los estudiantes puedan percibir en una imagen visual. Y por otro lado, según Murillo (1999), el proceso de expresar en palabras una conclusión geométrica observada, supone un esfuerzo considerable y necesario para la adquisición de conocimientos geométricos.

***Tareas Tipo III: cajas negras y macros.***

En esta tarea a los estudiantes se les da una figura en pantalla y ellos no saben cómo fue construida. También se configura el menú *Edición* de un AGD como Cabri, de tal manera que se les desactiva la herramienta que permite revisar la manera en que fue realizada la construcción. La tarea consiste en que los estudiantes deben reconstruir la misma figura que aparece en el ambiente, es decir, trazarlo en la pantalla lo más fielmente posible, de tal manera que, se comporte de la misma manera que la figura dada cuando es arrastrada. Al llevar a cabo esta clase de tarea en un AGD, se involucra, tanto la interpretación de figuras en términos geométricos como su reconstrucción por medio de las primitivas geométricas del software. Laborde (1998a; 1998b) le denomina a este tipo de actividades de "caja negra"

Laborde (1998a; 1998b; 2001) afirma que estas actividades de cajas negras no pueden realizarse en un ambiente de papel y lápiz debido a que un dibujo no transmite una información propia ni sobre las relaciones respectivas entre sus partes. Aparte de solicitarles que tienen que reproducir la figura dada en el ambiente, también se les pide que la describan discursivamente y por escrito.

De acuerdo con esta misma investigadora, las actividades de cajas negras requieren dos operaciones hechas por los estudiantes:

> Explorar la figura desconocida y encontrar el comportamiento cuando se arrastra, hacer un análisis de las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo los efectos del arrastre, y en particular hacer la distinción entre lo que es eventual y lo que es necesario en la apariencia visual de la figura bajo el modo de arrastre.
> Verificar si las propiedades geométricas supuestas de la figura se satisfacen utilizando otros recursos del software. Por ejemplo, si tres puntos parecen estar alineados, los alumnos pueden trazar una recta que pasa por dos de ellos y verificar si esta recta pasa por el tercer punto cuando todo el dibujo es arrastrado. (Laborde, 1998b, p. 119)

Estas dos operaciones se basan en una interacción entre procesos de *visualización* y procesos de *conceptualización*, la primera operación es una interpretación de los aspectos visuales por medio de nociones teóricas, la segunda operación consiste en validar las interpretaciones teóricas al verificar si los dos dibujos permanecen superpuestos mientras se arrastra el dibujo.

Este tipo de tarea parece contribuir, de una manera muy apropiada, a la construcción de relaciones de los alumnos entre propiedades geométricas y visuales por un lado y al conocimiento geométrico por otro.

Como conclusión, como lo que se quiere es que los estudiantes re-construyan lo que el profesor les da, y además que realicen el mismo procedimiento de la construcción, el profesor o los estudiantes (ó el usuario del AGD) pueden usar unas funciones gráficas del ambiente, denominadas *macro-construcciones* que son nuevas herramientas creadas y hechas para utilizar procedimientos geométricos recurrentes, definidos por el usuario.

***Tareas Tipo IV: enunciados de teoremas y su validación.***

Este tipo de tarea está siendo actualmente investigado en muchas partes del mundo con el *renacimiento* de la *geometría* a través de la integración de los AGD en el aula de clases. Tiene que ver con los procesos de *argumentación* y *demostración* en *Geometría*.

Al respecto, se entiende la demostración en los AGD, de acuerdo con Camargo, Perry y Samper (2006) o en Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina (2007) como una actividad que combina dos aspectos estrechamente relacionados: el *proceso de demostrar* y el *producto de la demostración*. El *proceso* incluye acciones propias de la heurística como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar siempre y cuando movilicen el razonamiento hacia la búsqueda de validación, de tal forma que den significado a la actividad de argumentar para aceptar afirmaciones y provean los elementos para responsabilizarse de la verdad de dichas afirmaciones. El aspecto *producto* incluye acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o presentaciones sistemáticas de resultados.

Los hallazgos de este tipo de investigaciones han mostrado la efectividad de realizar conexiones entre los enunciados, la exploración sistemática en el ambiente, la construcción geométrica, y la verificación del teorema para favorecer los procesos de argumentación y demostración en los estudiantes.

*Tareas Tipo V: Cambio de representación gráfica a la algebraica.*

Esta tarea es propuesta por Schumann (2004). Básicamente consiste en que teniendo la curva ya construida en un AGD, el usuario le solicita al ambiente que le presente automáticamente la ecuación que representa dicha curva, usualmente con la herramienta "Coordenadas o ecuación". Más que una tarea, Schumann (2004) propone un método para combinar el uso de un CAS con un AGD cuando se estudian curvas. También enfatiza que esta herramienta puede servir para corroborar el tipo de ecuación que corresponde a la curva construida en el ambiente y en la cual se cree que está siendo representada gráficamente en la pantalla.

### 2.3.4. Consideraciones finales de la dimensión didáctica.

A lo largo de esta dimensión de análisis, se han estudiado tres grandes apartados: las *definiciones de lugares geométricos para gestionar la enseñanza*, el *análisis de libros de texto alrededor de las cónicas,* y la *TSD como referente para el diseño didáctico* que dentro de esta teoría, están delimitadas la *tipología de tareas en Cabri*. El estudio y la organización de estas secciones en esta dimensión puede indicar a primera vista que están estrechamente relacionados las dos primeras y la última con el diseño de tareas, pero si se realiza un análisis más profundo, se puede llegar a inferir que en ningún momento se forman compartimentos aislados entre estos apartados, porque efectivamente se llegan a relacionar estrechamente entre sí, desde una perspectiva didáctica.

Desde lo didáctico es claro que un profesor de matemáticas debe dominar tanto las definiciones matemáticas así como las *representaciones matemáticas* asociadas a ella cuando trata de enseñar algún *objeto matemático* a sus estudiantes. Este es un aspecto central pues las definiciones buscan establecer criterios que sirvan como marco de referencia para que, a través de la actividad matemática, los estudiantes puedan construir los conceptos matemáticos de manera significativa. También es claro que las definiciones desarrollan un papel central en la gestión de clase por parte del profesor, de ahí que se considere pertinente un análisis de las mismas en los libros de texto.

Este tipo de análisis se realizan desde aproximaciones en *Didáctica de las Matemáticas* que problematizan cómo las nociones cambian en su devenir histórico. De manera particular se toma en cuenta la *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1997) de esos saberes que se pretende enseñar.

En este sentido, se puede observar en el análisis realizado a los libros de texto, que si bien la definición de *cónicas* permanece invariante ante la *geometría analítica*, a veces son tratadas como *lugar geométrico* y algunas otras veces como "secciones de un cono", sin entrar a especificar las propiedades geométricas de la *geometría del espacio*. Algunas son definiciones del *lugar geométrico* que han sido escritas desde lo *estático* y otras desde lo *dinámico*. Otro aspecto que no cambia, es que las definiciones llevan consigo el sentido y la connotación algebraica de manera persistente.

De esta manera, en esta dimensión, se realizó un esfuerzo por aclarar cuál era el sentido y la connotación que juega el papel de la noción de *lugar geométrico* cuando se enseñan las *cónicas* en la *geometría analítica*. Y además, de tomar partido por una definición apropiada, de tal manera que se pueda comprender cuando se utiliza un ambiente dinámico como el Cabri. Así mismo, se debe aclarar que además, esta noción cambia ante un AGD, y la manera de producir un lugar geométrico también es diferente. Pero esta distinción se debe tomar de acuerdo con las posibilidades y objetivos didácticos que se busquen.

En esta perspectiva, la realización de un análisis de libros de texto no sólo es una labor de la *noosfera*[72] sino también que debería ser del *profesor de matemáticas* quien con la ayuda del texto, organiza y complementa su labor en el aula de clase. Así mismo, los libros de texto universitarios presentan diversos enfoques en función de los intereses de las editoriales y del momento en que se escriben. Pero a la hora de seleccionar un libro de texto para gestionar la clase de matemáticas, debe tenerse en cuenta la misma recomendación que se presentó para el uso de las definiciones: depende de los intereses didácticos que se persigan.

Así mismo, un análisis de libros de texto le proporciona una *formación profesional* y una panorámica holística al *profesor de matemáticas* que lo efectúe, de tal manera que puede llegar a tener elementos didácticos para decidir cuándo y cómo usarlo efectivamente, de manera crítica y constructiva, en el sentido de que no se reproduzcan textos sin propuestas alternativas de situaciones de enseñanza, esto se afirma ya que este análisis mostró que existe una ausencia notoria de actividades o tareas de *construcción geométrica* en los libros de texto de *geometría analítica* actuales pero en cambio se ha notado que la propuesta de efectuar *construcciones geométricas* aparecen en libros de texto y diccionarios (Klein, 1927; Bruño, 1957; De la Borbolla & De la Borbolla, 1957; Anfossi, 1961; Eves, 1969; Puig, 1970; Warusfel, 1972) que fueron escritos, antes del movimiento de las *Matemáticas Modernas* (Kline, 1986) del siglo pasado.

[72] La *noosfera* en el campo de *Didáctica de las Matemáticas* desde la postura francesa, se le denomina a la capa exterior de la sociedad que contiene a todas las personas que piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza: asociaciones de especialistas, comisiones de reflexión sobre la enseñanza, sindicatos de profesores, asociación de profesores, asociación de padres de familia, etcétera.

De otra parte, tanto el AGD Cabri Géomètre, en tanto *medio a-didáctico*[73] y los libros de texto ofrecen posibilidades para diseñar y gestionar una secuencia de situaciones didácticas diferentes. Por tal motivo, es el profesor quien debe tener en cuenta el contexto escolar, y así mismo delimitar y complementar aquellas características que desee resaltar para obtener un objetivo propuesto.

Por ejemplo, los libros de texto que contienen definiciones de *cónicas* como *lugar geométrico* escritas en términos dinámicos o aludiendo al movimiento de un punto del conjunto de puntos, son perfectamente ajustadas al Cabri, sin embargo, no se puede seguir un libro de texto que contenga actividades que no son propias de un *medio* ejecutable ya que las actividades que aparecen en estos, usualmente son estáticas, algebraicas y algunas de coordinación entre representaciones gráficas y algebraicas, perdiéndose el trasfondo y sentido geométrico de las situaciones.

En otras palabras, la orientación y la connotación didáctica de las actividades en Cabri y las actividades en los libros de texto no son compatibles. Entonces la complementariedad que se sugiere efectuar a las actividades usuales de aprendizaje propuestas en los libros de texto de *geometría analítica* puede girar alrededor de tener en cuenta un *medio* como Cabri para darle un valor didáctico a las situaciones de enseñanza, y en consecuencia, se deba ser consecuente y considerar la tipología de tareas que han surgido en el seno de investigaciones didácticas cuando se ha integrado efectivamente el Cabri a las clases de *Geometría*.

Otro punto importante por resaltar que emergió de este análisis de libros de texto, es que al revisar los programas de clase de los cursos universitarios donde se trata el tema de las *cónicas*, reveló inmediatamente que este tema es marginal. Únicamente los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas las estudian en detalle, lo cual se puede evidenciar al revisar los programas de los cursos consultados (Ver Anexo No. 3).

Por último, al usar la TSD como referente teórico para el diseño, y tomando en consideración los elementos didácticos de la misma, así como su consistencia teórica, permitió observar los factores didácticos implicados en este análisis, que condicionan el aprendizaje y, en consecuencia, la gestión y actuación en la clase por parte del profesor.

[73] El Cabri es un *medio a-didáctico* en tanto que no es un medio material, de acuerdo con la TSD, está desprovisto de una intencionalidad didáctica (Brousseau, 2007), y obedece de manera pertinente a lo matemático de la situación.

# CAPÍTULO 3.
# DISEÑO DEL DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

En este capítulo se presenta los criterios generales del dispositivo experimental derivados del marco teórico y la manera cómo han encontrado una instanciación en su elaboración.

El contenido de este capítulo está relacionado con la concepción, el diseño y el análisis de la secuencia didáctica, en los siguientes asuntos: 1. Consideraciones metodológicas, 2. El modelo con el cual se llegó a construir el dispositivo experimental, 3. La manera en que se reflejó los análisis *preliminares* en el diseño y 4. Las selecciones generales del dispositivo como las hipótesis del diseño, las variables micro-didácticas, las unidades de análisis y el propósito general de la secuencia.

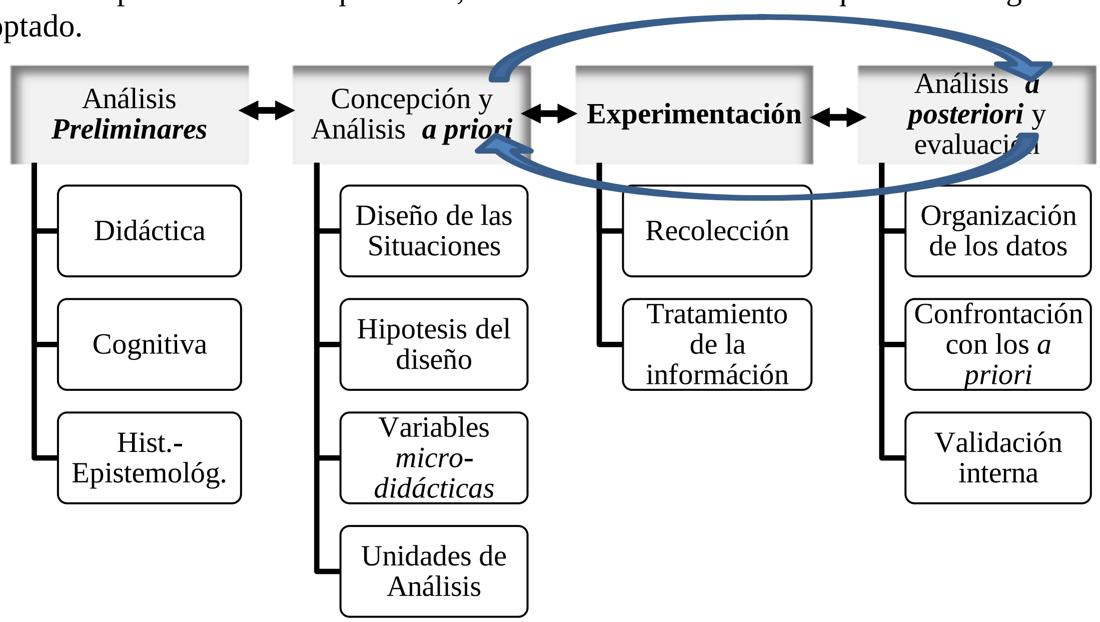
## 3.1. Consideraciones Metodológicas

Las consideraciones metodológicas que orientaron el diseño provinieron de la *micro-ingeniería didáctica*, que a su vez tomó como referente la *ingeniería didáctica*, y que en la perspectiva de Artigue (1995), se caracteriza por su naturaleza experimental alrededor de la concepción, diseño, realización, observación y análisis de secuencias didácticas, a partir de un estudio de caso.

A este nivel *micro* de la *ingeniería didáctica*, Artigue (1995) hace referencia a investigaciones que tienen como objeto, el estudio de un determinado tema, son estudios de tipo local, y toman en cuenta, principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula. De esta manera, se construyó una serie situaciones didácticas, que se pusieron en acto y en donde se trató que los estudiantes de un curso de *geometría analítica* aprendieran el concepto de *cónica* como *lugar geométrico*.

Así, se procedió a realizar las cuatro las fases que la estructuran y se relacionan estrechamente: 1. los análisis *preliminares*; 2. el diseño de las situaciones de enseñanza y sus análisis *a priori*; 3. La experimentación; y finalmente, 4. Los análisis *a posteriori* y la validación y confrontación con los *a priori*.

En la fase de planeación se proporcionan elementos didácticos, cognitivos y epistemológicos para que emerja el *dispositivo experimental*, y así pueda constituirse la siguiente fase, la del diseño, donde se efectúan análisis *a priori*, las hipótesis del diseño y las variables *micro-didácticas* indispensable para que se pueda hacer la experimentación y recolección, tratamiento de la información recogida, porque sin el dispositivo no se puede hacer la experimentación. Sin embargo, la secuencia de las fases no es lineal, en la cual uno lleva a la siguiente, porque puede que se efectúe la experimentación y luego se devuelva a la fase de diseño con miras a la retroalimentación y evaluación y puesta en acto de nuevo. Sin embargo, todas estas fases apuntan a la fase de validación donde se confrontan y organizan los análisis *a priori* con los *a posteriori*. Esta última fase es importante porque se llega a determinar si las hipótesis de investigación y el problema de investigación se pudieron responder. En el Esquema 11, se resume las fases del enfoque metodológico adoptado.



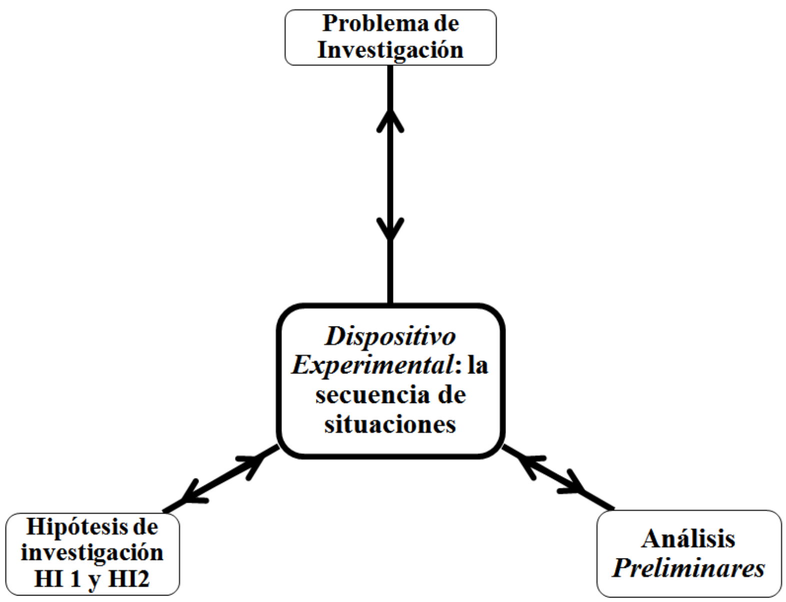

*Esquema 11: Fases de la metodología de micro-ingeniería didáctica.*

En este sentido, a continuación se muestran los criterios de diseño derivados del marco teórico y la manera cómo han encontrado una instanciación efectiva en su elaboración, a través de un modelo para el diseño.

### 3.2. El Dispositivo Experimental

A continuación se presentan particularidades que originaron el diseño del dispositivo experimental y se muestra cómo se llegó a una instanciación efectiva en su elaboración, para luego dar cuenta de las selecciones generales que fundamentan el diseño de la secuencia didáctica.

El diseño del dispositivo experimental puso en funcionamiento las relaciones entre: las hipótesis de investigación (HI 1 e HI 2), los análisis *preliminares* (dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica) y el problema de investigación (Ver Esquema 12).

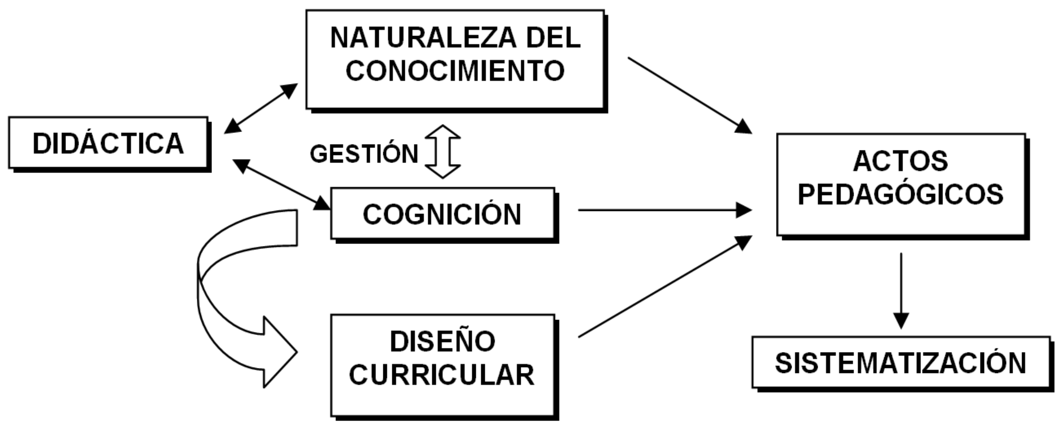



*Esquema 12: Factores que incidieron en el dispositivo experimental.*

No obstante, este dispositivo ofrece una particularidad que ya ha sido señalada por Laborde y Perrin-Glorian (2005) al referirse a las *micro-ingenierías* que han tomado como referente la Teoría de las Situaciones Didácticas: el AGD Cabri Géomètre juega el papel de *mediador* a lo largo del dispositivo experimental.

En la vía de presentar los vínculos entre los *análisis preliminares* y la concepción y diseño de una secuencia didáctica, se consideró el modelo que dio estructura al dispositivo experimental: el modelo de *diseño didáctico* propuesto por el Profesor Luis Moreno en el proyecto del Ministerio de Educación Nacional (2004b), *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia*:

> El *diseño didáctico* [Ver Esquema 13] pasa por la reflexión sobre la naturaleza del conocimiento y la cognición. Estos son los dos ejes sobre los que éste descansa con la ayuda de la gestión del profesor, quien se pregunta permanentemente qué es lo tiene que hacer ahora que dispone de dispositivos computacionales que procesan información. De esta reflexión surgen los actos pedagógicos (experiencias de aula) que se sistematizan a través de documentos como: artículos, ponencias y materiales de divulgación. (Ministerio de Educación Nacional, 2004b, p. 56)




*Esquema 13: Modelo del Diseño Didáctico (Ministerio de Educación Nacional, 2004b, p. 56)*

Este modelo ha sido recomendado por el Ministerio de Educación Nacional (2004b) para proyectos de integración de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Para Moreno el *diseño didáctico* es una actividad que parte de la dimensión *Didáctica*, porque permite pensar en la elaboración de situaciones didácticas teniendo en cuenta el impacto mediador de las TIC. Este punto de partida contempla dos rasgos particulares: primero parte de los desarrollos investigativos de la Didáctica de las Matemáticas, lo que significa que sugiere considerar los aspectos teóricos para articularlos a la práctica, lo que conlleva al segundo rasgo: existe una concepción de la didáctica, como un hacer reflexivo en un *acto pedagógico*.

Luego toma en consideración la dimensión *Epistemológica* analizando la naturaleza del objeto matemático en la disciplina, en el ámbito escolar y cuando hace parte de una herramienta computacional. Así mismo, la dimensión *Cognitiva* contempla cuestiones tales como los errores, obstáculos y dificultades, y enfoques cognitivos comprendidos en la investigación.

Estas tres dimensiones determinan la necesidad de un cambio en la gestión del profesor, donde el rol cambia pero no desaparece. Estas modificaciones en el quehacer se dan por las modificaciones del mediador computacional, ya que ejecuta ciertas funciones cognitivas. En consecuencia, el profesor dirige el proceso de lo que sucede al interior del aula. Todos estas consideraciones llevan que se den actos pedagógicos y posteriormente la *Sistematización* de la experiencia, teniendo en cuenta que esta dinámica se inscribe en un proceso de diseño curricular.

La sistematización de la experiencia de aula, es entendida como un proceso que hace divulgativa la indagación y los esfuerzos de innovación emprendidos por el profesor con el propósito de generar situaciones problema que sean significativas en el aprendizaje del estudiante. Precisando aún más esta idea, la sistematización da cuenta, tanto del proceso de la fundamentación, como del proceso del dispositivo, y la puesta en escena en el aula de las situaciones problema, se dirige específicamente a evidenciar cómo la integración del AGD Cabri Géomètre (utilizado como mediador de conocimiento en las situaciones a-didácticas), moviliza y potencia en los estudiantes los procesos involucrados.

En este punto debe destacarse el hecho de que una propuesta didáctica como esta, se inscribe en un proceso de *desarrollo curricular*, donde se enfatiza en un proceso de transformar el currículo por medio de investigaciones y por ende, de prácticas pedagógicas que se movilizan en el ambiente de educativo de las clases de matemáticas, apuntando a la *sistematización*.

## 3.3. De la Teoría al Diseño

A continuación se presentan una serie de consideraciones que emergieron como resultado de los análisis *preliminares* desde cada una de las dimensiones. Estos elementos sirvieron de fundamento al proceso del diseño del *dispositivo experimental*.

### 3.3.1. Y desde lo Histórico – Epistemológica.

1) Puede señalarse que la tensión histórica que se manifiesta en la *dialéctica puntual – global* permitió que a nivel del diseño de las situaciones se reconociera la importancia de plantear problemas geométricos que requirieran transitar por ambos enfoques, a partir de situaciones problemas relativas a la construcción de las cónicas. Por esta razón, en el dispositivo experimental se alternó entre situaciones que empezaban por lo puntual y

terminaban en lo global al ser representadas algebraicamente y otras situaciones en las que empezaban por lo global pero debían considerar el carácter puntual de algunas de sus propiedades intrínsecas, tal y como lo efectuó Apolonio.

2) Así como Werner o Durero realizaron construcciones puntuales de las cónicas como métodos de trazado para resolver problemas, asimismo, se involucró esta característica en el dispositivo experimental.

3) Por otra parte, los *problemas abiertos*[74] propuestos en estas situaciones, cumplen la función de ser detonadores de acciones y estrategias matemáticas para encontrar soluciones. Esta es la entrada a lo sintético para llegar a lo analítico, de tal forma que se pueda llegar a concebir las cónicas como Descartes lo hizo, como un conjunto de puntos. Con esto se busca diferentes formas de construir un punto móvil de tal forma que "el movimiento regular" de dicho punto permitiera contener a la nube de puntos (es decir, una construcción global), y que luego deban encontrar la expresión algebraica. Con esto se intentó plasmar la naturaleza compleja de las *cónicas*, al hacer pasar, la mirada holística, a la mirada puntual, pero substituyéndola luego por parejas ordenadas relacionadas entre sí en una ecuación y que permitiese resolver el problema.

4) Otra tensión de orden epistemológica fue que se reconoció la necesidad de involucrar en el diseño, un trabajo sistemático de situaciones problema relativo al *lugar geométrico* de las *cónicas*. En consonancia con esta revisión teórica, se consideró, en el diseño didáctico, problemas geométricos que permitan hacer el *tránsito* de la *geometría* al *álgebra* tal como lo realizó Descartes. Este criterio se corresponde con la idea de trabajar con la *geometría sintética* para arribar a la *geometría analítica* cuando se resuelven problemas de geometría. De esta manera, se puede dar el paso a la representación algebraica. Hay un cambio de lo perceptual en los problemas geométricos a lo abstracto que existe en el trasfondo de los mismos, cuando se va pasando por las diferentes las fases propuestas de las situaciones.

5) Algunos problemas geométricos que se retomaron en la situaciones, son variaciones de problemas clásicos como el de las Tangencias de Apolonio (Rabu-Boyé, 2009).

---

[74] Según Artigue y Houdement (2007), la solución de los *problemas abiertos* no se reduce a una aplicación directa de resultados conocidos o de herramientas, estos están situados en un contexto familiar a los estudiantes que les induzca a conjeturar, explorar, ensayar, debatir, demostrar, evaluar y autoevaluarse, es decir, a comportarse como si fueran un matemático. El propósito en los *problemas abiertos* (desde la postura de la Didáctica de las Matemáticas) es que los estudiantes al interactuar con el *medio* y entre ellos mismos, construyan un nuevo conocimiento matemático. También son conocidos como *situaciones problema*.

### 3.3.2. Desde lo Cognitivo.

1) Se partió de considerar global y lo puntual en la representación gráfica del objeto matemático en cuestión y llegó a ser fundamental en el dispositivo experimental.

2) Dado que la prueba diagnóstica dio a conocer una serie de concepciones que tenían los estudiantes sobre las cónicas, el dispositivo intentó configurar una estrategia didáctica que permitiera superar las ideas erróneas.

3) Los cambios de representación matemática propuestos fueron necesarios para la transición de lo sintético a lo analítico y de lo puntual a lo global. Por otra parte, la visualización matemática jugó un papel fundamental en la elaboración de conjeturas solicitadas en las segundas fases de cada situación.

4) En el proceso de construir lugares geométricos, permitió que se abordara una dimensión instrumental para el tratamiento de las curvas algebraicas. En primera instancia, las situaciones podían ser *construidas* tan solo usando *regla y compás*; pero se quedarían en la fase de construir la nube de puntos planteada, *y lo que se pretendía al usar el AGD Cabri Géomètre* era que se pensará en construir la forma y la posición de la curva de tal manera que ésta adquiriera el carácter *ejecutable* al ser arrastrados puntos de la construcción que la determinarían revelando su *propiedades invariantes*. Esta posibilidad es reforzada en libros de texto que reconoce la importancia de la utilización de las calculadoras y el lápiz y papel, en lo concerniente a las técnicas para elaborar gráficas de curvas.

5) Se tomó en cuenta que al *graficar las cónicas* y esbozar *sus propiedades*, basados construcciones geométricas sería una condición necesaria para formar y desarrollar el concepto de *lugar geométrico* de estas curvas.

6) En relación con lo anterior es claro que a través de la mediación del AGD se pueden ilustrar la generación punto por punto usando la herramienta “Traza”, el cual apoya la interpretación de la definición de la cónica como lugar geométrico. Este tipo de tareas se corresponde con la idea de las *variaciones dinámicas de los valores de los parámetros* (por ejemplo, para investigar varios casos y para generar familias de curvas). Lo que se requiere es que el usuario, al trabajar en el AGD Cabri Géomètre, sea capaz de generarlas como objetos gráficos referenciables, es decir, la traza surge como producto de una construcción que involucra una definición de lugar geométrico.

### 3.3.3. Desde lo Didáctico y desde AGD Cabri Géomètre II Plus como medio.

1) Se llegó a cristalizar las situaciones de *acción*, *formulación* y *validación* de la TSD en cada una de las tres fases que contempla las situaciones.

2) Lo didáctico se concentró en la *organización de la clase*, a partir de las situaciones de *acción*, que luego se tornaban de formulación, validación y de institucionalización.
3) En el análisis realizado a los libros de texto, la *definición* de *cónicas* muestra que son tratadas como lugar geométrico y algunas otras veces como "secciones de un cono", estas variadas acepciones también juegan un papel central en el diseño de las situaciones dado que es evidente que estas cambian en un AGD, y la manera de producir un lugar geométrico también es diferente.

4) Las estrategias de usar el *método de los lugares geométricos* al ser involucrados en la actividad intelectual de los estudiantes puede llevar a que el saber matemático puesto en juego sea tratado desde la dialéctica *herramienta – objeto*.

5) En cuanto concierne a la integración del AGD Cabri Géomètre, el diseño tuvo en cuenta el papel didáctico de las *gráficas construidas en este ambiente* de tal manera que fuesen útiles para familiarizar a los estudiantes con las cónicas vistas como lugares geométricos.

6) Uno de los aspectos centrales de la mediación del AGD Cabri Géomètre, es que permite que los estudiantes puedan explorar los lugares geométricos como medio de transición entre la definición de una figura, en el sentido euclidiano, operando de manera *global* a una noción de lugar geométrico, que utiliza un conjunto de puntos, es decir, se convierte en una definición *puntual*. Llegando a considerar que a partir de un solo punto y por medio de una construcción geométrica, se pueda construir un punto que produzca la traza y por ende se pueda arribar a una generalidad en la situación. Con esta estrategia, se podría dar la idea de un lugar geométrico "hecho" de puntos y no como algo compacto o global. De fondo se empieza a considerar el lugar geométrico visto como una función matemática.

7) En este dispositivo, se contempló la posibilidad de que los estudiantes experimentaran matemáticamente al realizar las construcciones geométricas, usando las herramientas de medida del AGD para que buscaran relaciones

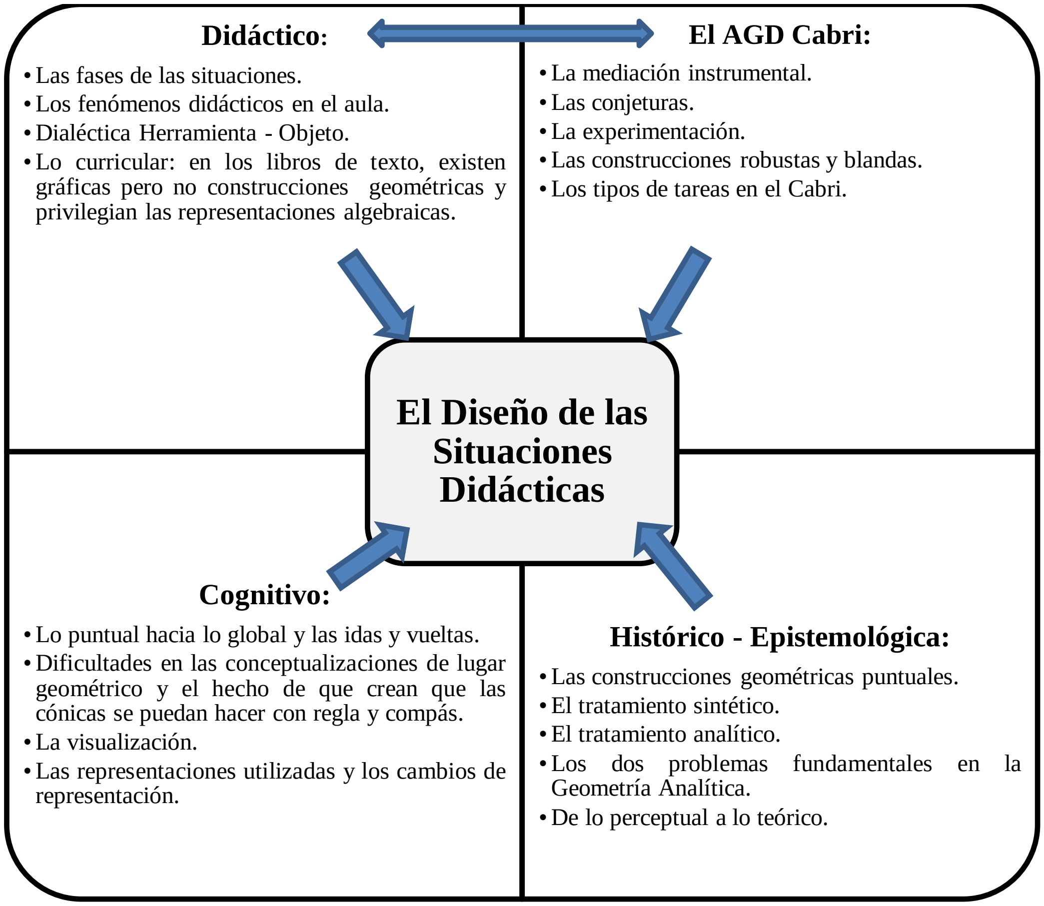
cuantitativas entre las distancias entre los puntos dados pero que luego debían de prescindir de lo figural para tratar de caracterizar la curva globalmente desde lo algebraico. En este caso el AGD funcionaria como *puente* entre el nivel *espacio – gráfico* y el nivel *teórico* cuando se estudian los lugares geométricos.

8) Además se tuvo en cuenta la importancia de presentar a las cónicas para estudiar el comportamiento de *fenómenos de cambio continuo*. En tal sentido se propusieron situaciones en el AGD Cabri Géomètre relativas a lugares geométricos de las cónicas que exploraban *la traza de un punto sujeto a algunas restricciones* y en particular que remitían a la función de esos puntos y de manera más específica a modelos computacionales de las funciones. Igualmente algunas de las situaciones propuestas se refieren a curvas algebraicas que al ser exploradas en un AGD pueden contribuir a cerrar la brecha entre la geometría *sintética* y la *algebraica*. El sentido de estas situaciones se apoya en la idea de que en los AGD, ofrecen una variedad de problemas, de estrategias de solución y de relaciones de interés matemático que apoyan las actividades de modelación matemática.

9) La transición entre los diferentes *tipos de tareas geométricas* del AGD Cabri Géomètre, permitió el uso de diferentes representaciones matemáticas ejecutables y dinámicas propias del ambiente.

10) En este orden de ideas, el diseño de las situaciones contempla la obtención de ecuaciones algebraicas a partir de la construcción sintética de una curva y de esta manera se promueve la el aprendizaje matemático y la argumentación para las ecuaciones algebraicas producidas por el AGD Cabri Géomètre. Las situaciones dieron la posibilidad de usar la herramienta "Coordenadas o ecuación" del ambiente informático al finalizar la actividad de construcción, permitiendo extender las acciones de los estudiantes de una forma explicativa, interpretativa y verificadora de los fenómenos visuales producidos en la pantalla.

Lo anterior se puede sintetizar en el Esquema 14.




*Esquema 14: Los factores involucrados en el diseño experimental.*

## 3.4. Selecciones Generales y Propósito de la Secuencia

En consonancia con estos análisis realizados en la dimensión histórica, matemática, didáctica y cognitiva es posible establecer una serie de *variables micro didácticas*[75] y algunos elementos teórico - empíricos asociados a las mismas que a su vez permiten formular las siguientes *hipótesis de diseño*.

[75] En un sentido básico, una micro *variable didáctica* es un elemento de la situación que puede ser modificado por el profesor, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno. De esta manera se puede considerar que las variables didácticas son aquellas que el profesor modifica para provocar un cambio de estrategia en el alumno y que llegue al saber matemático deseado. Es recomendable tener en cuenta que no "todo" sea variable didáctica en una situación, sino sólo aquel elemento de la situación tal que si se actúa sobre él, se puedan provocar adaptaciones y aprendizajes.

**Primera hipótesis del diseño:**

Al construir una nube de puntos que pueden pertenecer a cualquiera de las cónicas, y en el proceso de experimentar con la configuración geométrica construida, los estudiantes generarían diversas conjeturas que llevarían a realizar diversas construcciones globales que pueden ser *robustas* ó *blandas*, de tal manera que éstas contengan o pasen por la nube de puntos dada u obtenida.

**Segunda hipótesis del diseño:**

En las construcciones geométricas (puntuales o globales) realizadas en Cabri, se generarían visualizaciones que permitirían caracterizar una nube de puntos o una curva en relación con una definición de cónica como lugar geométrico y en consecuencia, hallarían la expresión analítica que contiene dichos puntos o que define la curva.

Las hipótesis anteriormente planteadas en torno al dispositivo experimental, permiten delimitar el propósito general de la secuencia:

**Propósito general de la secuencia:**

Cabe anotar que este propósito se deviene de los factores anteriormente presentados en este informe de investigación. En este sentido, el propósito general aparece contextualizado en una situación de intervención en un aula regular.

Lo que se pretendió en la secuencia fue involucrar a los estudiantes en un proceso de *actividad matemática* donde se les creo un ambiente educativo para que pudieran pensar geométricamente, explorar, analizar, conjeturar, visualizar, representar, modelar un conjunto de puntos con ciertas características, resolver, validar y argumentar, en el contexto de situaciones geométricas arraigadas en las matemáticas mismas. Estas actividades matemáticas y cognitivas tuvieron el objetivo de producir un aprendizaje: que la cónica la llegaran a comprender como un conjunto de puntos determinados (un lugar geométrico) que tienen unas propiedades métricas y geométricas, llevándolos a estudiar puntos particulares de la curva para luego hacer la transición de aprender las características geométricas de la curva desde un punto de vista global, usando como estrategia geométrica las construcciones geométricas en el ambiente Cabri. El paso a lo global estuvo determinado al tratar de solucionar el problema propuesto, encontrando una construcción geométrica (robusta) que cumpliese con las restricciones impuestas y les permitiera llegar a construirla luego de manera algebraica. El paso a lo puntual estuvo determinado por encontrar una construcción global al analizar las propiedades geométricas de puntos particulares de la cónica.

En cuanto a las *variables micro-didácticas* identificadas y puestas en juego en las situaciones didácticas, están:

i. *El tipo de construcciones geométricas.* En los diseños se consideró construcciones geométricas puntuales y globales. En el caso de las construcciones puntuales se generaron un conjunto finito de puntos y para las construcciones globales se obtiene la traza finita de una cónica y que da la apariencia de ser continua en la pantalla. Una de las características de las construcciones puntuales, es que todos los puntos se obtienen a partir de la intersección dos líneas y por tanto es una construcción estática, en consecuencia, ningún punto se deja arrastrar. Mientras que las construcciones globales son dinámicas, en tanto que es posible construir la curva completa como un lugar geométrico generado a partir de un punto que se arrastra.

ii. *Las herramientas de Cabri.* Estas se corresponden con las denominadas variables de comando e incluyen rasgos característicos de los AGD tales como el arrastre, los macros y la posibilidad de construcción de lugares geométricos o Locus. En términos más específicos puede los estudiantes tienen a su disposición todas las herramientas de Cabri, a excepción de una herramienta, "Cónica". Para ello, al comenzar la situación, ellos descargan de la Web del curso, los archivos pertinentes para cada situación. Uno de los archivos entregados restringe el uso de esta herramienta. Esta herramienta suprimida en esta situación se activa al seleccionar cinco puntos y construye automáticamente la cónica que los contiene y al acercar el cursor a la curva determina el tipo de cónica. En cuanto a las otras herramientas de Cabri, los estudiantes pueden necesitar la herramienta "Traza", y la Herramienta "Lugar", el modo de arrastre, las herramientas de medida tales como "Distancia y longitud", "Coordenadas o ecuación", "Calculadora", entre otras herramientas.

En correspondencia con estas *variables micro-didácticas* es posible establecer como *unidades de análisis*[76] las siguientes:

- El *tipo de construcción geométrica* que puede ser blanda o robusta;

[76] Estas fueron adaptadas a partir del esquema de las *unidades de análisis* que fue propuesto en la investigación de Camargo y Guzmán (2005).

- Los ***tipos de representaciones matemáticas*** que se involucran en la solución de cada una de las situaciones problema, y

- ***Fenómenos didácticos*** e ***interacción didáctica***.

### Estructura general de cada una de las situaciones:

Por último, en este capítulo se puede anticipar a afirmar que en cada una de las situaciones diseñadas se presentaron tres fases diferenciadas (Ver Anexo No. 4):

Fase 1, de construcción geométrica;

Fase 2, donde se reflexionaba sobre la construcción (puntual o global) realizada en la anterior fase, se escribía una conjetura de lo que aparecía en la pantalla y se validaba a través de una nueva construcción geométrica robusta que contuviera la nube de puntos o se validaba usando el modo de arrastre del AGD, y por último;

Fase 3, donde se proponía pasar a la representación algebraica.

En la Tabla 7, se presenta la articulación de los análisis *preliminares* con las fases de las situaciones didácticas diseñadas.

*Tabla 7: Articulación del análisis preliminar con las situaciones didácticas.*

<table>
<tr><th>Fases ↓</th><th>Dimensiones→</th><th>Didáctica</th><th>Cognitiva</th><th>Epistemológica</th></tr>
<tr><td colspan="2">Construcción geométrica</td><td>• Fase de acción de acuerdo con la TSD.<br>• Tarea en Cabri Tipo I y III. Se les da una macro y se les restringe las herramientas del Cabri.<br>• Construcción robusta y estática.</td><td rowspan="2">• Enfoque puntual o global a través de construcciones geométricas.<br>• Abordar el error de considerar que las cónicas se pueden construir usando únicamente la regla y compás. Lo que se construye son puntos de la cónica, pero no la</td><td>• Tratamiento puntual y global de las cónicas.<br>• Tratamiento sintético de las cónicas.<br>• Problemas clásicos de la geometría.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Experimentación</td><td>• Fase de formulación de acuerdo con la TSD.<br>• Construcción robusta o blanda. Son dinámicas pues exigen movimientos.<br>• El Cabri como medio que permite retroacciones.<br>• Conjeturación.</td><td>• Definición de la cónica como lugar geométrico desde el punto de vista dinámico.</td></tr>
</table>

| Fases ↓ | Dimensiones→ | Didáctica | Cognitiva | Epistemológica |
|---|---|---|---|---|
| | | • El uso del Lugar Geométrico como Herramienta dentro de la dialéctica herramienta – objeto.<br>• Tarea tipo II: descripción verbal y Tipo IB porque tiene que construir la curva que cumpla ciertas condiciones (que pase por los puntos de la nube construida). | figura de manera global, al usar estos instrumentos.<br>• Abordar el desconocimiento del significado de lugar geométrico.<br>• La visualización<br>• El tipo de representaciones matemáticas.<br>• Las representaciones ejecutables.<br>• El AGD Cabri Géomètre II Plus como mediador de conocimiento. | |
| **Validación** | | • Fase de *Validación* de acuerdo con la TSD.<br>• Tarea tipo IV: los estudiantes enuncian una conjetura y la deben validar usando un sistema de representación algebraica. En algunos casos recurren a realizar la Tarea tipo V. | | • Los dos problemas fundamentales de la *geometría analítica*.<br>• Enfoque analítico. |

A continuación se presentan los análisis *a priori* de las situaciones.

# CAPÍTULO 4.
# DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y SUS ANÁLISIS *A PRIORI*

En correspondencia con las fases de la *micro-ingeniería didáctica*, en este capítulo se constituye la tercera fase: "el diseño de las situaciones didácticas y sus análisis *a priori*", por tanto se retoma algunos de los planteamientos de Artigue (1995):

> Este análisis *a priori* se debe concebir como un análisis de control de significado. Esto quiere decir, de forma muy esquemática, que si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirven de referencia a la metodología de la ingeniería didáctica ha pretendido desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. (p. 44)

De esta forma, el objetivo del análisis *a priori* es determinar de qué modo las elecciones realizadas permiten controlar el comportamiento de los estudiantes y los significados que ellos construyen. Para ello, el análisis se basa en varias hipótesis, cuya validación estará indirectamente en juego durante la cuarta fase, en la confrontación entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

Para Ferrari (2001) los análisis *a priori* de las situaciones didácticas diseñadas permiten controlar el proceso y las variables didácticas puestas en juego, conjeturando con sustento los efectos esperados. Es en consecuencia una fase prescriptiva como predictiva.

En primera instancia, se presenta un plan de actuación e instrumentos para recoger la información.

## 4.1. Plan de Actuación e Instrumentos para Recoger la Información

Se diseñaron ocho *situaciones problema*, tres relacionadas con *parábolas*, tres con *elipses* y dos con *hipérbolas*. En cada una de ellas se plantean construcciones *puntuales* y *globales*, siempre iniciándose el estudio de una *cónica* desde las construcciones *puntuales* (Ver Anexo No. 4).

Las situaciones problemas fueron desarrolladas en parejas de estudiantes, usando Cabri Géomètre II Plus. Los estudiantes accedían a las indicaciones de las *situaciones problemas* o enviaban su trabajo al curso virtual de *geometría analítica*, un espacio en la Web, por lo que uno de los requerimientos de los computadores era el acceso a internet.

Los archivos de Cabri proporcionados tenían la restricción del comando "*Cónicas*", además se presentaba en la hoja Cabri una figura construida (macro o caja negra), cuyo estudio debe iniciar la tarea solicitada.

Cada grupo de estudiantes recibía dos hojas de papel al inicio de cada sesión. En la primera hoja, se presenta el enunciado de cada problema geométrico. En ésta se dan las indicaciones e instrucciones de la *situación problema* que remite ó bien a una construcción puntual ó a una global usando Cabri y se le sugiere que escriban sus conjeturas frente a la construcción realizada.

La segunda hoja de papel, es la hoja de trabajo del estudiante, que deberá entregarse al finalizar la sesión de clase. En ellas escribirán sus conjeturas, las estrategias ganadoras de los procesos de construcción geométrica que ellos realizaron, así como preguntas pertinentes a cada situación.

Una vez los estudiantes inician su trabajo en Cabri, se les indica que inicien el *registro de sesión*. Los estudiantes al finalizar su trabajo deberán enviarlo en un archivo comprimido al curso virtual de *geometría analítica*, por lo que el profesor debe tener presente en su clase, un espacio de tiempo para explicarles los detalles de cómo realizar estas actividades.

Gutiérrez (2005) determina que el *registro de sesión* es una valiosa herramienta porque permite ver lo que se borra y las manipulaciones que se hicieron de los objetos hechos bajo el modo de arrastre, también permite ver en qué momento de la sesión de trabajo surgen las ideas que les permiten avanzar hacia la solución del problema, o que les llevan a un bloqueo. Sin embargo, esta opción no permite grabar voz, descartándose las discusiones de los estudiantes.

Como trabajo en casa se les propone la obtención de la *representación algebraica* de la *cónica* que pasa por los puntos dados o hallados. Luego se les pedirá que entreguen la demostración escrita a través del curso virtual de *geometría analítica*.

Antes del desarrollo de las situaciones problema es necesario que los estudiantes conozcan las construcciones robustas clásicas y dinámicas en un AGD de una parábola, una elipse y una hipérbola. En este sentido, para este trabajo se realizaron previamente a la experimentación de esta investigación, las construcciones geométricas de las cónicas propuestas por Díaz-Barriga (2006) presentadas en el Anexo No 7.

También es necesario que los estudiantes conozcan las definiciones de las cónicas como *lugares geométricos* en donde se explicitan las relaciones métricas intrínsecas, así como sus expresiones algebraicas en su forma canónica y estándar y los elementos geométricos que las caracterizan. Para tal efecto, se tuvieron tres horas de clase antes de esta experimentación, donde el profesor les explicó los teoremas y propiedades algebraicas de las cónicas así como la génesis histórica de estas curvas.

En la Tabla 8, se hace un resumen del orden de la secuencia de experimentación de cada una de las situaciones problema, del tiempo estimado. Además se determinan los instrumentos de recolección de datos usados. Para cada situación problema se estima un tiempo de dos horas, es decir de una sesión de clase.

*Tabla 8: Planificación de la experimentación de cada una de las situaciones problema.*

<table>
<tr><th>SITUACIONES PROBLEMA (SP) PUESTAS EN ACTO</th><th>SESIÓN/ TIEMPO ESTIMADO</th><th>INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN</th></tr>
<tr><td>1. SP No. 1a Puntual (Nube de puntos de Parábola)</td><td>1 sesión (primera)/ 2 horas</td><td rowspan="8">- Videograbaciones de las interacciones de los participantes de la clase<br>- Videograbaciones de las cámaras de vigilancia.<br>- Registro de audio<br>- Registro de Sesión en Cabri.<br>- El archivo final realizado en Cabri.<br>- Observaciones.<br>- Trabajo en casa: obtención de la representación algebraica de la gráfica obtenida<br>- Hojas de trabajo.</td></tr>
<tr><td>2. SP No. 1b Puntual (Nube de puntos de la Parábola de Werner)</td><td>1 sesión (segunda)/ 2 horas</td></tr>
<tr><td>3. SP No. 1c Global (Problema de Tangencia de Apolonio sobre Parábola)</td><td>1 sesión (tercera)/ 2 horas</td></tr>
<tr><td>4. SP No. 2a Puntual (Nube de puntos sobre Elipse)</td><td>1 sesión (cuarta)/ 2 horas</td></tr>
<tr><td>5. SP No. 2b Puntual (Nube de puntos sobre Elipse con un rectángulo dado)</td><td>1 sesión (quinta)/ 2 horas</td></tr>
<tr><td>6. SP No. 2c Global (Problema de Tangencia de Apolonio sobre Elipses)</td><td>1 sesión (sexta)/ 2 horas</td></tr>
<tr><td>7. SP No. 3a Puntual (Nube de puntos sobre Hipérbola)</td><td>1 sesión (séptimo)/ 2 horas</td></tr>
<tr><td>8. SP No. 3b Global (Problema sobre la Potencia de un Punto)</td><td>1 sesión (octava)/ 2 horas</td></tr>
</table>

## 4.2. Análisis *a priori* de las situaciones problemas

Aunque se realizaron ocho situaciones problema, en este trabajo se presenta el análisis *a priori* y *a posteriori* de tan solo dos situaciones problema (Ver Anexo No. 4, donde aparecen las ocho situaciones problema propuestas con sus respectivas hojas de trabajo). La razón de esta última selección, se debe a que las dos situaciones problemas analizadas son suficientes para indagar los aspectos planteados en la investigación, además en todas las situaciones se repiten algunos procesos de construcción que se deseaban analizar.

Para cada una de los análisis *a priori* de las situaciones problema se presenta una descripción general donde se dan cuenta de las fases o momentos de la TSD, los propósitos, los saberes matemáticos que se movilizan y los comportamientos que se prevén.

Todas las situaciones empiezan por un momento de *acción* debido a que se le solicita a cada pareja de estudiante, realizar una construcción que posteriormente valida sus propiedades por medio del arrastre, esto lo lleva a confrontar el medio con el enunciado, dado en la hoja de trabajo. En el desarrollo de cada una de ellas, se pueden dar los momentos de *acción*, *validación*, *formulación* e *institucionalización*.

### 4.2.1. Análisis *a priori* de la situación problema No. 1a.

***Descripción General***

Esta situación surgió a partir de un problema que fue propuesto en Anfossi (1961) para el ambiente lápiz y papel. La situación problema se modificó al ser tratada en el *medio* ejecutable de Cabri y al adaptarse de acuerdo a las tipologías de Laborde (1998a; 1998b; 2001; 2008), surgieron preguntas que movilizan pensamiento geométrico alrededor del dinamismo que ofrece el ambiente informático, al establecerse una construcción geométrica que pueda mostrar globalmente la nube de puntos dada.

La situación problema está constituida por tres fases:

Inicialmente el estudiante debe recibir dos archivos de Cabri, uno de ellos contiene una construcción geométrica de un rectángulo ABCD, dados su base (el segmento AB) y su altura (el segmento AD), para el cual se deja arrastrar los extremos de estos segmentos y en consecuencia, pueden ver que la figura sigue siendo un rectángulo bajo el arrastre de los extremos de los segmentos AB y AD. El objetivo propuesto fue que a partir de ese rectángulo y de unos puntos que aparecen en el segmento DC, construyan una nube de puntos que son estáticos porque van a ser generados por los estudiantes como puntos de intersección. En esta fase sólo construirá la nube de puntos.

La segunda fase se divide en dos partes, a) y b). La parte a) se vincula con la *formulación* de una conjetura acerca de cuál creen que sea el tipo de cónica que incide por esos puntos construidos. En la parte b) se les pide que realicen una construcción geométrica dinámica y robusta que genere un lugar geométrico que contenga la nube de puntos. Esta fase se constituye en un momento de *acción* debido a que los estudiantes proponen diversos procedimientos de construcción geométrica como solución a tal problema. Así mismo, en esta fase, entra a jugar el otro archivo de Cabri, el cual contiene el conjunto de herramientas restringidas del ambiente. Esto con el fin de que no puedan usar la herramienta "Cónica", porque con cinco puntos de la nube construida en esta fase, ellos podrían saber qué cónica resultaría, por esa razón, se les quita esa herramienta para que la actividad de la *conjetura* tenga sentido (momento de *formulación*). No obstante, en la parte b) de esta segunda fase, se les pide que *validen* su conjetura cuando hayan encontrado la construcción geométrica dinámica que vaya recorriendo los puntos de la nube, al explicar por qué razón funciona dicha construcción.

En la tercera fase se les pide una demostración analítica de su conjetura. Por lo tanto se constituye en una fase de *validación*. Esta la deben de entregar en la siguiente sesión de clase. Vale recalcar que con esta fase, se trataría el segundo problema fundamental de la *geometría analítica*, de dada una figura (la curva que pasa por esa nube de puntos) entonces se debe hallar la ecuación.

Una manera de validar la construcción dinámica y robusta que se les solicita en la segunda fase es a partir del *arrastre* de uno de los extremos de los segmentos $AB$ y $AD$ que determinan los lados del rectángulo $ABCD$.

La construcción inicial en la primera fase es puntual, porque tienen que hallar una nube de puntos pero posteriormente tienen que realizar la construcción global en la segunda fase, y lo deseado es que encuentren una construcción geométrica que sea robusta.

En la fase de *institucionalización* se piensa develar la respuesta válida de la conjetura y una construcción robusta. En el caso de que no surja una construcción robusta por parte de los estudiantes, el profesor puede mostrarles algunos pasos de la construcción geométrica que sirva como *estrategia ganadora* (el lugar geométrico como herramienta, véase el apartado 2.3.1 sobre los lugares geométricos desde la dialéctica *herramienta – objeto*) para encontrar el foco. Con el foco y el vértice encontrados de manera exacta, los estudiantes pueden encontrar la parábola que pasaría por la nube de puntos siguiendo las indicaciones de Díaz-Barriga (2006).

Previo a la experimentación, los estudiantes usaron el lugar geométrico como una herramienta en dos problemas geométricos presentados por Polya (1985), partiendo de usar el ambiente informático para encontrar el punto *clave* y luego dando la solución en términos algebraicos, usando un sistema de coordenadas apropiado. Uno de los problemas se trabajó en el tema de *línea recta* y otro en el tema de *circunferencia*. Esto con el fin de que conocieran y usaran el *método de lugar geométrico* como *herramienta* en las situaciones problemas que se presentan en la secuencia diseñada.

### *Propósitos*

- Generar representaciones gráficas estáticas y dinámicas usando el Cabri para estudiar las partes constitutivas de la parábola, para ello es necesario que los estudiantes retomen la definición de parábola como lugar geométrico, trabajada previamente en clase.

- Determinar la expresión algebraica de la parábola que contiene la nube de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas determinada por el estudiante.

- Describir la articulación entre las representaciones gráficas y algebraicas de la parábola construida por el estudiante.

### *Saberes matemáticos involucrados en la Situación Problema*

En el desarrollo de la Situación Problema No. 1a, es necesario validar el tipo de cónica obtenida en la nube de puntos. Los estudiantes pueden realizar diversas demostraciones geométricas y algebraicas, a continuación se presentan algunas:

***Una solución desde la proporcionalidad para determinar que la cónica que pasa por los puntos es una parábola:***

Esta solución da cuenta de la parte b) de la segunda fase, la *validación* de la conjetura.

Los estudiantes pueden realizar en Cabri las nubes de puntos, obtenidos con las intersecciones de los segmentos trazados desde C a los puntos 1a, 2a hasta 9a con las líneas verticales perpendiculares al segmento DC (Ver Figura 23).

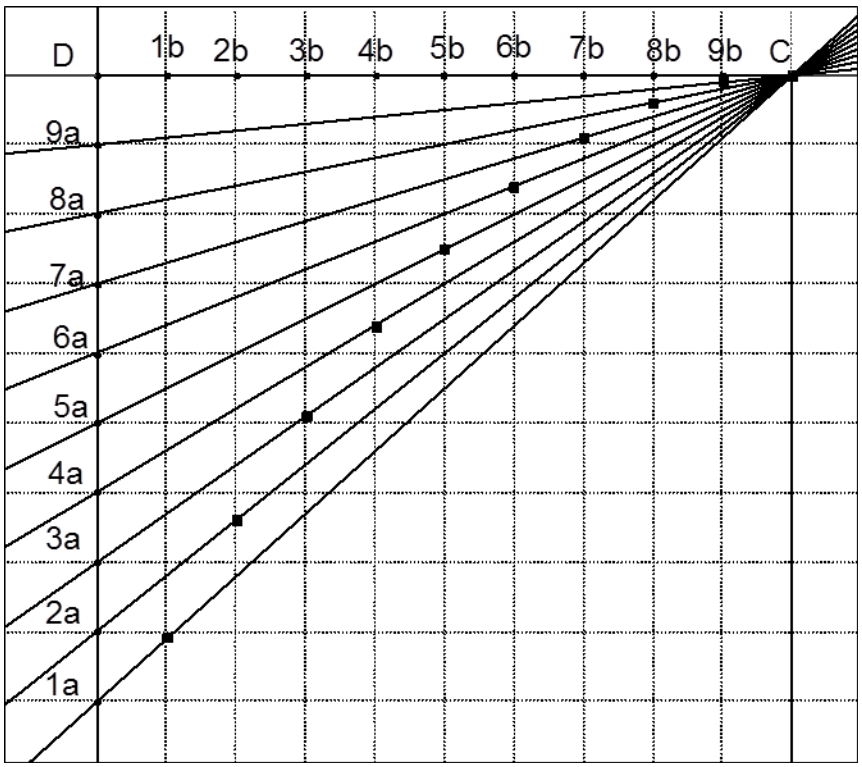


*Figura 23: Nube de puntos de la situación problema 1a.*

En la anterior nube de puntos se observan varios triángulos, como los que se ven en la Figura 24, tómense uno de estos donde $k \in \{0,1,2,3,4 \ldots\}$

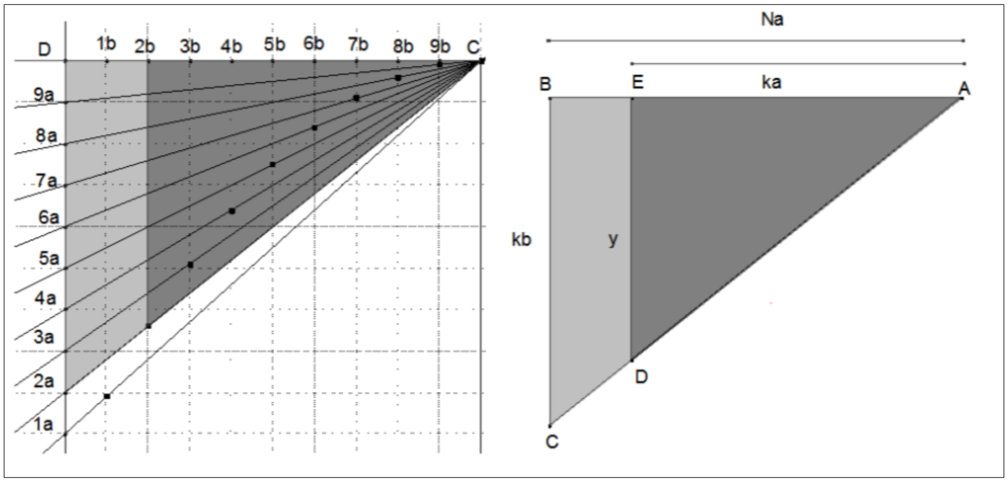



*Figura 24: Triángulos semejantes a partir de la nube de puntos.*

Por la naturaleza de la construcción geométrica, los triángulos $\Delta ABC\ y\ \Delta AED$ son rectángulos ($\angle E \cong \angle B$ y $\angle E = 90°$) y tienen un ángulo en común, $\angle A$, por lo tanto los triángulos son semejantes por el criterio A-A ($\Delta ABC \approx \Delta AED$).

Por lo que sus lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{y}{kb} = \frac{ka}{Na}$$

Despejando $y$ se obtiene:

$$y = \frac{b}{N}k^2$$

De la anterior expresión $N$ y $b$ son valores constantes, mientras que $k$ toma diferentes valores, $k \in \{0,1,2,3,4 \ldots\}$. Si $C$ pasa por el origen de un plano cartesiano, entonces la expresión se puede escribir como $y = \frac{b}{N}x^2$ dónde $x$ toma valores en $N \cup \{0\}$. De esta manera la expresión algebraica y el dominio matemático tomado en consideración, corresponde a una nube de puntos finitos discretos graficados que pertenecen a una parábola simétrica al eje $y$.

***Otra solución para justificar que la nube de puntos pertenecen a una parábola:***

Esta da cuenta de las fases 2 y 3, construcción global de una parábola y validación de la conjetura respectivamente.

¿Cómo se puede probar que los puntos pertenecen a una parábola?

Se procede a utilizar el método de las alturas:

Se comienza con la construcción ya dada, donde se encuentran algunos puntos de intersección, se toma un punto arbitrario $F$ (Ver Figura 25).

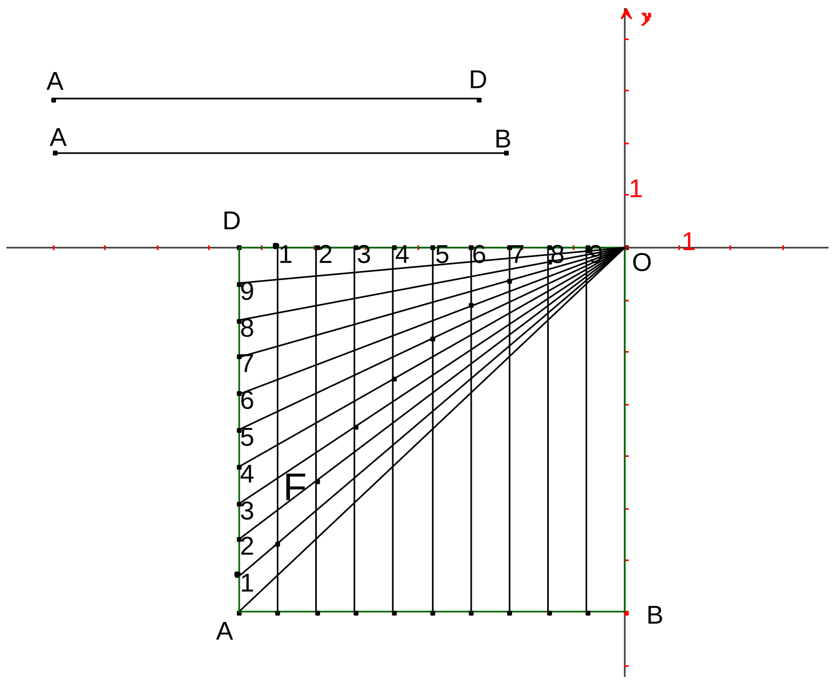



*Figura 25: Obtención del punto F.*

Se traza una recta perpendicular al lado $AD$ por el punto $F$ y luego se realiza la intersección de ésta con el eje $y$, a tal punto de intersección se le denomina $H$, para luego trazar una circunferencia con centro en $C$ y radio $CH$ (Ver Figura 26).

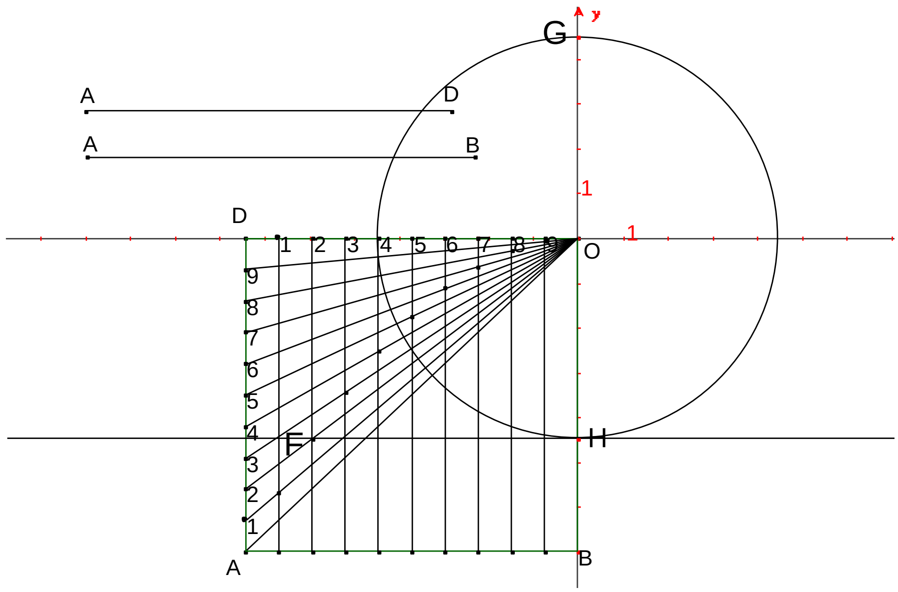



*Figura 26: Obtención del punto H y circunferencia de radio OH.*

Al trazar una recta $m$ que pasa por $B$ y por $H$, se encuentra el punto de intersección de la circunferencia con la recta $m$, denotado por $G$.

Luego se traza la recta $n$ que pasa por $G$ y $F$[77], seguidamente se traza la perpendicular a la recta $n$ en el punto $F$ y la intersección de esta perpendicular con la recta $m$ se denotará con $E$ (Ver Figura 27).

[77] Si los puntos pertenecen a una parábola, esta recta es tangente.

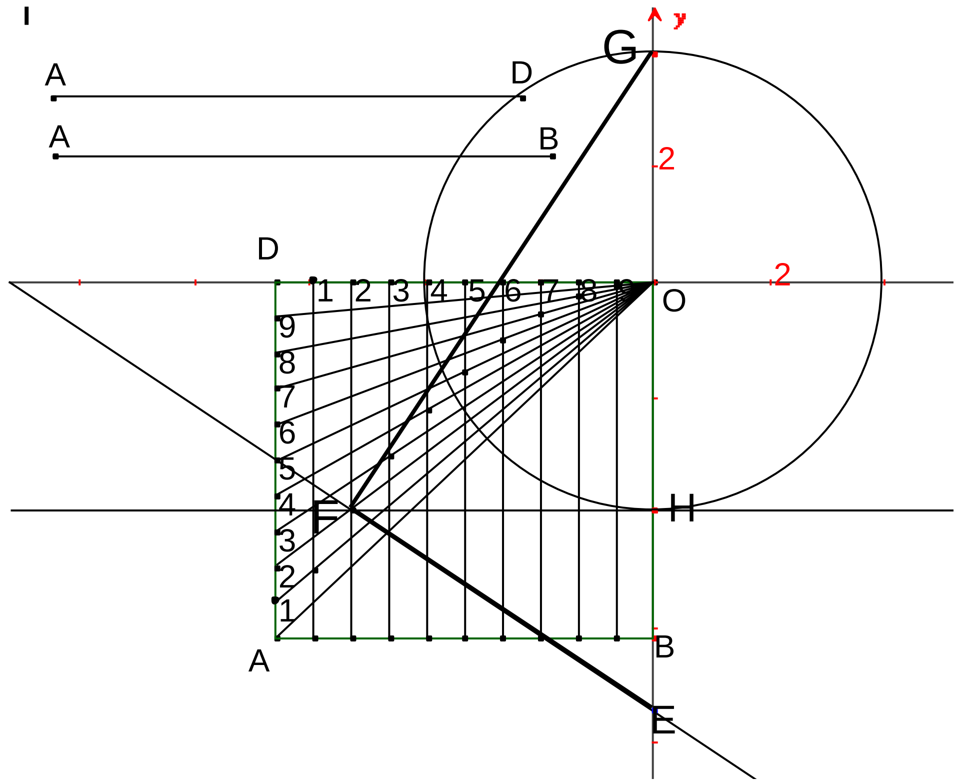



*Figura 27: Construcción de las rectas perpendiculares n y m.*

Así el triángulo $EGF$ es por construcción un triángulo rectángulo, y $FH$ es su altura, entonces los triángulos $EHF$ y $HGF$ también serán rectángulos (Ver Figura 28).

Luego aplicando el Teorema de la Altura al triángulo EGF, se tiene:

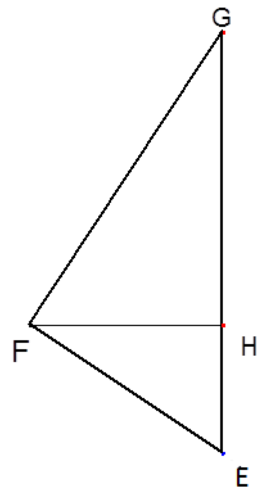



*Figura 28: Triángulo rectángulo EFG.*

$$\frac{FH}{GH} = \frac{EH}{FH}$$

Donde $FH$ es $x$, $GH$ es $2y$, luego $x$ y $y$ deben ser distintos de cero, para que pueda existir la construcción del triángulo rectángulo $EFG$, y denotemos a la medida del segmento $EH$ como $k$.

$$\frac{x}{2y} = \frac{k}{x}$$

Así la ecuación obtenida es

$$x^2 = 2ky$$

Si $k$ es constante, entonces los puntos pertenecen a una parábola por la estructura de la ecuación obtenida.

Como el conjunto de puntos dados es finito. Se puede comprobar midiendo en Cabri que la distancia de $EH$ es constante para cualquiera de los puntos de la nube.

Por lo que:

$$x^2 = -2ky$$

Donde el signo menos se incorpora para coincidir con la orientación, según la escogencia del plano cartesiano.

Por último, se determina la distancia $k = EH$ y se gráfica la ecuación en el AGD, como se puede ver en la Figura 29, y se tiene que la parábola encontrada que pasa efectivamente por todos los puntos de la nube, además se comprueba que la construcción pasa la prueba de arrastre, al mover los extremos de los segmentos $AD$ y $AB$.

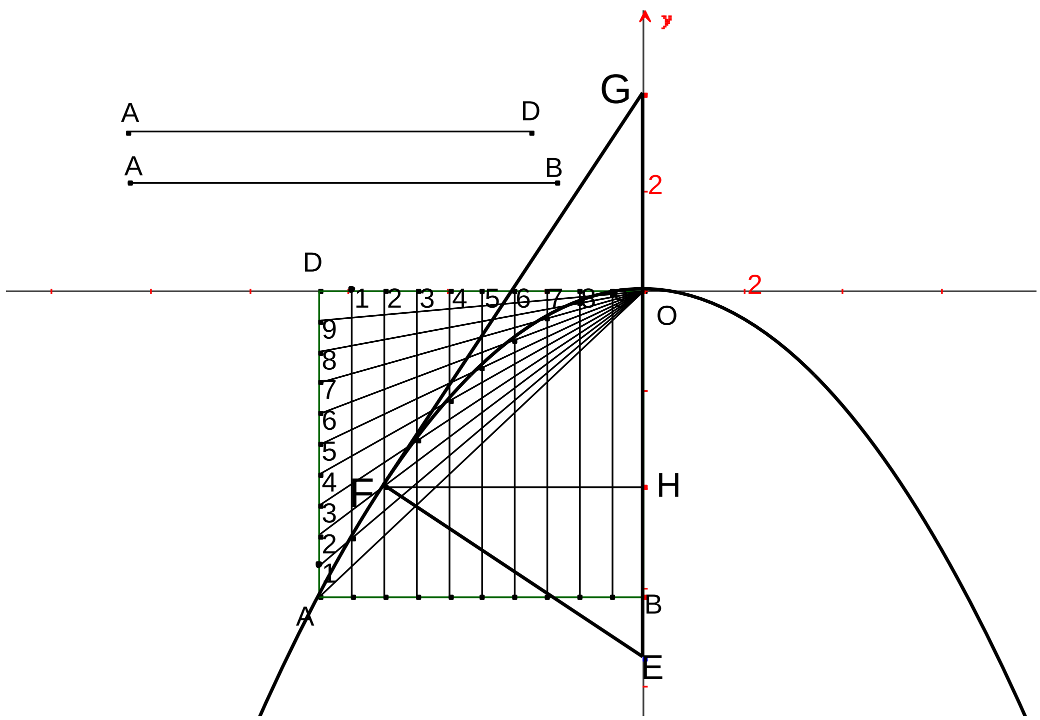



*Figura 29: Gráfica de la parábola que pasa por la nube de puntos.*

***Construcción dinámica usando lugar geométrico de Cabri para hallar la parábola:***

En esta construcción se da cuenta de la fase 1 (construcción puntual) y la fase 2 (construcción global). A lo largo de este trabajo, se espera que los estudiantes utilicen *el método de lugar geométrico* como estrategia de solución, si encuentran el foco y luego la directriz de la parábola, dado su vértice, eje focal y puntos de la parábola, de esta manera, el lugar geométrico actuaría como *herramienta*. En este documento, a esta estrategia se le denomina la *estrategia ganadora*, como la más óptima cuando tienen en cuenta la definición de parábola como lugar geométrico.

Se parte del hecho de que la nube de puntos generada con anterioridad debe estar contenida en una parábola con vértice en $C$, cóncava hacia abajo y el eje de simetría es una recta que contiene al segmento $CB$. Por simetría axial al eje $CB$ se encuentran los puntos de la parábola ubicados a la derecha de su eje de simetría (Ver Figura 30).

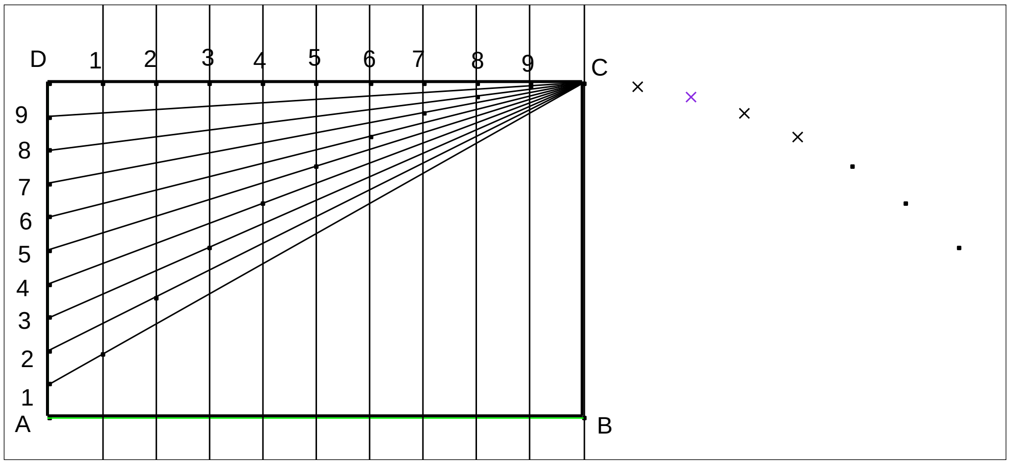


*Figura 30: Hallando otros puntos de la parábola.*

Se construye una posible directriz, a partir de un punto sobre el eje de simetría que permite tener el control de la directriz. La directriz debe ser perpendicular al eje de simetría de la parábola. De esta manera, la recta directriz cambia su posición a partir del punto sobre el eje, siendo invariante la relación de perpendicularidad de dicha recta con el eje de simetría. Luego se trazan rectas perpendiculares a la directriz que pasen por los cuatro primeros puntos de la parábola obtenidos por simetría axial (Ver Figura 31).

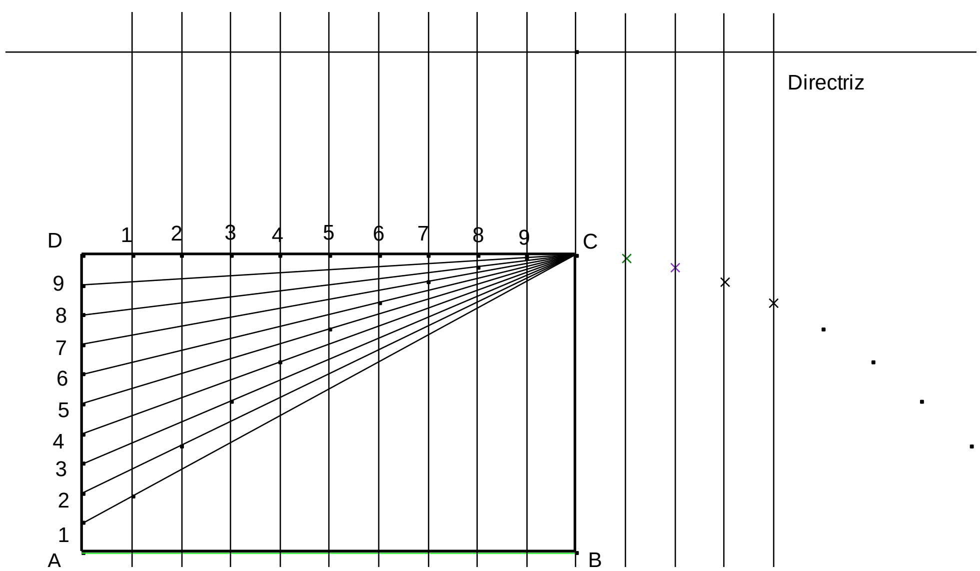


*Figura 31: Puntos de la parábola obtenidos por simetría axial.*

Se trazan circunferencias con centro en los puntos de la parábola con radio hasta el punto de intersección de la supuesta directriz y las rectas perpendiculares. Al mover la supuesta directriz se observa que las circunferencias se interceptan en un punto sobre el eje de simetría, este punto cumple con la condición de ser el foco de la parábola. Las circunferencias se han trazado porque el foco es equidistante de la parábola y de la directriz y los radios de las circunferencias garantizan la equidistancia (Ver Figura 32).

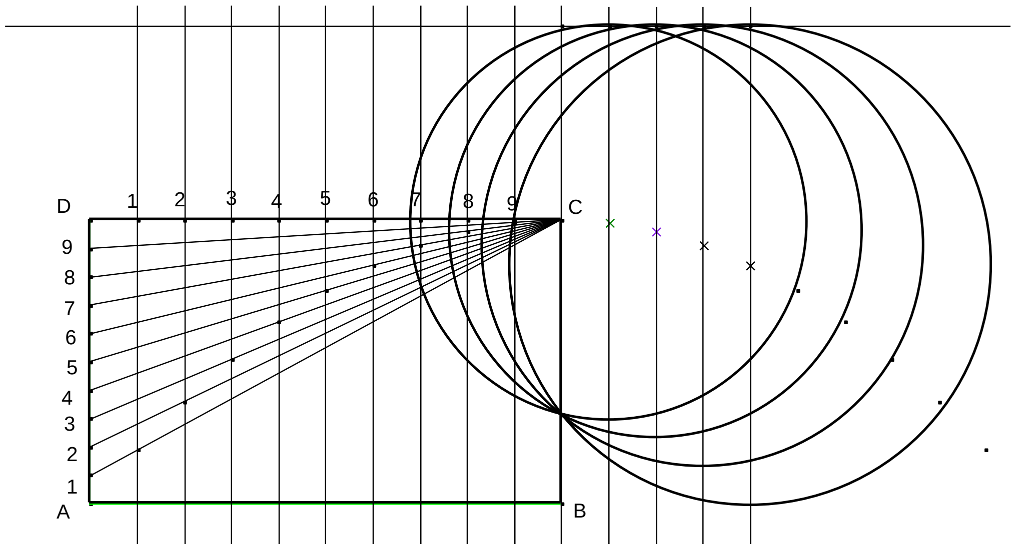



*Figura 32: Circunferencias con centro en un punto de la parábola y tangenciales a la directriz.*

Dado que en Cabri se corresponde con el hecho de que sólo se generan los puntos de intersección entre dos objetos geométricos, se requiere de la herramienta "Lugar" para hallar el foco. Lo primero que se encuentra es el punto de intercepción de la primera y última circunferencia (la de menor y mayor radio) y luego se determina el lugar geométrico (que aparentemente es una hipérbola) de los puntos de intercepción de las dos circunferencias (éste juega el papel de herramienta según Douady (1993)). Posteriormente para hallar el foco de la parábola se encuentra el punto de intercepción del eje de simetría (recta que contiene el segmento $CB$) y el lugar geométrico generado por las dos circunferencias cuando se mueve el punto que controla la posible directriz. (Ver Figura 33).

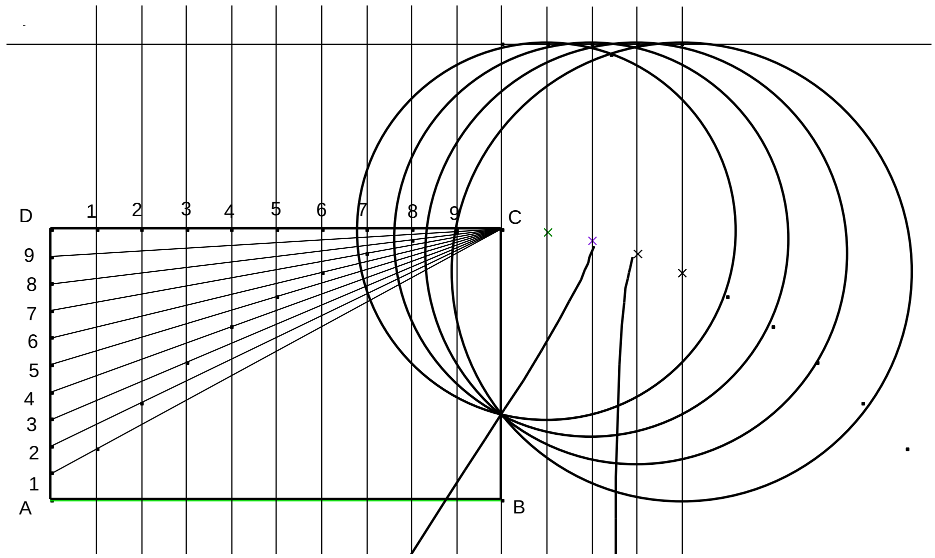


*Figura 33: Lugar geométrico de los puntos de intersección de dos circunferencias al mover la directriz.*

Una vez que se ha obtenido el foco se puede hallar la directriz porque es una línea perpendicular al eje de simetría con la misma distancia del vértice al foco, en esta parábola el punto $C$ es el vértice. Con este foco y la directriz, se efectúa la construcción dinámica y robusta de la parábola como aparece en Díaz-Barriga (2006). (Ver Anexo No. 7). En consecuencia, se verifica que esta nube de puntos pertenece a una parábola (Ver Figura 34), al pasar el test del arrastre a los extremos de los segmentos $AB$ y $BC$.

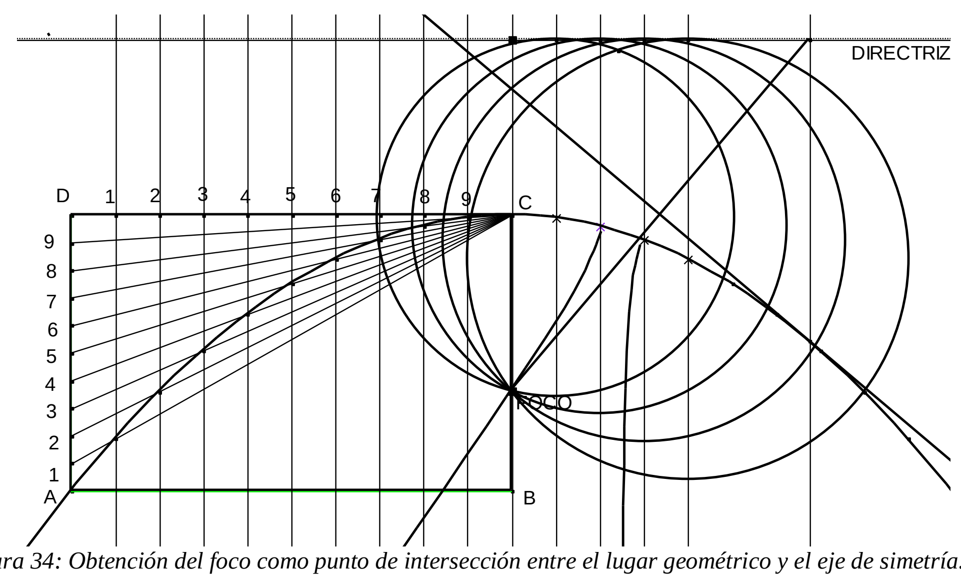


*Figura 34: Obtención del foco como punto de intersección entre el lugar geométrico y el eje de simetría.*

Es posible que los estudiantes efectúen el procedimiento de esta construcción geométrica robusta sin comprender por qué funciona. Sólo aquel estudiante que descubra la construcción tendrá en cuenta la definición de la parábola que está puesta en juego. Se espera que los estudiantes tengan dificultades en hallar la construcción global, robusta y dinámica porque necesitan entender la definición de parábola y además conocer las herramientas del Cabri.

***Otra demostración algebraica:***

Esta solución da cuenta de la fase 3, la obtención de la representación algebraica.

Ubíquese el rectángulo $ABCD$ en el plano cartesiano de manera que $C$ esté en el origen de coordenadas. En la Figura 35, se observan las rectas perpendiculares al eje $x$ y al $y$.

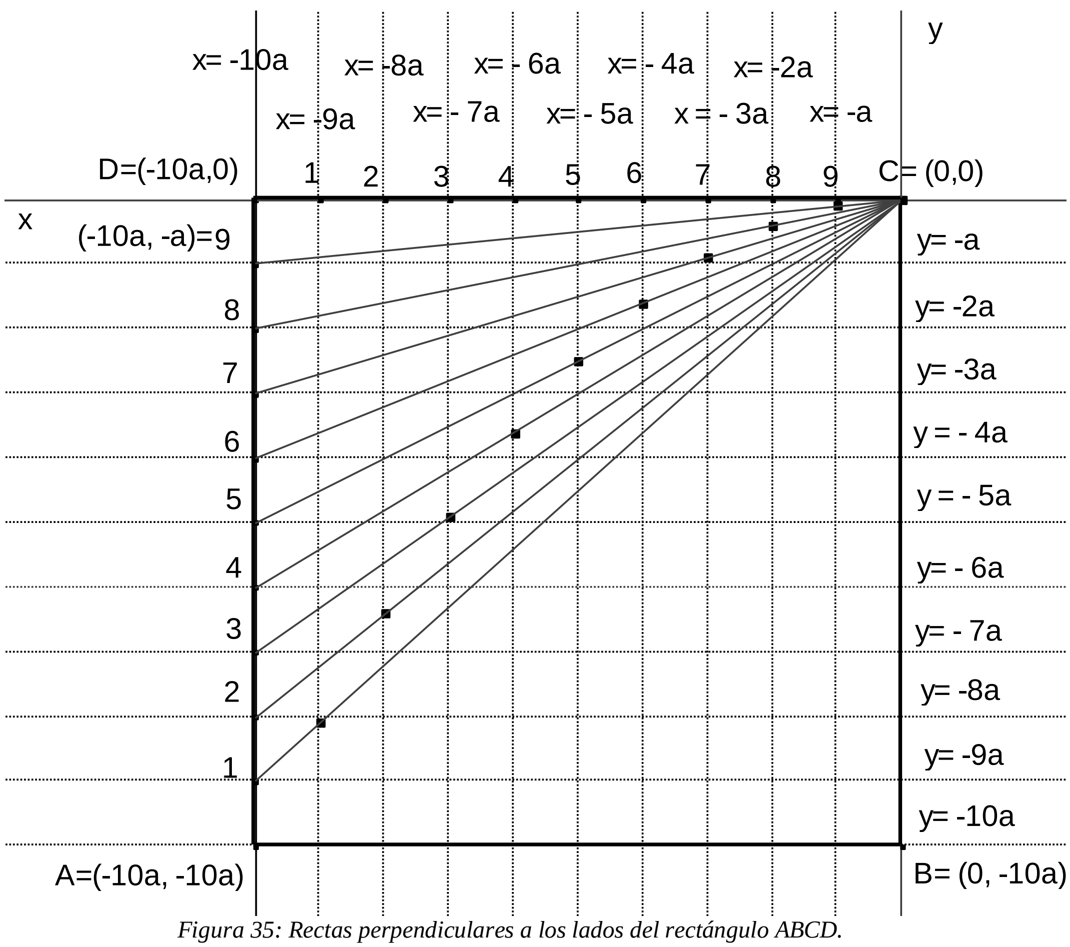



*Figura 35: Rectas perpendiculares a los lados del rectángulo ABCD.*

Donde los vértices del rectángulo $ABCD$ tiene como coordenadas: $A = (-10a, -10a)$, $B = (0, -10a)$, $C = (0,0)$ y $D = (-10a, 0)$. Como el vértice de la parábola coincide con el origen y su eje de simetría es el eje $y$, entonces la ecuación de la parábola es de la forma $x^2 = 4py$ (1).

Para hallar el valor de $p$ es necesario encontrar un punto de la parábola distinto del vértice, denótese $M$. Para hallar $M$ se requiere encontrar el punto de intersección de la recta que pasa por el punto 9 del segmento $AD$ y el punto $C$ con la recta $x = -a$.

El punto 9 sobre segmento $AD$ tiene como coordenadas $(-10\,a, -a)$

Como dos puntos determinan una recta, entonces la ecuación de la recta que pasa por el punto 9 del segmento $AD$ y $C = (0, 0)$ es:

$$y - (-a) = \frac{-a - 0}{-10a - 0}(x - (-10a))$$

$$y = \frac{1}{10}(x + 10a) - a$$

$$y = \frac{1}{10}x \quad \text{(recta } l\text{)}$$

Como se requiere encontrar el punto de intersección de la recta $l$ con la recta $x = -a$, entonces se tiene un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$y = \frac{1}{10}x \quad (2) \quad ; \quad x = -a \quad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), tenemos que $y = \frac{1}{10}(-a) = \frac{-a}{10}$.

Luego el punto de intersección, $M = (-a, \frac{-a}{10})$.

Como la parábola $x^2 = 4py$ pasa por el punto $M$, entonces:

$$(-a)^2 = 4p\frac{-a}{10}$$

Despejando $p = -2.5a$. Sustituyendo este valor entonces $y = -10ax^2$, en este caso $a$ es una constante y corresponde a la unidad de división de los ejes $x$ y $y$. Por lo que se determina que las coordenadas del foco son iguales a $(0, p)$ es decir $F = (0, -2{,}5a)$ y la ecuación de la directriz es $y = -p$, es decir $y = 2{,}5a$.

En esta solución, se utiliza el siguiente teorema:

La ecuación de una parábola de vértice en el origen de coordenadas cartesianas y eje de simetría el eje $y$, tiene como ecuación $x^2 = 4py$, donde el foco es el punto $(0, p)$, y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba, si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.

***Comportamientos previstos en la situación problema No. 1a:***

- Se prevén dificultades para aceptar la situación problema. Los estudiantes pueden no querer hacer una construcción geométrica, debido a la inercia de las prácticas usuales de enseñanza, en las cuales el estudiante toma una actitud pasiva frente a lo que proponga el profesor.

- Tal y como se observó en la dimensión de análisis cognitivo, es posible que sea más difícil de hallar, para la mayoría de los estudiantes, una construcción geométrica dinámica que genere globalmente el lugar geométrico.

- Se prevén que emerjan construcciones blandas. No obstante, puede que éstas arrojen ideas claves para que lleguen a las construcciones robustas.

- Es posible que los estudiantes no se hayan podido apropiar o aprendido la construcción clásica de la parábola (Díaz-Barriga, 2006; Fernández, 2009b) y por tanto no puedan hallar una construcción geométrica o realizar una validación.

- Según lo afirmado en el análisis cognitivo, el observar una nube de puntos para luego completarla, quizás genere evidencias visuales que desencadenen en *visualizaciones* o *imágenes mentales* en las cuales dichos puntos hacen parte de una rama[78] de una cónica. De esta manera, frente a tener que encontrar los elementos que caracterizan la parábola, tales como el foco o la directriz, seguramente empezarán a explorar designando el foco como el punto $B$, al lado $BC$ como posible eje focal y al vértice de la parábola como al vértice $C$ del rectángulo $ABCD$, imaginándose que la parábola abre hacia abajo.

- Otra dificultad que se prevé es que muchos estudiantes no lleguen a hacer la demostración algebraica en la fase 3 (de validación), debido a que tal vez no lleguen a comprender la generalidad que se busca con la construcción global. De nuevo, lo global encierra la generalidad.

[78] Una rama son partes separadas de la representación gráfica de una *cónica*. En el caso de la parábola y la elipse tienen dos ramas cuando las divide un eje focal. En cambio, las ramas de la hipérbola son cada una de las dos partes separadas de esta curva.

- Es necesario que los estudiantes se hayan apropiado de las herramientas “Lugar” y “Traza”, del Cabri. En este caso, se espera que el proceso de familiarización del Cabri que han tenido previamente, sirva para que los estudiantes puedan usar estas herramientas.

- En la fase de acción, cuando lleguen a la conjetura, el profesor los podría cuestionar haciéndoles pensar que lo que ellos creen no lo es, en otras palabras, hacerlos entrar en duda, en términos constructivistas, crearles un *conflicto cognitivo*.

- Para sortear las dificultades, se planearon algunas intervenciones del profesor, de tal manera que surja algún camino, o les produzca un conflicto respecto a un procedimiento utilizado o introducir una nueva información que cuestione a los estudiantes sobre lo que han considerado, como por ejemplo, designar los elementos constitutivos de la parábola en mención. Para tal efecto, se tenían pensados algunos cuestionamientos a los estudiantes tales como:

    - ¿Cuál es la definición de la cónica como lugar geométrico que, de acuerdo a la conjetura de los estudiantes, sea la que más se ajusta? Esta pregunta tiene el objetivo de que los estudiantes vuelvan a experimentar con el Cabri. Es decir, que las retroacciones que da el medio, permitan hacer la devolución de la situación problema.

    - ¿Qué elementos (puntos o segmentos) de la construcción dada o de la que hicieron, se dejan arrastrar, de tal manera que el lugar geométrico que obtuvieron sea invariante ante la acción propia del arrastre y que simultáneamente siga siendo el lugar que pase por la nube de puntos? Esto con el fin de validar o invalidar, bajo el modo de arrastre, su construcción.

### 4.2.2. Análisis *a priori* de la situación problema No. 1c.

#### *Descripción General*

Esta situación es un caso particular de los famosos diez problemas de tangencia de Apolonio de Perga (Rabu-Boyé, 2009). Sin embargo, el autor de esta situación encontró este problema planteado para la *geometría sintética* y para el ambiente de lápiz y papel usando regla y compás en Bruño (1957). Obviamente el problema se modificó en relación al *medio* ejecutable de Cabri y se adaptó de acuerdo las tipologías de tareas que Laborde (1998a; 1998b; 2001 y 2008) propone para usar en Cabri.

Esta situación problema está constituida por cuatro fases.

La primera fase tiene como objetivo realizar una construcción geométrica que involucra conocimientos geométricos de:

- Circunferencia.
- Radio y centro de una circunferencia.
- Línea recta.
- Recta tangente a una circunferencia en un punto,
- Recta perpendicular a una recta que pase por un punto de ella.
- Mediatriz de un segmento.
- Lugar geométrico.
- Parábola.

En esta construcción, deben poner en actos los conocimientos señalados anteriormente para encontrar la figura que cumple algunas condiciones y que lo llevan a encontrar el lugar geométrico de una parábola. Esta fase o momento de la situación es de acción porque deben actuar y usar el medio para validar o invalidar bajo el modo de arrastre. Para hallar esta cónica, entonces debían usar la herramienta "Traza" o "Lugar" de Cabri.

En la segunda fase, se le hace una variante al problema propuesto en la primera fase. Por lo tanto, también es una fase de *acción* y de *experimentación*. Así que se espera que la construcción no sea difícil para los estudiantes, aunque se modifican las etiquetas de los objetos geométricos involucrados. El objetivo es hacer variar una recta perpendicular que depende de un punto móvil $A$ que esta sobre un segmento $F_1M$ y que genera un lugar geométrico. Se espera que los estudiantes deduzcan que la curva generada se constituye en una familia de parábolas al mover el punto $A$, y que piensen si es ó no la misma construcción de la fase anterior.

En la tercera fase hay una serie de preguntas que guían la exploración y el análisis que deben hacer los estudiantes frente al lugar geométrico obtenido en la fase 2. El objetivo de las preguntas es que reflexionen acerca de la familia de parábolas que se genera al arrastrar el punto $A$. Esta fase también tiene como objetivo que los estudiantes se involucren en una actividad propia del quehacer matemático, que los lleve a confrontar sus concepciones frente a la teoría. Se constituye pues en una fase de *comunicación* o *formulación* a la luz de la TSD cuando deben dar explicaciones por escrito en la hoja de trabajo dada.

En la última fase, se solicita hallar la representación algebraica de la parábola obtenida en la primera fase. Se espera que cada estudiante ofrezca su propia expresión algebraica, ya que depende del sistema de coordenadas que ellos seleccionen y de los objetos geométricos involucrados en la construcción.

Las dos construcciones geométricas que se solicitan tanto en la fase 1 como en la fase 2 son construcciones donde se encuentra una figura, en este caso la parábola, pero bajo el enfoque global, es decir se observa la "totalidad" de la figura, y no es puntual debido a que no existe una nube de puntos que deban construir. Lo deseado es que encuentren una construcción geométrica que sea robusta y que además se observe la figura de manera global.

***Propósitos***

- Realizar una construcción geométrica para hallar un lugar geométrico.
- Trabajar la definición de parábola como lugar geométrico.
- Estudiar las regularidades de una familia de parábolas y validar la experimentación hecha con el Cabri.
- Comparar las construcciones geométricas hechas en la fase 1 y fase 2.
- Obtener la expresión algebraica de una parábola en particular generada en el problema de tangencia. Y articular las representaciones gráficas y algebraicas de la parábola construida por el estudiante.

***Saberes matemáticos involucrados en la Situación Problema:***

***Construcción dinámica usando el lugar geométrico de Cabri para hallar la parábola***

En el caso de la construcción de la primera fase, el estudiante debe hallar una circunferencia tangente a la recta $d$ en $B$ de modo que pase por $A$.

Para esto se traza la recta perpendicular a $d$, porque el radio de una circunferencia es perpendicular a la recta en el punto de tangencia y se traza la mediatriz al segmento $AB$ porque cualquier punto de la mediatriz es equidistante al punto $A$ y el punto $B$, de modo que cualquier circunferencia con centro en un punto de la mediatriz contiene a $A$ y $B$. La intersección de estas dos rectas es el centro de la circunferencia (Ver Figura 36).

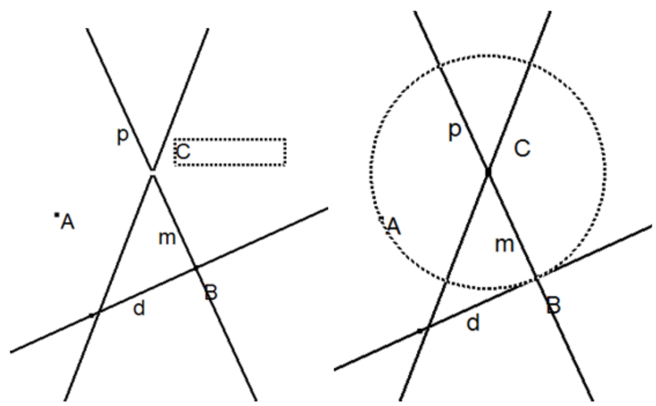



*Figura 36: Construcción de la circunferencia tangente a la recta d.*

Luego, se determina el lugar geométrico de $C$ con respecto a $B$. Para esto se usa la herramienta “Lugar” seleccionando primero el punto $C$ y posteriormente el punto $B$ (Ver Figura 37).

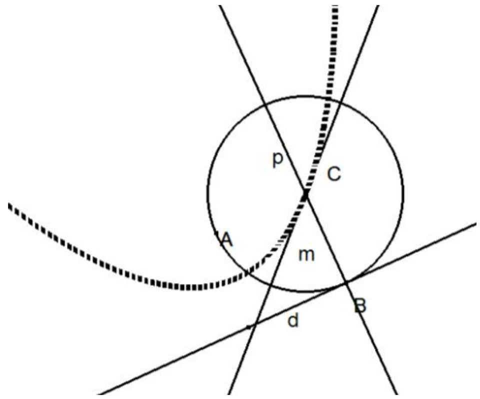


*Figura 37: Lugar geométrico del centro de la circunferencia tangente a la recta d.*

Si compara las características del lugar geométrico en relación a la construcción se determina que es una parábola, con foco en $A$ y directriz $d$. Ya que la distancia del punto $A$ y la recta $d$ al lugar geométrico es igual, en este caso representadas como radios de una misma circunferencia.

En la fase 2 se realiza una construcción similar a la fase 1 con algunos cambios en la notación de los objetos geométricos y determinando la intersección de dos rectas, una perpendicular a la recta $d$ y otra perpendicular al segmento $F_1M$. Mostrar este procedimiento puede ser útil para hallar la solución de la primera fase, dado que al tener las hojas de trabajo pueden iniciar con la fase 2 o resolviendo la fase 2 pueden retornar a la fase 1. Al hallar el lugar geométrico se obtiene una parábola (Ver Figura 38).

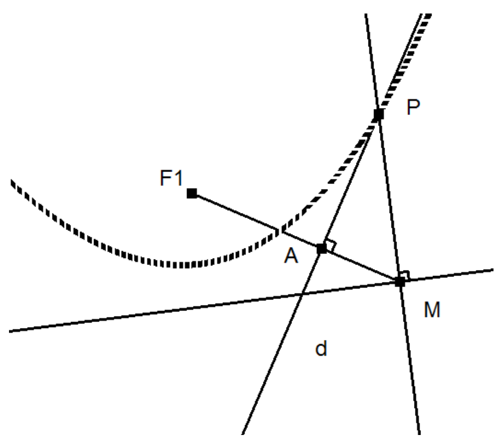


*Figura 38: Lugar geométrico de la segunda fase.*

Para probar que es una parábola se utiliza la misma construcción de la situación 1a para hallar el foco, por lo que se determina el eje focal como la recta perpendicular a $d$ que pasa por $F_1$ y el vértice como la intersección del supuesto eje focal y el lugar geométrico (Ver Figura 39).

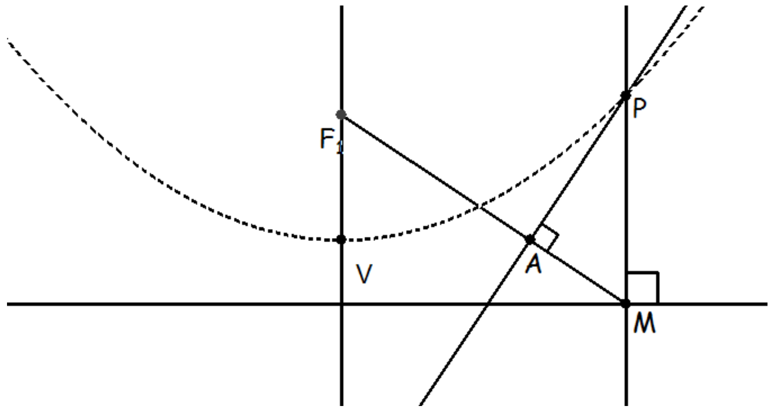



*Figura 39: Construcción del eje focal y el vértice.*

Luego se construye una recta paralela a $d$ llamada $s$, que es la supuesta directriz de la parábola, se trazan dos rectas perpendiculares y se hallan los puntos de intersección de estas rectas con el lugar geométrico llamados los puntos $K$ y $O$. Tomando como centros estos dos puntos, se trazan dos circunferencias tangentes a la recta $s$. Se halla el punto de intersección de estas dos circunferencias (Ver Figura 40).

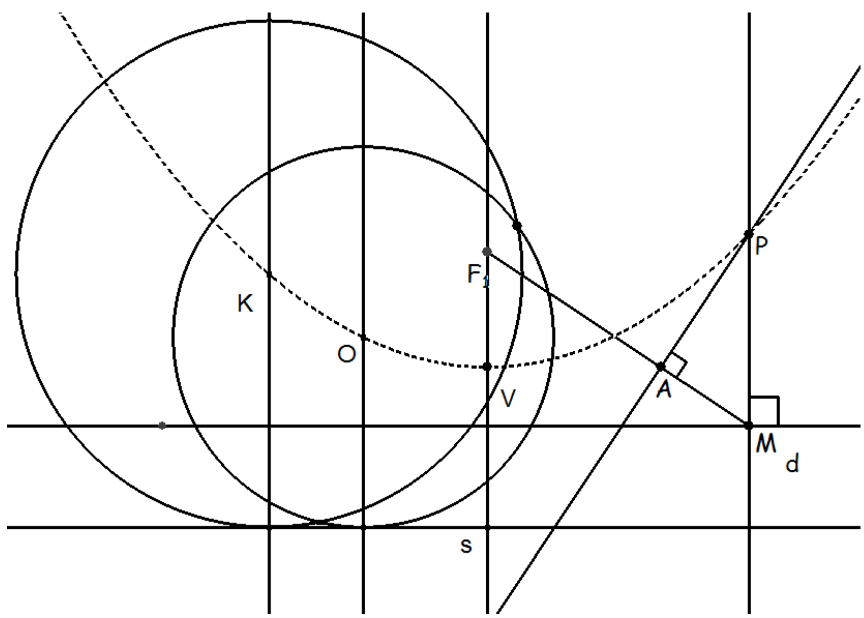



*Figura 40: Construcción de la recta s y dos circunferencias tangenciales a ella.*

Para hallar el foco se usa la *estrategia ganadora* (se reveló como funcional) de la situación pasada, es decir, se encuentra el *lugar geométrico* como punto de intersección de las dos circunferencias con respecto a la recta $s$ cuando se mueve ésta a través del eje focal. El punto de intersección de este lugar geométrico y el eje focal es el foco de la parábola (Ver Figura 41).

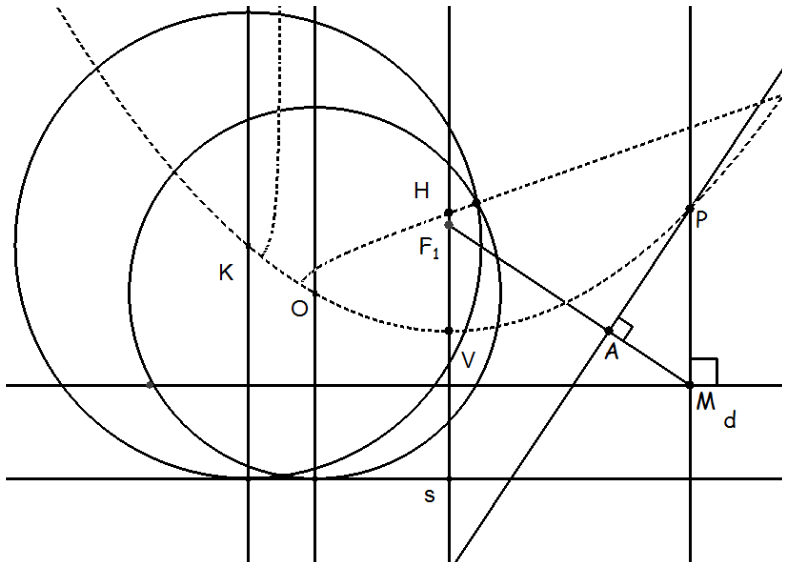


*Figura 41: Obtención del lugar geométrico de la intersección de las dos circunferencias.*

Con este foco y utilizando una circunferencia se determina la directriz llamada $b$, se traza una recta perpendicular a $b$, del punto de intersección de estas dos rectas llamado $T$, se halla la mediatriz entre $H$ y $T$, el punto de intersección entre la recta perpendicular a $b$ y la mediatriz es $C$, éste es el que genera el lugar geométrico que cumple las condiciones de ser parábola (construcción clásica de la parábola, Ver Figura 42). Esta parábola coincide con el lugar geométrico hecho en la fase 2, por tanto son parábolas.

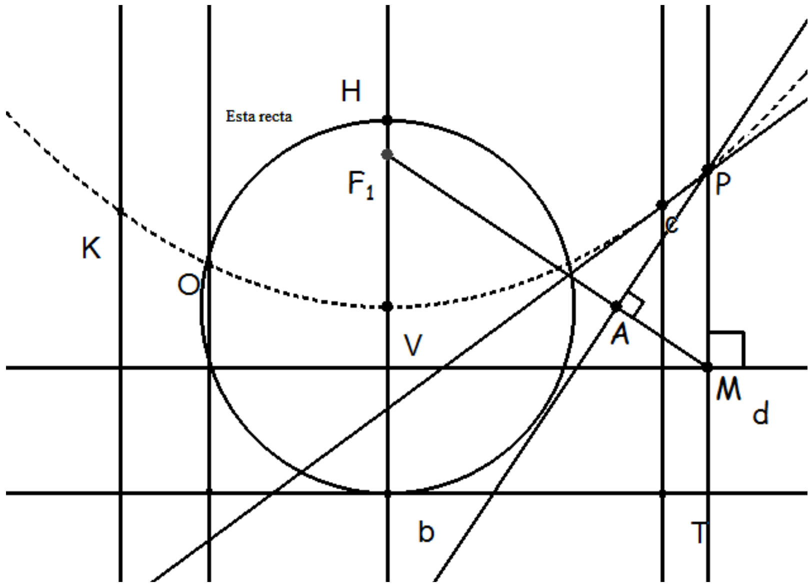


*Figura 42: Construcción de la parábola sobre el lugar geométrico.*

Al mover el punto A, la construcción de la parábola sobre el lugar geométrico sigue siendo congruente (Ver Figura 43).

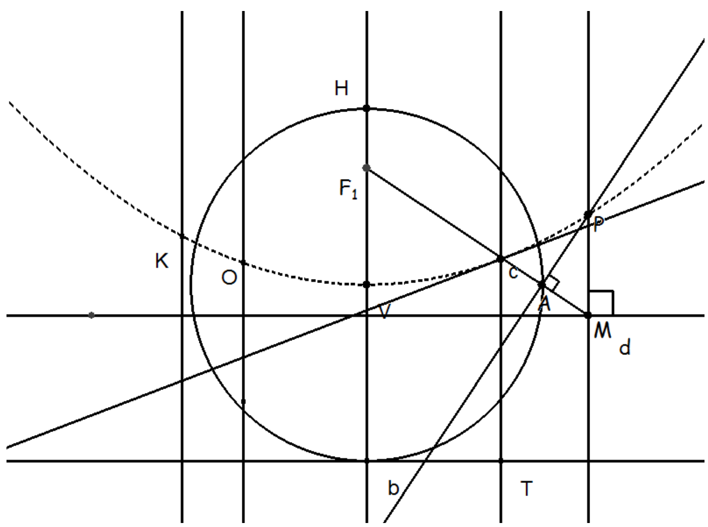


*Figura 43: Verificación de la construcción por la prueba del arrastre.*

### *Demostración algebraica: obtención de la expresión algebraica*

Se va a considerar que la recta $d$ es el eje $x$ y a partir de ella se determina un sistema de coordenadas cartesianas, por lo que $A = (x_2, y_2)$ y $B = (x_1, 0)$. $A$ es un punto fijo mientras que $B$ cambia.

Para hallar la circunferencia tangente a la recta en $d$, se ha trazado una recta perpendicular a $d$ por $B$, esta recta llamada $p$ tiene la siguiente ecuación $x = x_1$. Sea $m$ la recta que es mediatriz al segmento $AB$, el punto de intersección entre el segmento $AB$ y la mediatriz se le nombra como $M$, y sus coordenadas son $(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2}{2})$ (Ver Figura 44).

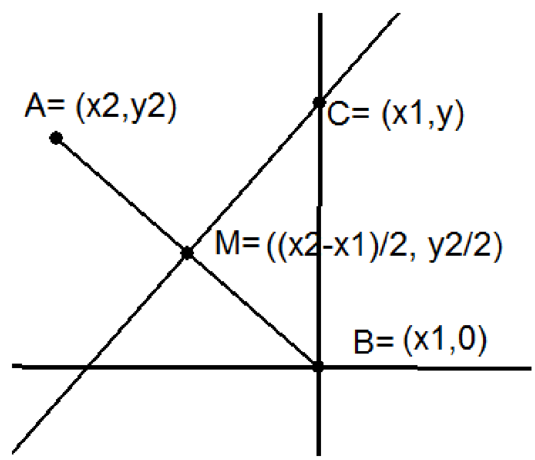



*Figura 44: Asignación de coordenadas a los puntos A, B, C y M.*

Dado que $C$ es el centro de la circunferencia tangente, entonces es este mismo punto quien determina el lugar geométrico cuando se mueve sobre la recta directriz. De éste se conoce que su abscisa es $x_1$y es necesario encontrar su ordenada.

Para hallar su ordenada, se va considerar la intersección de las rectas $m$ y $p$. Por lo que es necesario hallar la ecuación de la recta $m$ que es perpendicular al segmento $AB$ y por tanto su pendiente es $\frac{x_1-x_2}{y_2}$ y la ordenada en el punto de corte con el eje y es:

$$y_2 - \frac{(x_1 - x_2)x_2}{y_2}.$$

Así que la ecuación de la recta $m$ se escribiría:

$$(1) \qquad y = \left(\frac{x_1-x_2}{y_2}\right)x + y_2 - \frac{(x_1-x_2)x_2}{y_2}$$

Como se va hallar el valor de la ordenada del punto $C$, se considera que la ecuación de la recta $p$ es $x = x_1$ y sustituyendo en $(1)$ se obtiene:

$$y = \frac{1}{y_2}(x_1 - x_2)^2 + y_2$$

Y dado que $x_1$ cambia y $x_2$ y $y_2$ son constantes, se tiene que el lugar geométrico del centro de la circunferencia es una parábola con ecuación:

$$y = \frac{1}{y_2}(x - x_2)^2 + y_2$$

En la fase 3 de esta situación 1c, se formularon las siguientes preguntas para que las respondieran por escrito y las experimentaran a la luz del uso del Cabri. Las respuestas a las preguntas son:

En relación a la pregunta 3.1. se espera que los estudiantes afirmen que al mover $A$ sobre el segmento $F_1M$ se generan modificaciones de la abertura del lugar geométrico. Cuando $A$ se acerca a $F_1$ se contrae mientras que cuando $A$ se acerca a $M$ se expande hasta coincidir con la recta $d$.

En la pregunta 3.2. se espera que los estudiantes respondan que el lugar geométrico corresponde a una parábola cuyo foco y directriz cambian al mover $A$ sobre el segmento $F_1M$. Una manera de probarlo es realizando la *estrategia ganadora*, descrita anteriormente, porque el lugar geométrico se superpone sobre la construcción de la fase 2 y al mover el punto $A$ ambos lugares geométricos continúan siendo iguales, por tanto son parábolas.

La construcción de la *estrategia ganadora* permite obtener el foco y la directriz. De esa manera se da respuesta a las preguntas 3.2. y 3.3.

Sólo cuando $A$ es el punto medio de $F_1M$, o la recta $AP$ es mediatriz del segmento $F_1M$ es cuando $F_1$ es el foco y la recta $d$ la mediatriz. (Respuestas a la preguntas 3.4. y 3.5.).

Cuando $A$ coincide con $M$, el lugar geométrico se superpone sobre la recta $d$, cuando $A$ se acerca a $F_1$ la parábola se contrae, se reduce su abertura. (Respuesta a la pregunta 3.6.).

A medida que $A$ se mueve sobre el segmento $F_1M$, la recta $AP$ corta al lugar geométrico en dos puntos (se convierte en recta secante), sólo cuando $A$ es el punto medio del segmento $F_1M$ la recta $AP$, entonces es recta tangente. (Respuesta a la pregunta 3.7.).

Sólo cuando la recta $AP$ es la mediatriz del segmento $F_1M$, la construcción determina el foco en $F_1$ y la directriz se torna la recta $d$, porque la mediatriz por su definición determina que $F_1$ esté a igual distancia de $P$ como $M$ de $P$. Lo que implica que la parábola como conjunto de puntos y la mediatriz como otro conjunto de puntos, tienen en común el punto $P$. A dicho punto, se le denomina punto de tangencia, y la mediatriz llegaría a cumplir simultáneamente el papel de recta tangente a la parábola en el punto $P$. (Respuesta a la pregunta 3.8).

***Comportamientos previstos en la situación problema No. 1c:***

- Se prevén dificultades para aceptar la presentación de una situación problema que contiene muchas fases. Esto debido a la serie de instrucciones que aparecen en las dos hojas de trabajo entregadas.

- Tal y como se observó en la dimensión de análisis cognitivo, es posible que sea más difícil de hallar, para la gran mayoría de los estudiantes, una construcción geométrica dinámica que genere globalmente el lugar geométrico.

- Se prevé que no encuentren el lugar geométrico buscado en la primera fase, debido a que no tienen en cuenta:

    - el *dinamismo* que se imprime en esta situación. De pronto piensan de manera estática las configuraciones geométricas, más aún, cuando en la primera fase se le solicita que utilicen la herramienta de Cabri “Fijar/liberar” que hace perder el dinamismo al punto $A$, de la fase 1.
    - la definición de *mediatriz* como lugar geométrico.
    - la definición de *circunferencia* como lugar geométrico.

- Se prevé que tan solo obtengan en la primera fase, un punto que cumple con las condiciones del problema. Éste sería el *punto medio* hallado entre el punto pie de la perpendicular bajado desde el punto $A$ a la recta dada $d$. Este punto cumple con las condiciones de ser el centro de una circunferencia solicitada.

- Una dificultad es que los estudiantes no se hayan apropiado o aprendido la construcción clásica de la parábola (Díaz-Barriga, 2006; Fernández, 2009b), ya que se considera fundamental en la solución de esta situación.

- Se prevé que en la fase tres no respondan correctamente a la pregunta 3.2. ¿Por qué razón la forma obtenida corresponde a una parábola?

- Así mismo, se prevé que no encuentre el foco y la directriz pertinente a la parábola que se mueve y que depende de la posición del punto $A$ en la pregunta 3.3.

- De la misma manera, en la pregunta 3.3. se prevé que es fácil determinar cuál es el eje focal de la familia de parábolas, ya que esta recta sería perpendicular a la recta dada $d$. Se pronostica que los estudiantes no pongan en funcionamiento la *estrategia ganadora* de la anterior situación problema, pues ésta es una manera de encontrar el foco y la directriz cuando se tiene determinado el eje focal.

# CAPÍTULO 5.
# EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS *A POSTERIORI*

Atendiendo al esquema general de la metodología adoptada, y una vez que se han realizado los análisis *preliminares* y la planeación de la secuencia de situaciones didácticas (capítulos 2, 3 y 4) se procede a la última fase de la *micro-ingeniería didáctica*. Por lo que se describe la secuencia observada durante la experimentación y se efectúa el análisis *a posteriori*, para validar la metodología mediante su confrontación con los análisis *a priori*.

## 5.1. Caracterización de la Población y Descripción del Estudio

La experimentación de este trabajo de investigación se realizó con 25 estudiantes[79] de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas de una Universidad de la ciudad de Pasto, Colombia. La edad promedio de ellos era 18 años de edad. Estaban matriculados en el curso de *geometría analítica* y el profesor que orientó las clases fue el mismo investigador. El curso tenía una intensidad semanal de 4 horas y el estudio de las *cónicas* corresponde a la sexta unidad de un total de 8 unidades. El programa de dicho curso se presenta en el Anexo No. 3 y corresponde al semestre de Febrero- Junio de 2009.

En cuanto a la organización de la información y envío de algunas tareas, se usó la plataforma Moodle en un curso virtual, en donde se constituyó un espacio que complementa la presencialidad del curso. En este ambiente virtual los estudiantes descargaron los archivos para el desarrollo de las situaciones y así mismo enviaron a este espacio virtual sus construcciones geométricas hechas en el AGD.

[79] Los apellidos de los estudiantes que participaron en este trabajo, fueron cambiados por apellidos ficticios, siguiendo los procedimientos éticos normales de una investigación educativa.

En cada una de las sesiones se contó con dos tipos de videograbaciones: la primera registra imagen y sonido de las interacciones entre profesor - estudiantes o estudiante-estudiante y la segunda se obtiene de las cámaras de vigilancia del aula de computadores, en donde solamente se registraron imágenes.

En el Anexo No. 5 se presentan las descripciones de las primeras videograbaciones, que permiten observar los procedimientos usados y determinar las razones de algunas de las conjeturas de los estudiantes en la solución de las situaciones problemas.

En cuanto al uso de las segundas videograbaciones, éstas determinan la cantidad de estudiantes por sesión, la ubicación de las parejas en el salón y los tiempos de trabajo en parejas, de todo el grupo y de la intervención del profesor. A diferencia de las primeras grabaciones, éstas toman registro de solo imágenes y solo se detectan cuando hay movimiento en el aula de computadores. Estos datos permiten obtener un tiempo aproximado de cada una de las fases del desarrollo de la situación didáctica.

En algunas sesiones se contó con *observadores externos*[80]. Sin embargo, sólo estuvieron presentes en seis de nueve sesiones (Ver Anexo No. 6).

Es importante destacar que los estudiantes participantes de esta investigación ya habían tenido experiencia en el uso del Cabri tanto en el curso (en el semestre anterior) denominado *geometría euclídea*, con el mismo profesor, así como en el curso de *geometría analítica*, tres meses antes de esta intervención didáctica, durante los meses de febrero, marzo y abril de 2009. Esto significa que los estudiantes estaban familiarizados con la mayoría de las herramientas del AGD y habían conocido el sentido de las construcciones geométricas robustas en Cabri, donde se había negociado y aceptado (en un *contrato didáctico* implícito) por la mayoría de los estudiantes.

Durante las nueve sesiones de la investigación, los estudiantes trabajaron siempre en parejas. Se aclara que se efectuaron nueve sesiones de clases con estos mismos estudiantes, en salones convencionales bajo el enfoque tradicional, cada una de estas, previa a cada una de las nueve sesiones de la investigación. Esto con el fin de que tuvieran suficientes elementos conceptuales y procedimentales desde lo analítico tal y como se estila en un curso tradicional de *geometría analítica*. Así mismo, en estos espacios académicos adicionales se realizaron procesos inherentes a cada una de las fases de *institucionalización* de los problemas geométricos por parte del profesor. El

[80] Los observadores externos fueron estudiantes de último semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas y un profesor de la Universidad participante, que tenían como función registrar las sesiones de clase por medio de grabaciones de audio y realizar observaciones de aula. Además los observadores tenían cierto involucramiento con el trabajo de los estudiantes.

objetivo de las sesiones adicionales, fue trabajar lo analítico de las cónicas. En contraste con lo que se realizó en las sesiones de investigación, donde se trabajó lo sintético de estas curvas, pero no dio un tratamiento analítico de éstas.

En relación a la fechas de experimentación, en la Tabla 9 se presenta un resumen.

*Tabla 9: Organización de la puesta en acto de la secuencia de situaciones problema (SP) con datos reales.*

<table>
<tr><th>No.<br>DE<br>SESIONES</th><th>FECHA</th><th>SITUACIONES PROBLEMA PUESTAS EN ACTO</th><th>AULA / HORA</th><th>INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Martes 05 de Mayo</td><td>SP No. 1a Puntual (Nube de puntos de Parábola).</td><td>Aula 7. de 6:00 pm a 8:20 pm</td><td rowspan="9">- Videograbaciones de las interacciones de los participantes de la clase.<br>- Videograbaciones de las cámaras de vigilancia.<br>- Registro de Sesión en Cabri.<br>- Observaciones.<br>- Trabajo en casa: obtención de la representación algebraica de la gráfica obtenida.<br>- Hojas de trabajo recogidas durante cada sesión.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Miércoles 06 de Mayo</td><td>SP No. 1a Puntual (Nube de puntos de Parábola).</td><td>Aula 3. de 2:00 pm a 4:00 pm</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Martes 12 de Mayo</td><td>SP No. 1b Puntual (Nube de puntos de Parábola de Werner).</td><td>Aula 7. de 6:00 pm a 8:20 pm</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Miércoles 13 de Mayo</td><td>SP No. 1c Global (Problema de Tangencia de Apolonio sobre Parábola)</td><td>Aula 6. de 2:00 pm a 4:00 pm</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Martes 19 de Mayo</td><td>SP No. 2a Puntual (Nube de puntos de Elipse)</td><td>Aula 7. de 6:00 pm a 8:20 pm</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Miércoles 20 de Mayo</td><td>SP No. 2a Puntual (Nube de puntos de Elipse)<br>SP No. 2b Puntual (Nube de puntos de Elipse con un rectángulo dado.)</td><td>Aula 6. de 2:00 pm a 4:00 pm</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Martes 26 de Mayo</td><td>SP No. 2c Global (Problema de Tangencia de Apolonio sobre Elipses)</td><td>Aula 7. de 6:00 pm a 8:20 pm</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Miércoles 27 de Mayo</td><td>SP No. 3a Puntual (Nube de puntos de Hipérbola)</td><td>Aula 6. de 2:00 pm a 4:00 pm</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Sábado 30 de Mayo</td><td>SP No. 3b Global (Problema sobre la Potencia de un Punto)</td><td>Aula 6. de 8:00 am a 12:00 am</td></tr>
</table>

Como se puede apreciar, se tenían previstas 8 sesiones para el dispositivo experimental pero en total se efectuaron 9 sesiones. El tiempo planeado no resultó ser igual al tiempo usado. En la última sesión se necesitaron dos horas más y la primera situación fue la de mayor tiempo. Las situaciones problema que se consideraron para este análisis *a posteriori*, se sombrearon de color gris en la Tabla 9. En esta misma Tabla se observa que las construcciones geométricas punto por punto, fueron las que más tiempo necesitaron.

Durante la intervención de las ocho situaciones diseñadas no hubo interrupciones o cese de actividades.

## 5.2. Descripción General de las Sesiones y Análisis de Prueba Diagnóstica sobre Concepciones

A continuación se presenta una descripción general de las sesiones analizadas y al final un análisis de las preguntas abiertas.

Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo entre el 5 de Mayo y el 30 de Mayo de 2009. Durante este período se trabajó con los 25 estudiantes. Para describir las sesiones se tuvieron en cuenta las observaciones y las videograbaciones. (Ver anexo No. 6). En este caso sólo se describirá brevemente la sesión No. 1, 2 y 4.

*Sesión No.1*: (Martes 05 de Mayo, Situación Problema No. 1a, Nube de puntos de Parábola). Tal y como estaba previsto, el profesor empezó la sesión repartiéndoles la situación problema y la hoja del estudiante respectiva (hoja de trabajo), los estudiantes se organizaron en parejas y usaron un computador. El profesor les dijo que deben entregar el trabajo al final de la sesión. También manifestó de qué manera y de dónde descargaban los archivos de Cabri que debían utilizar y que hacían alusión en la hoja de trabajo. Hasta ese momento, casi todos los estudiantes empezaron a realizar la actividad en Cabri, pasaron 40 minutos y este proceso estaba pensado para 10 minutos. Este período de descarga de archivos, de crear una carpeta para que ellos empezaran a registrar la sesión de Cabri, fue un tiempo que no se tuvo en cuenta, tampoco se consideró la lentitud del envío y recepción de datos a través de la Internet, debido a que en ese momento se presentaron fallas, pero finalmente accedieron a los archivos de Cabri.

El ambiente en ese momento fue de expectativa para los estudiantes e iniciaron entusiasmados el trabajo.

Al empezar cada estudiante tenía en sus manos las dos hojas de trabajo que se le habían entregado, y empezaron leyendo el enunciado del problema y haciendo la primera fase sin ningún problema.

*Sesión No.2*: Miércoles 06 de Mayo, Situación Problema No. 1a, Puntual (Nube de puntos de Parábola). Esta sesión estaba prevista para la situación problema 1b, que trataba sobre otra nube de puntos de una parábola propuesta por Werner y que se pudo apreciar en el apartado 2.1.2.1 del análisis histórico – epistemológico. Pero no se logró trabajar esta actividad en esta sesión, sino en la sesión No. 3, tal y como se aprecia en la Tabla 9. Tampoco se presentó esta construcción puntual de Werner en este análisis *a posteriori* debido a que las respuestas de los estudiantes fueron muy parecidas a la situación problema No. 1a. En consecuencia, lo que sucedió en esta sesión fue que se decidió dar continuación a la *situación problema No. 1a,* y al final el profesor realizó la *institucionalización* de los elementos matemáticos que estuvieron en juego en la primera situación.

*Sesión No.4*: Miércoles 13 de Mayo, Situación Problema No. 1c, Global (Problema de Tangencia de Apolonio sobre Parábola). Esta sesión se centró en trabajar un problema de tangencia que generaba la parábola desde el enfoque global usando la herramienta "Lugar" de Cabri, para luego pasar a una configuración geométrica similar al problema que generaba una familia de parábolas y en donde a los estudiantes se les hacia una serie de preguntas donde tenían que argumentar por qué cada curva (miembro de esa familia) era una parábola.

Es de recalcar que no hubo una nube de puntos sino que los estudiantes generaban de forma completa la figura y usando construcciones geométricas auxiliares alrededor de dicha figura, encontraron los elementos constitutivos de la parábola. La fase 3, se dejó de tarea para la casa, la cual consistió en que debían pensar y escribir una situación análoga al problema de tangencia pero usando *geometría analítica*. Es decir, los objetos geométricos dados en la fase 1 debían darlos en términos algebraicos y la resolución del mismo también algebraicamente.

Esta situación sobre parábolas, cerró el ciclo de actividades (situación problema 1a, situación problema 1b y esta situación) usando Cabri para estudiar las parábolas. Dada la premura del tiempo, y además de que todos los estudiantes estuvieron entusiasmados trabajando de manera concentrada en esta situación hasta la fase 3, se decidió que la etapa de *institucionalización* fuese en la siguiente sesión de clase.

### *Análisis de prueba diagnóstica sobre concepciones*

Se estudiaron las respuestas a cinco preguntas abiertas que se les plantearon a los estudiantes sobre las nociones matemáticas que iban a estar presentes en las situaciones diseñadas el primer día de clase del curso de *geometría analítica*. Las respuestas de la prueba diagnóstica se encuentran en el Anexo No. 2. denominado

“Preguntas Abiertas Sobre Concepciones”. A continuación se presenta el análisis de las respuestas.

### *1. ¿Qué significa para Usted una Figura Geométrica?*

El objetivo de esta pregunta era identificar las concepciones de los estudiantes acerca de lo que para ellos significa una figura geométrica. Se pensaba que los estudiantes ya sabían o tenían conocimientos relativos porque habían tomado un curso previo de *geometría euclídea*. Al clasificar las respuestas se pudieron detectar seis concepciones que se pueden apreciar en el Anexo No. 2.

Los estudiantes no usaban términos propios de la *geometría* y los que la usaban se referían a los nombres de los objetos vistos en el curso de *geometría euclídea*.

La concepción que más se presentó en los estudiantes se podría resumir así: “Es algo que se construye o forma a partir de una colección (un conjunto de …) o unión de elementos geométricos: puntos, líneas rectas, segmentos, ángulos, líneas curvas, es cerrada, tal que tienen una forma”.

Dicha concepción se encontró en 15 de 25 estudiantes que se presentaron ese día. Es decir, el 56% del total de los estudiantes. En ésta, se puede apreciar un intento de decir que es algo que se construye o se constituye de “algo”, y dan ese “algo” en términos geométricos. Ellos aludían a alguna representación gráfica por los elementos geométricos que mencionaban en sus respuestas, tal vez influenciados por el curso de *geometría euclídea*.

Mientras que una de las concepciones con el porcentaje más bajo fue decir: “Es algo que se puede representar en un medio tangible o intangible (bien sea en papel, cartón, arena, o en una pantalla de computador, o en un tablero) y tiene un carácter gráfico, visual, que se observa. Es un dibujo.”.

En esta pregunta un solo estudiante escribió esto, y aludía rápidamente a las representaciones. Es decir, se observa que solo un estudiante tiene un perfil geométrico en términos representacionales.

Hubo otra concepción en términos de darles atributos. No obstante, en términos generales, los estudiantes tenían ideas que se relacionaban con su experiencia intuitiva o visual.

***2. ¿Qué significa para Usted una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos?***

El objetivo de esta pregunta era tratar de conocer lo que sabían sobre lo biunívoco o si sabían de relaciones. Dado que en *geometría analítica* se empieza estudiando los puntos y el plano a través de una correspondencia biunívoca establecida, entonces se consideró pertinente esta pregunta.

La concepción que presentó un mayor porcentaje fue: "Una correspondencia biunívoca es simplemente una correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del primer conjunto se corresponde con solo un elemento del segundo conjunto, y cada elemento del segundo conjunto se corresponde con solo un elemento del primer conjunto."

Pues bien, fue del 52% y en términos generales se podría decir que la mitad de los estudiantes sabían qué era una relación matemática entre dos conjuntos. Esta concepción también se pudo ver influenciada, primero porque en el curso de *geometría euclídea* se estudió la recta numérica como una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos, así como el estudio de la unidimensionalidad. Y segundo, estaban influenciados por los cursos de Matemáticas Fundamentales y Estructuras Algebraicas, pues habían visto los temas sobre relaciones y funciones. En cambio hubo dos estudiantes que no respondieron, dando un porcentaje de 7.4%.

***3. ¿Qué significa para Usted la gráfica de una función?***

Esta pregunta tenía la intención de averiguar qué sabían de lo que es una gráfica y también de indagar sobre la noción de función. Aunque esta última no se trabaje explícitamente en un curso de *geometría analítica*, sí lo habían trabajado en cursos del semestre anterior. La concepción que se categorizó como la más aceptada por la mayoría fue: "Es una representación visual (un dibujo) en el plano cartesiano de una función que tiene unas ciertas características. Es una curva o línea curva o línea recta que es la representación figural".

En lo anterior se nota que saben que la gráfica se puede dar en un sistema de coordenadas, aludiendo a representaciones visuales. El porcentaje de aceptación entre la mayoría fue de 55.6%, lo que demuestra que más de la mitad del total de estudiantes tiene buenas ideas al respecto.

Hubo otras concepciones un poco aisladas, vista como descripciones procedimentales de formar, construir o hacer algo en un soporte y la manera en que se hace con un 14.8% de la población total. Otros dos estudiantes lo afirmaban en términos de descripciones pero sin aludir a lo visual.

### *4. ¿Qué significa para Usted un Lugar Geométrico?*

Esta fue la pregunta más crítica y de más interés para la investigación. La concepción que salió a flote en la mayoría con un 63% fue que la respuesta era basada en términos del contexto de la pregunta: "Es un sitio o lugar o espacio ocupado por algo (que puede ser geométrico)."

Se notó que era un porcentaje alto de estudiantes que no sabían lo que significaba un lugar geométrico y que por lo tanto le daba peso a la justificación de esta investigación y que se debía de hacer algo urgente al respecto. Como se observó, la mayoría clasificó en esta concepción, por lo tanto desconocían la noción que iban a trabajar en las *cónicas* y para responder rápidamente recurrían a parafrasear la pregunta o a buscar un significado en términos de la misma palabra: Un lugar geométrico es un "lugar" que es geométrico.

Solo cuatro estudiantes respondieron en términos del curso de *geometría analítica*, representando un 14.8% del total de estudiantes: "Es el conjunto de todos los puntos $(x, y)$, y solo aquellos puntos en el plano, cuyas coordenadas satisfacen una o más propiedades o condiciones dadas, que puede establecerse en una ecuación $F(x, y) = 0$."

### *5. ¿Qué significa para Usted un Conjunto de Puntos en el plano cuyas coordenadas satisfacen una propiedad geométrica?*

Esta fue la pregunta que generó concepciones que no marcaba una tendencia general hacia una u otra. Por ejemplo, el 26% afirmó lo siguiente: "Es una gráfica. Es una traza. Son puntos en el plano cartesiano que satisfacen (que cumplen con la ecuación de la gráfica). Es un lugar geométrico. Es una curva. Son puntos en el plano cartesiano que pertenecen a la gráfica de la ecuación dada".

Las respuestas se ven influenciadas por la palabra plano, que remitía a lo visual o gráfico. En cambio, hubo un 18.5% que parafraseaba lo mismo que se había preguntado.

Entre las respuestas, la de mayor preocupación para el desarrollo de este trabajo es la de *Lugar Geométrico*. Por lo que en el desarrollo de las situaciones, éste es un aspecto a tener en cuenta por parte de las intervenciones didácticas.

A continuación se presenta una descripción general de las sesiones analizadas y al final un análisis de las preguntas abiertas.

## 5.3. Análisis de Resultados Obtenidos durante las Sesiones de Trabajo Correspondientes a las Situaciones Problema

Para dar cuenta de los resultados, se determinaron las siguientes unidades de análisis: los *tipos de construcción geométrica*, las *representaciones matemáticas* y los *fenómenos didácticos* que se presentaron. Los datos se obtuvieron a partir de lo reseñado en la columna *Instrumentos de Recolección de Información* de la Tabla 8.

### 5.3.1. Análisis *a posteriori* de la situación problema No. 1a.

Se notó que todos estuvieron concentrados y atentos a la situación propuesta y contrario a lo que se había previsto de acoger una actitud pasiva, esto no ocurrió. Todos los estudiantes se involucraron de manera activa y no hubo oposición por parte de ellos para que fuesen grabados en video ni tampoco acogieron una actitud de temor al ser registrados, a pesar de que habían cinco personas que no eran del grupo, los cuales eran tres observadores externos, el camarógrafo y el asistente del camarógrafo.

Esta situación que en principio estaba pensada para trabajarla en una sesión de dos horas se demoró dos horas más, debido a que la situación no fue sencilla de resolver, pues requirieron de algunos elementos conceptuales de las cónicas, no se consideraron los aspectos técnicos del acceso a la plataforma virtual y además todas las situaciones se caracterizaron por ser extensas. Estas dos horas fueron realizadas en la sesión No. 2.

Los estudiantes comenzaron la primera fase de la situación al construir la nube de puntos como intersecciones de rectas con segmentos. Luego de que el profesor observó que casi todas las parejas tenían la nube construida, y que por lo tanto, la fase 1 se había cumplido para todos, intervino presentado unas instrucciones sobre la construcción puntual y haciendo énfasis en que debían responder a la fase 2 de la situación, que debían leer muy bien los enunciados y que existían dos partes en la fase 2, donde necesitaban formular una conjetura y en la segunda parte requerían validarla. También les indicó cómo y cuándo debían responder a la fase 3. Esto se puede ver en el Anexo No. 5 sobre la descripción de los videos, sesión 1, minuto 13 de grabación, así como en el Anexo No. 6, línea de texto 49 y 50.

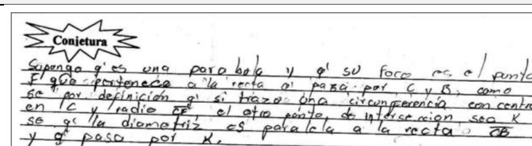
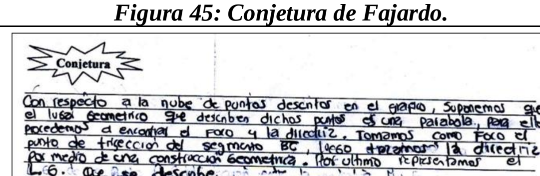
En cuanto a la movilización de *saberes matemáticos* para usarlos en las construcciones que realizaron en Cabri, se pudo apreciar que primero expresaron su conjetura verbalmente y luego por escrito en sus hojas de trabajo. A continuación se presentará el análisis de la primera parte de la fase 2 de esta situación.

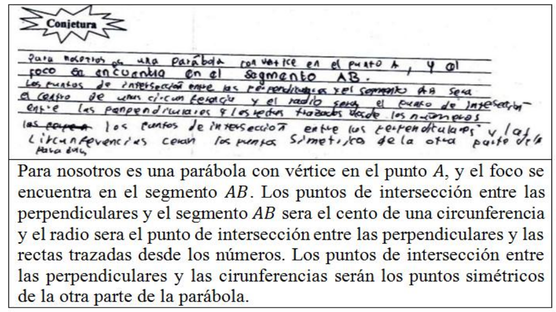
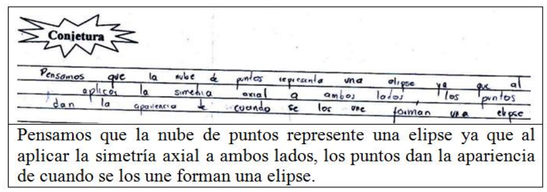
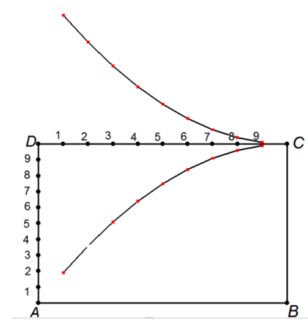
Se analizaron los registros escritos de los estudiantes, pero luego se escogieron algunos de las parejas que trabajaron para el análisis. La selección se realizó con el objeto de presentar los diferentes tipos de argumentos y construcciones que son de interés para esta investigación.

En esta sesión asistieron 20 estudiantes y de estos, 19 entregaron su hoja de trabajo. En total fueron 12 hojas de trabajo recogidas, dado que algunos trabajaron en parejas, de las cuales en 8 hojas de trabajo se pudo encontrar que conjeturaban que la nube de puntos pertenecía a una *parábola* (66,7%), 3 afirmaron que era una *elipse* (25%) y una que era una *elipse* pero su argumentación cambió cuando escribieron que era *parábola* (8,3%).

En la Tabla 10 se presentan algunas de estas respuestas. Al final de la descripción de la conjetura, aparecen entre paréntesis los apellidos de la pareja.

*Tabla 10: Conjeturas de los estudiantes agrupadas por tipos de cónicas.*

| CONJETURA | DESCRIPCIÓN DE LA CONJETURA | FIGURA |
|---|---|---|
| Parábola | Establecen que el vértice de la parábola es el punto $C$ y el foco es uno de los puntos sobre el segmento $CB$. (Fajardo) | <br>Supongo que es una parábola y que su foco es el punto $F'$ que pertenece a la recta que pasa por $C$ y $B$, como se por definición que si trazo una circunferencia con centro en $C$ y radio $\overline{CF}$, el otro punto de intersección sea $K$ se que la diametriz es parábola a la recta $CB$ y que pasa por $K$.<br>***Figura 45: Conjetura de Fajardo.*** |
| | Establecen que el vértice de la parábola es el punto $C$ y el foco es el punto de trisección del segmento $CB$. (Noguera y Revelo) | <br>Con respecto a la nube de puntos descritos en el gráfico, suponemos que el lugar geométrico que describen dichos puntos es una parábola, para ello procedemos a encontrar el foco y la directriz. Tomamos como foco el punto de trisección del segmento $BC$, luego trazamos la directriz por medio de una construcción geométrica. Por último representamos el L.G. que se describe.<br>***Figura 46: Conjetura de Noguera y Revelo.*** |

| CONJETURA | DESCRIPCIÓN DE LA CONJETURA | FIGURA |
|---|---|---|
| | Establecen que el vértice de la parábola es el punto $A$ y el foco es un punto sobre el segmento $AB$. (Estupiñan y Ocoro). (Escobar y Lara) | <br>Conjetura<br>Para nosotros es una parábola con vértice en el punto *A*, y el foco se encuentra en el segmento *AB*. Los puntos de intersección entre las perpendiculares y el segmento *AB* sera el cento de una circunferencia y el radio sera el punto de intersección entre las perpendiculares y las rectas trazadas desde los números. Los puntos de intersección entre las perpendiculares y las cirunferencias serán los puntos simétricos de la otra parte de la parábola.<br>**Figura 47: Conjetura de Escobar y Lara.** |
| Elipse | Explican que para ver completamente la elipse, basta con aplicar simetría axial, reflexión o proyectar. (Ramírez y Restrepo). (Machado y Saavedra) | <br>Conjetura<br>Pensamos que la nube de puntos represente una elipse ya que al aplicar la simetría axial a ambos lados, los puntos dan la apariencia de cuando se los une forman una elipse.<br>**Figura 48: Conjetura de Ramírez y Restrepo.** |
| Cisoide de Diocles | Llegan a la conclusión que es Cisoide de Diocles, cuando a la nube de puntos le efectúan una transformación de simetría axial con respecto al lado $DC$. Ellos llegaron a la conclusión por que la habían estudiado, usando el libro de Lehmann (2002, p. 44), anteriormente cuando se trató el capítulo dos sobre los pasos de graficación de curvas. | <br>**Figura 49: Nueva conjetura de Ramírez, Escobar y Lara** |

Ahora bien, de acuerdo con estas conjeturas, se puede afirmar que varios estudiantes usaron conocimientos geométricos relativos a los elementos constitutivos de una parábola, como son el vértice, el eje focal, la directriz, el foco de la parábola, si ésta abre hacia arriba o hacia abajo, si está rotada, etc.

De las 7 parejas que dijeron que era una parábola, todos afirmaron que el posible vértice de la parábola era el punto $C$ del rectángulo dado. Así mismo, que la parábola era cóncava hacia abajo, sin embargo, ninguno expresó con exactitud dónde se encontraba el foco y la directriz para llegar a constituirse en una construcción robusta.

En algunas conjeturas se describe el procedimiento de construcción de la parábola, pero estas construcciones son blandas, los mismos estudiantes en las retroacciones con el *medio*, se dieron cuenta que no eran construcciones geométricas que pasan por la nube de puntos dada cuando arrastran alguno de los puntos móviles. Los puntos móviles los arrastran hasta que la nube de puntos se superponía a la parábola que construyeron usando la supuesta directriz y el supuesto foco. El profesor en sus tres intervenciones que hizo al grupo en esta situación (Ver Anexo No. 5 sobre la descripción de los videos), siempre les recordaba que el arrastre validaba o invalidaba sus acciones.

Por ejemplo, de las parejas que poco mostró experimentación usando el Cabri, llegaron a afirmar únicamente que el punto $C$ era el foco (Pérez y Navarro).

El resto de estudiantes se atrevieron a decir más elementos constitutivos de la parábola. Algunos llegaron a afirmar que el foco era un punto estático, porque lo designaban como un punto de intersección, o un punto que surgía de una construcción auxiliar, como ejemplo se presentan las siguientes afirmaciones, que se encuentran en el Anexo No. 5.

- El foco es el punto B (Echeverry).
- El foco es el punto A (Jurado).
- El foco es el punto medio del segmento CB (Ibáñez y Dávila).
- Y el foco es uno de los puntos de trisección del segmento CB (Noguera y Revelo).

Mientras que los estudiantes que realizaron un punto dinámico como foco, es decir, un punto que se dejaba arrastrar, que era construido sobre un dominio, como por ejemplo, un punto sobre un segmento, afirmaron:

- El foco era uno de los puntos sobre el segmento CB, (Escobar y Lara) y (Fajardo).
- El foco era un punto sobre el segmento AB, (Estupiñan y Ocoro) y (Escobar y Lara).

Los que ubicaron un foco dinámico habían podido llegar a la *estrategia ganadora*, pero tenían que hacer que la recta directriz se moviera y no el foco. Por lo tanto, sus construcciones fueron blandas, sin embargo, se pudo observar que pudieron haber llegado a la robusta, si hubiesen tenido más tiempo y más experimentación con el ambiente informático.

Lo importante de esta *estrategia ganadora*, era que tenían que construir un *punto* que se dejara arrastrar, y además debía de haberse colocado *sobre* el eje focal y con este, hubiesen construido una recta perpendicular al eje focal, que pasará por dicho punto, para que se llegara a convertir en la directriz dinámica. Entonces esta se constituiría en una estrategia de *base* que al evolucionar llegaría a ser la estrategia *óptima* o *ganadora*. Pero se reitera que solo designaron un punto móvil como foco y no un punto móvil que determinará la directriz.

Otras dos parejas (Saavedra y Machado, Ramírez y Restrepo) afirmaron en la primera sesión de esta situación que por la nube de puntos pasaba una elipse (Ver Tabla 11).

Una pareja hizo una nueva conjetura afirmando que era la curva la Cisoide de Diocles que se había estudiado dos meses antes, en el mismo curso. Esto afirmaciones se evidencia en el video, en la segunda sesión de esta situación (Ver Anexo No. 5)

En cuanto a la utilización de la noción de *lugar geométrico*, se pudo observar que Fajardo realizó una estrategia que usualmente se estila en el ambiente de lápiz y papel, le pudo ayudar a visualizar o a imaginarse por donde iría la curva (Ver Figura 50). La estrategia fue unir los puntos con segmentos.

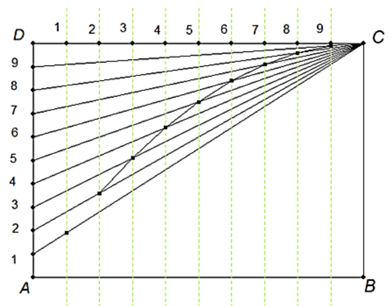



*Figura 50: En la nube de puntos, Fajardo la une por medio de segmentos.*

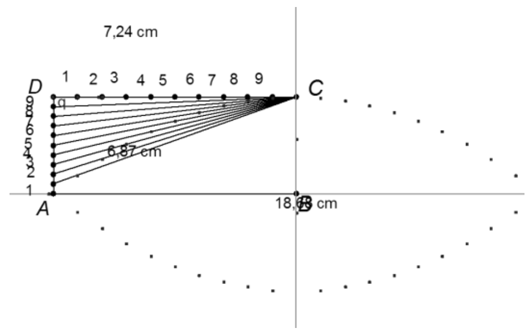
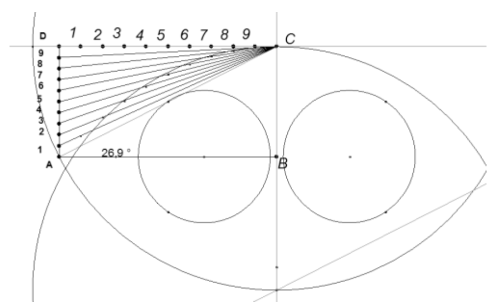
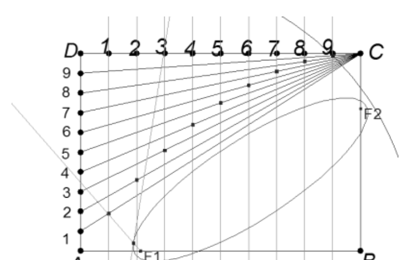
En términos generales, los estudiantes que más se aproximaron a la construcción robusta, pero que nunca llegaron a ella, emplearon las herramientas de Cabri “Lugar” y “Traza”. Estos mismos, fueron los que tomaron el foco como punto dinámico.

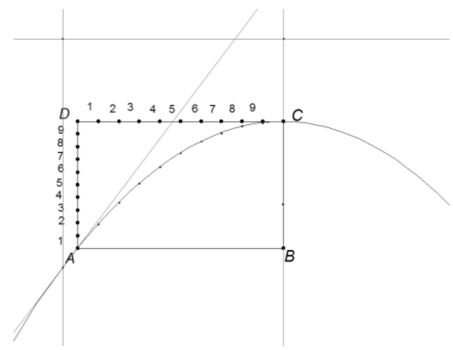
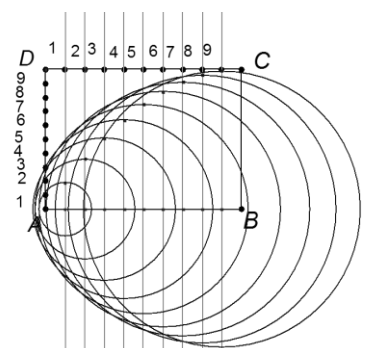
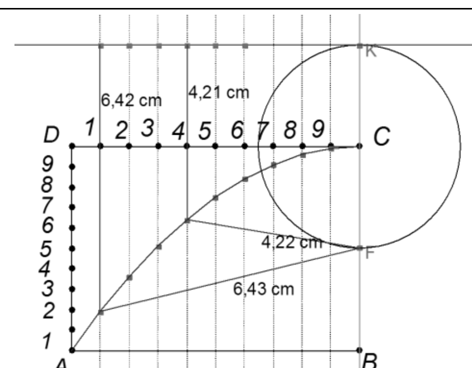
Otros usaron conocimientos geométricos tales como recurrir a la definición de parábola que se había dado, en términos de lugar geométrico, usando foco y directriz.

La gran mayoría usaron conocimientos de *geometría transformacional* como la simetría axial con respecto al lado $BC$ para que apareciera otra rama de la parábola o aplicando tres veces esta transformación geométrica para formar una figura (que ellos la denominaron elipse) como una nube de puntos (Ver Figura 51) para una elipse.

A continuación, se presenta la Tabla 11 a modo de resumen, las construcciones blandas que realizaron los estudiantes en esta primera sesión. Se obtuvieron a partir del registro de sesión que tiene Cabri.

*Tabla 11: Construcción blanda cuya conjetura fue una elipse o una parábola.*

| **Apellidos de los Estudiantes** | **DESCRIPCIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES** | **FIGURA** |
|---|---|---|
| **CONSTRUCCIONES CUYA CONJETURA DIJERON QUE UNA ELIPSE** | | |
| Ramírez y Restrepo | Hallan los puntos de la nube de puntos solicitadas y luego trazan circunferencias concéntricas al punto $A$ cuyo radio va hasta cada uno de los puntos de la nube. Luego hallan otros puntos a partir de la intersección de estas circunferencias y rectas perpendiculares al lado $AB$. Con simetría axial encuentran los puntos del lado derecho de la supuesta elipse. En la construcción se observan algunas distancias. En sus intentos por mostrar que es una elipse realizan la construcción, tratando de ubicar los puntos de la nube de puntos sobre el lugar geométrico. | <br><br>**Figura 51: Construcción blanda de Ramírez y Restrepo.** |
| Saavedra y Machado | Luego de hallar la nube de puntos, efectúan diferentes construcciones como rectas y circunferencias. La intencionalidad de las primeras construcciones no es definible, al parecer intentan mostrar que los puntos pertenecen a un arco de circunferencia. Posteriormente, determinan como foco de una parábola el punto $B$ y junto con la directriz, la construyen. Sin embargo, con el arrastre descubren que los puntos no pasan por la parábola. Borran la construcción y realizan la construcción de una parábola, por fuera de estos puntos para recordar el procedimiento y aplicarlo. | <br><br>**Figura 52: Construcción blanda de Saavedra y Machado.** |
| Sáenz | Realiza la nube de puntos y revisa la construcción de una hipérbola. Intenta que una parábola con vértice en $C$ y eje de simetría en $AB$ pase por la nube de puntos. Realiza una elipse, la mueve e intenta que pase por la nube de puntos. Esta elipse tiene los focos sobre el segmento $AB$. Luego construye otra elipse cuyos focos no pasan por el segmento $AB$ y trata de que los puntos pasen por ella. En otras palabras está | <br><br>**Figura 53: Construcción blanda de Sáenz.** |

| Apellidos de los Estudiantes | DESCRIPCIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES | FIGURA |
|---|---|---|
| | intentando cuadrar los puntos a una elipse. | |
| | **CONSTRUCCIONES CUYA CONJETURA DIJERON QUE PARÁBOLA** | |
| Noguera y Revelo | Realizan la nube de puntos y encuentran por arrastre una parábola con vértice en $C$ y eje de simetría $CB$ que se aproxima a la nube de puntos. Luego por simetría axial con respecto $CB$, hallan los otros puntos de la parábola. Realizan la construcción de la parábola y moviendo el foco, hacen que coincida con la nube de puntos. Dividen el segmento $CB$ en tres parte iguales y determinan que el foco está a $2/3$ de $C$, tomando como unidad $CB$. Sin embargo, al arrastrar $AD$, la parábola se desajusta. Revisa la construcción de una parábola. | <br>**Figura 54: Construcción blanda de Noguera y Revelo.** |
| Escobar y Lara. | Hallan la nube de puntos, luego construyen varias circunferencias con centro en los puntos de intersección de las rectas perpendiculares al segmento $AB$ y radio hasta el punto que pertenece a la nube de puntos. Al parecer intentan conjeturar que es una parábola con foco sobre $AB$ y vértice $A$. Sin embargo su conjetura no concuerda con la construcción. Esta construcción fue basada en la situación problema 1b, la parábola de Werner, que la descargaron del Campus Virtual, antes de que se pusiera en acto la sesión 3. | <br>**Figura 55: Construcción blanda de Escobar y Lara.** |
| Fajardo | Halla la nube de puntos y los une con segmentos. Luego supone que $B$ es el foco de una parábola, traza dos segmentos uno perpendicular a la directriz desde el punto de la nube y otro desde ese punto al foco, pero los resultados no son equidistantes. Ahora toma como foco, un punto sobre segmento $BC$ y toma nuevamente la distancia de un punto de la nube a la directriz y al foco, en este caso los resultados se aproximan. Mueve el foco, fijándose que las dos distancias | <br>**Figura 56: Construcción blanda de Fajardo.** |

| Apellidos de los Estudiantes | DESCRIPCIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES | FIGURA |
|---|---|---|
| | sean iguales. Como los resultados no concuerdan, le agrega más cifras decimales a las distancias. | |

Por último, se observó que muchos estudiantes fueron conscientes de tratar de comprender por qué razón la *construcción geométrica robusta* que se estaba esperando, funcionaba. Es el caso de los estudiantes Ramírez y Restrepo, quienes afirmaron la necesidad de encontrar una relación matemática que subyacía a la generación de la nube de puntos. En el registro de video se detecta el momento en que se da el siguiente diálogo, sin embargo, es en el registro de audio, donde se puede apreciar completamente lo siguiente:

- Observador 1: ¿Entonces dado esa nube de puntos, cuál es el siguiente paso para resolver el problema, para saber qué curva es, o sea, qué es lo que uno tiene que saber para resolver este problema?.
- Ramírez: creo que uno debe encontrar cuál es la relación que guardan esos puntos.
- Observador: ¿La relación que guardan los puntos?
- Ramírez: ¡Sí!
- Observador: Por ejemplo, ¿cuál relación sería?
- Ramírez: Por ejemplo, encontrar una forma, no sé… en que …, que forme una cónica o algo así.
- Observador: Si tratas ahí… y si vas trazando entonces da una curva, ¿cierto?
- Ramírez: sí, es que *intuitivamente* sería una parábola, pero tendríamos que demostrarlo.
- Observador: Por eso, ¿Cómo demostrarías que es una parábola?
- Ramírez: No sé, encontraríamos un punto como el vértice, el foco, no sé… trataríamos de dibujarlo geométricamente.
- Observador: Básicamente es buscar si se cumplen las propiedades, cierto?.
- Ramírez: es si cumple con las características de la parábola, de una hipérbola, de una cónica.
- Observador: ¿Y qué caracteriza a una parábola?.
- Ramírez: que estén a igual distancia de la directriz y del foco.

En el anterior diálogo, se observó que la estudiante Ramírez sabía que la nube de puntos era algo *intuitivo* pero necesitaba encontrar una demostración. La demostración le daría la certeza de la construcción que encontraba, pero antes debía encontrar una *relación matemática* entre los puntos.

Al respecto, muchos estudiantes al tratar de encontrar esa relación, acudieron a las herramientas de medición de Cabri o acudieron a usar la herramienta que muestra los ejes de coordenadas del plano y luego a que Cabri les mostrase las coordenadas de los puntos seleccionados y luego a sacar las distancias entre la nube de puntos y los supuestos focos y directriz (Ver Anexo No. 5, en sesión II, DVD No.2, tiempo 05 seg.).

En la situación Problema No. 1a, se observó el *efecto Topaze*, cuando el estudiante Sáenz en la segunda sesión de esta situación, al comenzar la actividad, empezó diciendo que la conjetura para esta situación era una parábola, pero él en la sesión anterior había afirmado que era una elipse, y cuando se le cuestiona por cuál conjetura se decide finalmente, él afirmó que el otro profesor que estaba como observador, había hecho *señales* que efectivamente si era una parábola. Entonces Sáenz desistió de la idea de que posiblemente fuese una elipse, no por sus propios medios sino porque estaba pendiente de algún *gesto* o *acentuación* de ideas del profesor del curso o de uno de los observadores externos. Al respecto, se puede evidenciar en el siguiente registro de diálogo, cuando el profesor se le acerca a preguntarle cuál es el procedimiento de construcción y en la pantalla de Sáenz tiene la nube de puntos y un lugar geométrico que pasa por esos puntos:

- Profesor: Usted había dicho ayer que era una elipse y hoy dice que es una parábola y trabaja sobre ella. ¿Entonces?
- Sáenz: Ah no, pues ya cambie esa idea porque eh … porque el profesor ya dijo que era parábola. Indirectamente ayer lo dijo.
- Profesor: ¿Cuál profesor?
- Sáenz: el profesor [Señalando al observador] lo dijo. Él lo dijo indirectamente. Y como lo dijo, entonces ya es una parábola.

Cuando a Sáenz se le pidió que argumentara su nueva conjetura, debido a que cambio su idea, él afirmó que la figura que había hecho (la elipse de la sesión anterior) no había cumplido con la definición de elipse, al haber el usado unos supuestos focos y además reforzó su idea de renunciar a la elipse, y por tanto se quedó con la idea de parábola (Ver Figura 53 en la Tabla 11).

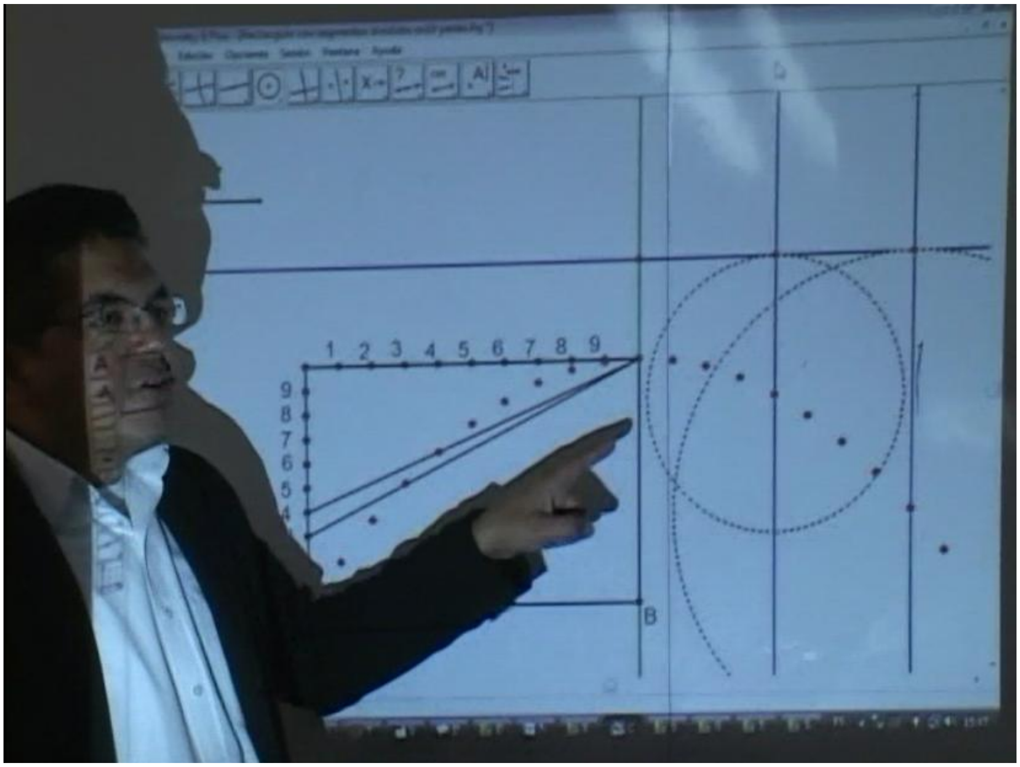
Faltando 15 minutos para que se acabara la sesión No. 2, el profesor entró en la fase de *institucionalización* declarando a todos los estudiantes, que la conjetura buscada se trataba de una parábola (Ver Anexo No. 5, sesión II).

El profesor uso un proyector de computador y mostró el uso de la herramienta "Cónica" del Cabri Géomètre II Plus, señalando cinco puntos de la nube de puntos, y luego Cabri hizo aparecer la cónica que contenía dichos puntos, luego se determinó qué tipo de cónica era cuando acercó el cursor a la curva obtenida por los cinco puntos. El letrero que salió al señalar la curva en el Cabri fue el de: "Es parábola". Y les señaló dicho información que arrojaba el ambiente informático.

El profesor les indicó que era necesario construir la parábola sin utilizar esta herramienta, y que si la usaban, entonces la esta situación no tenía sentido. Les preguntó cuál era el posible vértice, el eje focal y donde estaría posiblemente ubicado el foco. Con simetría axial respecto al segmento BC obtuvo la nube de puntos a la derecha del eje, para que mostrar la otra rama que completaría la nube de puntos de la parábola. Les recomendó remitirse a la definición de parábola y que aplicaran ésta, en la construcción, luego le solicitó al estudiante Escobar que les recordara a todos en voz alta dicha definición.

El profesor luego construyó una directriz, usando un punto móvil sobre el eje focal, trazo dos rectas perpendiculares a la directriz que pasaba por dos puntos de la nube de puntos. Luego realizó una circunferencia con centro en uno de los dos puntos de la nube de puntos cuyo radio vaya hasta el punto de intersección de la recta perpendicular y la directriz. Construyó otra circunferencia siguiendo el anterior procedimiento y tomando otro punto de la nube de puntos. Les recordó que la distancia del punto de la parábola a la directriz es la misma que desde este punto al foco, entonces el foco se ubicaría sobre la circunferencia y sobre el eje focal.

Les recomendó que utilizaran el lugar geométrico como un método que les permitiría hallar la solución al problema y les recordó el problema de hallar un cuadrado inscrito en un triángulo (problema planteado en Polya, 1985. Esto también fue discutido en la página 120 de este documento) que habían estudiado antes cuando trabajaron el tema de las rectas (Ver Fotografía 1).



*Fotografía 1: El profesor dando pistas para la estrategia ganadora del lugar geométrico como herramienta para solucionar este problema.*

El profesor no les terminó de hacer la construcción robusta, pero se las dejó para que la hicieran, la pensaran y entendieran por que funciona dicha construcción. Esta construcción aparece en el análisis *a priori* de esta situación y se denominó *estrategia ganadora*.

En cuanto a la fase de validación[81] en esta situación, a los estudiantes, se les solicitó una solución algebraica para hallar el foco y la directriz de la parábola que habían encontrado y que pasaba por la nube de puntos. En la tabla 12 se presentan las características de las soluciones usando el AGD, las descripciones encontradas de sus procedimientos algebraicos y el porcentaje del total de estudiantes que encontraron cada una de estas descripciones.

Al finalizar la segunda sesión clase, el Profesor les solicitó que entregaran la solución algebraica de la fase 3 en el ambiente de lápiz y papel, al cabo de una semana. En esta segunda sesión de esta primera situación, asistieron 18 estudiantes,

[81] La validación de las actividades propuestas se efectúa hallando en primer lugar la figura geométrica que se solicita, en segundo lugar la argumentación del proceso de construcción y en tercer lugar, la ecuación que corresponde a la figura construida. Con este tratamiento matemático se es consecuente con el segundo problema de la geometría analítica.

sin embargo, después de una semana, 15 estudiantes entregaron la solución algebraica. De los estudiantes que entregaron la conjetura, 4 no realizaron la solución algebraica de la situación problema 1a. La Tabla 12 resume al respecto.

*Tabla 12: Características generales de la solución algebraica de los estudiantes.*

| CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN | DESCRIPCIÓN | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| Se apoyan en las herramientas de Cabri para realizar su argumentación. | 1. Obtienen el valor de $C$ y del $P$, el vértice y un punto sobre la parábola, utilizando la función de coordenadas de Cabri, Estos valores los sustituyen en la expresión general $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$, donde $(h,k)$ son las coordenadas del vértice y hallan p y la ecuación de la parábola. | 7 estudiantes (Botero, Estupiñan y Ocoro); (Escobar y Lara) y (Porras y Ramírez). 46,7% |
| | 2. Toman las coordenadas de tres puntos sobre la parábola utilizando la herramienta Cabri, entre estos puntos el vértice ($C = (0,0)$). Luego sustituyen cada uno de estos valores en la expresión general $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$, obteniendo tres ecuaciones de tres incógnitas. Obtienen la expresión de la parábola y con ella las coordenadas de la parábola y la ecuación de la directriz. | 4 estudiantes (Revelo y Noguera) y (Pérez y Navarro). 26,7% |
| | 3. Realizan tanto el procedimiento 1 y 2 | 2 estudiantes (Machado y Saavedra) 13,3% |
| Sin las herramientas de Cabri. | 4. Encuentra las coordenadas de uno de los puntos ($M$) de la nube de puntos, hallando y utilizando las ecuaciones de las rectas que lo originan. Determina que $C = (0,0)$ y con el punto $M$ hallan el valor de $p$ utilizando la ecuación $x^2 = 4py$. | 2 estudiantes ( Restrepo y Fajardo) 13,3% |

Por último, Restrepo y Fajardo, (Ver Figura 57), fueron los únicos que trataron de llegar a la generalidad a partir de consideraciones geométricas sintéticas y desde lo puntual de la situación, cuando tomaron un sistema de ejes coordenadas apropiado, colocaron el rectángulo dado en una posición que les permitía obtener un tipo de ecuación que ellos pensaban que era, $x^2 = 4py$. Y luego aplicaron un teorema que afirma que la parábola que abre hacia abajo tiene ese tipo de ecuación. También tomaron el vértice como el origen de coordenadas. Así mismo, hicieron que la nube de puntos cumpliera con las condiciones que se daban. Por lo tanto, procedieron a demostrar analíticamente para ese caso, obteniendo correctamente la ecuación. En este caso, la generalidad estaba dada cuando en el rectángulo $ABCD$, dieron las coordenadas de los vértices en términos de una variable $a$ y llegaron a obtener la ecuación de la parábola en esos mismos términos. En definitiva, hicieron una demostración por el método analítico partiendo de la configuración puntual, tal y como se había estudiado en el primer tema de este curso (Ver Anexo No. 3 donde se muestra el programa y las temáticas de este curso).

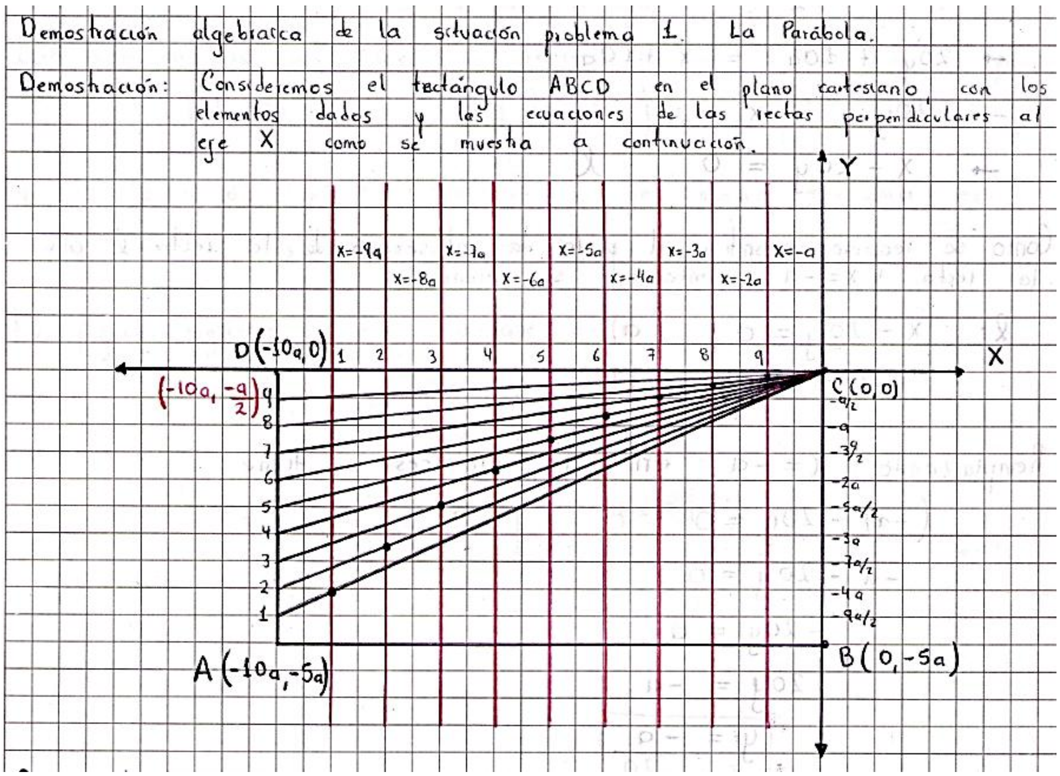



*Figura 57: Gráfica hecha por los estudiantes Restrepo y Fajardo para la argumentación algebraica.*

Mientras que los demás estudiantes, se quedaron usando el Cabri para generar coordenadas de los vértices del rectángulo dado y llegaron a la ecuación en términos de los casos particulares que habían tomado. No vieron la necesidad de llegar a una generalidad mayor. Se quedaron en lo particular de la figura que habían tomado.

### 5.3.2. Análisis *a posteriori* de la situación problema No. 1c.

La situación se desarrolló en un aula de computadores en una sesión de dos horas sin ningún contratiempo. Para el análisis se tomaron en cuenta: la videograbación de esta sesión, las observaciones hechas por los observadores externos (Ver Anexo No. 6), las descripciones de los videos (Ver Anexo No. 5), los registros escritos de los estudiantes a partir de las hojas de trabajo, fotografías que tomaron los observadores externos y las sesiones de registro de archivos de Cabri que los estudiantes produjeron durante esta sesión. En esta sesión asistieron 22 estudiantes como se puede apreciar en el Anexo No. 6.

En esta situación, contrario a lo que se había pronosticado en el análisis *a priori* con respecto a si los estudiantes iban a presentar una actitud pasiva debido a que cuando leyeran las hojas de trabajo, éstas estaban cargadas de demasiadas preguntas. Pues lo que ocurrió fue que estuvieron durante el transcurso de toda la sesión, muy entusiasmados y concentrados en la resolución de las fases, asumieron como propio el problema.

Así mismo, en oposición a lo previsto, no fue para nada difícil resolver el problema planteado en la fase 1 y en la fase 2, pues obtuvieron rápidamente la parábola de manera global en la fase 1 y en la fase 2 efectuaron la nueva construcción geométrica que se solicitaba. Por lo tanto, la gran mayoría avanzaron rápidamente a trabajar en la fase 3 donde se tomaron el resto del tiempo de la sesión.

Con respecto a los *saberes matemáticos* involucrados en esta *situación problema,* estos fueron aplicados correctamente al solucionar el problema planteado en la fase 1. Sin embargo, se notó que algunos estudiantes (Ver Anexo No. 5, DVD # 4, Sesión IV, minuto 1.) *no* tuvieron en cuenta el teorema que relaciona la recta tangente a una circunferencia en un punto (punto de tangencia) con el radio trazado de la circunferencia dada a partir de dicho punto. Esta relación es de perpendicularidad entre estos objetos. Ni tampoco tomaron en cuenta la definición de mediatriz en términos de lugar geométrico. En consecuencia, se consideró que estos dos saberes matemáticos (la relación de tangencia y la definición de mediatriz) fueron fundamentales para resolver y comprender la razón del funcionamiento de la construcción que debían hacer.

De esta dificultad se dio cuenta el profesor al haber preguntado a las parejas, que argumentarán por qué razón la construcción geométrica funcionaba. Así mismo, muchos estudiantes aplicaron la definición de parábola pero no daban cuenta de esta *relación* y *definición* en sus argumentos verbales cuando se hizo el recorrido por cada una de las parejas.

El profesor cuando recorrió los pasillos del salón de clase dio varias ayudas, por ejemplo, les explicó la relación matemática entre la mediatriz y la recta *normal* en el punto de tangencia, así como la relación geométrica de la recta tangente a una circunferencia en un punto dado, de forma que los estudiantes tuvieron elementos sólidos en la escritura de los pasos de la construcción y de esta manera pudieron comprender el funcionamiento de la construcción que acababan de efectuar.

Lo anterior sí se había pronosticado y se puede encontrar en el análisis *a priori* de esta situación. En la segunda hoja de trabajo que se les entregó, aparecieron unas *ayudas* para que no tuvieran dificultades. Estas *ayudas* consistieron en unas frases sobre las definiciones de *mediatriz* y *circunferencia* pero no se tuvo en cuenta el *teorema* anteriormente discutido. Al respecto, se puede afirmar que se deben enseñar previamente estos saberes debido a que no son fáciles para estos estudiantes, sobre todo cuando se necesitan recordarlos y poner en funcionamiento en la resolución de un problema como este.

De la misma manera, se había pensado que no iban a tener en cuenta la definición de parábola como conjunto de puntos que equidistan tanto de un punto como de una recta, pero se observó en la primera fase que sí usaron esta definición de manera efectiva, de lo contrario no hubiesen podido efectuar la fase 1.

Con respecto a la obtención del foco y la mediatriz en la fase 3, pregunta 3.3, se había previsto que no lo encontrarían, pero sí hubo varias parejas de estudiantes que lo encontraron. De hecho, se observó la *estrategia ganadora* para la consecución de estos elementos constitutivos de la parábola. Esto se expondrá más adelante en este análisis.

A continuación se presenta un análisis más detallado de la fase 1, donde se les solicitó resolver el problema, luego debían escribir tanto una conjetura acerca de qué cónica habían construido y los pasos de la construcción geométrica. Luego se analizará la fase 3 de la situación, la cual contuvo muchas preguntas (ocho en total) que estaban relacionadas a partir de las interacciones con el *medio*. Por último, se terminará este análisis mirando las diferentes argumentaciones y representaciones algebraicas en la última fase de esta situación, es decir la fase 3 de *validación* y *comunicación* de saberes matemáticos que debían entregar por escrito a la siguiente semana.

Con respecto a la conjetura que debían formular en la hoja de trabajo entregada, concerniente al primer problema, se pudo analizar lo siguiente:

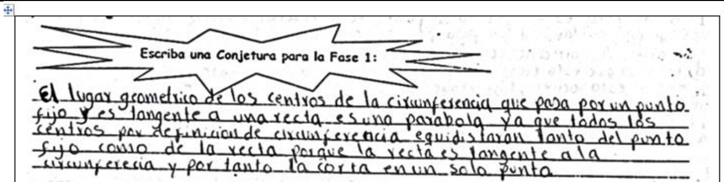
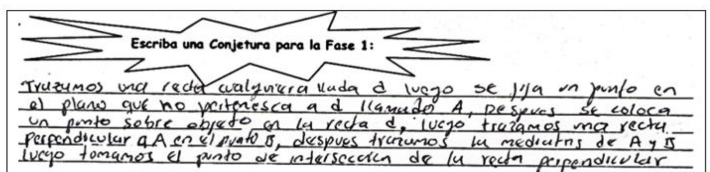
Se recibieron 13 hojas de respuestas de los estudiantes, la mayoría organizados en parejas, en la Tabla 13 se presentan algunas de las respuestas a manera de resumen. Se observó que los estudiantes determinaron que el lugar geométrico efectivamente era un parábola (11 de 13 grupos), lo que representa el 85% del total de los estudiantes, pero sólo el 38% de los estudiantes (5 de 13 grupos) dieron las razones del por qué es una parábola. Mientras que el 15% (2 de 13 grupos) realizaron la descripción de la construcción geométrica solicitada en la fase 1, aunque ésta no se requería en esta parte.

En pocas palabras, se puede afirmar que la solicitud de la conjetura era innecesaria en esta situación debido a que la gran mayoría contestó que era parábola y además ya sabían que el tema que se estaba abordando era sobre parábolas y por el orden en el programa del curso (Ver Anexo No. 3) y en el libro de texto guía (Lehmann, 2002), se sabía que se empezaba por parábolas. Así mismo, no había oportunidad de seleccionar otra figura geométrica.

Otra falla en el enunciado del problema fue que no se solicitó explícitamente las acciones de escribir sino de construir con el Cabri. Solamente en la segunda hoja de trabajo, denominada *hoja del estudiante*, sí apareció un espacio donde se explicitaba qué debían escribir en la fase 1, tanto una conjetura como el procedimiento de construcción de dicha fase.

A manera de resumen, se presenta la Tabla 13.

*Tabla 13: Conjetura de la fase 1 de la situación problema 1c.*

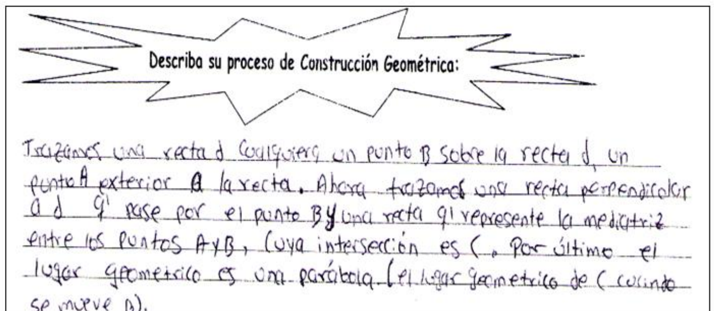
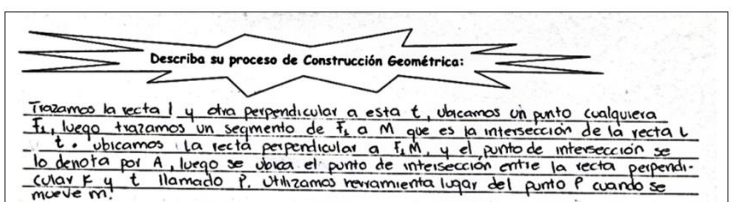
| **Tipo de Cónica** | **Descripción de la Respuesta (apellidos de los estudiantes** | **Figura** |
|---|---|---|
| **PARÁBOLA** | Argumentan que la circunferencia tangente equidista al punto A y a la recta d, por tanto el lugar geométrico cumple con la definición de parábola.<br>(Luque y Yepes)<br>(Escobar y Porras)<br>(Sáenz y Orozco)<br>(Ramírez y Lara)<br>(Fajardo y Restrepo) | <br>El lugar geométrico de los centros de la circunferencia que pasa por un punto fijo y es tangente a una recta es una parábola ya que todos los centros por definición de una circunferencia equidistan tanto del punto fijo como de la recta porque la recta es tangente a la circunferncia y por tanto la corta en un solo punto.<br>**Figura 58: Conjetura de la fase 1 de Luque y Yepes.** |
| **OTRAS RESPUESTAS** | Describen la construcción que realizaron y no determinan qué tipo de cónica es el lugar geométrico.<br>(Jurado) e (Ibáñez y Dávila) | <br>Trazamos una recta cualquiera dada que luego se fija un punto en el plano que no pertenezca a $d$ llamado $A$, después se coloca un punto sobre objeto en la recta $d$, luego trazamos una recta perpendicular a $A$ en el punto $B$, después trazamos la mediatriz de $A$ y $B$ luego tomamos el punto de intersección de la recta perpendicular.<br>**Figura 59: Conjetura de la fase 1 de Jurado.** |

En cuanto a la descripción verbal de la construcción geométrica de la fase 1, el 54% (7 de 13 grupos), determinaron que para hallar la circunferencia tangente a la recta $d$, era necesario partir de lo dado: la recta $d$, el punto $A$ exterior a $d$, y un punto móvil $B$ sobre $d$. Ver Figura 37 del análisis *a priori* de esta situación. Sólo una pareja de estudiantes (7,7%) realizó la descripción de la fase 2.

Todos realizaron muy bien esta construcción hasta tal punto que superaron las expectativas que se tenían ante esta construcción y frente al tiempo que se iban a gastar. Lo que se puede evidenciar es que tienen muchas fallas en la descripción escrita de los pasos de la construcción pues cuando los escriben, no se sabe a qué objeto están aludiendo, ni etiquetaron el punto que generaba el lugar geométrico en la construcción. Esto último se observó al revisar los archivos recogidos de Cabri.

En la Tabla 14 se presentan las respuestas del procedimiento de construcción geométrica para este problema.

*Tabla 14: Respuestas de la descripción verbal y su respectiva figura del problema*

| **Descripción de la Respuesta / Apellidos de los estudiantes** | **Figura** |
|---|---|
| En su descripción frente a la construcción de la fase 1 determinan la mediatriz del segmento $AB$ y la recta perpendicular a la recta $d$. El punto de intersección de estas rectas, llamado $C$ es quien genera el lugar geométrico cuando $B$ se mueve. Algunos dicen que el punto $C$ permite construir una circunferencia tangente a la recta $d$ que pasa por $A$.<br><br>(Lara y Ramírez)<br>(Machado y Saavedra)<br>(Luque y Yepes)<br>(Pérez y Navarro)<br>(Fajardo y Restrepo)<br>(Escobar y Porras)<br>(Astudillo y Chávez)<br>(Noguera y Revelo)<br>(Sáenz y Orozco) | <br>Trazamos una recta $d$ cualquiera un punto $B$ sobre la recta $d$, un punto $A$ exterior a la recta. Ahora trazamos una recta perpendicular a $d$ que pase por el punto $B$ y una recta que representa la mediatriz entre los puntos $A$ y $B$. Cuya intersección es $C$. Por último el lugar geométrico es una parabola (el lugar geométrico de $C$ cuando se mueve $B$).<br><br>**Figura 60: Descripción de la construcción de Sáenz y Orozco** |
| No escribieron el proceso de construcción de la fase 1.<br>(Jurado) ; (Echeverry y Ocoro) y (Estupiñan y Botero) | |
| Realizan la descripción de la fase 2.<br>(Ibáñez y Dávila). | <br>Trazamos la recta $l$ y otra perpendicular a esta $t$, ubicamos un punto cualquiera $F_1$, luego trazamos un segmento de $F_1$ a $M$ que es la intersección de la recta $L$ y $t$. Ubicamos la recta a $F_1M$ y el punto de intersección lo denota por $A$, luego se ubica el punto de intersección entre la perpendicular $k$ y $t$ llamado $P$. Utilizamos herramienta lugar del punto $P$ cuando se mueve $m$.<br><br>**Figura 61: Descripción de la construcción de Ibáñez y Dávila.** |

Ahora bien, con respecto a las respuestas dadas en la fase 3, donde se requería que primero los estudiantes interactuaran con el *medio* (fase de acción), de acuerdo a un procedimiento de construcción dado, entonces se les planteó ocho preguntas (de la 3.1. a la 3.8). A continuación se analizan cada una de las respuestas dadas.

Frente a la pregunta 3.1, las explicaciones que dieron los estudiantes se puede decir que: el 85% (11 de 13 grupos) de los grupos de los estudiantes afirmaron que el *lugar geométrico* que generaba el punto $P$ cuando se arrastraba $A$, usando la herramienta "Lugar" de Cabri, era una *parábola* que cambiaba su abertura a medida que $A$ se movía sobre el segmento $F_1M$. Tres de estos estudiantes determinaron que cuando $A$ esté sobre $F_1$ es una parábola con menor abertura. Uno de estos estudiantes afirmó que el foco y la directriz cambiaba a medida que $A$ se movía. Cinco estudiantes escribieron que el *lugar geométrico* es una parábola, y determinaron que cuando $A$ está sobre $M$ el lugar geométrico deja de ser una parábola para convertirse en una recta que coincide con $d$. De estas respuestas sólo una es incoherente, la de Echeverry y Ocoro, porque no se sabe cuál es la recta $L$ a la que ellos aluden en la construcción de la fase 2.

En otras palabras, la gran mayoría aseveró que era una *parábola* sin ningún problema, pero al mismo tiempo sin ninguna justificación.

Con respecto a la pregunta 3.2, se puede afirmar lo siguiente: Esta pregunta remitía a que argumentaran y dieran algunas razones del por qué la figura que aparecía era una parábola. Al analizar las respuestas de los estudiantes, se pudo concluir que la mayoría de ellos utilizó argumentos usando casos particulares para probar que era una parábola. El 23% de los grupos (3 de 13 grupos) justificó que era una parábola porque verificaron que se cumplían ciertas propiedades, por ejemplo, que encontraron el supuesto eje focal y dijeron que era eje de simetría de la parábola, o bien por que usaban la herramienta "Coordenadas y ecuación" del Cabri que les hacía aparecer la ecuación que tenía la estructura de una ecuación cuadrática, y por lo tanto, le delegaban la verdad al ambiente.

Algunos estudiantes, el 38% (5 de 13 grupos), se apoyaron en la *estrategia ganadora* para generar un lugar geométrico (el lugar fue una hipérbola, Ver Figura 62) que les permitió encontrar el foco de todas las familias de parábolas construida en la fase 2 y que al mover el punto $A$, los dos lugares geométricos permanecían iguales. El uso de esta *estrategia*, conllevó a que encontraran el foco y la directriz de esa familia, pero se observó que no verificaron que si dado el foco y la directriz encontrada, les permitiría encontrar la parábola.

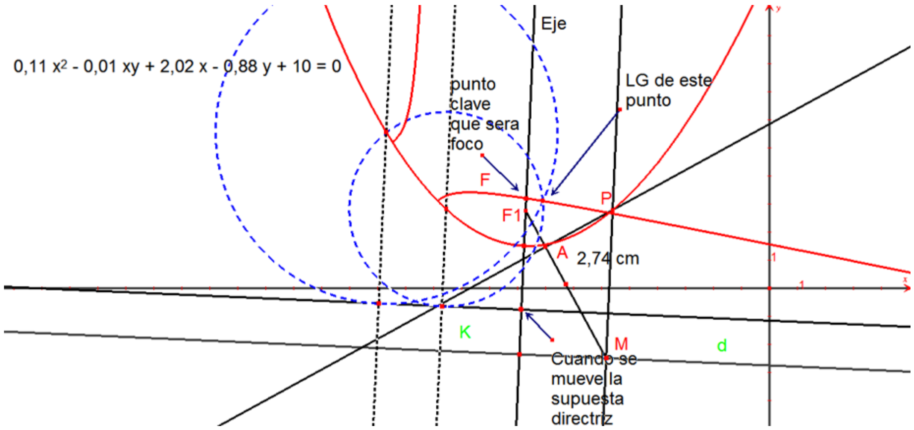



*Figura 62: Estrategia ganadora de Sáenz y Orozco y luego usaron "Coordenadas y ecuación" para delegar en el ambiente la justificación de que era parábola.*

Una forma de haber hecho la comprobación de sus argumentos, era haber realizado la construcción clásica de la parábola y luego observar que la nueva parábola se superponía a la parábola inicialmente construida, pero ninguno realizó esta acción. En otras palabras, que ambos *lugares geométricos* estuviesen superpuestos y fuesen parábolas, podía garantizar que la dada, era parábola. Sin embargo, hubo dos grupos (Revelo y Noguera; Yepes y Luque) quienes usaron la herramienta "Cónicas" (Ver Figura 63) y la herramienta "Coordenadas o ecuación" del Cabri para confirmar que los focos y la directriz encontrada gracias al método que el profesor les había enseñado en la fase de institucionalización de la primera situación, pero una vez más, el medio les sirvió para delegar en éste la verdad de sus argumentos.

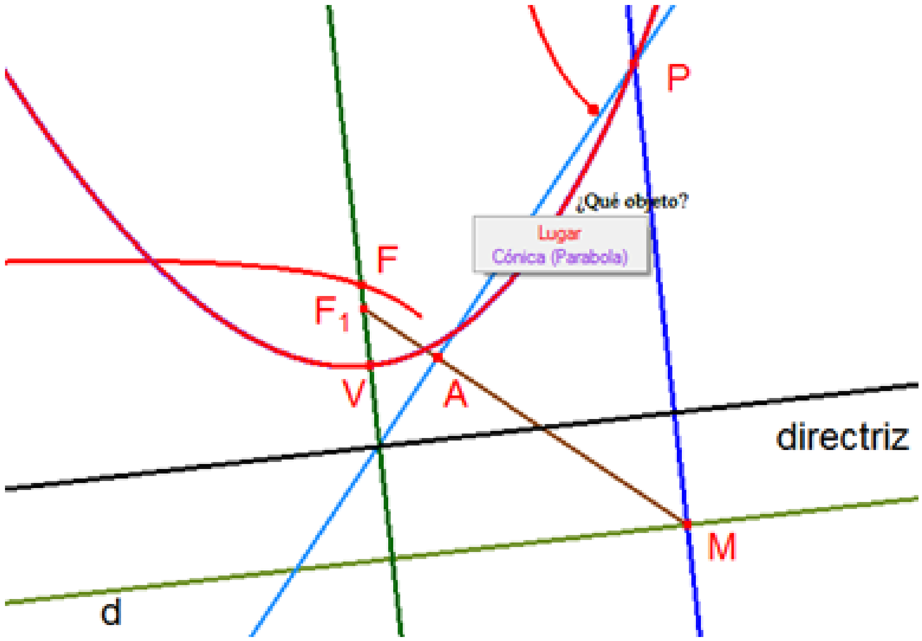


*Figura 63: Estrategia ganadora de Revelo y Noguera para encontrar el lugar y luego usaron la herramienta "Cónicas".*

Así mismo, un 15% (2 de 13 grupos) dieron un valor de $A$ para el que no se cumple que el lugar geométrico sea una parábola, es el caso de $A$ igual a $M$. Un grupo de estudiantes (Sáenz y Orozco) describieron una construcción con la misma intención de la *estrategia ganadora*, pero los pasos de la construcción no fueron claros y se confundieron al explicarle al profesor (Ver Figura 62 y Anexo No. 5, DVD # 4, Sesión IV, minuto 23). Otro grupo de estudiantes determinó que solo era parábola cuando es el punto medio de $F_1\,M$, es el mismo caso de la fase 1, cuya argumentación han realizado en la escritura de la conjetura, quizás no se atrevieron afirmar que los otros casos sean una parábola porque carecían de una razón.

Al entrevistarlos y revisar las argumentaciones escritas de los estudiantes, usaron el método del lugar geométrico (la figura que todos hallan es una hipérbola) pero no supieron por qué razón este método funcionaba.

Por ejemplo, Botero y Estupiñan (Ver Fotografía 2) usaron el método de lugares geométricos que el profesor había explicado en la fase de institucionalización de la situación problema 1a, pero al entrevistarlas por qué razón funcionaba ese método, no sabían responder y solo aludían a que dicho método lo usaron para comprender la nube de puntos de la situación problema 1a, y como en esa situación funcionó, en esta otra situación también creían que les funcionaría. Se pudo constatar que Botero y Estupiñan estaban aplicando este método sin saber las razones, debido a que en el registro de sesión que guardó el Cabri para ellas, se encontró que lo primero que hicieron fue trazar dos circunferencias a partir de dos puntos de la supuesta parábola hasta la recta d (que no era directriz). Si querían encontrar el lugar geométrico, debían de hacer primero una supuesta directriz que se dejara arrastrar. Y luego efectuar el procedimiento de construir las circunferencias. Pero se piensa que gracias a las retroacciones con el medio, pudieron darse cuenta que necesitaban primero construir una recta que se dejara arrastrar. En la siguiente Figura 64, está plasmado el momento en que interaccionan con el medio pero no les generaba ningún lugar geométrico, distinto al dado (la parábola).

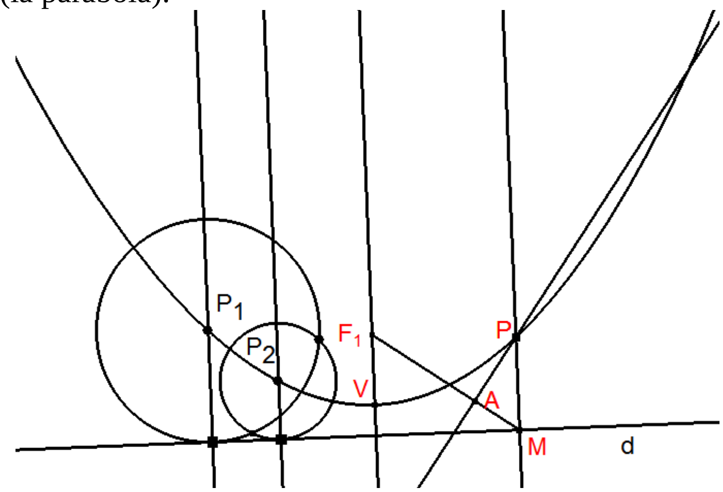
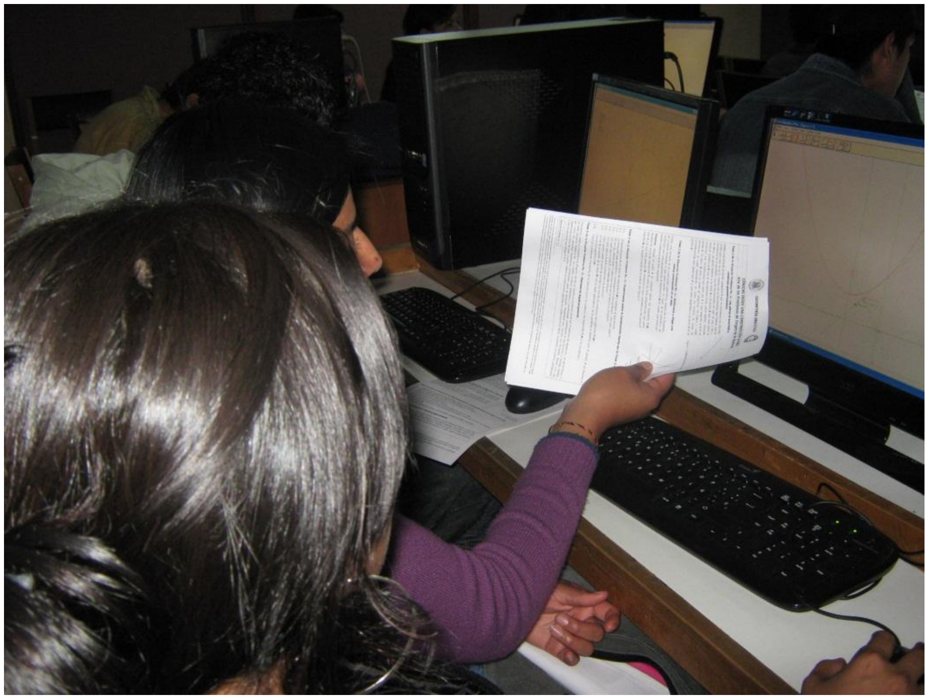



*Figura 64; Construcción auxiliar de Botero y Estupiñan antes de encontrar el foco de la parábola.*



*Fotografía 2: Botero y Estupiñan explicando que el método de lugar geométrico les permitió hallar el foco de la supuesta parábola en la fase 3 de la situación problema 1c.*

Se considera que el método de los lugares geométricos actúa como una herramienta para encontrar el punto *clave*, (que en este caso es el foco buscado) y de ahí cuando se encuentra entonces se parte de dicho punto (el foco) y de las demás condiciones dadas para encontrar la parábola buscada. Sin embargo, a la hora de aplicar este método, se tiene en cuenta la definición parábola, en particular el hecho de la equidistancia y por eso se efectúan las circunferencias (Ver Figura 65) cuyos radios parten de la parábola hasta una recta que sirve momentáneamente como directriz (la directriz que se deja arrastrar). Lo que conlleva a usar el *medio* dinámico que permite la variación. La visualización se fomenta con este tipo de acciones y retroacciones dado que es difícil conjugar mental y dinámicamente una configuración geométrica que preserve las propiedades invariantes mientras existe movimiento dado por la acción del arrastre.

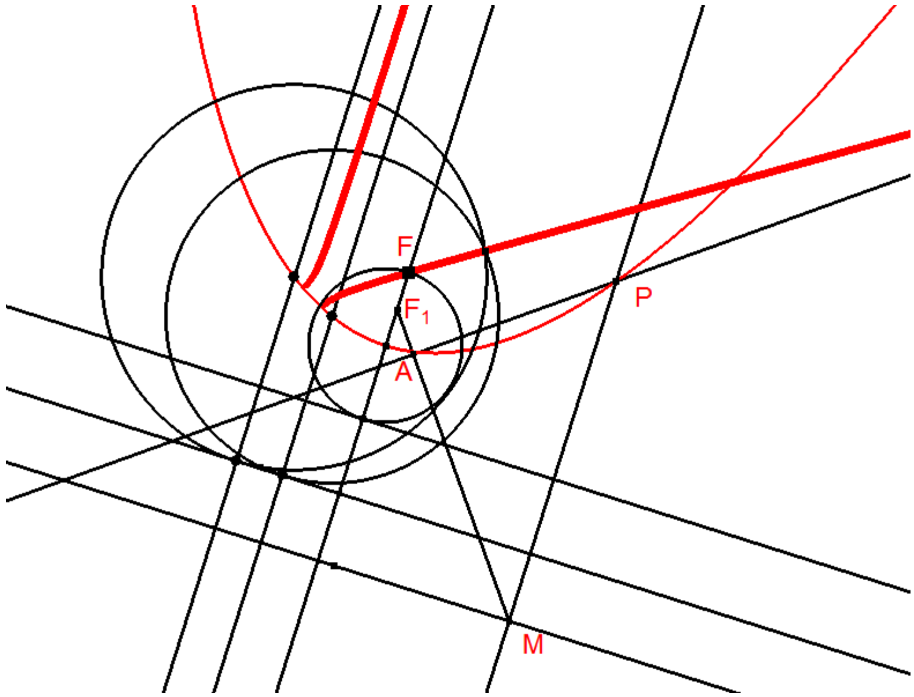



*Figura 65: Construcción de Botero y Estupiñan al haber utilizado el método de los lugares geométricos para hallar el foco de la supuesta parábola en la fase 3 de la situación problema 1c.*

Botero y Estupiñan supieron que les servía para encontrar el foco usando una directriz que se dejaba arrastrar. Tal vez se tienen algunos indicios de un razonamiento de *análisis* y *síntesis*. En la síntesis empezaron suponiendo que efectivamente era una parábola y luego de las experimentaciones y retroacciones con el Cabri, y empleando el lugar geométrico como una herramienta para hallar el supuesto foco y la supuesta directriz que era lo que el profesor preguntaba en el apartado 3.3., en consecuencia, en este proceder de razonamiento, comenzó por examinar casos particulares, pero a los estudiantes les faltó pasar a lo general que es lo que el profesor deseaba (el análisis). Acerca de pasar a lo general, se pudo observar en la examinación de la última fase, donde debían de argumentar analíticamente, pero se quedaron en casos particulares. Solo una pareja llegó a la generalidad (Restrepo y Fajardo).

En la siguiente Tabla 15, se puede leer un resumen de lo hallado en la pregunta 3.2.

*Tabla 15: Descripción de las respuestas a la pregunta 3.2.*

| **DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA** | **RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 3.2** |
|---|---|
| Determinan que es una parábola porque:<br>- tiene un foco y una directriz,<br>- tiene el eje focal | 3.2. si es ya que tiene un Foco y una directriz.<br>3.2 Sí es ya que tiene un foco y una directriz.<br>**Figura 66: Respuesta a la pregunta 3.2 por Astudillo y Chávez.** |

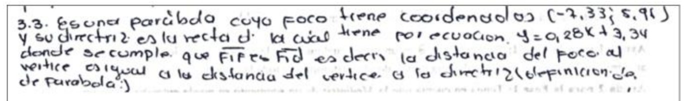
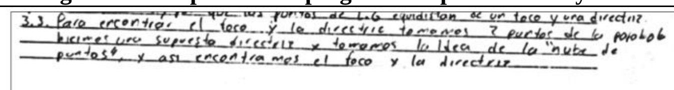
| DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA | RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 3.2 |
|---|---|
| perpendicular a la directriz,<br>- el eje focal es el eje de simetría.<br>- por las características de la construcción.<br>- su expresión es de la forma $y^2 = 4px$.<br>(Machado y Saavedra)<br>(Ibáñez y Dávila)<br>(Astudillo y Chávez)<br>(Noguera y Revelo)<br>(Jurado)<br>(Echeverry y Ocoro) | 3.2. Si corresponde a una parábola porque en la gráfica se observa que esta tiene un eje focal en la cual se encuentra el foco y además esta recta es perpendicular a la directriz.<br>**Figura 67: Respuesta a la pregunta 3.2 por Echeverry y Ocoro.**<br>3.2) El lugar geométrico corresponde a una parábola porque al hallar la ecuación del lugar geométrico es de la forma $y^2 = 4px$.<br>**Figura 68: Respuesta a la pregunta 3.2 de Jurado.** |
| Es una parábola porque han realizado sobre ella otra construcción que determina qué es una parábola y encuentran su foco y directriz. Esta construcción parte del supuesto vértice, eje focal y puntos de la parábola, donde se usa el lugar geométrico como una herramienta, a esta construcción se le llama la estrategia ganadora.<br>(Sáenz y Orozco), (Luque y Yepes) y (Estupiñan y Botero) | 3.2. La forma si corresponde a una parábola ya que se ha encontrado otro lugar geométrico para encontrar el foco y la directriz que será explicado en el numeral 3.3.<br>**Figura 69: Respuesta a la pregunta 3.2 por Sáenz y Orozco.** |
| No siempre es una parábola, es una recta cuando $A$ esta sobre $M$.<br>(Ramírez y Lara) y (Fajardo y Restrepo) | 2). Si es una parábola, siempre y cuando el punto $A$ no coincida con el punto $M$, cada vez que el punto $A$ se acerca a $M$, el foco de la parábola se aleja del vértice. Es decir, que tiene que ser una recta. El lugar geométrico representa una parábola porque geométricamente es posible encontrar el foco y la directriz con los puntos que se tienen previamente.<br>**Figura 70: Respuesta a la pregunta 3.2 por Fajardo y Restrepo.** |
| Realiza la descripción de una construcción que genera un lugar geométrico que pasa por el lugar geométrico de la fase 2. Este procedimiento no es preciso y claro. (Navarro y Pérez) | 3.2 Corresponde a una parábola porque encontrando el foco mediante una construcción tomando a $F_1$ como centro de la circunferencia y radio hasta $C_1$ la intersección del lugar con la circunferencia y trazando un segmento que tenga como extremos estos puntos de intersección. Ubicando el punto medio de este segmento y trazando una recta perpendicular que pasa por el punto medio y la directriz, el foco es la intersección de $C_1$ con esta perpendicular y este punto no varía.<br>**Figura 71: Respuesta de la pregunta 3.2 por Navarro y Pérez.** |

| DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA | RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 3.2 |
|---|---|
| Sólo es parábola cuando $A$ estaá sobre el punto medio de $F_1M$. (Escobar y Porras) | 3.2) No es una parábola que tenga directriz $d$ excepto cuando a concuerde con el punto medio del segmento $F_1M$. No es una parábola porque la recta perpendicular a $F_1M$ que pasa por $A$, se puede decir que es la mediatriz de los segmentos o la familia de segmentos que pasa por él.<br>**Figura 72: Respuesta a la pregunta 3.2 por Escobar y Porras.** |

Para dar respuesta a la pregunta 3.3, los mismos grupos de estudiantes que usaron la *estrategia ganadora* para responder la pregunta 3.2 la usaron para hallar el foco y la directriz que cambian cuando $A$ se mueve sobre el segmento $F_1M$ (Ver Tabla 16). Nuevamente cuatro grupos de estudiantes describen las características particulares de sus parábolas. Dos grupos de estudiantes no responden y uno describe una construcción que genera una nube de puntos y determina el foco y la directriz y que puede ser la *estrategia ganadora*.

*Tabla 16: Descripción de las respuestas a la pregunta 3.3.*

| DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA | RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 3.3 |
|---|---|
| Hallan el foco y la directriz, que varían a medida que $A$ se mueve sobre el segmento $F_1M$. Usan la estrategia ganadora. (Sáenz y Orozco), (Ramírez y Lara), (Machado y Saavedra), (Luque y Yepes), (Echeverry y Ocoro), (Estupiñan y Botero). | 3.3. Para encontrar el foco y la directriz realizamos otro lugar geométrico de la siguiente manera:<br>1. Trazamos una perpendicular a la recta d que pasa por $F_1$ llamemosla $t$.<br>2. Señalemos 2 puntos sobre la parábola una recta perpendicular a $t$ ($k$).<br>3. Trazamos rectas perpendiculares a k que pasen por los puntos sobre la parábola.<br>4. Trazamos circunferencias con centre en los puntos sobre la parábola y radio hasta la intersección de la recta $k$ con sus perpendiculares.<br>5. La intersección de las circunferencias construidas en paso 4, se las denota con el punto I<br>6. Hacemos el lugar geométrico del punto $I$ cuando se mueve la recta $k$<br>7. Trazamos la intersección del lugar geométrico encontrado en el paso 6. Con la recta $T$, denotado con la letra $P$. (Donde $f$ representa el foco de todas las parábolas cuya directriz es $-p$ ($p = foco$)<br>**Figura 73: Respuesta a la pregunta 3.3 por Sáenz y Orozco.** |
| Determinan algunas características particulares del foco y de la directriz, como:<br>- el foco de la parábola se encuentra sobre la recta perpendicular a la recta $d$ que pasa por el punto $F_1$. | 3.3. El foco de la supuesta parábola se encuentra sobre la recta perpendicular a la recta $d$ que pasa por el punto $F_1$ |

| DESCRIPCIÓN DE LA RESPUESTA | RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LA PREGUNTA 3.3 |
|---|---|
| - los valores de las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola.<br>(Noguera y Revelo)<br>(Fajardo y Restrepo)<br>(Navarro y Pérez)<br>(Jurado) | **Figura 74: Respuesta a la pregunta 3.3 por Noguera y Revelo.**<br><br>3.3. Es una parábola cuyo foco tiene coordenadas $(-7{,}33; 5{,}96)$ y su directriz es la recta $d$ la cual tiene por ecuación $y = 0{,}28k + 3{,}34$ donde se cumple que $\overline{F_1F}$ es $\overline{F_1d}$ es decir la distancia del foco al vértice es igual a la distancia del vérrtice a la directriz (definición de parábola).<br>**Figura 75: Respuesta a la pregunta 3.3 por Navarro y Pérez.** |
| Escriben que trazan una supuesta directriz y toman dos puntos de la parábola, luego generan una nube de puntos. (Astudillo y Chávez) | <br>3.3. Para encontrar el foco y la directriz tomamos 2 puntos de la parábola, hicimos una supuesta directriz y tomamos la idea de la "nube de puntos", y así encontramos el foco y la directriz.<br>**Figura 76: Respuesta a la pregunta 3.3 por Astudillo y Chávez.** |

Para el caso de las preguntas 3.4 y 3.5, se encontró que el 70% (9 de 13 grupos) declaró que $F_1$ es el foco solo cuando $A$ es el punto medio del segmento $F_1M$ o cuando la recta $AP$ es la mediatriz del segmento $F_1M$. Sin embargo, se incrementó el número de respuestas correctas cuando se respondieron a la pregunta 3.5, pues fue del 85% (11 de 13 grupos) del total de los estudiantes quienes afirmaron que la recta $d$ era la directriz solo cuando $A$ era el punto medio del segmento $F_1M$, cuando $F_1$ era el foco o cuando la recta $AP$ era la mediatriz del punto medio de $F_1M$.

De acuerdo a lo anterior, se puede afirmar que la directriz fue más fácil de encontrar debido a que se le daba la recta $d$. Lo que debían hacer era arrastrar el punto $A$ hasta que estuviera en el punto medio del segmento $F_1M$. Sin embargo, los argumentos que dieron fueron dados a la luz de construcciones blandas. Por ejemplo, no recurrieron a medir distancias o a argumentar de manera sintética.

Por otro lado, con respecto a las pregunta 3.6, los estudiantes respondieron gracias a la experimentación con el *medio* usando el modo de arrastre y dijeron lo que ocurría con la parábola dada. Por ejemplo, el 54% (7 de 13 grupos) declararon que cuando el punto $A$ estaba sobre $M$ la parábola se abría hasta superponerse sobre la recta $d$, mientras que cuando $A$ estaba sobre $F_1$, la parábola se cerraba y $A$ llegaba a ser el vértice de la parábola.

En la pregunta 3.7 el 31% (4 de 13 grupos) se dieron cuenta que la recta $AP$ era secante al lugar geométrico exceptuando cuando $A$ era el punto medio de $F_1M$. Para este caso la recta $AP$ era tangente. Descartaron el caso donde $A$ estaba sobre el punto $M$ porque no se forma una parábola. Se puede afirmar que el resto de estudiantes (69%) no tuvo en cuenta los puntos de intersección de la recta con el lugar geométrico. Posiblemente puede ser que la parábola al verla completa, de manera global, se les pierda la idea que "está constituida de puntos". Lo mismo para la recta.

En cambio, un 62% (8 de 13 grupos) determinaron en la última pregunta, la 3.8., que la mediatriz era tangente a la parábola.

Con respecto a la fase 4 donde debían validar el problema de la fase 1 argumentando analíticamente, se analizaron 8 trabajos escritos realizados en parejas. A partir de estos, se puede afirmar que el 64% (5 de 8 grupos) comprendieron el problema. Sin embargo, de los que comprendieron, (3 de 5 grupos) presentaron el enunciado y su resolución del problema respectivo, a través de casos particulares, tal y como se había pedido en la fase 4 (Ver Anexo No. 4 hojas de trabajo).

De lo anterior se puede decir que la mayoría de los grupos, 87.5% (7 de 8 grupos), usaron valores de las coordenadas del punto $A$, $B$, $P$ o la ecuación de la recta directriz en sus procedimientos, estos valores los obtuvieron usando la herramienta de Cabri "Coordenadas y ecuación", que además también arrojaba la expresión algebraica de la parábola. Así que estos grupos llegaron a expresiones particulares correspondientes a su gráfica en Cabri.

Y tan solo uno de los ocho grupos comprendió y realizó adecuadamente esta fase, pues llegó a expresar la ecuación de la parábola sin tomar casos particulares sino usando una ecuación general de una recta y dos puntos con unas coordenadas generales. En consecuencia, encontraron la solución de forma general con el punto $A$ sobre el eje $y$ y la recta paralela al eje $x$.

La Tabla 17 resume lo que elaboraron los estudiantes en la última fase de esta situación:

*Tabla 17: Solución algebraica de la parábola de la fase 4.*

| **CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN** | **DESCRIPCIÓN** | **PORCENTAJE** |
|---|---|---|
| Usaron las herramientas de Cabri como "Coordenadas y ecuación". Sin embargo, no comprendieron el problema. | Asumen que es una parábola y con el valor de uno de sus puntos y la expresión $x^2 = 4py$ obtienen las coordenadas del foco y la directriz. | 25% (2 de 8 grupos).<br><br>(Estupiñan y Botero); (Machado y Saavedra) |
| Comprendieron el problema. Le dieron unas coordenadas particulares a los puntos dados y tomaron la ecuación de una recta. | Determinan las coordenadas del punto $A$ y la ecuación de la recta $d$. Teniendo en cuenta que la distancia del centro de la circunferencia a $A$ es igual que del centro a la recta $d$ (son radios de una misma circunferencia) obtienen la expresión de la parábola. | 38%. (3 de 8 grupos).<br><br>(Escobar y Porras); (Orozco y Luque) y (Ramírez y |

| CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN | DESCRIPCIÓN | PORCENTAJE |
|---|---|---|
| | | Lara) |
| Comprendieron que debían partir de tomar un caso particular. Seleccionaron una ecuación de una recta y las coordenadas de dos puntos, pero al tratar de solucionarlo analíticamente tuvieron un error en las manipulaciones algebraicas y en consecuencia, no encontraron la ecuación de la parábola. | Determinan las coordenadas de los puntos $A$, $B$ y la ecuación de la recta $d$ de la gráfica dada en el problema en relación a un sistema de coordenadas. Se obtiene la ecuación de la recta perpendicular a $d$ pasando por el punto $B$ (llamada $L_1$) porque se tiene las coordenadas del punto B y se sabe que es perpendicular a la recta $d$. De la misma manera se obtiene la ecuación de la mediatriz, se determinan los valores del punto medio del segmento $AB$ y se halla la pendiente de la mediatriz a partir de la pendiente del segmento $AB$. Se establece un sistema de ecuaciones lineales para hallar las coordenadas del punto $P$ que genera el lugar geométrico. Usan el teorema sobre distancia del punto $P$ a la recta $d$ para obtener una expresión algebraica cuadrática pero no su ecuación no correspondió a la de una parábola. | 12.5%. (1 de 8 grupos).<br><br>(Navarro y Pérez) |
| No comprendieron que lo dado en el problema era una recta y un punto exterior. Y que además debían dar las ecuaciones como punto de partida para resolver este problema. | Hacen coincidir la recta $d$ con el eje $x$ y hallan las coordenadas de los puntos $A$, $B$ y $P$. En relación a la expresión general de las parábolas, obtienen un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas a partir de los tres puntos de la parábola. Pero comenten un error al asumir que $A$ pertenece a la parábola. Al realizar los cálculos obtienen los coeficientes de la expresión general de la parábola. Tampoco dieron la ecuación de la recta directriz. | 12.5%. (1 de 8 grupos).<br><br>(Revelo y Noguera) |
| Sin usar las herramientas de Cabri. Comprendieron el problema y además tomaron las ecuaciones de los objetos dados de manera general. Por lo tanto, la ecuación que encontraron de la parábola también fue de manera general. | Dan al punto $A$ y la recta $d$ valores generales, en términos de $x$ y $y$. En un sistema coordenado $A$ esta sobre el eje $y$ la recta $d$ es paralela al eje $x$. Asumen que es una parábola y usa la definición, por lo que recurre a la equidistancia de $A$ al punto $P$ y del punto $P$ a la recta $d$. Se asigna a $A$ como el foco y la recta $d$ como la directriz. | 12.5%. (1 de 8 grupos).<br><br>(Fajardo y Restrepo) |

En las siguientes dos Figuras 77 y 78, se puede apreciar el trabajo de Botero y Estupiñan que si bien usaron el Cabri en sus construcciones geométricas auxiliares para hallar el foco de la supuesta parábola en la fase 2, en la última fase no lograron plasmar esa generalidad que el profesor deseaba, y tan solo usaron el Cabri para obtener una ecuación y unos puntos en particular y luego hallar una ecuación. Con esta última fase, se logró observar que estas estudiantes no lograron articular las representaciones gráficas de la fase 1 con las representaciones algebraicas de esta fase.

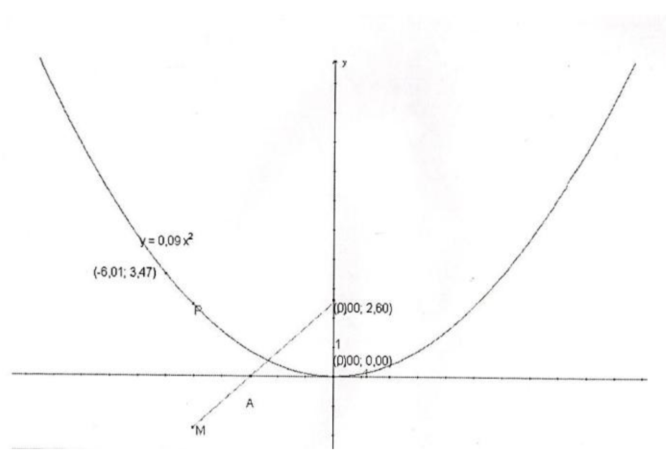
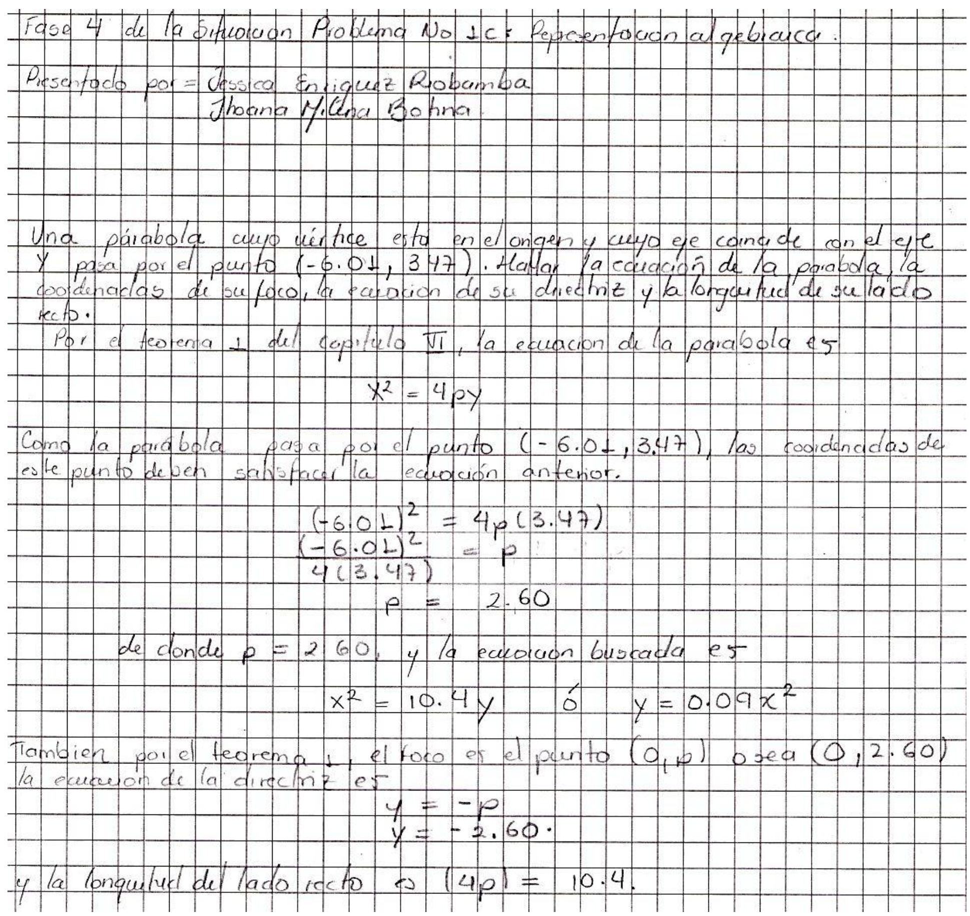



*Figura 77: Gráfica presentada por Botero y Estupiñan en la fase 4.*



Fase 4 de la Situación Problema No 1c: Representación algebraica.

Presentado por = Jessica Enríquez Robamba
Jhoana Milena Bohna

Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto (-6.01, 3.47). Hallar la ecuación de la parábola, la coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Por el teorema 1 del capítulo VI, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py$$

Como la parábola pasa por el punto (-6.01, 3.47), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación anterior.

$$(-6.01)^2 = 4p(3.47)$$

$$\frac{(-6.01)^2}{4(3.47)} = p$$

$$p = 2.60$$

de donde $p = 2.60$, y la ecuación buscada es

$$x^2 = 10.4y \quad \text{ó} \quad y = 0.09x^2$$

También por el teorema 1, el foco es el punto $(0, p)$ osea $(0, 2.60)$
la ecuación de la directriz es

$$y = -p$$

$$y = -2.60.$$

y la longitud del lado recto es $|4p| = 10.4$.

*Figura 78: Representación algebraica presentada por Botero y Estupiñan en la fase 4.*

# CAPÍTULO 6.
# RESULTADOS Y CONCLUSIONES GENERALES

En este último capítulo se presentan resultados y conclusiones generales abordadas en relación a tres categorías, las cuales son: 1. El Problema, las Hipótesis de Investigación y los Objetivos. 2. La gestión del profesor en el proceso de enseñanza. 3. Preguntas abiertas que dejó la investigación.

## 1) En relación al *Problema,* las *Hipótesis de Investigación* y los *Objetivos*

La *TSD* y la *micro-ingeniería didáctica* proporcionó principios orientadores que permitieron comprender e identificar algunos *fenómenos didácticos* relativos al proceso de enseñanza de las *cónicas*, en el contexto de un curso de *geometría analítica*, los cuales se describirán en el desarrollo de este capítulo. Así mismo, al principio de éste, se dará cuenta de las hipótesis planteadas y del cumplimiento de los objetivos trazados al inicio de este trabajo.

Uno de los resultados importantes de esta investigación fue el diseño de una *secuencia de situaciones problema* y como telón de fondo, el uso del tratamiento didáctico reflejado en él mismo, que dejó entrever el cumplimiento de las hipótesis. En este sentido, fue posible reconocer la importancia de promover las caracterizaciones *puntuales* y *globales* de las *cónicas*. De igual forma, este enfoque se reveló como una posibilidad de integrar la visión *sintética* y la *analítica* para el estudio de las *cónicas* a través de la mediación del AGD Cabri Géomètre, al hacer entrar a los estudiantes en el estudio de las *cónicas* por medio de actividades de construcción geométrica y terminar solicitándoles la correspondiente expresión algebraica.

Por ejemplo, para dar cuenta de la transición de lo puntual a lo global, se pudo observar en la *situación problema No. 1a*, *acciones* de los estudiantes usando el *medio* a través de construcciones *robustas* o *blandas*. En este caso, se partió de construir una nube de puntos que por su propia naturaleza fueron estáticos, pero que sirvieron como puntos guías para señalar la trayectoria de un *punto móvil* relacionado a una construcción robusta que los estudiantes debían hallar. Este *punto móvil* debía generar la *cónica* de manera global.

Las estrategias para encontrar la globalidad de la figura partieron de lo que usualmente se hace en un ambiente de lápiz y papel como es el de unir los puntos por medio de un instrumento que guíe la mano o que la sustituya, trazando una curva *suave*. Como la condición era que los estudiantes tenían que usar el AGD Cabri Géomètre II Plus, se observó entre las acciones, que los puntos fueron unidos por medio de segmentos para observar en la pantalla la totalidad de la figura. Estas acciones vinieron determinadas por la conjetura que los estudiantes debían formular por escrito.

Otras estrategias de construcción que dieron cuenta de la globalidad de la figura desencadenaron construcciones blandas, algunas de ellas pudieron llegar a constituirse en robustas pero se concluyó que los estudiantes no tuvieron *estrategias de base* o *heurísticas* para usar, por ejemplo, método de los *lugares geométricos* como una *herramienta* (en el sentido del enfoque didáctico de Douady, 1986; 1993) para descubrir el foco y por ende la directriz apropiada. Si bien usaron la herramienta del Cabri "Lugar" para generar una *cónica* como lugar geométrico, que aparentemente pasaba por la nube de puntos, la validación de sus acciones en el AGD se vieron restringidas al arrastre de puntos que hacían invalidar o validar sus estrategias ante los invariantes impuestos en la construcciones efectuadas.

En cambio, la herramienta "Traza" no fue utilizada frecuentemente en esta situación debido a que cuando arrastraban puntos que hacían mover de la construcción inicial el rectángulo $ABCD$ dado, el punto móvil que ellos habían construido dejaba una traza que no daba la sensación de continuidad entre los puntos y además no incidían por los puntos de la nube. También se observó que los estudiantes usaron la herramienta "Distancia y longitud" para medir distancias entre puntos de las construcciones auxiliares en la nube de puntos, como otra forma de validar o invalidar al contrastar las retroacciones que arrojaba el medio con la definición que ellos pensaban era apropiada para la *cónica*. Entre otras, midieron la distancia del supuesto foco al lugar geométrico y de éste a la supuesta directriz para corroborar si la *cónica* cumplía con las propiedades métricas que están involucradas en la definición estudiada de parábola, en este caso.

De esta manera, en esta situación, de lo puntual se llegó a lo global, pero desde lo algebraico, usando una estrategia demostrativa de la *geometría analítica*, la introducción apropiada de un sistema de ejes coordenados y después colocando la nube de puntos de la figura en una de las posiciones más simples, de tal manera que simplifique los cálculos algebraicos para finalmente representar la *cónica* de forma simbólica y llegar a la generalidad de la situación. Con esta última fase de la situación, se comprobó que sí era posible llegar a la globalidad con los elementos que poseían, sin embargo, no todos llegaron. Tan sólo una pareja de estudiantes consiguió la generalidad sin particularizar lo efectuado en la primera fase.

Por el contrario, en la *situación problema No. 1c*, los estudiantes debían hacer una construcción robusta, sin embargo, aparecieron construcciones blandas tratando de buscar el foco y la directriz de una familia de parábolas. No obstante, en los estudiantes que emplearon el método de los lugares geométricos para encontrar el foco del problema propuesto, sucedió que pudieron realizar una construcción geométrica robusta donde se apreció la globalidad de la *cónica* a través de un punto móvil que la generó como lugar geométrico, al emplear la herramienta “Lugar” del AGD.

En esta última situación se observó que en las acciones de los estudiantes al intervenir con el *medio*, construyeron la *cónica* de manera *global*, ya que tuvieron en cuenta la *definición* insinuada y propuesta en el libro de texto guía (Lehmann, 2002) que se propone en el curso de *geometría analítica*, definición que de por sí se ajustó a la perspectiva dinámica porque alude al movimiento. De la misma manera, los estudiantes usaron el procedimiento de construcción clásica, a partir de un foco y directriz dada. En general, *no* presentaron inconvenientes en resolver el problema en la fase 1, al ver la figura completa. Sin embargo, en la tercera fase surgieron procedimientos inapropiados que generaron construcciones blandas, cuando hicieron experimentaciones para resolver las preguntas de esta fase usando el modo de *arrastre* del Cabri, lo cual representó que el 69% de los estudiantes no tuvieron en cuenta que la figura está constituida de puntos.

Por lo anterior, se considera que faltó enfatizar en rescatar la noción de lugar geométrico como un *conjunto de puntos*, debido a que esta idea no afloró espontáneamente en los estudiantes cuando tenían la figura *cónica* construida con la herramienta “Lugar”, puesto que se quedaron en el nivel *intuitivo* reforzando y descubriendo las propiedades geométricas de la *cónica*, así como sus propiedades métricas, al usar las herramientas de medición “Distancia o longitud” o “Coordenadas o ecuación”. Las retroacciones del medio al arrastrar, les permitieron observar que el *lugar geométrico* permaneció invariante ante los continuos arrastres que le hicieron al foco o a la directriz, pero esto no llevó a que se *restituyera* el sentido de la *cónica* desde una caracterización *puntual*.

Y cuando se les solicitó que representaran algebraicamente lo que habían hecho en la fase 1, tan sólo una pareja de estudiantes pudo hacer la coordinación entre las representaciones gráficas y ejecutables que habían experimentado con las representaciones algebraicas. Ante este panorama, se puede concluir que para llegar a la generalidad, el profesor debió emplear otra estrategia con la cual los estudiantes no se quedaran en casos particulares. Las expresiones algebraicas alcanzadas (el 87.5% de los estudiantes), si bien correspondieron con lo obtenido en las pantallas de cada pareja, no consiguieron construir la ecuación de la *cónica* de manera general como se había solicitado.

Por lo tanto, una debilidad detectada en esta *estrategia* consistió en que comenzar por lo *puntual* puede generar *limitaciones,* tales como: que los estudiantes permanezcan en casos particulares, que consigan gráficas pero no generalicen cuando hacen la articulación con las representaciones algebraicas, lo cual se puede apreciar en la Tabla 17. No obstante, algunos fueron conscientes de la importancia de trascender, es decir, de pasar del nivel espacio – gráfico al nivel teórico.

De todo lo anterior se pueden inferir los siguientes aspectos:

Primero, el análisis de la información recolectada evidenció que las situaciones didácticas planteadas desde las construcciones geométricas *puntuales* permitió emerger construcciones geométricas *globales* en el AGD Cabri, a la vez que en este ambiente se dieron retroalimentaciones que posibilitaron caracterizar algunas de las propiedades geométricas de las *cónicas*, pero al partir de construcciones *globales* los estudiantes *no* tuvieron en cuenta la naturaleza geométrica de las curvas como lugares geométricos: lo *puntual* de ellas.

Segundo, lo *puntual* en este trabajo remitió a lo local, en considerar puntos de la gráfica que tenían las propiedades de ser una *cónica*, lo que conllevó a que se quedaran en un nivel perceptual, en tanto que lo *global* de la gráfica les permitió aproximarse al mundo teórico, aunque lo *global* no fue aprovechado al máximo pues las estrategias de los estudiantes se quedaron en lo figural. Así mismo, con este diseño, se pudo descubrir que de lo *global*, existe la posibilidad que surja la consideración de lo *puntual* cuando los estudiantes han pasado por una primera caracterización.

Además, el diseño de las situaciones didácticas sumado al Cabri, produjo un ambiente educativo, a manera de *puente*, para pasar de lo *puntual* a lo *global*. La vuelta, de ir de lo *global* a lo *puntual*, es algo que el profesor debe procurar cuando se busca encontrar invariantes o propiedades geométricas aludiendo a puntos de la curva que son claves para determinar la naturaleza de ésta tales como el vértice o el foco.

Tercero, para comprender el significado de las *cónicas* por medio de la articulación entre las representaciones estáticas, las dinámicas y ejecutables y las algebraicas, la noción de *lugar geométrico* jugó un papel importante para el estudio de estas curvas, en un AGD como el Cabri. Sin embargo, en los estudiantes hizo falta que esta noción alcanzará el estatus de noción *paramatemática*[82], en el sentido de Chevallard (1997), puesto que se observó que el lugar geométrico fue reconocido como herramienta útil para resolver los problemas, pero no fue tratado como objeto de estudio, a pesar de que el profesor orientó aspectos como centrales de esta noción al principio del curso de *geometría analítica* al abordar los dos problemas fundamentales, sin embargo, el estatus logrado por parte de los estudiantes fue el de noción *protomatemática*[83], dado que la movilización de esa noción en las situaciones fue de manera implícita cuando ellos la generaron usando las herramientas del AGD.

Así mismo, esta noción se quedó en el nivel *perceptual* pues se considera que los estudiantes debieron tener en cuenta que es importante caracterizarla en términos algebraicos y sirve tanto para el establecimiento de las ecuaciones de las *cónicas* como para la solución de problemas geométricos. Por lo que se requiere de una habilidad para formular una relación matemática que generalmente involucra longitudes de una forma algebraica, después de llevar a cabo una cierta simplificación.

Cuarto, cabe mencionar que en la aplicación de la secuencia se observó que los estudiantes no están acostumbrados a usar distintos tipos de representaciones matemáticas de un mismo objeto, y que para referirse a ellos, dan preferencia por las representaciones verbales y gráficas, tal como se observó en las producciones de sus conjeturas y procedimientos de construcción que se les solicitó, ni vinculan las representaciones entre sí. Tal parece que este fue un hecho que pudo haber afectado los resultados.

Quinto, desde la organización curricular no se siguió con un programa de *geometría analítica* al estilo tradicional, pues se le dio un giro a éste con una mirada renovada a las *cónicas* desde lo *sintético*, y que si bien los contenidos permanecieron no se dio el tratamiento convencional de las *cónicas*, basado en representaciones algebraicas que desligan lo geométrico. Lo que se potenció fue el dinamismo que se le imprimió a los problemas de *cónicas* como lugares geométricos al usar el Cabri, resaltando las definiciones dinámicas, apropiadas, que aluden al movimiento, cristalizándose en la pantalla del AGD, así como los fenómenos de visualización que aportan para el surgimiento de estrategias de solución.

[82] El término de noción paramatemática se debe a Chevallard (1997), es una noción relativa a la institución educativa en la que se trabaje o se considere. Así, se dice que "demostración", "parámetro" y "ecuación" son nociones paramatemáticas dentro de la matemática escolar, donde dichas nociones se utilizan como herramientas transparentes, no cuestionables. En la enseñanza de las matemáticas, estas nociones no se toman como objeto de estudio, pero la noción de "demostración", por ejemplo, puede funcionar como una noción matemática en un curso de lógica matemática a nivel universitario.

[83] Es otro estatus de las nociones matemáticas. Las *nociones protomatemáticas*, son nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida como objeto de estudio, ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

Por lo que se puede afirmar que con esta conjugación del ambiente informático a través de construcciones geométricas, así como la complementariedad de lo *sintético* y lo *analítico*, se pudo ampliar el horizonte de *intervención didáctica* en el curso universitario de *geometría analítica*, en la medida que permitió la integración tanto de nuevas temáticas como de estrategias metodológicas, y tuvo en cuenta la complejidad conceptual que encierran las *cónicas* así como su naturaleza geométrica. Sin embargo, se notó que los estudiantes no se acostumbraron a hacer *conversiones* entre representaciones. A lo sumo, conocen los procedimientos de pasar de las representaciones simbólicas a las gráficas, pero no están familiarizados con procedimientos en la vía contraría.

Sexto, existe un problema representacional en los libros de texto universitarios de *geometría analítica* y que aparece silencioso sin que los profesores procuren evitarlo y mucho menos que los estudiantes se concienticen de ello. Es la manera en que aluden a los dibujos de las *cónicas*, sin tener en cuenta la diferencia conceptual con lo de figura. Una manera de concientizar a los estudiantes del problema es: el dibujo que es la representación visual, frente al objeto matemático que es lo que se quiere representar.

Séptimo, la dimensión didáctica permitió profundizar en el *saber matemático* que se enseñó. Se presentaron aspectos matemáticos relativos a los lugares geométricos en las *cónicas*, con el propósito de analizar la especificidad y significación del "saber" matemático en el proceso de aprendizaje. Esto con el fin de hacer una "transposición didáctica e informática" transparente y desvinculada de subjetividades. De esta manera, el *saber matemático* fue consustancial al diseño, no fue un agregado. Como esos conocimientos son tan específicos, se debía abordar de esa manera, tratando de darle sentido a las preguntas ¿Qué son los *lugares geométricos*? y ¿*Cuál era su incidencia en los modelos tradicionales de la enseñanza de estas curvas cuando se trata de aprenderlas*?

Octavo, el tratamiento en la caracterización puntual y global enmarcado en una construcción geométrica fue pieza clave para que los estudiantes despertaran sus ideas, percepciones, imágenes mentales, y fortalecieran el proceso de visualizar matemáticamente al tratar de resolver el problema; pero al mismo tiempo se les ayudó a involucrarse en un proceso de *actividad matemática* gracias a las *acciones* y *retroacciones* que el medio ejecutable les proporcionó y así pudiesen tener presente la riqueza de ideas geométricas interconectadas.

Noveno, el AGD Cabri Géomètre jugó el papel de instrumento mediador en todo el proceso: cuando los estudiantes trataron de encontrar un punto móvil que fuese recorriendo un camino (un conjunto de puntos estáticos y colocados de manera discreta) en el plano sin ejes de coordenadas, por medio de una construcción geométrica, que les permitió un acercamiento visual mostrándoles la dinámica que subyace a la situaciones, y gracias a este instrumento se gestaron estrategias para encontrar una construcción geométrica dinámica.

De este proceso dinámico emergió otra idea de movimiento como es la de trayectoria de un punto que reforzó y contribuyó a construir el significado de otra noción más compleja e importante en matemáticas como es la de *función matemática*. Al respecto, se observó que al buscar una correspondencia entre dos puntos en un montaje inicial de la *geometría sintética*, un punto que está sobre un dominio y el otro punto que se conecta con el primero por medio de una construcción, va a generar la gráfica de una función vista como lugar geométrico.

Décimo, en los análisis se encontró el *efecto Topaze*, cuando un estudiante de la segunda sesión trabajó en la primera situación, quiso lanzarse a formular rápidamente la *conjetura* ante la pregunta: ¿Qué cónicas se forman con la nube de puntos? Entonces, la respuesta no la encontró por sus propios medios, sino debido a que un profesor observador que estaba registrando la situación, le presentó gestos al estudiante para que asegurara que era la conjetura verdadera. Este estudiante de inmediato hizo ostensible la *devolución del problema* al haber revisado sus elaboraciones con el AGD.

Undécimo, desde la perspectiva didáctica de la dialéctica *herramienta – objeto*, el uso de la noción de lugar geométrico en el estudio de las *cónicas* es un ejemplo de este punto de vista, debido a que la secuencia estuvo organizada alrededor de problemas geométricos cargados de una intencionalidad didáctica que les permitió a los estudiantes darle un sentido y significado a las *cónicas* implicadas. Desde esta *dialéctica*, se pudo observar que el lugar geométrico jugó el papel de *herramienta*. Sin embargo, el paso a estudiar las *cónicas* en tanto *objeto matemático* fue muy sutil.

En efecto, en el análisis de la secuencia, se observó que el profesor permitió a los estudiantes apropiarse del conocimiento matemático en cuestión, gracias a que se pudo usar el *método de los lugares geométricos –estrategia ganadora–*, y cuando se efectuó la *devolución del problema*, ellos entraron en interacción directa con cada uno de los problemas de la secuencia. No obstante, se pudo apreciar que algunos estudiantes aprendieron la *estrategia ganadora*, al utilizar el lugar geométrico en el estatus de herramienta y así encontrar el foco de la parábola (el punto *clave*) para resolver el problema.

Pero, por otro lado, al profesor le faltó enfrentar la *descontextualización* y *despersonalización* de los saberes geométricos que estuvieron involucrados en dicho método para que tuviesen sentido y significado como *objeto matemático*. En la fase de institucionalización realizada por el profesor, se permitió que los estudiantes encontraran un lugar geométrico “extraño” que apareció en forma de hipérbola, pero que este nunca les preguntó por qué razón se producía esa figura u otra, sino que se utilizó simplemente para resolver el problema. Lo que se institucionalizó fueron las propiedades geométricas y algebraicas con sus respectivos teoremas de las *cónicas,* pero no se indagó por ese lugar geométrico "extraño" que fungió como *herramienta*.

Duodécimo, desde este punto de vista dialéctico, se pudo conjugar la caracterización *puntual* y *global* en la secuencia diseñada. Y en consecuencia el encuadre didáctico fue funcional pero al mismo tiempo llegó a convertirse en un fenómeno didáctico denominado *uso abusivo de la analogía* (Brousseau, 2007), al mostrar el profesor de manera ostensiva dicho método.

En este sentido, se piensa que este método de los lugares geométricos se debe enseñar claramente, pero con sutileza, más aun cuando en algunos casos, como los ocurridos en este proceso, se convirtió en un *fenómeno complejo* porque los estudiantes trataban de replicarlo, aunque en ocasiones sin éxito. Esta heurística o método de abordar un problema, a veces surge espontáneamente al resolverlo, pero la mayoría de las veces no sucede así en ellos, por lo que hay que hacerlo ostensivo. En las *fases, momentos* y *devoluciones* de las situaciones se pudo observar que el profesor reiteraba y enfatizaba en el uso del método de los lugares geométricos como una *herramienta* para resolver el problema, pero algunos estudiantes sí lo replicaron pero no lo entendieron.

Por lo tanto, el método de los lugares geométricos se reveló como una *estrategia ganadora* y se vio ampliada al usar el AGD Cabri, el cual pudo haberse integrado a las técnicas habituales de los estudiantes si se hubiese dado una complementariedad entre ambientes como el del lápiz y el papel. No obstante, según Schumman (1997), la selección del ambiente para generar lugares geométricos depende de los objetivos didácticos que persiga el profesor. El problema era encontrar una *estrategia ganadora* que solucionara la situación usando conocimientos geométricos (es decir, con una construcción geométrica robusta) y que fuese la más eficiente entre las estrategias perceptivas y empíricas (una construcción blanda que se aproximaba). Como algunos estudiantes encontraron la *estrategia*, entonces se manifestó como una *herramienta* para resolverlo y no como una forma de cumplir con las expectativas del profesor de que lo entendieran como *objeto* y no sólo como herramienta.

Decimotercero, se observó particularmente otro fenómeno didáctico que sucedió cuando el profesor gestionó las sesiones de trabajo. Se encontró en el profesor una *situación de recuerdo*[84]. Ésta se dio de manera reiterada. Sin embargo, el profesor en

[84] Según Douady (1995), las *situaciones de recuerdo*, son aquellas donde al comenzar una sesión de clase, el profesor pide a los estudiantes acordarse de los puntos esenciales de las sesiones anteriores sobre un tema determinado que todavía está en curso. Se establece un control mutuo entre los estudiantes. El profesor repite algunas preguntas, de vez en cuando formula unas nuevas, retoma las informaciones expresadas, pero él en sí no aporta ninguna. Esta es una fase clave en la selección y memorización de los eventos importantes pues se

la impaciencia que tuvo por exigir que recurrieran a las definiciones, no se logró que se apersonaran de los problemas y la *devolución del problema* no fue impactante en algunos estudiantes, sobre todo en la primera situación, de ahí los pocos resultados.

**2) En relación a la gestión del profesor en el proceso de enseñanza**

En primer lugar, lo que gestionó el profesor fue la puesta en acto de la secuencia. Sin embargo, en el análisis *a priori* y *a posteriori* se observó la *complejidad* de la enseñanza de las *cónicas* a través de la estrategia didáctica puesta en acto en el curso de *geometría analítica.* Esta complejidad se puede ver en cuatro motivos: 1) Por la integración de las TIC en el proceso de enseñanza, en particular un AGD como Cabri (con sus tipos de tareas, restricciones y potencialidades, así como por el carácter ejecutable de este instrumento de mediación). 2) Por introducir una *plataforma de aprendizaje virtual* que jugó el papel de repositorio de archivos electrónicos donde los estudiantes subieron y descargaron archivos producidos en la secuencia diseñada. 3) Por la dificultad, al comienzo del curso, en la comprensión del uso de la noción de lugar geométrico por parte de los estudiantes, la cual era un supuesto que debían tener para el curso de *geometría analítica*, más aun si ya habían cursado el de *geometría euclídea*. 4) Porque la dificultad anterior dio lugar a un ambiente didáctico propicio para que emergiera el concepto de *figura geométrica*, que tampoco lo comprendieron al comienzo del curso, tal como se observó en la prueba diagnóstica sobre concepciones.

Como consecuencia de estos motivos la mayoría de los estudiantes no trascendieron al nivel teórico de la geometría y se quedaron en el nivel espacio-gráfico.

En Segundo lugar, se caracterizó la construcción de significado de las *cónicas* usando el AGD Cabri a través de la directrices que permearon el dispositivo experimental, con lo cual se pudo enfatizar en la necesidad de que los estudiantes se enfocaran simultáneamente en *acciones* y *retroacciones* con un *medio*, en fenómenos visuales y en relaciones geométricas, así como con representaciones matemáticas simbólicas y ejecutables.

En tercer lugar, el trabajo de los estudiantes fue arduo porque antes de la puesta en acto, no estaban acostumbrados a trabajar en clase, en situaciones a-didácticas donde fueran protagonistas de su propio aprendizaje; lo cual es muestra de lo que

establece la relación con las clases anteriores, se comienza a descontextualizar y a despersonalizar aquellas cosas que el profesor institucionalizará posteriormente.

usualmente sucede en el *contrato didáctico* en el ámbito universitario, es decir, los estudiantes esperan que el profesor haga una clase *magistral*, y llene el tablero de ecuaciones y demostraciones, pero no que propicie *devoluciones de problemas.* Por el ambiente de clase generado, se rompió el paradigma de la clase magistral, y en consecuencia, se le otorgó un papel central al estudiante en el diseño de las situaciones didácticas, repartiendo responsabilidades entre el profesor y los estudiantes.

### 3) En relación a las Preguntas Abiertas que deja la investigación

A continuación se reseñan seis preguntas abiertas derivadas de esta labor investigativa:

1) Existe una complementariedad entre el uso de gráficas dinámicas proporcionadas por los AGD con el uso de ambientes de lápiz y papel, según estudios que van encaminados en esa perspectiva investigativa como el de Hoyos (2006). En lo que atañe a este trabajo, se puede plantear como una variable didáctica la puesta en juego de esta secuencia de situaciones usando el ambiente tradicional y evaluar la influencia de los artefactos e instrumentos entre dicha complementariedad, porque no se propuso ni se usaron la regla, el compás, el lápiz y el papel para buscar soluciones a las situaciones planteadas. En consecuencia surge la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los fenómenos didácticos que se pueden generar al articular las construcciones geométricas de las *cónicas* en el ambiente de Lápiz y Papel con el AGD Cabri, cuando se aborda la caracterización global y puntual de estas curvas?

2) La secuencia didáctica en sí es un producto no terminado, y como tal está abierta a las sugerencias y aportes de los profesores que la utilicen. En consecuencia se constituye en un recurso pedagógico viviente en la medida que puede seguir evolucionando para su refinamiento, entendiendo lo que Brousseau (1997) estableció en su teoría como una situación fundamental. Entonces surge la siguiente pregunta: ¿Es posible que pueda emerger una situación fundamental a partir de la secuencia didáctica diseñada en la cual se tenga en cuenta la complejidad de la integración de los AGD cuando se gestiona la enseñanza de las *cónicas*?
3) Otra pregunta que surge es trasladar la caracterización global y puntual de las funciones matemáticas para restituir el sentido variacional: ¿Qué fenómenos didácticos se generan al trabajar la noción de lugar geométrico desde lo puntual y lo global para el aprendizaje de las funciones matemáticas al ser trabajadas en un AGD?

4) En la relación entre estudiante – estudiante es posible que se entretejan interacciones para el surgimiento de construcciones geométricas complejas e interesantes; sin embargo, los esfuerzos investigativos deben apuntar a fomentar más el trabajo colaborativo en clase usando la integración de las TIC como son el Internet y los AGD. Aunque estas herramientas se usaron en esta investigación, no se estudiaron las relaciones que puedan emerger cuando se conjugan al aparecer en red. Por lo cual la pregunta que se formula es: ¿Cuáles son las tensiones que se dan entre el sistema didáctico cuando se integra un módulo de aprendizaje virtual alrededor de las *cónicas* a través de construcciones geométricas puntuales y globales?

5) En relación a los libros de texto universitarios de *geometría analítica*: ¿Cuáles serían las características de los libros de texto universitarios para la enseñanza de las *cónicas* cuando se integran efectivamente los AGD?

6) En cuanto a la actividad matemática de las *cónicas* estudiadas en tres dimensiones, surge la pregunta: ¿Cuál es el papel y el significado que proporciona la integración del AGD Cabri 3D en la construcción de conocimiento geométrico alrededor de las *cónicas*?

Finalmente, este trabajo ha aportado a la formación de su autor y espera ser de igual manera, formativo a las personas interesadas en el desarrollo del pensamiento geométrico a nivel universitario y llegue a servir como un posible referente para futuras investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Abdeljaouad, M (2001). *Les triangles semblables…ces mal aimés*. Recuperado en http://membres.lycos.fr/mahdiabdeljaouad/semblables.pdf

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. En *Memorias del 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (pp. 61-68). Bogotá, Colombia: ASOCOLME. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Akopyan, A. & Zaslavsky, A. (2007). *Geometry of conics*. (A. Martsinkovsky Trad.) (Vol. 26). Rhode Island, E.U: The American Mathematical Society. (Trabajo original publicado en 2007).

Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría* (4ta. ed.). Madrid, España: Editorial Síntesis.

Alsina, C., Fortuny, J. & Pérez, R. (1997). Unas reflexiones sobre Geometría y Educación. En *¿Por qué Geometría*, (pp. 11-33). Madrid: Síntesis.

Álvarez, C. (2000). Descartes, Lector de Euclides**.** En C. Álvarez, & R. Martínez, (Coords.), *Descartes y la Ciencia del Siglo XVII* (pp. 15 – 68). México D.F., México: Siglo Veintiuno Editores.

Analytic Geometry. (1995). En *Encyclopedia Britannica* (Vol. 23, pp. 589 – 592). Chicago, Il., E.U.: Enciclopedia Británica.

Anfossi, A. (1961). *Curso de Geometría Analítica*. México: Progreso S.A.

Arboleda, L. C. (2003). Formación Matemática del docente de Matemáticas. *En Seminario de Historia de las Matemáticas.* Cali. Colombia: Universidad del Valle. Documento sin publicar.

Arboleda, L. C. (2007, Diciembre). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales. *Revista Brasileira de História da Matemática*, RBHM, Especial No. 1–Festschrift Ubiratan D'Ambrosio–, 7 (14), 215-230.

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-55.

Artigue, M. (1989). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2.3), 241-286

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (2002) Ingénierie didactique: que rôle dans la recherche didactique aujourd´hui?. En *Les dossiers des Sciences de l´Education. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes. Revue Internationale des*

*Sciences de l´Education* (No. 8, pp.59-72). Toulouse, France: Presses universitaires du Mirail

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 39 (5-6), 365-382.

Baccaglini-Frank, A & Mariotti, M. A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. (15), 225–253.

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. En Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.364-370). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En N. Gorgorió, J. Deulofeu & A. Bishop. (Eds.), *Matemáticas y Educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 93-108). Barcelona, España: Graó.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environment in Mathematics. En A. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 469 – 501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bartolini Bussi, M. G. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En C. Hoyles, J. Kilpatrick & O. Skovsmose (Eds.), *The meaning of Mathematics Education* (Vol. 37, pp. 39 – 60). Nueva York, EE.UU.: Springer Verlag.

Bedoya, E. (2002). *Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Gráficadoras*. (Tesis Doctoral no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.

Bishop, A. (1992). International perspectives on research in Mathematics Education. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 710-723). New York: MacMillan Publishing Company.

Bishop, A. (1986). What are some obstacles to learning geometry?. *Studies in mathematics education*, UNESCO, 5, 141-159.

Boers, M. & Jones, P. (1994). Students' use of graphics calculators under examination conditions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. 25, 491–516.

Bongiovanni, V. (2001). *Les caractérisations des coniques avec cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une séquence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif.* (Tesis de Doctorado no publicada). Université Joseph Fourier, L´équipe IAM Laboratoire Leibniz-IMAG002C Grenoble, Francia.

Bongiovanni, V. (2007, Diciembre). Etude historique des premières caractérisations des coniques. *Revista Brasileira de História da Matemática*, RBHM, Especial No. 1– Festschrift Ubiratan D'Ambrosio–, 7 (14), 439-462.

Bourbaki, N. (1972). Formas Cuadráticas. Geometría Elemental (J. Hernández, Trad.). En *Elementos de Historia de las Matemáticas* (pp. 173 – 191). Madrid, España: Editorial Alianza. (Trabajo original publicado en 1969).

Boyer, C. (1996). *Historia de la Matemática* (M. Martínez, Trad.). Madrid, España: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1968).

Brousseau, G. (1986). Fondaments et methodes de la didactique des mathematiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2002). Les grandes dans la scolarité obligatoire. En J-L. Dorier, M. Artaud, M., Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.). *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques – Corps* – 21-30 *Août* (pp. 331-348). Paris, Francia: La pensé sauvage.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (Primera ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Bruño, G. (1957). *Nociones elementales de geometría aplicadas al dibujo lineal*. Medellín, Colombia: Bedout

Burgos, M. & Ortiz, L. (2001). Investigaciones y trabajos de grado. Cali, Colombia: Editorial Ntextos.

Camargo, L. & Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Camargo, L., Perry, P. & Samper, C. (2006). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagonico?. *Educación Matemática*, 17 (3), 53-76.

Campos, A. (1981). *La Educación Geométrica* (Vol 1). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Campos, A. (1994). Los Tres Problemas Griegos. En *Introducción a la Lógica y la Geometría Griegas Anteriores a Euclides* (pp. 230 – 239). Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Campos, A. (2007). El Florecimiento del Programa de Erlangen y Educación Geométrica. En *Huellas en los Encuentros de Geometría y Aritmética*, (pp. 3 – 26). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Capponi, B. (1995). Rotation and Polygons With Cabri Géomètre. *Micromath*, 2 (1), 29-31.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cárdenas, D. M. (2007). Visualización y Generalizaciones: el caso de la determinación de los lugares geométricos. En C. Dolores Flores, G. Martínez; R. M. Farfán; C. Carrillo; I. López & C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa: algunos aspectos de* *la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 207–229). México: Editorial Díaz de Santos.

Carrillo, A. & Llamas, I. (1999). *Cabri-Géomètre II para Windows: construcciones y lugares geométricos*. Madrid, España: RA-MA.

Cardona, A. (2006). *La Geometría de Alberto Durero. Estudio y modelación de sus construcciones*. Bogotá, Colombia: Editorial: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano.

Cha, S. & Noss, R. (2001). Investigating students' understanding of locus with dynamic geometry. En *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, Southampton meeting*, November 2001. Recuperado en: http://myweb.tiscali.co.uk/shinwha/

Chamorro, M. del C. (2003). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 69 – 94). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.

Chamorro, M. del C. (2005). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Preescolar* (pp. 45– 62). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: Editorial Horsori.

Codina, A. & Castro, E. (2007). Resolución de problemas y representaciones con geometría dinámica En E. Castro & J. L. Lupiañez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro Homenaje a Jorge Cásarez Solorzano* (pp. 393-410). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

Collette, J. P. (2000). *Historia de las matemáticas* (3ra ed.), (A. Casal, Trad.), (Tomo 2). Madrid: Siglo Veintiuno de España Editores.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). The Preparation of High School Teachers. En *The Mathematical Education of Teachers* (Vol. 11). Washington: American Mathematical Society and Mathematical Association of America. Recuperado de http://www.cbmsweb.org/MET_Document/chapter_9.htm

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). Recommendations for Technology in Teacher Preparation. (Cap. 6). En: *The Mathematical Education of Teachers* (Vol. 11). Washington: American Mathematical Society and Mathematical Association of America. Recuperado de http://www.cbmsweb.org/MET_Document/chapter_6.htm

Contreras, A., Contreras, M. & García, M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* 5 (2), 111-132.

Courant, R. & Robbins, H. (2002). *¿Qué son las Matemáticas?*, (2da ed.), (M. Manrique, Trad.). México D.F., México: Fondo de Cultura Económica. (Trabajo original publicado en 1941).

Cuoco, A. & Goldenberg, P. (2000). La Geometría Dinámica como Puente entre la geometría euclidiana y el Análisis (M. Acosta Trad.). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

De Guzmán, M. (2005). *Apolonio*. Recuperado de: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/apolonio/apolonio.htm

De la Borbolla, F. & De la Borbolla. (1957). *Problemas y ejercicios de Geometría Analítica*. México D.F., México: Uteha.

Descartes, R. (s. f.). *La Geometría.* (P., Rossell, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Editorial Espasa. (Trabajo original publicado en 1637).

Díaz-Barriga, E. (2006). Las cónicas. En *Geometría dinámica con Cabri-Géomètre*. (1era. Ed.) (pp. 143-148). México D.F., México: Kali.

Dieudonné, J. (1987). *Panorama de las matemáticas puras: La elección bourbakista*. Barcelona: Reverté.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 5-32.

Douady, R. (1993). Juego de Marcos y la Dialéctica Herramienta-Objeto. En A. Ernesto Sánchez S. & Gonzalo Zubieta B (Eds.). *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 68-87). México: CINVESTAV.

Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. (1997). Didactic Engineering. En T. Nunez & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: an international perspective* (pp. 373-400). UK: Psychology Press.

Downs, J. W. (2003). *Practical conic sections: the geometric properties of ellipses, parabolas and hyperbolas*. Nueva York, EE.UU.: Dover Publications.

Durer, Albrecht. (1995). En Encyclopedia Britannica. (Vol. 3, pp. 289 – 290). Chicago, Il., EE.UU: Enciclopedia Británica.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En R. Cambray, E. Sánchez & G. Zubieta (comp.). *Antología en Educación Matemática, material de apoyo para el seminario de educación matemática* (pp. 125-141). México: Cinvestav-IPN.

Duval, R. (2001). Como analizar las representaciones desde una perspectiva de registro. En *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1999).

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations*

*and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.
Duval, R. (2004). Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y … Una quinta (M. del C. Chamorro, Trad.). En *Cuadernillos Aula de Verano* (pp. 159-187). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.
Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25-37). Washington D.C.: Mathematical Association of America Service Center.
Eves, H. (1969). Construcciones Euclidianas. En H. Eves (Ed.), *Estudio de las Geometrías* (Tomo I, pp. 179-207). México, D.F.: Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana.
Fernández, E. (2007). Un enfoque didáctico al estudio de los lugares geométricos en Cabri. En *Memoria del 8° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Cali, Colombia: Universidad de Valle. Recuperado de http://asocolme.com/documento/memorias%20octavo%20encuentro%20ASOCOLME.zip
Fernández, E. (2008a). Un enfoque didáctico acerca de problemas de lugares geométricos en Cabri. En *Memorias del IX Coloquio Regional de Matemáticas*. Pasto, Colombia: Universidad de Nariño. Recuperado de http://coes.udenar.edu.co/virtual/course/category.php?id=12
Fernández, E. (2008b). Una aproximación didáctica acerca del estudio de las cónicas como lugares geométricos en Cabri II y Cabri 3D. En *Memorias del 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Valledupar, Colombia: Universidad Popular del Cesar. Recuperado de http://asocolme.com/documento/eventos/9/Memorias_9_Encuentro_ASOCOLME.zip
Fernández, E. (2009). Cónicas como lugares geométricos desde un enfoque puntual y global en Cabri II Plus. En *Memorias del 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Pasto, Colombia: Universidad de Nariño. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/768/1/conicas.pdf
Fernández, E. (Abril – Septiembre 2009b). Un enfoque al estudio de las cónicas: el caso de la parábola como lugar geométrico en el ambiente de geometría dinámica Cabri Géomètre II. *Cuadernos del Maestro. Revista de Educación y Pedagogía*, 3 (4), 9-28.
Fernández, E. (2010). Enseñanza de las cónicas como lugares geométricos integrando Cabri II Plus. En *Memorias del X Coloquio Regional de Matemáticas*. Pasto, Colombia: Universidad de Nariño. Recuperado de: http://coloquiomatematicas.udenar.edu.co/programacion.html
Fernández, E. & Angulo, F. (2006). Problemas de construcción geométrica en Cabri que involucran lugares geométricos. En *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri IberoCabri*. Bogotá: Universidad de la Sabana. Recuperado de: http://www.iberocabri.org/iberocabri2008/MEMORIAS_2006/Talleres/FernandezAngulo_T11.pdf

Fernández, E. & Mejía, M. F. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. *En Memorias del 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (pp. 61-68). Bogotá, Colombia: Colegio Champagnat. Recuperado en: http://funes.uniandes.edu.co/1162/1/61_Anlisis_de_textos_escolares_para_el_diseo_de_situaciones_de_Asocolme2010.pdf

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. (Tesis de maestría no publicada). Centro de investigación de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México.

Filloy, E. & Hitt, F. (1997). *Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*, 6 (2), 180 – 200.

French, D. (2004). *Teaching and Learning Geometry. Issues and methods in mathematical education*. Londres, Inglaterra: Continuum International Publishing group.

García, A., Martínez, A. & Miñano, R. (1995). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gardies, J-L. (2004). L'accession aux objets de la geometrie cartesienne. En *Du Mode D'existence des Objets de la Mathematique* (pp. 45 – 71). Paris, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Garzón, D. & Fernández, E. (2006). *Módulo de Educación Virtual: Pensamiento Geométrico y Métrico. Unidad 3: Los Ambientes de Geometría Dinámica y las Interacciones entre Pensamiento Geométrico y Métrico*. Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Documento no publicado).

Garzón, D. & Valoyes, L. (2005). *Notas de Clase*: *Geometría I*. Cali: Universidad del Valle. (Documento no publicado).

Giusti, E. (2000). Origines de la Géométrie. En *La naissance des objets mathematiques* (pp. 21-26). Paris, Francia: Editorial Ellipses.

Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism*. London: Falmer Press.

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer. (Eds.), *Theories of Mathematical Learning*. (pp. 397-431). Mahwah, New Jersey, E.U.: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (2001 Yearbook) (pp. 1-23). Reston, VA, E.U.: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is Dynamic Geometry?. En R. Lehrer & D. Chazan, (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. (pp. 351-357). Mahwah, Nueva Yersey, E.U.: Lawrence Erlbaum Associates.

González, C., Paniagua, J. & Patiño, G. (2008). *Secciones cónicas. Una mirada desde la derivación implícita* (1era. Ed.). Medellín, Colombia: Instituto Tecnológico Metropolitano.

González-López, M. (1999). El papel de las nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En *Memorias del Grupo de Aprendizaje de la Geometría de la SEIEM*.

González-López, M. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en didáctica de la matemática*. *Homenaje al profesor Mauricio Castro,* (pp. 277-290). Granada: Universidad de Granada.

González-Martin, A. S. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad de la Laguna, La Laguna, España.

González, U. P. (mayo - 2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma*: *Revista de Matemáticas* = *matematika aldizkaria.*, (30), 205-236. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/18_raices.pdf

Gorgorió, N. & Jones, K. (1996). Elements of the Visualisation Process within a Dynamic Geometry Environment. En *el 8vo. International Congress on Mathematical Education* (pp. 6-12). Sevilla, España: ICMI.

Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Actas del 9no. Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM*. Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Recuperado en: http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut05a.pdf

Hansen, V. L. (1998). Everlasting Geometry. En C. Mammana & V. Villani (Eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study (*pp. 9-18). Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Recuperado en: http://fractus.mat.uson.mx/Papers/ICMI/Geometria.htm

Healy, L. (2000) Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft cabri construction. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 103 – 117). Hiroshima, Japón: Hiroshima University and PME.

Hegedus, S. & Moreno, L. (2011, Enero). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics.* 76 (1): 1-20.

Hemmerling, E. (2002). *Geometría Elemental*. Limusa, Noriega Editores, México.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, 10 (2), 23-45.

Hitt, F. (2000). El desarrollo de la tecnología y la educación matemática. En *Memorias del XXXIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.* México.

Hitt, F. (2001). Hacia el siglo XXI: funciones en contexto. En *Conferencia Internacional Sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas Noveno Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. México: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo Morelia.

Hitt, F. (Ed.) (2002). Representations and Mathematics Visualization. *International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and* México: *Cinvestav*-IPN.

Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 31-42.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al Estudio Didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones* (Primera ed.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Jahn, A. P. & Clarou, P. (1998). Notion de Transformation Géométrique en Classe de Seconde avec Cabri-Géomètre et la TI-92 (pp. 97-113). En *Actes du colloque francophone européen: Calculatrices symboliques el géométriques, dans l'enseignement des mathématiques*. Montpellier, Francia: Universidad de Montpellier II.

Jahn, A. P. (2000). New tools, new attitudes to knowledge: the case of geometric loci and transformations in dynamic geometry environments. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 91 – 102). Hiroshima, Japón: Hiroshima University and PME.

Jahn, A. P. (2002, Junio): "Locus" and "Trace" in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 78 – 84.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Jiménez, J. R. (2003). La naturaleza global y dinámica de la derivada como objeto Matemático y de enseñanza. En *Mosaicos Matemáticos*, 11. Recuperado en: http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XIII/ramon.pdf

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*. 44, 55–85.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-25). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. Gouws (Ed.), *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Kendig, K. (2005). *Conics*. Washington, D.C., E.U.: The Mathematical Association of America Service Center.

Kindle, J. (1990). *Teoría y Problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio*. Bogotá: McGraw-Hill.

King, J. & Schattschneider, D. (Eds.). (1997). *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*. Washington D.C. E.U.: The Mathematical Association of America Service Center.

Kilpatrick, J. (1994). Historia de la investigación en Educación Matemática. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Educación Matemática e Investigación* (pp. 15-96). Madrid: Síntesis.

Klein, F. (1927). Las figuras geométricas más simples. En *Matemática Elemental desde un punto de vista superior. Vol. II: Geometría*. (R. Araujo, Trad.). Madrid: Biblioteca Matemática. (Trabajo original publicado en 1908).

Kline, M. (1986). *El fracaso de la matemática moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* (11ma. Ed.). Madrid, España: Siglo XXI.

Kline, M. (1992). *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días.* Tomo I. Madrid, España: Alianza Universidad.

Laborde, C. (1998a). Cabri-Géomètre o una nueva relación con la geometría. En L. Puig & J. Calderón (Eds.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*, (pp. 33-48). Bogotá: Una Empresa Docente.

Laborde, C. (1998b). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer – based environment. En C. Mammana & C. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. An ICMI Study (pp. 113 – 121). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (2001). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*. 44, 151 – 161.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, (3), 283-317.

Laborde, C. (2002). Basar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la noción de variación con geometría dinámica. En *Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. Bogotá.

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of Cabri-geometry. En *Proceedings of the 8th Asian Technology Conference in Mathematics ATCM*. Chung Hua: University. Hsinchu.

Laborde, C. (2004). New technologies as a means of observing students' conceptions and making them develop: The specific case of dynamic geometry. En *ICME* 10. Recuperado de: www.icme-organisers.dk/tsg22/laborde%20TSG22CL.doc

Laborde, C. (2005a). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Eds.), *The meaning of Mathematics Education* (Vol. 37. pp. 159– 179). Nueva York, EE.UU.: Springer Verlag.

Laborde, C. (2005b, 12-16 de Diciembre). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. En *10th Asian Technology Conference in Mathematics*. Cheong-Ju: Korea National University of Education.

Laborde, C. (2006). La dialéctica entre cambio e invarianza en la enseñanza y el aprendizaje con Cabri. Ejemplos en geometría 2D y 3D. En *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri IberoCabri 2006.* Bogotá: Universidad de la Sabana. Recuperado de: http://www.iberocabri.org/iberocabri2008/MEMORIAS_2006/memorias.htm

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. En *Memorias XVII Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vieria de Leiria, Portugal.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre, constituant d’un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 14 (1), 165–210.

Laborde, C. & Capponi, B. (1998). Actes de l’Université d’été: *Cabri Géomètre, de l’ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour lènseignement de la géomètre*. Grenoble: IREM et IUFM de Grenoble.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275–30). UK: Sense Publisher.

Laborde, C. & Perrin-Glorian, M. (2005). Introduction teaching situations as object of research: empirical studies within theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*,59,1–12.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Universidad.

Lacasta, E. & Pascual, J. R. (1998). Diferentes usos del gráfico de funciones. En *Las funciones en los gráficos cartesianos.* (pp. 116 – 125). Madrid: Síntesis.

Lagrange, J-B., Artigue, M., Laborde, C. & Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877–917). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academics Publishers.

Lehmann, C. (2002). *Geometría Analítica*. (34ta. Ed.). México: Limusa S.A.

Lupiañez, J. L. & Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. En P. Gómez, & L. Rico, (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Mammana, C. & Villani, V. (1998). Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century. An ICMI Study (Vol. V). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las Matemáticas.* Barcelona, España: Paidos.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas* (M. Acosta & J. Fiallo Trads.). Bucaramanga, Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1993).

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173–204). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Martin, G. (1998). Euclidean Constructions. En G. Martin (Ed.), *Geometric constructions*, (pp. 1-10). Nueva York, E.U.: Springer – Verlag.

Martínez, L., & Martínez, H. (1997). *Diccionario de Filosofía* (3a Ed.). Bogotá, Colombia: Editorial Panamericana.

Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. En *The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*: *The role of resources and technology in mathematics education*, 42 (1), 33-47.

Ministerio de Educación Nacional. (2004a). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Santafé de Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.

Ministerio de Educación Nacional. (2004b). *Tecnología Informática: Innovación en el Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media*. Santafé de Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Análisis y Resultados de las pruebas de Matemáticas - T.I.M.S.S./96.* Colombia. Santafé de Bogotá: Creamos Alternativas. 1998.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia. Panamericana Formas e Impresos.

Ministerio de Educación Nacional. (1999). *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Creamos Alternativas Soc. Ltda.

Mitchelmore, M. & Cavanagh, M. (2000). Students' difficulties in operating a graphics calculator. *Mathematics Education Research Journal*,12, 254–268.

Monk, G. S. (1994). Students' Understanding of Functions in Calculus Courses. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 9, 21-27.

Montesinos, J. L. (2000). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Síntesis.

Moreno, L. (1998). Reflexiones Sobre La Geometría Mediada por la Computadora (Cabri II). En *Memorias del Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadores* (pp. 11-14). México D.F., México: Sede Escuela Normal Superior de México.

Moreno, L. (2002a). Ideas Geométricas del Currículo presentada mediante el Cabri-Géomètre. En *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de*

*Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Moreno, L. (2002b). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Moreno, L. (2002c). Calculadoras algebraicas y aprendizaje de las matemáticas. En *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 93-98). Santa fe de Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Moreno, L. (2002d). Evolución y Tecnología. En *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, (p. 67-80). Santa fe de Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Moreno, L. (2002e). Instrumentos matemáticos computacionales. *En Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 67-80). Santa fe de Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Moreno, L. (2002f). La nueva matemática experimental. En *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 269-280). Santa fé de Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Moreno, L. & Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.) *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Moreno, L. (2004). Argumentación y formalización mediadas por Cabri-Géomètre. En *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el currículo de Matemáticas* (pp. 44-52). Santa fé de Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Moreno, L. & Sriraman, B. (2005). The articulation of symbol and mediation in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, International Reviews on Mathematical Education, 37 (6), 476-486.

Moreno, L., Hegedus, S., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99-111.

Moreno, L. & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*: *Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies*, 41 (4), 505-519.

Moreno, C., a. F. (1998). Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria. Manual para la Formación Inicial del profesorado de secundaria. En *Geometría Analítica* (pp. 146-152). Almería: Universidad de Almería.

Murillo, J. (1999). Un entorno de aprendizaje interactivo para la enseñanza de la geometría en la ESO: actividades con Cabri. En *Memorias de la III Jornadas de la SEIEM*. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

National Council Of Teachers Of Mathematics. (2002). *Principles and standards for school mathematics.*

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una Ingeniería Didáctica basada en la visualización de los límites sen(x)/x y (1-cos(x))/x*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: México D.F., México. Recuperada de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis02.html

Obando, G. & Munera, J. (enero - abril 2003). Las situaciones problemas como estrategia para la conceptualización matemática. *Revista educación y pedagogía*, 15 (35), 185-199.

O'Connor, J. & Robertson, E. (1996). Albrecht Dürer. En *The MacTutor History of Mathematics archive*. Recuperado en: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Durer.html

Olivero, F. & Robutti, O. (2001). Measures in Cabri as a bridge between perception and theory. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of PME 25,* 4, (pp. 9-16).

Olmstead, E. (1998). Exploring the locus definitions of the conic sections. *Mathematics Teacher*. 91, (5), 428-435.

Piaget, J. & García, R. (1982). Desarrollo Histórico de la Geometría. En *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* (1era. Ed.). México D.F.: Siglo Veintiuno Editores.

Philippe, R., Meavilla, V, & Fortuny, J. (2010). Textos clásicos y geometría dinámica: estudios de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 28 (1), p. 95-112.

Pla, J. (s. f). René Descartes (1596-1650). *Centro virtual de divulgación de las matemáticas.* Recuperado de: http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Descartes.asp.htm

Peltier, M. L. (1993). Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia. *Revista Educación Matemática*, 5 (2), 4-10.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. & Molina, O. (2007). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En *Memorias del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática: Innovando la Enseñanza de las Matemáticas*. Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Polya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Presmeg, N. (2000). *On visualization and generalization in mathematics*. The Florida State University.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. Emergence from psychology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Nueva York: Sense Publishers.

Puig, A. (1970). *Curso de geometría métrica*. Tomo I: Fundamentos. (Vol. I). Madrid: Biblioteca Matemática.

Rabu-Boyé, A. (2009). *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética*. (M. Acosta Trad.). Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1998).

Renaissance. (1995). En *Encyclopedia Britannica* (Vol. 27, pp. 1019 – 1021). Chicago, Il., EE.UU: Enciclopedia Británica.

Ribnikov, K. (1987). Surgimiento de la Geometría Analítica. En *Historia de las Matemáticas* (pp. 155 – 167). Moscú, URSS: Editorial MIR.

Rice, A. & Walter, S. (2005). Reviews on: Apollonius Of Perga's Conica: Text, Context, Subtext. *Historia Mathematica*, 32, 481–494.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rico, L. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14. Recuperado de: http://www.pna.es/Numeros/pdf/Rico2009Sobre.pdf

Riddle, D. (1997). *Geometría Analítica* (6ta edición ed.) (V. González, Trad.) México: Internacional Thomson Publishing.

Río-Sánchez, J. del. (1989, Enero-Diciembre). Ideas previas en Matemáticas: una investigación sobre las cónicas. *Studia Paedagogia, revista de Ciencias de la Educación*, (21), 61-81.

Río-Sánchez, J. del. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid: Síntesis.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 135-165.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico* (1a. Ed.). Jaén, España: Universidad de Jaén.

Ruiz, L. (2003). Aprendizaje y Matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp. 31 – 68). Madrid, España: Pearson –Prentice Hall.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Alagia, A. Bressan & P. Sadovsky (Eds.). *Reflexiones teóricas par la educación matemática* (pp. 13-68). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sandoval, I. (2009, Abril). La Geometría Dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21 (1), 5-27.

Santinelli, R. & Siñeriz, L. (1999). Construcciones con regla y compás en el entorno Cabri. En *Memorias del Primer Cabri World 99*. Sao Paulo, Brasil.

Santos-Trigo, L. M. (1997). Principios y métodos de la Resolución de problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos-Trigo, L. M. (2000). Students' approaches to the use of technology in mathematical problem solving. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization.* México: Cinvestav-IPN.

Santos-Trigo, L. M. (2001, enero). El uso de software dinámico en el desarrollo de significados y conexiones en el aprendizaje de las matemáticas. En *Memorias del Noveno Encuentro de Profesores de Matemáticas a nivel Medio superior. Conferencia Internacional sobre uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 59-72). Michoacán, México: Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo Morelia.

Santos-Trigo, L. M. (2001, Julio - Agosto). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, 247-258.

Santos-Trigo, L. M. (2004). Exploring the triangle inequality and conic sections using dynamic software for geometry. *Mathematics Teacher*, 97( 1), 68-72.

Santos-Trigo, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas S.A.

Santos-Trigo, L. M. & Espinosa, H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations via the use of dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), 37-50.

Santos-Trigo, L. M., Espinosa, H. & Reyes, A. (2005). Constructing a Parabolas' World Using Dynamic Software to Explore Properties and Meanings. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 3(12), 125-134.

Santos-Trigo, L. M., Espinosa, H. & Reyes, A. (2008). Connecting dynamic representations of simple mathematical objects with the construction and exploration of conic sections. En: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39 (5), 657 - 669.

Schumann, H. (2000). For the design of a computer integrating geometry currículo. En *9th International Congress on Mathematical Education (ICME 9)*. Tokyo – Makuhari, Japón. Recuperado de: http://www.ph-weingarten.de/homepage/lehrende/schumann/veroeffentlichungen/forthedesign/inhaltsangabe.htm

Schumann, H. (2004, Junio). *A dynamic approach to "simple" algebraic curves*. Edumath, 18. Recuperado de: http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd2/content/Edumath/v18/02Schumann_dynamic.pdf

Schumann, H. & Green, D. (1997). Producing and using Loci with Dynamic Geometry Software. En J. King & D. Schattschneider. (Eds.). *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 79-87). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America Service Center.

Segovia, I., Ruiz, F. & Villegas, J. L. (2007). Visualización en la enseñanza de las matemáticas. En E. Castro & J. L. Lupiañez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico*. *Libro Homenaje a Jorge Cásarez Solorzano*, (pp. 79-100). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

Serfati, M. (2008). Les rapports entre local et global en mathématiques et en physique élémentaires : de considérations épistémologiques à quelques problèmes didactiques. En *Seminario Epistemologie et Histoire des idees Mathematiques del Instiuto Henry*

*Poincare de Paris*, Francia. Recuperado de:http://www.ihp.jussieu.fr/cgi-bin/cal_make.pl?p1=00420081210000000000&usearched=1
Siñeriz, L. (2002, Marzo). La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la Escuela Media Argentina: estudio de dos casos. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 5 (l). 79-101.
Siguán, M. & Blanck, G. (Coords.). (1987). *Actualidad de Lev. S. Vigotski*. Barcelona: Anthropos.
Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
Strässer, R. (2002, Junio). Research on Dynamic Geometry Software (DGS) - an introduction. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), pp. 65.
Swan, M. (1988). *On reading graphs*. Budapest: ICMI.
Tahir, H. (2008). A new approach to the conics. Recuperado de: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_charlotte_TahirPaperEdit.pdf
Tapia, F. J. (2002, Enero). Apolonio, el Geómetra de la Antigüedad. *Apuntes de historia de las matemáticas.* Recuperado de: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf
Testa, G. (2000, Octubre). L'enseignement des coniques a travers une approche historique: comment saisir un texte?. REPERES – IREM, (41), 105 – 119. Recuperado de: http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/41testa.pdf
Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 137-162). Nueva York, E.U.: Springer.
Valencia, M. (1990, Agosto). ¿Aprovechamos nuestros cursos de Geometría Analítica?. *Educación Matemática*, 2(2), 14-21.
Valero, P. (1997). *Una visión de la didáctica de las matemáticas desde Francia. Algunos conceptos y métodos*. Bogotá, Colombia: Una empresa Docente. Recuperado de: http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/Una_vision_de_la_didactica_1_.pdf
Vasco, C. (1994). Sistemas Geométricos. En *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas (*Vol. 2, pp. 36-79). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
Velásquez, S., Apreza, E., Lluck, D., Moreno, M. & Valdez, G. (2007). La Geometría Analítica: ¿cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de la educación media superior?. En C. Dolores, G. Martínez, R. M. Farfán, C. Carrillo, I. López & C. Navarro (Eds.), *Matemática Educativa: algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*. México: Editorial Díaz de Santos.
Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus: On learning problems in Mathematics*, 1(1), 149-156.

Warusfel, A. (1972). *Diccionario razonado de matemáticas: de las matemáticas clásicas a la matemática moderna*. (J. Tortella y C. De Azcarate, Trad.). Madrid, España: Editorial Tecnos. (Trabajo original publicado en 1966).

Warusfel, A. (2009). Construction ponctuelle des courbes algébriques et résolution géométrique des équations algébriques dans La Géométrie de Descartes. En R. Vuibert (Ed.), *Les Constructions Du Calcul*. Recuperado de: http://www.univ-irem.fr/commissions/geometrie/livre/site/descartes.pdf

Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas.* (1era Ed.) (E. Ausejo, J. Escorihuela, M. Hormigón, D. Kara-Murzá & A. Millán Trads.). Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores.

Yarnoz, E. (s.f.) *Las cónicas.* Recuperado de: http://www.revista.dominicas.org/conicas.htm

Zill, D. & Dewar, J. (2001). *Álgebra y Trigonometría*. (2da edición ed.) (G. Ramírez, & Y. García Trads.). Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization?. En Zimmerman, W. & Cunningham, S. (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America Service Center.

Zon, N. (2006). Análisis a priori de una secuencia sobre procesos recurrentes para la Educación Básica. *Yupana*, 3, 33-55. Recuperado de: http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8180/publicaciones/bitstream/1/2671/1/YUPANA_3_2006_pag_37_55.pdf