# Impatto del numero atteso dei sinistri sulla strategia ottima di riassicurazione in un modello a tempo discreto basato su un processo di Poisson MA(1)

Federica Attanasi

Università di Roma La Sapienza

Dipartimento di Scienze Statistiche

federica.attanasi@uniroma1.it

## 1 SINTESI

In quest'articolo viene studiata la politica di riassicurazione ottimale, derivante dalla combinazione di un trattato in quota e di un trattato excess of loss, sfruttando i risultati noti della teoria della rovina. In particolare, viene utilizzato un modello di rischio a tempo discreto, in cui è introdotta una struttura di dipendenza tra il numero di sinistri per ogni periodo basandosi su un processo di Poisson a media mobile MA(1), come proposto da L.Zhang, X.Hu e B.Duan nell'aricolo *Optimal reinsurance under adjustment coefficient measure in a discrete risk model based on Poisson MA(1) process.* Nel lavoro di L.Zhang, X.Hu e B.Duan la strategia di riassicurazione ottimale, ovvero i parametri ottimi dei trattati in quota e excess of loss risultano essere indipendendenti dal numero di sinistri atteso, che tuttavia riusulta invece una delle variabili fondamentali nella scelta della strategia riassicurativa di un assicuratore. A differenza di quanto presentato da L.Zhang, X.Hu e B.Duan, nel presente articolo si propone un modello di scelta della strategia ottima di riassicurazione che tenga conto del nuemro atteso dei sinistri, sotto l'ipotesi che il premio sia calcolato con il principio della varianza in luogo di quello del valore atteso.

**Parole chiave:** riassicurazione, teoria della rovina, modello a tempo discreto con processo di Poisson MA(1), principio della varianza.

## 2 INTRODUZIONE

Il tema dell'individuazione della politica ottima di riassicurazione è largamente diffuso in letteratura e sono presenti diversi criteri che permettono di risolvere il problema, che si configura come un problema di ottimo vincolato. Uno dei criteri che è possibile utilizzare è quello di determinare la politica ottima di riassicurazione, in modo tale che sia minima la *probabilità di rovina* dell'assicuratore. Quest'approccio è stato seguito ad esempio da Hesselager (Hesselager, 1990), Canteno (Canteno, 2002) e L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013). In particolare L.Zhang, X.Hu e B.Duan hanno affrontato il problema contestualizzandolo in un modello di rischio più realistico degli approcci classici, considerando un modello di rischio a tempo discreto che tenga conto della dipendenza tra il numero di sinistri nei diversi periodi. In quest'articolo viene seguito lo stesso approccio utilizzato da L.Zhang, X.Hu e B.Duan in relazione al modello di rischio a tempo discreto, ma il modello proposto differisce in una delle ipotesi fondamentali della loro impostazione in relazione al principio di calcolo del premio. Tale variazione consente di apprezzare l'impatto del numero atteso di sinistri sulla scelta della strategia riassicurativa ottimale. In particolare in quest'articolo si dimostra che:

- La strategia di riassicurazione ottima è data da un'opportuna combinazione dei trattati *in quota share* ed *excess of loss*;
- Il numero atteso di sinistri influenza la scelta dei trattati;
- La portata ottima del trattato excess of loss è proporzionale al numero di sinistri atteso;
- Il numero di sinistri atteso influisce sulla probabilità di rovina e dunque appare coerente considerare un modello che ne tenga conto per la scelta del trattato di riassicurazione da sottoscrivere.

Il presente lavoro si articola come segue:

- Sezione 3: viene introdotto il modello a tempo discreto con processo di Poisson MA(1), spiegandone ipotesi e proprietà;
- Sezione 4: si richiamano i concetti fondamentali della Teoria della probabilità di rovina;
- Sezione 5: si determina la strategia ottima di riassicurazione in un modello che tenga conto del nuemro atteso di sinistri sotto l'ipotesi di utilizzo del principio della varianza per il calcolo del premio. In fine i risultati vengono confrontati con quelli ottenuti da L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013).

# 3 MODELLO DI RISCHIO A TEMPO DISCRETO

Come nel lavoro di L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013), consideriamo un modello di rischio a tempo discreto e indichiamo con $\boldsymbol{D} = \{D_k, k = 1,2,\dots\}$ una sequenza di variabili aleatorie identicamente distribuite (ma non necessariamente indipendenti), dove $D_k$ rappresenta la variabile aleatoria *danno cumulato* nel periodo *k*, che è dotata di funzione di ripartizione $F_D$.

Se indichiamo con:

1. $\boldsymbol{N} = \{N_k, k = 1,2,\dots\}$ il processo del numero di sinistri e ipotizziamo che la variabile aleatoria $N_k$, numero di sinistri nel periodo k, segua un processo di Poisson MA(1):

$$N_k = \varepsilon_k + \alpha \circ \varepsilon_{k-1}$$

   dove

   - le $\varepsilon_k$ $(k = 1,2 \dots)$ sono variabili indipendenti e identicamente distribuite come una Poisson di parametro $\frac{\lambda}{(1+\alpha)}$;
   - $\alpha \circ \varepsilon_{k-1} = \sum_{i=1}^{\varepsilon_k} \beta_{ki}$, con $\beta_k(k = 1,2,\dots e\ i = 1,\dots,\varepsilon_k)$ sequenza di variabile di Bernoulli, indipendenti da $\varepsilon_k$ e $\alpha \in [0,1]$.

     Si noti che il coefficiente $\alpha$ specifica l'influenza della variabile $\varepsilon_k$ sul numero dei sinistri nel periodo *k*. In particolare:

     - se $\alpha = 0$, il comportamento di $N_k$ è spiegato solo da $\varepsilon_k$ e quindi il numero di sinistri è indipendente tra i diversi periodi;
     - se $\alpha = 1$, il comportamento di $N_k$ è influenzato da $\varepsilon_k$ e $\varepsilon_{k-1}$ nella stessa misura.

   In generale il numero di sinistri nel periodo *k* sarà dovuto ai sinistri che si verificano tra *k-1* e *k* e in parte anche ai sinistri che si sono verificati tra *k-2* e *k-1*.

2. $\boldsymbol{X} = \{X_{k,j}, k = 1,2,...\}$ il vettore delle variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite, rappresentanti il costo del singolo sinistro per ogni periodo,

Allora, come noto, è possibile scrivere la variabile danno cumulato del periodo *k* come la somma di tutti i risarcimenti dovuti per gli $N_k$ sinistri del periodo k; essendo anche il numero di sinistri e l'importo degli stessi delle variabili aleatorie, il danno cumulato è rappresentato dalla somma di un numero aleatorio di variabili aleatorie:

$$D_k = \sum_{j=1}^{N_k} X_{k,j}.$$

Sotto le ipotesi formulate, è noto che il valore atteso del danno cumulato è dato dal prodotto del valore atteso del numero dei sinistri e del valore atteso del costo dei sinistri:

*(1)*

$$E(\boldsymbol{D}) = E(\boldsymbol{N})E(\boldsymbol{X}).$$

In modo analogo, se consideriamo il periodo *k* risulta:

$$E(D_k) = E(N_k)E(X_k),$$

che per le ipotesi formulate per il processo del numero di sinistri, risulta pari a $\lambda E(X_k)$, essendo il numero atteso di sinistri $E(N_k) = \lambda$. Si vedrà nel seguito che il parametro $\lambda$ risulta di particolare interesse nella scelta della strategia ottima di riassicurazione.

Altra variabile di interesse per la scelta della strategia ottima di riassicurazione è il *surplus* o *guadagno* dell'assicuratore. Indichiamo con $\boldsymbol{U} = \{U_k; k = 1,2,...\}$ il processo caratterizzante tale variabile, ottenuto, tempo per tempo, sommando il guadagno ottenuto nel periodo precedente e il premio incassato, e sottraendo il danno cumulato relativo al periodo considerato:

$$U_k = U_{k-1} + P - D_k,$$

dove si è indicato con *P* il premio comprensivo di caricamenti di sicurezza, cioè tale per cui $P > E(\boldsymbol{D})$.

Procedendo per via ricorsiva a ritroso, è possibile ottenere il guadagno del periodo *k* come somma del surplus iniziale e dei premi incassati nei *k* periodi consideranti; a tale quantità va sottratta la perdita subita dall'assicuratore fino a *k*:

$$U_k = u + kP - \sum_{i=1}^{k} D_i.$$

Supponiamo che l'assicuratore abbia sottoscritto un trattato di riassicurazione dato dalla combinazione di un trattato di riassicurazione *in quota share* e di un trattato *excess of loss*. Di tali trattati ne andranno determinati i parametri (aliquota di ritenzione e portata) ottimali:

- Trattato in quota: aliquota di ritenzione $a$, tale che $0 \leq a \leq 1$;
- Trattato excess of loss: portata $M \geq 0$.

Quindi l'assicuratore riterrà il minimo tra il valore del danno per l'aliquota di ritenzione e la portata:

$$X_{a,M} = min\{aX; M\}.$$

Cederà invece il massimo valore del danno, dopo aver applicato l'aliquota di cessione $(1-a)$, e il danno meno la portata:

$$X - X_{a,M} = max\{(1-a)X; X-M\}.$$

Ovviamente l'assicuratore potrà sottoscrive il trattato previa pagamento del premio di riassicurazione $P_R$; riterrà invece il premio $P_A$, dato dalla differenza tra il premio $P$ incassato e il premio di riassicurazione $P_R$:

$$P_A = P - P_R,$$

dove, utilizzando il *principio della speranza matematica* per il calcolo del premio, risulta

*(2)*

$$P = (1+\theta_A)\lambda E[\boldsymbol{X}]$$

e

$$P_R = (1+\theta_R)\{E[\boldsymbol{D}] - E[\boldsymbol{D}(a,M)]\},$$ [1]

che equivale a

*(3)*

$$(1+\theta_R)\lambda\left[(1-a)E[\boldsymbol{X}] + \int_{\frac{M}{a}}^{+\infty}(ax-M)dF_X(x)\right].$$

Sotto le ipotesi formulate, l'utile dopo la riassicurazione è

$$U_k(a,M) = U_{k-1}(a,M) + P_A - D_k(a,M),$$

che, per via ricorsiva, equivale a

*(4)*

$$u + k(P-P_R) - \sum_{i=1}^{k} D_i(a,M)$$

dove

$$D_i(a,M) = \sum_{j=1}^{N_i} X_{i,j}(a,M)$$

[1] Ipotizziamo che il caricamento di sicurezza relativo al premio di riassicurazione sia superiore a quello del premio incassato dall'assicuratore:

$$\theta_R > \theta_A.$$

Questo implica che l'assicuratore non può riassicurare l'intero rischio con profitto certo.

e

$$P = (1 - \theta_A)E(\boldsymbol{D}),$$

che per le ipotesi formulate risulta uguale a

$$(1 - \theta_A)\lambda E(\boldsymbol{X}).$$

Indichiamo infine con $Y(a, M)$ il processo del profitto netto dopo la riassicurazione, dato dalla differenza tra il premio ritenuto e la perdita ritenuta, subita fino a $k$:

$$Y(a, M) = P_A - D(a, M),$$

che ha come valore atteso la differenza tra il premio ritenuto e il prodotto tra il valore atteso del numero di sinistri e il valore atteso del costo dei sinistri dopo la riassicurazione:

*(5)*

$$E\big(Y(a, M)\big) = P_A - \lambda E\big(X_{a,M}\big).$$

Sulla base del modello qui presentato, L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013) hanno determinato la strategia ottima di riassicurazione, basandosi sui risultati noti della *Teoria della probabilità di rovina* e utilizzando il principio della *speranza matematica* per il calcolo del premio, come verrà brevemente illustrato nel seguito.

Considerando sempre l'impostazione qui illustrata, verrà mostrato nel paragrafo 5 come cambia il risultato ottenuto da L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013) variando l'ipotesi relativa al princio di calcolo del premio, determinando un modello che tenga conto del numero atteso di sinistri per l'individuazione della strategia ottima di riasscicurazione.

# 4 TEORIA DELLA PROBABILITÀ DI ROVINA E COEFFICIENTE DI AGGIUSTAMENTO DI LUNDBERG

Attraverso la riassicurazione, un assicuratore vuole mitigare e contenere il rischio cui è esposto, ovvero ridurre la propria probabilità di rovina. Consideriamo dunque gli aspetti chiave della Teoria della probabilità di rovina utili a comprendere il modello proposto da L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013) per la determinazione della politica ottima di riassicurazione.

Ricordando la definizione della variabile tempo alla rovina dell'assicuratore

$$T = inf\{k: U_k(a, M) < 0\},$$

è possibile definire, come noto, la probabilità di rovina $\psi(u)$ dell'assicuratore avente capitale iniziale $u$ come la probabilità che il guadagno dopo la riassicurazione sia negativo su un orizzonte temporale finito:

$$\psi(u) = Pr\{T < \infty | U_0(a, M) = u\}.$$

Considerando la teoria asintotica della probabilità di rovina di Lundberg, la probabilità di rovina risulta asintoticamente uguale a

*(6)*

$$\psi(u) \cong e^{-uR_{a,M}}$$

dove $R_{a,M}$ è detto *Coefficiente di aggiustamento di Lundberg*, ottenuto come il limite, per il surplus iniziale $u$ tendente a infinito, del logaritmo della probabilità di rovina rapportata al capitale iniziale:

$$\lim_{u\to\infty} -\frac{\log \psi(u)}{u} = R_{a,M}.$$

Nei lavori di L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013)e di H.Cosette, E. Marceau e V. Maume-Deschamps (Cosette, Marceau, & Maume-Deschamps, 2010) si dimostra che per determinare il Coefficiente di aggiustamento di Lundberg si può considerare la relazione

*(7)*

$$C_n(r) = \frac{1}{n}\log\{E\left[e^{r(S_n(a,M)-nP_A)}\right]\},$$

dove $S_n(a,M) = \sum_{i=1}^{n} D_i(a,M)$ è il danno cumulato aggregato dell'assicuratore tra il 0 e *n*.

Si dimostra inoltre che $R_{a,M}$ è l'unica soluzione di

*(8)*

$$C_{a,M}(r) = \lim_{n\to\infty} C_n(r) = 0.$$

H.Cosette, E. Marceau e V. Maume-Deschamps (Cosette, Marceau, & Maume-Deschamps, 2010) hanno dimostrato che $C_{a,M}(r)$ può essere definito, indicando con $\phi_{X_{a,M}}$ la funzione generatrice dei momenti della variabile $X_{a,M}$, sescondo la relazione (9):

*(9)*

$$C_{a,M}(r) = \frac{\lambda(1-\alpha)}{1+\alpha}\phi_{X_{a,M}}(r) + \frac{\lambda\alpha}{1+\alpha}\phi^2_{X_{a,M}}(r) - \frac{\lambda}{1+\alpha} - rP_A.$$

A partire dalla (9), L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013) hanno determinato alcune proprietà del Coefficiente di aggiustamento di Lundberg, che risultano utili per la determinazione della strategia ottima di riassicurazione, secondo il modello presentato nel paragrafo 3:

1. $R_{a,M}$ è positivo se e solo se $(a,M) \in L_0$, dove $L_0$ è l'insieme delle coppie $(a,M)$ tali per cui il profitto atteso dopo la riassicurazione risulta strettamente positivo:

   $$L_0 = \{(a,M): 0 \le a \le 1, M \ge 0, E[Y(a,M)\,] > 0\}.$$

2. Per ogni coppia $(a,M) \in L_0$, se si indica l'unico coefficiente positivo con $R_{a,M}$, allora $\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial r}$ è positiva in $r = R_{a,M}$.

3. L'insieme $L_0$ è equivalente all'insieme $L = \{(a,M): a_0 \le a \le 1, M \ge \phi(a)\}$, dove $a_0 = \frac{\theta_R - \theta_A}{\theta_R}$ e $\phi(a)$ è l'unico valore tale per cui il profitto atteso dell'assicuratore dopo la riassicurazione è nullo:

   $$E[Y(a,M)\,] = 0 \qquad per\ a \in L.$$

Considerando l'aliquota di ritenzione $a \to a_0$, risulta $\phi(a) \to \infty$ e quindi, scegliendo $a_0$ come aliquota del trattato *in quota*, la strategia di riassicurazione non prevederebbe la sottoscrizione di un trattato in quota. Inoltre questa scelta, essendo $\phi(a) \to \infty$, implica che ogni sinistro potrebbe portare alla rovina, una volta che l'assicuratore accetta di sottoscrivere un trattato *in quota* con aliquota di ritenzione $a_0$. Abbiamo quindi un primo risultato sulla strategia ottima di riassicurazione che un assicuratore potrebbe perseguire: *non è opportuno utilizzare un trattato in quota "puro", poiché si avrebbe comunque un rischio di fallimento troppo elevato, il che è ovvio perché il profitto netto atteso è prossimo a 0.*
Considerazioni simili valgono anche scegliendo una portata $M$ del trattato in quota prossima a $\phi(a)$, poiché risulterebbe $R_{a,M}$ tendente a 0 e dunque la probabilità di rovina (6) sarebbe certa. In tale situazione, risulterebbe anche

$$\frac{\left.\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial r}\right|_{r=R_{a,M}}}{r} \longrightarrow \lambda E\left[X_{a,\phi(a)}^2\right].$$

A questo punto si hanno tutti gli strumenti per determinare la strategia di riassicurazione ottima.

# 5 STRATEGIA DI RIASSICURAZIONE OTTIMA E IMPATTO DEL NUMERO DI SINISTRI

Gli elementi della teoria della probabilità di rovina presentati nel paragrafo 4 e il modello di rischio a tempo discreto descritto nel paragrafo 3, consentono di determinare la strategia di riassicurazione ottimale con un modello che tenga in considerazione le aspettative sul numero dei sinistri. Per far questo viene seguito lo stesso approccio utilizzato da L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013), variando l'ipotesi sul principio di calcolo del premio.

Consideriamo il modello a tempo discreto del paragrafo 3, in cui la variabile danno cumulato $\boldsymbol{D}$ si distribuisce come un processo di *Poisson composto*, per il quale è noto che la varianza è pari al prodotto della varianza del processo del numero dei sinistri per il momento secondo della variabile rappresentante il costo degli stessi:

*(10)*

$$\sigma^2(\boldsymbol{D}) = \lambda E(\boldsymbol{X}^2).$$

Ipotizziamo di calcolare il premio utilizzando il *principio della varianza.*

Ricordiamo che il principio della varianza prevede che il premio sia calcolato come la somma del valore atteso del danno cumulato più una un'aliquota della varianza del danno cumulato stesso:

*(11)*

$$P = E[\boldsymbol{D}] + \beta\sigma^2(\boldsymbol{D}), \qquad con\ \beta > 0.$$

$\beta$ rappresenta, come noto, il coefficiente di sicurezza che viene applicato al premio e ipotizziamo che sia $\beta = \theta_I$ prima della riassicurazione e $\beta = \theta_R$ per il premio di riassicurazione. Pertanto risulta

$$P = \lambda E[\boldsymbol{X}] + \theta_A \lambda E(\boldsymbol{X}^2)$$

che applicando la nota relazione[2] che lega la varianza di una variabile al suo momento primo e al suo momento secondo, risulta equivalente a

*(12)*

$$\lambda E[\boldsymbol{X}]\big[1 + \theta_A E[\boldsymbol{X}]\big] + \theta_A \lambda \sigma^2(\boldsymbol{X}).$$

Ragionando in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo 3 per determinare l'espressione (3) del premio di riassicurazione, si ha:

*(13)*

$$P_R = E[\boldsymbol{D}] - E[\boldsymbol{D}(a,M)] + \theta_R\big\{\sigma^2(\boldsymbol{D}) - \sigma^2\big(\boldsymbol{D}(a,M)\big) + 2Cov\big(\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}(a,M)\big)\big\}.$$

Ipotizzando che la covarianza tra $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{D}(a,M)$ sia nulla e sfruttando le ipotesi formulate sulle variabili danno cumulato e numero dei sinistri, si ha

*(14)*

$$P_R = \lambda(1-a)E[\boldsymbol{X}] + \int_{\frac{M}{a}}^{+\infty}(ax-M)^2 dF_X(x) + \theta_R\lambda(1-a)E(\boldsymbol{X}^2).$$

Ricordando che il premio ritenuto $P_A$ dall'assicuratore in seguito alla sottoscrizione del trattato di riassicurazione è dato dalla differenza tra il premio $P$ inccassato e il premio di riassicurazione $P_R$, risulta

*(15)*

$$P_A = \lambda\left\{aE[\boldsymbol{X}] - \int_{\frac{M}{a}}^{+\infty}(ax-M)^2 dF_X(x) + (\theta_A - \theta_R)E(\boldsymbol{X}^2) + \theta_R aE(\boldsymbol{X}^2)\right\}.$$

Modificato così il principio di calcolo del premio, possiamo considerare la variabile profitto e il profitto netto atteso delle espressioni, rispettivamente, (4) e (5).

In tale situazione i risultati ottenuti da di L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013) e da H.Cosette, E. Marceau e V. Maume-Deschamps (Cosette, Marceau, & Maume-Deschamps, 2010), relativi al Coefficiente di aggiustamento di Lundberg, continuano a essere validi e possiamo sfruttarli per determinare la strategia di riasscurazione ottima. Bisogna però tener conto che $P_A$ è legato all'interazione tra il numero atteso dei sinistri $\lambda$ e l'aliquota di ritenzione $a$, cosa che non avviene nel modello proposto da L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013). Quest'interazione, come vedremo, influenza la scelta della strategia di riassicurazione da perseguire.

Per determinare la strategia ottima di riassicurazione, come già detto, occorre trovare le aliquote $a^*$ e $M^*$ dei trattati considerati al paragrafo 3, tali per cui risulti minima la probabilità di rovina dell'assicuratore o, equivalentemente, tali per cui risulti massimo il Coefficiente di aggiustamento di Lundberg.

Cerchiamo quindi inizialmente la portata ottima del trattato *excess of loss*, considerando l'aliquota di ritenzione $a$ fissata: dobbiamo quindi massimizzare $R_{a,M}$. Per risolvere tale problema occorrerà derivare il

---

[2]La relazione che lega la varianza di una variabile al suo momento primo e al suo momento secondo è

$$\sigma^2(\boldsymbol{X}) = E[\boldsymbol{X}^2] - E^2[\boldsymbol{X}].$$

Coefficiente di aggiustamento di Lundberg rispetto a $M$. Dato che si è detto che $R_{a,M}$ può essere determinato a partire da $C_{a,M}$, allora si può derivare l'espressione di quest'ultimo sempre rispetto a $M$.

H.Cosette, E. Marceau e V. Maume-Deschamps (Cosette, Marceau, & Maume-Deschamps, 2010) hanno dimostrato che per $a \in (a_0, 1]$, $R_{a,M}$ è una funzione di $M$ che ha come massimo $M^*$ e soddisfa la seguente equazione:

*(16)*

$$\left[\frac{1-\alpha}{1+\alpha}e^{rM} + \frac{2\alpha}{1+\alpha}e^{rM}\Phi_{X_{a,M}}(r)\right]\bigg|_{r=R_{a,M}} - (1+\theta_R) = 0.$$

Da tale relazione si determina la portata ottima $M^*$. A questo punto si può determinare l'aliquota ottima del trattato *in quota*, fissato $M = M^*$.

Per determinare qual è l'aliquota di ritenzione ottima $a^*$, fissato $M = M^*$, dobbiamo massimizzare $R_a^* = R_{a,M^*}$ al variare di $a$ in $(0,1]$. Calcoliamo quindi la derivata prima di $R_a^*$ rispetto ad $a$:

*(17)*

$$\frac{\partial R_a^*}{\partial a} = -\frac{\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial a}}{\frac{\partial C_{a,M}(r)}{r}}\Bigg|_{r=R_a^*} = 0$$

Consideriamo quindi l'espressione (9) di $C_{a,M}(r)$ e le sue proprietà, individuate nel paragrafo 4.

Dato che per la proprietà 2 $\frac{\partial C_{a,M}(r)}{r}\Big|_{r=R_{r=R_a^*}}$ è positiva, basta cercare la soluzione di

(*18*)

$$\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial a}\bigg|_{r=R_{r=R_a^*}} = 0.$$

Ricordando la (9) occorre calcolare:

$$\frac{\partial \phi_{a,M}(r)}{\partial a} = r\int_0^{\frac{M}{a}} xe^{rax}dF_{\boldsymbol{X}}(x),$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{a,M}(r)}{\partial a^2} = 2r\phi_{a,M}(r)\int_0^{\frac{M}{a}} xe^{rax}dF_{\boldsymbol{X}}(x)$$

e

$$\frac{\partial P_A}{\partial a} = \lambda\left[E(\boldsymbol{X}) - \int_{\frac{M}{a}}^{+\infty} 2(ax-M)xdF_{\boldsymbol{X}}(x) + \int_0^{\frac{M}{a}} xdF_{\boldsymbol{X}}(x) + \theta_R E(\boldsymbol{X}^2)\right],$$

da cui, con semplici passaggi, si ottiene

*(19)*

$$\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial a} = r\lambda \left\{ \left[ \frac{\lambda(1-\alpha)}{1+\alpha} + \frac{\lambda\alpha}{1+\alpha} \right] \int_0^{\frac{M}{a}} x e^{rax} dF_{\boldsymbol{X}}(x) - \left[ E(\boldsymbol{X}) + \int_0^{\frac{M}{a}} 2(ax-M)x dF_{\boldsymbol{X}}(x) + \theta_R E(\boldsymbol{X}^2) \right] \right\}.$$

Ricordando che il nostro obiettivo è descritto dalla (17), dividiamo e moltiplichiamo la (19) per $r$. Con semplici passaggi e considerando la proprietà 3 si ha

$$\lim_{a \to a_0^+} \frac{\partial R_a^*}{\partial a} = \frac{\lambda \left[ E(\boldsymbol{X}) + \int_0^{+\infty} a x^2 dF_{\boldsymbol{X}}(x) + \theta_R E(\boldsymbol{X}^2) \right]}{E\left[\boldsymbol{X}_{a,+\infty}^2\right] + \frac{2\alpha}{1+\alpha} E\left[\boldsymbol{X}_{a,+\infty}^2\right]^2} > 0,$$

poiché

$$\lim_{a \to a_0^+} \frac{\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial a}}{r} = -\lambda \left[ E(\boldsymbol{X}) + \int_0^{+\infty} a x^2 dF_{\boldsymbol{X}}(x) + \theta_R E(\boldsymbol{X}^2) \right] < 0.$$

Risulta quindi che l'aliquota ottima di ritenzione dipende dal numero atteso di sinistri $\lambda$.

A questo punto deriviamo la portata ottima del trattato *excess of loss*, considerando l'aliquota di ritenzione fissata:

$$\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial M} = \frac{\lambda(1-\alpha)}{1+\alpha} r e^{rM} \left[ 1 - F_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{M}{a}\right) \right] + \frac{\lambda\alpha}{1+\alpha} 2 r e^{rM} \phi_{\boldsymbol{X}_{a,M}}(r) \left[ 1 - F_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{M}{a}\right) \right] \\ - \lambda^2 r \left[ 2M \left[ 1 - F_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{M}{a}\right) \right] - 2a \left[ 1 - F_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{M}{a}\right) \right] \right].$$

Ricordando la (17), risulta

$$\frac{\partial R_{a,M}}{\partial M} = - \left. \frac{\frac{\partial C_{a,M}(r)}{\partial M}}{\frac{\partial C_{a,M}(r)}{r}} \right|_{r=R_a^*} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\lambda r \left[ 1 - F_{\boldsymbol{X}}\left(\frac{M}{a}\right) \right] \left[ \frac{(1-\alpha)}{1+\alpha} e^{rM} + \frac{\lambda\alpha}{1+\alpha} 2 e^{rM} \phi_{\boldsymbol{X}_{a,M}}(r) - \lambda(2M - 2a) \right]}{\frac{\lambda(1-\alpha)}{1+\alpha} E\left[X_{a,M}\right] + 2 \frac{\lambda\alpha}{1+\alpha} E\left[X_{a,M}\right] - \lambda E\left[X_{a,M}\right](\theta_A - \theta_R)} = 0.$$

Risolvendo l'equazione rispetto a $M$ e passando al logaritmo, si ha:

*(20)*

$$\log\big(2\lambda(M-a)\big) - r\,M = \log\left( \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + 2\,\frac{\alpha}{1+\alpha} \phi_{\boldsymbol{X}_{a,M}}(r) \right),$$

da cui, formulando delle ipotesi sulla distribuzione del danno, si ottiene il valore della portata ottima.

Dalla (19) e (20), è evidente che sia l'aliquota di ritenzione che la portata ottima dipendono dal numero atteso di sinistri e dunque la strategia ottima di riassicurazione sarà data da un'opportuna combinazione dei due trattati, in funzione del numero atteso dei sinistri.

Seguendo lo stesso approccio fin qui mostrato, ma supponendo di utilizzare il *principio della speranza matematica* per il calcolo del premio, L.Zhang, X.Hu e B.Duan (Zhang, Hu, & Duan, 2013) hanno invece dimostrato che la strategia ottima di riassicurazione, che un assicuratore dovrebbe perseguire, consiste nel sottoscrivere unicamente un trattato di riassicurazione *excess of loss*. Dal loro modello risulta infatti che se $R_a^* = R_{a,M^*}$, allora $R_a^*$ è una funzione di $a$, che ha il massimo nel punto $a^* = 1$.

Tale risultato è frutto dell'indipendenza della aliquota di ritenzione del trattato in quota share e della portata del tratatto excess of loss dal nuemro atteso di sinistri: non considerando quest'aspettativa, un assicuratore minimizzarebbe la sua probabilità di rovina sottoscrivendo un unico trattato che copra il proprio portafoglio dai sinistri caratterizzati da un risarcimento di importo elevato.

Nel caso in cui invece il portafoglio sia caratterizzato da una frequenza sinistri osservata che abbia un'incidenza sul risultato economico dell'impresa non trascurabile o se l'assicuratore non conosce ancora bene il proprio business, sarebbe opportuno considerare nella scelta della copertura riassicurativa l'aspettativa sul numero di sinistri del portafoglio e quindi sarebbe ragionevole utilizzare un modello come quello appena presentato per poter determinare la strategia di riassicurazione ottimale.

### Andamento di $M^*$al variare di $\lambda$

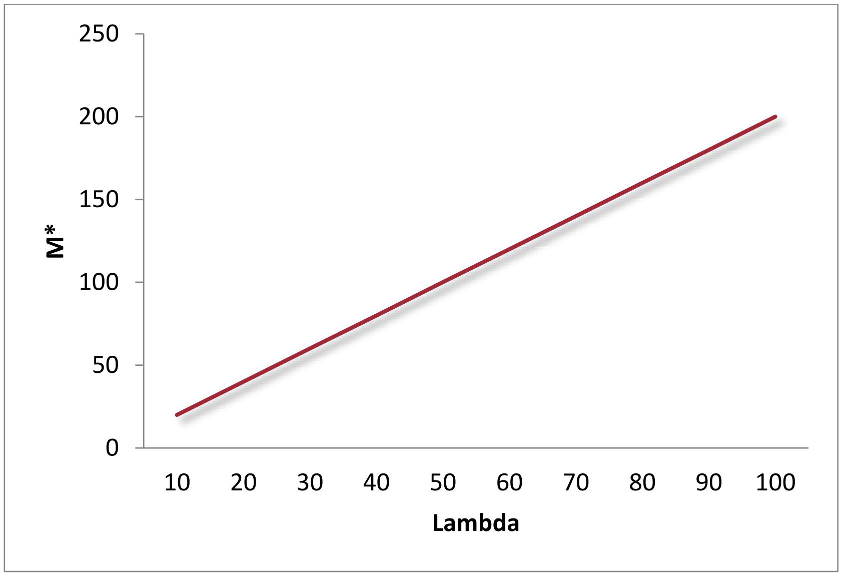
Per studiare l'impatto del numero atteso di sinistri sulla portata ottima, deriviamone l'espressione sotto l'ipotesi che $\boldsymbol{X}$ è caratterizzata da una distribuzione Esponenziale di media 1. A partire dalla (20) si ottiene:

*(21)*

$$M^* \cong \frac{2\lambda a + \log\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + 2\frac{\alpha}{1+\alpha}\phi_{\boldsymbol{X}_{a,M}}(r)\right)}{2\lambda - r}.$$

Dalla (21) è evidente che la portata ottima del trattato, a parità di tutti gli altri parametri, sarà tanto più elevata quanto più è grande il numero atteso di sinistri, come è possibile osservare nella **Figura 1**, in cui si è supposto $\alpha = 0{,}25$ e $a^* = 1$.

***Figura 1***
**Andamento della portata ottima al variare del numero atteso di sinistri**




È quindi evidente che all'aumentare del numero dei sinistri la portata ottima del trattato *excess of loss* tende ad aumentare, in particolare, l'aumento avviene in modo proporzionale.

## Impatto di $\lambda$ sul Coefficiente di aggiustamento di Lundberg

Considerando le stesse ipotesi formulate per studiare l'impatto del numero atteso di sinistri sulla portata del trattato excess of loss, è interessante inoltre osservare l'impatto del numero atteso di sinistri $\lambda$ sul Coefficiente di aggiustamento di Lundberg.

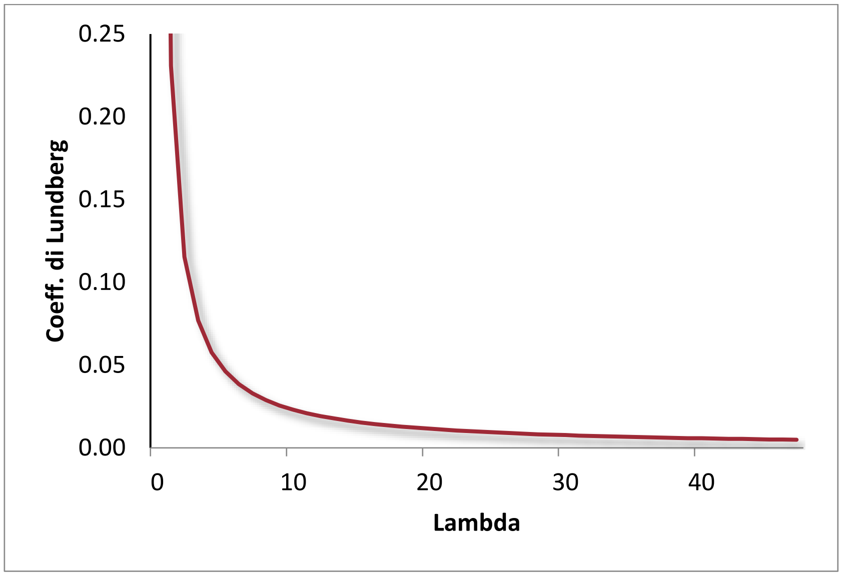
Per studiare tale impatto, deriviamo il Coefficiente di aggiustamento di Lundberg rispetto a $\lambda$:

*(22)*

$$\frac{\partial R_{a,M}}{\partial \lambda} = -\frac{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\phi_{X_{a,M}}(r)+\frac{\alpha}{1+\alpha}\phi^2_{X_{a,M}}(r)-\frac{1}{1+\alpha}r(\theta_A-\theta_R)E[\boldsymbol{X}]}{\frac{\lambda(1-\alpha)}{1+\alpha}E[X_{a,M}]+2\frac{\lambda\alpha}{1+\alpha}E[X_{a,M}]-\lambda E[X_{a,M}](\theta_A-\theta_R)} \le 0$$

Come è ragionevole aspettarsi, il Coefficiente di aggiustamento di Lundberg diminuisce all'aumentare del numero atteso di sinistri e tale andamento è rappresentato nella ***Figura 2***.

***Figura 2***
**Andamento del Coefficiente di aggiustamento di Lundberg ottima al variare del numero atteso di sinistri**




Si è ipotizzato che: a) la variabile $\boldsymbol{X}$ sia caratterizzata da una distribuzione di tipo Esponenziale di media 1; b) $\theta_A = 0{,}2$ e $\theta_R = 0{,}5$; c) $\alpha = 0{,}25$ e $a^* = 1$.

I risultati determinati nel presente paragrafo mostrano l'importanza dell'aspettativa sul numero di sinistri nella determinazione della strategia ottima di riassicurazione, ovvero di quella strategia tale da rendere minima la probabilità di rovina dell'assicuratore.

Considerando la realtà assicurativa, è ragionevole pensare di considerare quest'aspettativa per la scelta della politica di riassicurazione da adottare, soprattutto se l'assicuratore ravvisa la necessità di sottoscrivere un trattato di riassicurazione in quota share. In questa situazione il modello qui proposto, basato sull'utilizzo del *principio della varianza* per il calcolo del premio in luogo di quello della *speranza matematica*, potrebbe risultare più adeguato.

## 6 BIBLIOGRAFIA

Canteno, M. (2002). Measuring the effect of reinsurance by the adjustment coefficient in the Spare Andersen model. *Insurance: Mathematics and Economics, 30*((1)), 37-50.

Cosette, H., Marceau, E., & Maume-Deschamps, V. (2010). Discrete-time risk models based on time series for count random variables. *Austin Bulletin, 40*(1), 123-150.

Hesselager, O. (1990). Some results on optimal reinsurance in term of the adjustment coefficient. *Scandinavian Actuarial Journal, 2*((1)), 80-90.

Zhang, L., Hu, X., & Duan, B. (2013). Optimal reinsurance under adjustment coefficient measure in a discrete risk model based on Poisson MA(1) process. *Scandinavian Actuarial Journal*.