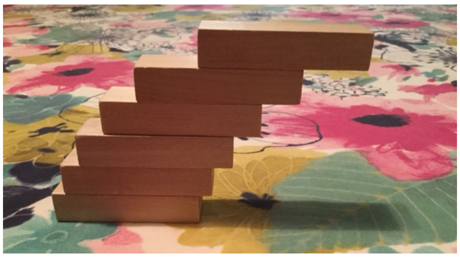
MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2017, treball no. 1, 56 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Sumes harmòniques

Armengol Gasull

En aquest treball farem un petit recorregut per les propietats d'algunes sèries relacionades amb la sèrie harmònica,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$



Construcció basada en la sèrie harmònica (veure §4.10).

Començarem veient diverses proves de la seva divergència i continuarem exposant algunes aplicacions en situacions en les quals apareix. Entre d'altres, considerarem el problema del col·leccionista, els dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori, un algorisme d'ordenació de dades i un parell de qüestions ben famoses i divertides de matemàtica recreativa.

Considerarem també les sumes de la serie harmònica alternada i altres reordenacions d'aquesta, reproduint els resultats clàssics de Ohm i Pringsheim. Després prendrem de nou la sèrie harmònica i estudiarem la seva convergència quan canviem els signes d'alguns dels seus termes, però sense reordenar-los. A més, en certs casos que són convergents donarem la seva suma.

Finalment estudiarem la convergència de certes sèries harmòniques aleatòries.

Aquest article és una extensió del treball [23], del mateix autor, que està dedicant exclusivament a la sèrie harmònica.

1 Introducció i resultats principals

La sèrie harmònica és l'exemple més antic i famós de successió de números positius, cada cops més petits i tendint a zero, però amb suma infinita.

Aquest fet sembla que és conegut des del segle XIV. Si ho escrivim d'una manera informal,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty,$$

i més rigorosament, introduint les sumes parcials,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n},$$

tenim que

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

De vegades, en lloc de dir que la suma és infinita, també es diu que la sèrie formada pels termes $\frac{1}{k}$ és divergent. En general, donada qualsevol successió de números reals $\{a_k\}_{k\geq 1}$ es diu que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ és *convergent* i té suma $S \in \mathbb{R}$, si la successió de les seves sumes parcials $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ té límit S. En cas contrari es diu que és *divergent*. Per a $a_k > 0$, per tot k més gran que un cert $k_0 \in \mathbb{N}$, les sèries divergents compleixen que $\lim S_n = +\infty$. En general, hi ha tres tipus de sèries divergents: les que el límit anterior val més infinit, les que val menys infinit i les que no existeix. Per abús de llenguatge quan una sèrie divergeix cap a més (o menys) infinit, de vegades es diu que convergeix cap a més (o menys) infinit. Quan no hi hagi confusió nosaltres també farem aquest abús.

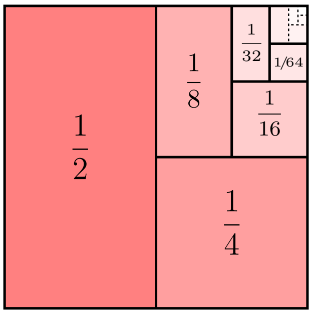
Començarem el treball amb una secció dedicada a explicar per què la sèrie harmònica té aquest nom. Hi ha moltíssimes demostracions de la seva divergència. Per exemple, a [37, 38] se'n recopilen més de quaranta. A la secció següent recollim una selecció d'algunes de les més elementals.

Un resultat encara més interessant i delicat, que ja va demostrar el matemàtic suís Leonhard P. Euler (1707-1783) el 1737, és que

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots$$

és divergent (vegeu, per exemple [51]). A la Secció 3.2 en donarem una demostració molt curta que féu, el 1938, el prolific matemàtic hongarès Paul Erdös (1913-1996), vegeu [4, 6, 18, 64]. Observeu que aquest resultat mostra en particular l'abundància de nombres primers.

D'altra banda, per exemple, si només agafem els termes de la forma $\frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, la sèrie obtinguda està formada pels termes d'una progressió geomètrica i convergeix cap a 1. En aquest cas, això és deu al fet que hem agafat molt pocs termes dels que formen tota la sèrie harmònica completa.



Un resultat molt curiós en aquesta direcció va ser provat el 1914 ([36]) pel matemàtic anglès/nord-americà Aubrey J. Kempner (1880-1973). Anomenem $\mathbb{N}'$ el conjunt de tots els números naturals que no tenen cap 9 en la seva expressió en base 10. Aleshores, la suma $\sum_{k\in\mathbb{N}'}\frac{1}{k}$ és convergent. Demostrarem aquest resultat, i més concretament que $S<78$, a la Secció 3.1. De fet, se sap que $S\approx 22.92$ ([32, 58]). Eliminant una altra xifra o blocs més llargs de xifres, la convergència també es manté ([58]).

Tot i que, en principi, el resultat de Kempner pot sorprendre, després de reflexionar-hi una mica, intuïtivament és clar que la convergència de la sèrie és conseqüència del fet que "la majoria" dels nombres amb moltes xifres tenen algun 9 entre elles.

La quarta secció la dedicarem a estudiar diversos problemes famosos en els quals la sèrie harmonica o les seves sumes parcials juguen un paper fonamental. Així, entre d'altres, considerarem el problema del col·leccionista, el de la secretària, el dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori, un algorisme d'ordenació de dades i un parell de qüestions ben famoses i divertides de matemàtica recreativa.

Un altre fet també ben conegut és que la sèrie harmonica alternada és convergent. El matemàtic alemany Nikolaus Mercator (1620-1687) va demostrar que

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\ln(2). \tag{1}$$

Aquest matemàtic no s'ha de confondre amb el famós matemàtic i cartògraf flamenc Gerardus Mercator (1512-1594). La sèrie anterior és convergent, però quan prenem valors absoluts (és a dir recuperen la sèrie harmònica original) és divergent. Una sèrie amb aquestes característiques s'anomena *condicionalment convergent*. Hi ha un resultat clàssic en aquest context, del matemàtic alemany Bernhard Riemann (1826-1866), provat el 1853 però no publicat fins després de la seva mort en un treball dedicat a les sèries trigonomètriques ([22, 54]) que avui en dia es coneix com *Teorema de les reordenacions de Riemann*, que ens diu el següent: *Una sèrie és condicionalment convergent* *si i només si per a tot número real $\mathcal{S}$ (incloent més i menys infinit) hi ha una reordenació de la mateixa que convergeix cap a $\mathcal{S}$.*

Així, si anomenem, $b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, donat $\mathcal{S} \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, existeix una reordenació de $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots,$ diguem-li, $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, b_{\sigma(3)}, \ldots, b_{\sigma(n)}, \ldots$ on $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, és una aplicació bijectiva, tal que

$$\mathcal{S} = b_{\sigma(1)} + b_{\sigma(2)} + b_{\sigma(3)} + \cdots + b_{\sigma(n)} + \cdots$$

Aquestes reordenacions es construeixen com descrivim a continuació. S'agafen u_1 termes positius $1, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2u_1-1}$, de manera que la seva suma sigui més gran que $\mathcal{S}$. A continuació s'agafen v_1 termes negatius $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{2v_1}$, de manera que la suma d'aquests números més els anteriors sigui menor que $\mathcal{S}$ i es continua aquest procés indefinidament, obtenint al final dues seqüències $\{u_n\}_{n\geq 1}$ i $\{v_n\}_{n\geq 1}$ de números naturals. Això és possible ja que es pot veure que tant la subsèrie dels termes positius, com la dels termes negatius divergeixen. A [21] s'estudien els valors que poden prendre les successions $\{u_n\}_{n\geq 1}$ i $\{v_n\}_{n\geq 1}$.

El que ja no és tan senzill és, donada una reordenació, saber quant val la seva suma. Per algunes reordenacions de la sèrie harmònica alternada, seguint [3, 12, 17, 31], veurem una extensió preciosa de (1) provada el 1883 ([52]) pel matemàtic alemany Alfred Pringsheim (1850-1941). Necessitarem unes definicions prèvies.

Es diu que una sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

és una *reordenació simple* de la sèrie harmònica alternada (1), si els termes a_n són una reordenació dels de la sèrie harmònica però tant la subseqüència dels termes positius com la dels termes negatius estan en el seu ordre original. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és una reordenació simple de la sèrie harmònica alternada, denotarem per p_n a la quantitat de termes positius dins de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. De manera similar, $q_n = n - p_n$ és la quantitat de termes negatius en el mateix conjunt. Si existeix el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = \alpha \in [0, 1],$$

es diu que α és la *densitat asimptòtica* dels termes positius.

El teorema ens diu:

Teorema de Pringsheim *Una reordenació simple de la sèrie harmònica alternada convergeix (incloent els valors més i menys infinit) si i només si* *la densitat asimptòtica (α) de termes positius de la reordenació existeix. La suma d'aquesta reordenació val*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right), \quad si \quad \alpha \in (0,1),$$

i pels casos $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ el resultat també és cert prenent límits a l'expressió de la dreta. Així, aquests casos corresponen a suma menys i més infinit, respectivament.

Per a demostrar-lo, a la cinquena secció, introduïm la constant d'Euler $\gamma \approx 0.577218$ i provem la seva relació amb h_n. Les referències [29, 40] recopilen moltes de les propietats de γ i altres resultats relacionats.

Observi's que en el cas (1), podem aplicar el teorema anterior, ja que l'identitat és clarament una reordenació simple. En aquest cas $\alpha = \frac{1}{2}$ i la suma val $\ln(2)$.

Un corol·lari força interessant del teorema estén un resultat clàssic del 1839 ([14, 49]) del matemàtic alemany Martin Ohm (1792-1872), germà del físic Georg Simon Ohm, descobridor de la famosa llei d'Ohm. Considerem la reordenació simple de la sèrie harmònica alternada consistent en agafar alternativament blocs amb $r \geq 0$ números positius i $s \geq 0$ números negatius. Aleshores $\alpha = \frac{r}{r+s}$ i, per tant,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4r}{s}\right).$$

Així, per exemple,

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = 3\,\frac{\ln(2)}{2}, \tag{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{\ln(2)}{2}, \tag{3}$$

ja que en el primer cas $(r,s,\alpha) = (2,1,\frac{2}{3})$ i en el segon $(r,s,\alpha) = (1,2,\frac{1}{3})$.

El resultat (3) es pot obtenir de manera més senzilla, un cop sabem que la suma d'aquesta reordenació és finita. La següent deducció es atribuïda al matemàtic frances Pierre Alphonse Laurent (1813-1854),

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\right) = \frac{\ln(2)}{2}, \end{aligned}$$

on hem usat (1).

Un mètode alternatiu per a deduir el resultat de Ohm està basat en els desenvolupaments en sèries de potencies de la funció $\ln(1+x)$ i d'altres funcions similars, veure [17]. Donarem alguns detalls més a la Secció 5.1.

En la Secció 6 ens preocupem de una qüestió relacionada, però diferent. Que passa si en lloc de reordenar els termes de la sèrie harmònica alternada el que fem és agafar la sèrie harmònica i li canviem el signe a alguns dels seus termes, en funció de certes regles. Concretament, considerem la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{3} + \frac{\varepsilon_4}{4} + \cdots, \tag{4}$$

on $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, i suposem que existeix $m \geq 1$ tal que a tot $k \geq 0$,

(i) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = (\varepsilon_{km+1}, \varepsilon_{km+2}, \ldots, \varepsilon_{km+m})$,

(ii) Entre els nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ hi ha $r \geq 0$ valors $+1$ i $s = m - r$ valors -1.

En cas de que sigui convergent denotarem com $S_{\mathrm{sign}(\varepsilon_1),\mathrm{sign}(\varepsilon_2),\ldots,\mathrm{sign}(\varepsilon_m)}$ la seva suma. Així, per exemple $S_{+,-} = \ln(2)$. Provem el següent resultat:

Teorema A. *Considerem una sèrie (4) complint les hipòtesis (i) i (ii). Aleshores és convergent si i només si $r = s$. A més, quan $r = s$, la corresponent suma val*

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j \left(\ln(2m) + \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{j\pi}{m}\right) - 2\sum_{0<n\leq \frac{m}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n j}{m}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi n}{m}\right)\right)\right).$$

Observi's que tot i que la qüestió tractada recorda la resolta per Ohm, el resultat que obtenim és totalment diferent. Els valors de les sumes quan $r = s$ són ben diferents dels obtinguts fins ara. Per exemple,

$$\begin{aligned}
S_{+,+,-,-} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \cdots \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}, \\
S_{+,+,-,+,-,-} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \cdots \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{\ln(3)}{2} - \frac{\ln(2)}{3}, \\
S_{+,+,+,+,+,-,-,-,-,-} &= \frac{\pi}{10}\sum_{j=1}^{4}\cot\left(\frac{j\pi}{10}\right) + \frac{\ln(2)}{5}.
\end{aligned}$$

La prova de la segona part del teorema és més complicada que altres qüestions tractades fins ara i es basa en propietats de la funció digamma Ψ, que és la derivada logarítmica de la funció Gamma, Γ, veure [1, 43, 57]. Un fet clau serà el resultat provat per Gauss el 1813 que ens dóna explícitament el valor de Ψ en qualsevol valor racional positiu en termes de funcions elementals i de la constant γ d'Euler.

Per acabar, dediquem l'última secció a provar alguns resultats sobre certes sèries harmòniques aleatòries. En primer lloc, interpretarem el Teorema de Pringsheim en aquest context, veure el Corol·lari C de la Secció 7.1. Finalment considerarem la versió aleatòria del Teorema A. Concretament, prendrem la sèrie aleatòria

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n} \tag{5}$$

on $\{U_n\}_n$ són variables aleatòries independents i equidistribuïdes, amb distribució de tipus Bernoulli, amb $P\{U_n = 1\} = p, P\{U_n = -1\} = 1 - p$, i provarem el següent resultat.

Teorema B. *Considerem la sèrie harmònica aleatòria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n},$$

on $\{U_n\}_{n\geq 1}$ són variables aleatòries independents i equidistribuïdes, amb distribució de tipus Bernoulli, tal que $P\{U_n = 1\} = p, P\{U_n = -1\} = 1 - p$. Aleshores:

(i) Si $p = \frac{1}{2}$, la sèrie és convergent amb probabilitat 1.

(ii) Si $p > \frac{1}{2}$, la sèrie divergeix cap a més infinit amb probabilitat 1.

(iii) Si $p < \frac{1}{2}$, la sèrie divergeix cap a menys infinit amb probabilitat 1.

La prova del Teorema B usa resultats de la teoria de sèries aleatòries ([11]), desenvolupada, entre d'altres, pel matemàtic rus Andrei Nikolaievitx Kolmogórov (1903-1987). Aquest teorema sembla ser conegut, tot i que no hem trobat el seu enunciat complet enlloc. En particular, (i) apareix sense detallar a [46, 59] o com exemple a [11, Ex. 22.2]. Acabarem el treball provant diverses propietats de la variable aleatòria Z quan $p = \frac{1}{2}$, seguint [59].

2 Per què la sèrie es diu harmònica?

Les tres successions més conegudes són les anomenades aritmètica, geomètrica i harmònica. Aquestes són, respectivament,

$$\{bk+c\}_{k\geq 0}, \qquad \{br^k\}_{k\geq 0}, \qquad \left\{\frac{b}{k}\right\}_{k\geq 1}, \tag{6}$$

on b, c i r són constants reals. El seus noms provenen del fet següent: donat dos nombres positius x i y, hi ha tres mitjanes ben conegudes que es poden calcular amb ells:

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \quad G(x,y) = \sqrt{x\,y}, \quad H(x,y) = \frac{2x\,y}{x+y} = \left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\right)^{-1}.$$

S'anomenen mitjana aritmètica, geomètrica i harmònica, respectivament. Resulta que si denotem com a x_k el terme k-èsim de cascuna de les tres successions, amb b i r positius, es compleix el següent:

$$\begin{aligned}
\text{Cas aritmètic:} \quad & A(x_{k-1},x_{k+1}) = \frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{2} = \frac{b(k-1)+b(k+1)+2c}{2} \\
& = bk+c = x_k, \\
\text{Cas geomètric:} \quad & G(x_{k-1},x_{k+1}) = \sqrt{x_{k-1}x_{k+1}} = \sqrt{br^{k-1}br^{k+1}} = br^k = x_k, \\
\text{Cas harmònic:} \quad & H(x_{k-1},x_{k+1}) = \frac{2x_{k-1}x_{k+1}}{x_{k-1}+x_{k+1}} = \frac{\frac{2b^2}{(k-1)(k+1)}}{\frac{b}{k-1}+\frac{b}{k+1}} = \frac{b}{k} = x_k.
\end{aligned}$$

La mitjana aritmètica no necessita presentació, però les altres dues potser sí. Així, per exemple, si un capital C ens produeix el primer any un rèdit anual d'un x per 1 i el segon any un rèdit anual d'un y per 1, quan han passat dos anys tenim com a capital total $(1+x)(1+y)C$. Aleshores el rèdit mitjà r_M complirà $(1+x)(1+y)C = (1+r_M)^2C$ i, per tant, $r_M = \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 = G(1+x, 1+y) - 1$.

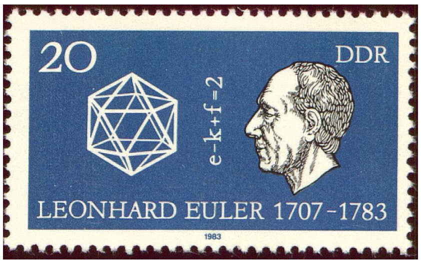
De manera similar, si anem a un lloc que està a distància d amb velocitat x i tornem amb velocitat y, aleshores recorrem una distància $2d$ en un temps total $\frac{d}{x}+\frac{d}{y}$. Per tant, la velocitat mitjana a la qual hem anat és $\frac{2d}{d/x+d/y} = \frac{2xy}{x+y} = H(x,y)$.

En aquest punt, és natural preguntar-se per què la mitjana $H(x,y)$ es diu *harmònica*. Sembla ser que devem aquest nom als dos fets següents estudiats per l'escola pitagòrica ([29, Cap. 13], [63]).

Si agafem una corda de longitud ℓ de manera que quan vibra dóna lloc a un cert so, la corda amb longitud $\frac{\ell}{2}$, sona molt similar. A més, si agafem una tercera corda de longitud $\frac{2\ell}{3}$, obtenim un tercer so, més diferent. El fet notable observat pels pitagòrics és que, quan fem vibrar les tres cordes simultàniament, escoltem un acord molt *harmoniós* (seria un acord tipus DO-SOL-DO), i resulta que

$$H\Big(\ell, \frac{\ell}{2}\Big) = \frac{\ell^2}{\ell + \frac{\ell}{2}} = \frac{2\ell}{3}.$$

Un segon motiu per a l'adjectiu harmònic és que, d'entre els cinc sòlids platònics, el cub era de vegades qualificat com a harmònic. Un cub té 6 cares ($c = 6$), 12 arestes ($a = 12$) i 8 vèrtexs ($v = 8$). Doncs, $H(c, a) = H(6, 12) = 8 = v$. De manera similar per a un altre sòlid platònic, l'octàedre $H(v, a) = H(6, 12) = 8 = c$.



Si busquem més políedres que compleixin la mateixa condició que el cub o l'octàedre, $H(c, a) = v$ o $H(v, a) = c$, i a aquesta condició li afegim la donada per la característica d'Euler $c - a + v = 2$, tenim que s'ha de complir una de les equacions diofàntiques següents:

$$(v-1)^2 - 2(c-1)^2 = -1 \quad \text{o} \quad (c-1)^2 - 2(v-1)^2 = -1.$$

Les equacions de la forma $x^2 - 2y^2 = -1$ són de tipus Pell, anomenades així en honor del matemàtic anglès John Pell (1611-1685), i se sap que tenen infinites parelles de solucions enteres positives ([16, 42]). Resolent-les, obtenim que les solucions més petites del nostre problema (c, a, v) són les ternes

$$\{(6,12,8),(8,12,6),(30,70,42),(42,70,30),(170,408,240),\\ (240,408,170),(986,2378,1394),(1394,2378,986),\ldots\}.$$

Hi ha un políedre conegut, amb nom *Bicúpula pentagonal giroallargada*, que correspon al quart punt d'aquesta llista, vegeu la Figura 1. Aquest

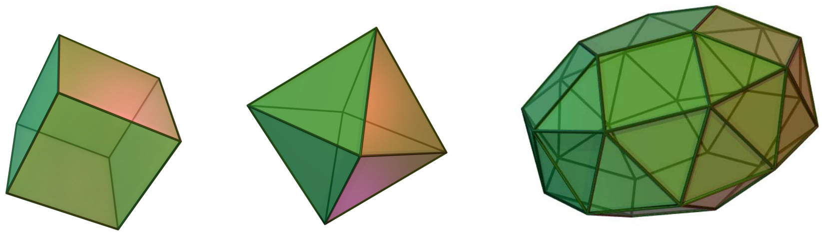


Figura 1: Políedres harmònics. La tercera figura té $c = 42, a = 70$ i $v = 30$. Les cares son 2 pentàgons, 10 quadrats i 30 triangles.

políedre és un dels 92 sòlids de Johnson, que són políedres convexos que tenen totes les cares formades per polígons regulars ([35]). Agraeixo a en Jaume Coll per fer-me saber de la seva existència. El tercer punt correspon al seu políedre dual i no sabem que es conegui amb cap nom propi.

De manera natural, associades a les tres successions (6), hi has les tres sèries: l'aritmètica, la geomètrica i l'harmònica,

$$\sum_{k=0}^{\infty} bk + c, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} br^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k},$$

respectivament. La primera és sempre divergent. La segona és convergent si i només si $|r| < 1$ i es coneix tant la seva suma com l'expressió explícita de les seves sumes parcials. Com ja hem comentat, la tercera, amb $b \neq 0$, és divergent i és la que estudiem en aquest treball.

3 Divergència de la sèrie harmònica

En aquesta secció presentarem diverses proves de la divergència de la sèrie harmònica.

1a prova

Comencem amb la prova més antiga del fet esmentat, de voltants de 1350, atribuïda al filòsof francès Nicole Oresme (1323-1382).

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty. \end{aligned}$$

Una escriptura més rigorosa ens diria que $h_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, i per tant $\lim\limits_{k\to\infty} h_{2^k} = \infty$.

N. Oresme.

Una variació de la prova d'Oresme és la següent: hi ha 9 números amb un dígit, $1, 2, \ldots, 9$ i els seus inversos són més grans que $\frac{1}{10}$, per tant $h_9 > \frac{9}{10}$. Hi ha 90 números de dos dígits, des de 10 fins a 99, amb inversos més grans que $\frac{1}{100}$. Per tant, $h_{99} > \frac{9}{10} + \frac{90}{100} = 2\left(\frac{9}{10}\right)$. D'una manera similar $h_{999} > \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \frac{900}{1000} = 3\left(\frac{9}{10}\right)$. En general, $h_{10^k-1} > \frac{9k}{10}$, i per tant de nou deduïm que la suma és infinita.

2a prova

La prova descrita a continuació és atribuïda al matemàtic italià Pietro Mengoli (1626-1686) i no ens dóna una demostració directa, sinó que es basa en el mètode de reducció a l'absurd. Suposem que la sèrie harmònica té una suma finita, S. Observem, en primer lloc, que

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{n^2-1} > \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}, \quad n \geq 2.$$

En particular, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} > \frac{2}{9}$, $\frac{1}{11} + \frac{1}{13} > \frac{2}{12} \ldots$. Per tant,

$$\begin{aligned} S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) \\ + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right) + \cdots \\ > 1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) + \cdots = 1 + S, \end{aligned}$$

és a dir, $S > 1 + S$, i hem arribat a una contradicció.

3a prova

Com l'anterior, usa la reducció a l'absurd per a demostrar la divergència de la sèrie. Si S fos finit, tenim

$$\begin{aligned} S &= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots = S, \end{aligned}$$

on clarament la desigualtat és estricta, tot i que prové d'un pas al límit, i de nou arribem a una contradicció.

Una variació d'aquesta prova és com segueix. Si agafem només els inversos dels termes parells, la seva suma és $\frac{S}{2}$, ja que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\right) = \frac{S}{2}.$$

Per tant, si la suma és finita, els inversos dels termes senars haurien de sumar també $\frac{S}{2}$, però, com que per a tot $n \geq 1$, $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, es compleix que

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots > \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots = \frac{S}{2},$$

on de nou la desigualtat és estricta, i obtenim un cop més una contradicció.

4a prova

Donem a continuació una prova una mica més tècnica, ja que està basada en la desigualtat $e^x > 1+x$, per $x \neq 0$, però que trobem interessant. Considerem

$$\begin{aligned} e^{h_n} &= e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} = e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdot \cdots \cdot e^{\frac{1}{n}} \\ &> \left(1+1\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1. \end{aligned}$$

Per tant, $\lim_{n\to\infty} h_n \geq \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, tal com volíem veure. Observem que aquesta prova també ens diu que, per a tot n, $h_n > \ln(n+1)$. De fet, també es compleix que $h_n < \ln(n)+1$ (vegeu [23, 29, 40]).

Per tant, perquè h_n sigui gran, el valor de n ha de ser realment gran: vegeu la Taula 1. A la Secció 5 es donen estimacions més precises de h_n, i en particular provarem l'aproximació d'Euler $h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$.

n	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^9	10^{12}
h_n	2.93	5.19	7.49	9.79	12.09	14.39	21.30	28.21
$\gamma+\ln(n)+1/(2n)$	2.93	5.19	7.49	9.79	12.09	14.39	21.30	28.21

Taula 1: Valors de h_n amb dues xifres decimals significatives i les seves aproximacions $\gamma+\ln(n)+\frac{1}{2n}$.

5a prova

Acabarem la nostra selecció de proves amb una demostració que usa propietats de la successió de Fibonacci, $\{f_n\}_{n\geq 0}$. Recordem que els seus termes vénen donats per la recurrència $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, amb $f_0=0$, $f_1=1$. Així, els primers són 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Amb una mica de feina es pot demostrar que la seva expressió explícita és

$$f_n=\frac{\phi^n-(-\phi)^{-n}}{2\phi-1}, \quad \text{on} \quad \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i compleix} \quad \phi^2-\phi-1=0.$$

Per tant,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n-1}}{f_n}\frac{f_n}{f_{n+1}}=\left(\frac{1}{\phi}\right)^2=\frac{1}{\phi^2}=\frac{1}{\phi+1}=1-\frac{1}{\phi}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
S&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{13}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{21}\right)+\left(\frac{1}{22}+\cdots+\frac{1}{34}\right)+\cdots\\
&>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{5}{13}+\frac{8}{21}+\frac{13}{34}+\cdots=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}},
\end{aligned}$$

és divergent, ja que el terme general de l'última sèrie no tendeix a zero.

3.1 Un tros convergent de la sèrie harmònica. El resultat de Kempner

Dedicarem aquesta subsecció a provar el resultat de Kempner ja enunciat a la introducció i que diu que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}'}\frac{1}{k}=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{18}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\cdots\frac{1}{28}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{80}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{88}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{108}\right)+\frac{1}{110}+\cdots, \tag{7}$$

és convergent, on $\mathbb{N}'$ denota el conjunt de tots els números naturals que no tenen cap 9 en la seva expressió en base 10. Seguirem els mateixos passos que al seu treball ([36]).

Denotem per s_n la suma de tots els números de la forma $\frac{1}{k}$ amb $10^{n-1}\leq k<10^n$ i $k\in\mathbb{N}'$, i per m_n el nombre de termes que hi ha a la suma. Calcularem fites superiors dels m_n i també dels s_n, usant que tots els k's són més grans que 10^{n-1} o iguals.

Així, en partir de (7) és clar que $m_1=8<9$, $s_1<9\times 1=9$, i de manera similar $m_2=8\times 9<9^2$ i $s_2<9^2\frac{1}{10}$. Denotem per M_n al nombre de termes de la suma amb $k<10^n$. És clar que $M_n=m_1+m_2+\cdots+m_n$. Així, $M_1<9$ i $M_2<9+9^2$. Vegem, per inducció, que

$$M_n<9+9^2+9^3+\cdots+9^n,\quad m_n<9^n \quad\text{i}\quad s_n<\frac{9^n}{10^{n-1}}.$$

Per això dividim tot $\mathcal{I}^{n+1}=\{k\in\mathbb{N}' : 0<k<10^{n+1}\}$ en els deu subconjunts següents:

$$\mathcal{I}_0^{n+1}=\{k\in\mathbb{N}' : 0<k<10^n\},\ \text{i}$$
$$\mathcal{I}_\alpha^{n+1}=\{k\in\mathbb{N}' : \alpha 10^{n+1}\leq k<(\alpha+1)10^n\},$$

on $\alpha=1,2,\ldots,9$. L'interval $\mathcal{I}_9^{n+1}$ és buit, ja que tots els seus números tenen un 9 en la seva expressió decimal. Cada un dels altres vuit $\mathcal{I}_\alpha^{n+1}$ amb $\alpha>0$ té el mateix nombre d'elements, que coincideix amb el nombre d'elements de $\mathbb{N}'$ que hi ha entre 0 i 10^n, M_n, que per hipòtesi d'inducció és menor que $9+9^2+9^3+\cdots+9^n$. Per tant, $m_{n+1}<8\times\left(9+9^2+9^3+\cdots+9^n\right)=8\frac{9^{n+1}-9}{9-1}<9^{n+1}$, i també $M_{n+1}<9+9^2+9^3+\cdots+9^n+m_{n+1}<9+9^2+9^3+\cdots+9^n+9^{n+1}$. Finalment, $s_{n+1}<\frac{m_{n+1}}{10^n}=\frac{9^{n+1}}{10^n}$, tal com volíem demostrar.

Per acabar,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}'}\frac{1}{k}=\sum_{n=0}^{\infty}s_{n+1}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^{n+1}}{10^n}=9\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n=9\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=90.$$

Si volem fitar la suma amb més precisió, fixat $K > 0$, podem escriure l'expressió anterior com

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}'}\frac{1}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1} &= s_1 + s_2 + \cdots + s_K \sum_{n=K}^{\infty} s_{n+1}\\ &< s_1 + s_2 + \cdots + s_K + 9\sum_{n=K}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n\\ &= s_1 + s_2 + \cdots + s_K + 81\left(\frac{9}{10}\right)^{K-1},\end{aligned}$$

i calcular exactament $s_1 + s_2 + \cdots + s_K$. Així, per exemple, prenent $K = 1$ tenim que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}'}\frac{1}{k} < s_1 + 81 = \frac{761}{280} + 81 < 83.72,$$

i prenent $K = 2$,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}'}\frac{1}{k} < s_1 + s_2 + 81\frac{9}{10} < 77.68.$$

La prova no varia si en lloc del 9 eliminem qualsevol altre dígit excepte el 0. El cas del 0 és lleugerament diferent.

3.2 Un tros divergent de la sèrie harmònica. La suma dels inversos dels nombres primers

Reproduïm a continuació una prova per reducció a l'absurd del fet que $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$ és divergent deguda a Erdös ([4, 6, 18, 64]). Denotem per p_i el primer i-èsim. Així, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots p_{100} = 541, \ldots, p_{1000} = 7919, \ldots$ Suposem, per tal d'arribar a contradicció, que la sèrie és convergent. Aleshores, existirà un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Donat $m \in \mathbb{N}$, definim A_m com el subconjunt de $\{1, 2, \ldots, m\}$ format per tots els números que no tenen cal p_i amb $i > k$ en la seva descomposició en factors primers. En altres paraules, la seva descomposició en factors primers és de la forma $p_1^{j_1} \cdots p_k^{j_k}$ amb tots els $j_u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Fitant per sobre i per sota el nombre d'elements de A_m, $\mathrm{Car}(A_m)$, i prenent un m prou gran arribarem a una contradicció.

Comencem fitant $\mathrm{Car}(A_m)$ per sobre. Tots el elements d'A_m es poden escriure com a $r \cdot s^2$, amb $r \in \mathbb{N}$, sense cap factor primer en la seva descomposició amb exponent més gran que 1 i $s \in \mathbb{N}$. Per tant, $r = p_1^{\ell_1} \cdots p_k^{\ell_k}$ amb tots els $\ell_u \in \{0,1\}$ i com a conseqüència només pot prendre 2^k valors. A més, s ha de ser un element del conjunt $\{1, [\sqrt{2},], \ldots, [\sqrt{m},]\}$, on $[\cdot]$ denota la part sencera. Aleshores, s només té $[\sqrt{m}]$ possibilitats. Per tant,

$$\mathrm{Car}(A_m) \leq 2^k[\sqrt{m}] \leq 2^k\sqrt{m}. \tag{9}$$

D'altra banda, $\{1, 2, \ldots, m\}\backslash A_m$, és un conjunt amb cardinal $m - \mathrm{Car}(A_m)$ i està format pels números menors o iguals que m que són divisibles per algun primer p_i amb $i > k$. Per cada i fixat, $i > k$, hi ha com a molt $[\frac{m}{p_i}]$ números dins d'aquest conjunt que són divisibles per aquest p_i. En conseqüència,

$$m - \mathrm{Car}(A_m) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\frac{m}{p_i}\right] \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{m}{p_i} = m \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{m}{2}, \tag{10}$$

on hem usat (8).

Per tant, a partir de (9) i (10) arribem a

$$\frac{m}{2} < \mathrm{Car}(A_m) \leq 2^k\sqrt{m}. \tag{11}$$

Si prenem qualsevol $m \geq 2^{2k+2}$, tenim que $\frac{\sqrt{m}}{2} \geq 2^k$ i, per tant, que $\frac{m}{2} \geq 2^k\sqrt{m}$, que està en contradicció amb (11). Per tant, $\sum\limits_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$ és divergent, tal com volíem provar. Com hem comentat a la introducció, això ens dóna la intuïció que hi ha una quantitat suficient de primers per a fer divergir la sèrie dels seus recíprocs.

3.3 Una curiositat sobre els h_n

Una propietat curiosa i coneguda dels números $h_n, n > 1$, és que en el seu camí cap a infinit mai passen per cap número natural, és a dir, $h_n \notin \mathbb{N}$, per $n > 1$.

Per a provar-ho, prenem la potència de 2 més gran que sigui menor o igual que n. És a dir, sigui $k \in \mathbb{N}$, tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. A continuació, anomenem m el mínim comú múltiple de $1, 2, ..., n$, traient aquest 2^k, $m = \mathrm{mcm}\left(\{1, 2, 3, \ldots, n\} \setminus \{2^k\}\right)$. Aleshores, $m = 2^{k-1}s$, amb $s \in \mathbb{N}$, senar, ja que el 2 apareix a les descomposicions dels números dels quals fem el mcm elevat com a màxim a $k - 1$. Tenim, doncs,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^k} = \frac{j}{2^{k-1}s}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Per tant,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{j}{2^{k-1}s} + \frac{1}{2^k}.$$

Multiplicant per $2^{k-1}s$ arribem a $2^{k-1}sh_n = j + \frac{s}{2}$. Com que s és senar, $2^{k-1}s \in \mathbb{N}$ i $j \in \mathbb{N}$, tenim que $h_n \notin \mathbb{N}$, com volíem demostrar.

4 Aplicacions de la sèrie harmònica

A la literatura hi ha diferents aplicacions de la divergència de la sèrie harmònica i també del coneixement de les seves sumes parcials h_n, vegeu, per exemple, [29, Cap. 13] o [63]. Moltes de les que recollim aquí tenen un caire probabilístic i es basen o bé en el càlcul de l'esperança d'una variable aleatòria o bé en el coneixement de la distribució geomètrica. Per això, abans de començar a descriure-les, dedicarem l'inici d'aquesta secció a fer un breu recordatori de les propietats que necessitem.

Recordem que, donada una variable aleatòria X, que pren només valors enters positius $k \in \mathbb{N}$, amb probabilitats respectives p_k, es defineix la seva esperança $E(X)$ com

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P\{X = k\},$$

sempre que la sèrie anterior sigui convergent. Si és divergent, es diu que X té esperança infinita. Així, per exemple, si X és el resultat de tirar un dau perfecte de sis cares, la probabilitat d'obtenir qualsevol dels sis resultats és $\frac{1}{6}$ i la seva esperança és $E(X) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$.

La Llei forta dels grans nombres de Kolmogórov (vegeu, per exemple, [56, 33]) implica que si tirem moltes vegades un dau i anem anotant els resultats obtinguts, la mitjana de les puntuacions s'acosta a 3.5, amb probabilitat 1. Així, intuïtivament, el valor esperat d'una variable aleatòria és aproximat per la mitjana dels resultats de repetir molts cops, i d'una manera independent, un mateix experiment aleatori.

Sigui U una variable aleatòria amb distribució de Bernoulli, que pren els valors $\{0, 1\}$ de manera que $P\{U = 1\} = p$, $P\{U = 0\} = q = 1 - p$, $p \in [0, 1]$. El valor 1 s'associa normalment al resultat que volem que surti i el valor 0, al no desitjat.

La variable aleatòria V que consisteix a agafar una successió U_1, U_2, ..., U_k, ... de variables aleatòries independents, totes amb la mateixa distribució que U i que pren el valor k quan totes les U_s amb $s < k$ han pres el valor 0 i U_k

ha pres el valor 1, s'anomena variable aleatòria amb distribució geomètrica. És clar que els valors que pren V són els enters positius, i per la independència de les U_k,

$$P\{V = k\} = p\,q^{k-1} = p_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Les sumes següents són ben conegudes

$$\sum_{k=1}^{\infty} p\,q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,p\,q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k\,q^{k-1} = p\frac{\partial}{\partial q}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\Big) = p\frac{\partial}{\partial q}\Big(\frac{1}{1-q}\Big) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p},$$

i tenen una interpretació probabilística ben clara. La primera ens diu que la suma de totes les probabilitats p_k és 1. La segona ens diu que l'esperança de la variable aleatòria V és $\frac{1}{p}$, és a dir,

$$E(V) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P\{V = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,p_k = \frac{1}{p}.$$

La interpretació d'aquest resultat és el que farem servir sistemàticament en els exemples que segueixen. De manera més informal, ens diu el següent: *Si, en fer un experiment aleatori, un cert succés passa amb probabilitat $p = \frac{1}{N}$ i anem repetint aquest experiment, cada cop de manera independent de totes les anteriors, el nombre esperat (mitjà) de vegades que l'hem de repetir perquè el succés desitjat ocorri és $\frac{1}{p} = N$.* Així, per exemple, si $p = \frac{1}{2}$, aquest número de vegades serà 2. Això, és clar, no vol dir que algun cop necessitem repetir-lo tres o quatre cops (penseu, per exemple, en llençar una moneda fins que surti cara) o fins i tot cent o mil cops, si és que tenim moltíssima mala sort! D'una manera semblant, si $p = \frac{1}{100}$ el número esperat de vegades serà 100.

4.1 El problema del col·leccionista

Aquest és un problema clàssic que s'explica a molts cursos de probabilitat (vegeu, per exemple, [20, 55]) i que va ser plantejat per primer cop l'any 1708 als estudis del matemàtic frances Abraham de Moivre (1667-1754).

Suposem que volem fer una col·lecció de N objectes diferents i els obtenim aleatòriament (per exemple comprant successivament paquets tancats que continguin un dels objectes). Cada paquet pot contenir qualsevol dels objectes amb la mateixa probabilitat $\frac{1}{N}$. Aleshores, la qüestió que es proposa és quin és el nombre esperat de paquets que hem de comprar per a poder acabar la col·lecció. Les aplicacions més famoses són les col·leccions de cromos o dels regals que apareixen a les capses de cereals. Observem el següent:

- El primer paquet que comprem segur que ens dóna un element de la col·lecció que no tenim.
- En comprar el segon paquet, la probabilitat de que contingui un element de la col·lecció que ens falta és $p = \frac{N-1}{N}$. Per tant, el nombre de paquets que hem de comprar per a obtenir aquest segon element, un cop ja tenim el primer objecte, és una variable aleatòria amb llei geomètrica de paràmetre $p = \frac{N-1}{N}$ i, per tant, el seu valor esperat serà $\frac{1}{p} = \frac{N}{N-1}$. Aleshores haurem de comprar en total $1 + \frac{N}{N-1}$ paquets per a tenir dos elements de la col·lecció.
- A continuació, la probabilitat que un element de la col·lecció que ens falta sigui en un paquet és $p = \frac{N-2}{N}$. Així, el nombre esperat de paquets que hem de comprar per a obtenir aquest tercer element un cop ja en tenim dos de diferents és $\frac{1}{p} = \frac{N}{N-2}$. Per tant, haurem de comprar

$$1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} = N\Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2}\Big)$$

  paquets per a tenir tres elements de la col·lecció.
- Si seguim així, és clar que un cop ja tenim $N-1$ elements de la col·lecció, la probabilitat d'obtenir l'últim és $p = \frac{1}{N}$, que necessita d'una compra (de mitjana) de N paquets més. Així, poder acabar la col·lecció requereix una compra mitjana de

$$1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \cdots + \frac{N}{2} + N = N\Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\Big),$$

  és a dir, Nh_N paquets. A la Taula 1 ja s'han mostrat alguns valors de h_n.

Com ja hem vist a la Secció 5, Euler va demostrar que per a n gran, $h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$. Així, per una col·lecció de 100 cromos, de mitjana un col·leccionista necessitaria comprar $100\, h_{100} \approx 57.7 + 200\ln(10) + \frac{1}{2} \approx 518.7 \approx 519$ cromos per a acabar la col·lecció.

4.2 Barrejant cartes

Una de les maneres més senzilles de barrejar N cartes seria seguir el mètode següent. Per a nosaltres, un moviment consistirà senzillament a agafar la carta de sobre i posar-la a l'atzar a qualsevol lloc dels de sota. El procediment de barrejar-les consisteix a fer successivament moviments d'aquest tipus. En aquest context, la pregunta natural és: *Quin és el nombre esperat de moviments que hem de fer per a assegurar (de mitjana) que tenim les cartes totalment barrejades?* Veurem que aquest número esperat és Nh_N.

Anomenem S la carta que a l'inici és sota la baralla. Quan fem el primer moviment, la probabilitat que la carta de sobre passi a sota és $\frac{1}{N}$. Per tant, tal com hem explicat a l'inici d'aquesta secció, el nombre esperat de moviments perquè això passi és N. A continuació, la probabilitat que la carta de sobre passi a ser a sota de S és ara $\frac{2}{N}$ i, com a conseqüència, el nombre esperat de moviments perquè S passi a ser al tercer lloc per sota de la baralla serà $N + \frac{N}{2}$. En aquesta situació, la probabilitat que la carta de sobre passi a ser a sota de S serà $\frac{3}{N}$, ja que ja pensem que hi ha dues cartes sota S. Per tant, el nombre esperat de moviments perquè S sigui la quarta per la cua serà $N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3}$. Observem que amb aquests tres moviments és raonable pensar que les tres cartes que hi ha per sota de S estan ben barrejades.

Raonant de la mateixa manera, el nombre esperat de moviments perquè S sigui sobre de la baralla és $N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \cdots + \frac{N}{N-1}$. Amb un moviment més, S es col·loca a l'atzar entre les $N-1$ cartes de sota. Per tant, el nombre esperat de moviments per a barrejar les N cartes és

$$N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \cdots + \frac{N}{N-1} + 1 = N\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\Big) = N\,h_N.$$

Per a una baralla de 48 cartes, $48h_{48} \approx 214.02$ i per a una de 52 cartes $52h_{52} \approx 235.98$.

4.3 Rècords

Aquest també és un problema clàssic tractat a molt llocs (vegeu, per exemple, [5, 7]). Donada una successió ordenada de variables aleatòries amb lleis contínues $\{X_k\}_{k\geq 1}$ independents i idènticament distribuïdes, ens interessem pel nombre esperat de rècords quan considerem les diferents successions de N números, $X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \ldots X_N(\omega)$. Aquí s'entén que $X_k(\omega)$ és un rècord si el seu valor és més gran que tots els anteriors de la successió.

La variable aleatòria Z que compta el nombre de rècords es pot construir com segueix.

En primer lloc, observem que les variables aleatòries $X_1, X_2, \ldots, X_k$ prenen valors diferents amb probabilitat 1 i, per tant, que hi ha $k!$ maneres diferents d'ordenar-les. Com que aquestes variables són independents i idènticament distribuïdes, la seva llei conjunta és simètrica. Aquesta simetria implica que totes les ordenacions són equiprobables. Si X_k és un rècord, les variables restants es poden ordenar de $(k-1)!$ maneres diferents, totes equiprobables. Per tant, la probabilitat que X_k sigui un rècord és $p_k = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$.

A continuació, considerem la nova variable aleatòria de Bernoulli Y_k, que val 1 si X_k és un rècord i val 0 en cas contrari. Aquesta pren el valor 1 amb probabilitat $\frac{1}{k}$ i el valor 0 amb probabilitat $1 - \frac{1}{k}$.

Aleshores, $Z = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$. Per tant, com que $E(Y_k) = 1 \cdot \frac{1}{k} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$,

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_N) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} = h_N. \end{aligned} \tag{12}$$

S'ha comprovat en molts casos que el resultat anterior s'adequa perfectament a dades meteorològiques. Així, per exemple, a [7, 8] s'usa per a veure que els rècords de pluja caiguda a Barcelona el 17 d'octubre durant el període 1900-2006 i també els de pluja caiguda a Palma de Mallorca els mesos de febrer i octubre de 1862 a 2006 compleixen el resultat predit per (12).

A [39] és fa el mateix, recollint dades de la neu caiguda en un aeroport de Chicago durant el període 1960-2004 o amb el nombre anual rècord de tornados a Illinois entre 1956 i 2004. Per exemple, en aquests 49 anys, els rècords del nombre de tornados van ser durant els anys 1956 (el primer any sempre és un rècord), 1957, 1973, 1974 i 2003, és a dir 5 records, i $h_{49} \approx 4.479$.

Observeu que en aquest darrer cas, en el qual es compta el nombre anual de tornados, les variables aleatòries X_k són discretes, ja que prenen només valors naturals. Aleshores, s'hauria de tenir en compte també la possibilitat que dues d'elles coincideixin, ja que té probabilitat positiva. El model es pot modificar sense problemes perquè tingui en consideració aquest fet. De totes maneres, com hem vist a l'exemple, si el rang de X_k és prou ampli (hi ha anys amb més de 100 tornados), el mateix model dóna resultats raonables.

Fins ara hem pensat que tots els rècords són tals que $X_k(\omega)$ és més gran que tots els anteriors termes de la successió. És clar que la mateixa teoria es pot aplicar quan $X_k(\omega)$ és més petit que tots els anteriors. De fet, això ja es fa als treballs [7, 8] estudiant també els rècords amb menys pluviositat. L'exemple següent aprofitarà de nou aquest fet.

4.4 Cues en un túnel

En aquest exemple estudiarem el trànsit en un túnel o un pont, prou llargs i amb un sol carril, en el qual és impossible fer avançaments. Suposarem també que hi entren N cotxes, amb N prou gran, i que les velocitats de tots els cotxes són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes.

En la situació descrita, el fet que hi hagi un rècord amb mínima velocitat provoca que darrere d'aquest cotxe es faci automàticament una petita cua formada per un bloc de cotxes que l'hauria avançat si la carretera ho hagués permès. El bloc de cotxes següent no es forma fins que no apareix un altre vehicle que va a una velocitat inferior a la del primer vehicle. Per tant, raonant com a l'exemple anterior, de mitjana es formen h_N blocs de cotxes, que es van separant més i més conforme van avançant en el túnel. Si hi ha 100 vehicles circulant, el nombre de blocs esperat serà 5.2. Aquest resultat s'observa en situacions reals de conducció.

4.5 Un problema de control de qualitat

Suposem que volem veure la resistència per trencament d'una gran remesa de bigues de fusta. Per a conèixer la força que aguanta una biga, la recolzem pels seus extrems i apliquem una força F de manera contínua, i cap a vall, al seu punt mitjà, just fins que es trenca (vegeu la Figura 2).

Una manera d'estimar la resistència esperada de totes les bigues podria ser agafar-ne unes quantes a l'atzar, diguem $N = 100$, i anar fent la prova per a cadascuna fins que es trenquin. D'aquesta manera, el mínim dels valors F_k, $k = 1, 2 \ldots, N$ ens donaria una bona estimació de la força que aguantarien totes les bigues de la remesa. El problema és que n'hauríem trencat N.

Una manera més intel·ligent d'obtenir el mateix resultat, però trencant moltes menys bigues, és la que descriurem a continuació ([29]). Agafem la primera biga i anem augmentant F fins que es trenqui. Aleshores tenim ja un primer rècord, diguem-ne F_1. A continuació agafem una segona biga i anem

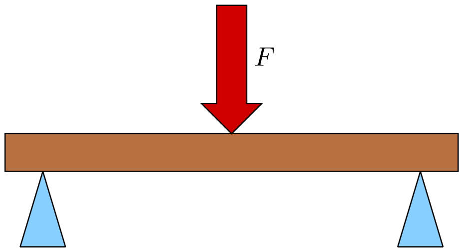


Figura 2: Control de trencament.

augmentant la força, o bé fins que es trenqui, o bé fins a arribar a F_1. Si no es trenca, la retirem i fem el mateix amb les següents. Quan una es trenqui abans d'arribar a F_1, tindrem un segon rècord, diguem-ne F_2. A continuació, procedim de la mateixa manera, però prenent com a força límit F_2. Si fem això fins a arribar a la N-èsima biga, el nombre esperat de bigues trencades serà només $h_N = h_{100} \approx 5.2$.

Tot i que podria passar que tinguéssim tanta mala sort que agaféssim les bigues de manera que cadascuna tingués menys resistència que l'anterior, això té una probabilitat petitíssima. Per tant, amb aquest mètode, de mitjana només trencarem unes sis bigues i obtindrem la mateixa informació. Si volguéssim fer el mateix test amb mil bigues, de mitjana només n'acabaríem trencant $h_{1000} \approx 7.5$.

Observem que amb el nou mètode només podem estimar la resistència per trencament de les bigues, però no podríem estimar quin és el valor mitjà de la F que les trenca. Per saber això, no ens quedaria cap més remei que trencar-ne N.

4.6 El passeig aleatori al pla

Considerem la retícula $\mathbb{Z}^2$ del pla. Suposem que estem a l'origen $(0,0)$ i tirem un dau de quatre cares per a saber si anem amunt, avall, a la dreta o a l'esquerra. Per tant, amb probabilitat $\frac{1}{4}$ estarem en un dels quatre punts contigus a l'origen: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ i $(0,-1)$. Si fem això indefinidament, continuant cada cop al lloc on ens ha deixat el moviment anterior, la pregunta és si podem assegurar que tornarem a l'origen.

Anomenen p_k la probabilitat de tornar a l'origen després d'haver tirar el dau k vegades (independentment de si és el primer cop que tornem o no) i q_k la probabilitat de tornar per primer cop després de tirar exactament k vegades el dau. És clar que es compleix que $p_{2k+1} = q_{2k+1} = 0$. Amb una

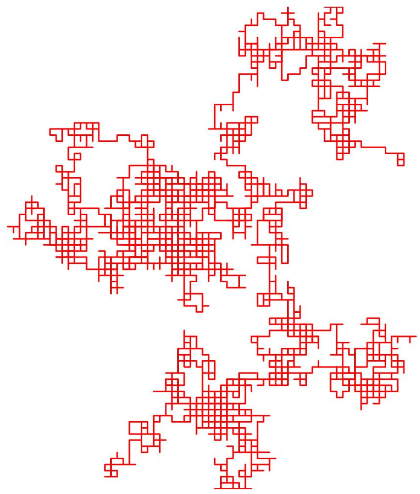


Figura 3: Passeig aleatori al pla.

mica de feina (vegeu, per exemple, [9]) es pot demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{2k}}{\frac{1}{k}} = C \neq 0,\ C \in \mathbb{R}, \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1 - \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k}.$$

Per tant, el fet que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}$ es comporti com la sèrie harmònica, que és divergent, ens assegura $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$, és a dir, que la probabilitat de retorn a l'origen és 1. De fet, es pot veure que la probabilitat de tornar-hi infinites vegades també és 1. Atesa aquesta propietat, es diu que el passeig aleatori al pla és *recurrent*.

D'una manera similar es por veure que en una xarxa 1-dimensional (els punts són $\mathbb{Z}$ dins de la línia real i anem cap al punt de la dreta o al de l'esquerra amb probabilitat $\frac{1}{2}$) les p_{2k} es comporten com $\frac{1}{\sqrt{k}}$, que també dóna lloc a una sèrie divergent. De nou, la probabilitat de retorn a la posició inicial és 1 i tenim un passeig aleatori recurrent.

D'altra banda, en una xarxa 3-dimensional, p_{2k} és com $\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ i, per tant, la sèrie associada és convergent. De fet, en dimensió 3, la probabilitat que un passeig aleatori retorni a l'origen és només de $0.34\ldots$ ([9, 45]). És mala idea perdre's a l'espai!

Va ser el matemàtic hongarès George Pólya (1887-1985) qui, el 1921, va demostrar, per primer cop, que en dimensions 1 i 2 el passeig aleatori retorna amb probabilitat 1 a l'origen mentre que això ja no succeeix en dimensions superiors (vegeu, per exemple, [19]).

4.7 El problema de la secretària

Aquest és també un problema ben clàssic que usa la teoria de la probabilitat per a proposar una bona estratègia per a triar el “millor” candidat entre una quantitat N de persones per a fer una determinada tasca. Tot i que el bategem pel seu nom clàssic, aquest problema té moltíssimes altres aplicacions, com per exemple per la tria de parella, restaurant, aparcament per al cotxe,... (vegeu [29, 60]).

La situació és la següent: Hi ha N persones (o objectes, o situacions) i hem de triar la “millor” per als nostres interessos. Aquestes persones arriben a nosaltres per ordre, i podem obtenir tota la informació que vulguem sobre elles. Aleshores hem de decidir si triem aquesta persona o no. Si no la triem, ja no tenim la possibilitat de tornar a contactar amb ella i passem a entrevistar la següent. La pregunta és: *Quina és l'estratègia que hem de seguir per a augmentar la probabilitat de triar la millor?* Observem que, si triem una persona a l'atzar, la probabilitat que sigui la millor és $\frac{1}{N}$.

Per això es proposa l'estratègia següent, que anomenarem l'estratègia “r”. Consisteix a fer el següent: *Entrevistem les r primeres persones, $r \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ i ens quedem amb la primera de les restants que és millor que les r primeres, o amb l'última si cap ho compleix.* Com veurem a continuació, el càlcul del valor de la millor estratègia, que serà quan r val un cert valor $r = R = R(N)$, ens proporcionarà una petita sorpresa.

Anomenem A el succés “triar el millor candidat”, i B_i el succés “el millor candidat és al lloc i-èsim”, $1 \le i \le N$. Calcularem la probabilitat $P_r(A)$ que passi A si apliquem l'estratègia “r”. Tenim que

$$\begin{aligned} P_r(A) &= \sum_{i=1}^{N} P_r(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{N} P_r(A \,/\, B_i) P_r(B_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_r(A \,/\, B_i) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=r+1}^{N} P_r(A \,/\, B_i), \end{aligned}$$

on hem usat els fets següents:

- El valor $P_r(A \,/\, B_i)$ indica la probabilitat que succeeixi A suposant que el millor candidat és al lloc i-èsim.
- Es compleix que $P_r(B_i) = \frac{1}{N}$, ja que la probabilitat que el millor candidat sigui al lloc i-èsim és la mateixa per a tots els valors d'i, i lògicament

no depèn de l'estratègia "r".

- L'estratègia "r" fa que mai triem cap dels r primers candidats. Per tant, $P_r(A\,/\,B_i) = 0$ per $i \le r$.

De fet, la fórmula que hem usat per a calcular $P_r(A)$ és la que s'anomena *fórmula de les probabilitats totals*. Per acabar el nostre càlcul només ens falta obtenir $P_r(A\,/\,B_i)$ per $i > r$.

Clarament, $P_r(A\,/\,B_{r+1}) = 1$ ja que si el millor candidat és al lloc $r+1$, l'hem triat segur, perquè en particular és millor que els r primers.

D'una manera similar, $P_r(A\,/\,B_{r+2}) = \frac{r}{r+1}$, ja que només en el cas que el millor dels $r+1$ primers candidats sigui al lloc $r+1$, no l'hem triat, i aquest cas té probabilitat $\frac{1}{r+1}$. Així mateix, si $i > r+2$,

$$P_r(A\,/\,B_i) = \frac{r}{i-1},$$

atès que, en aquesta situació, els casos favorables són que entre els $i-1$ primers candidats el millor estigui a les r primeres posicions (així, els candidats $r+1, r+2, \dots, i-1$, són tots pitjors que el millor dels r primers). És a dir, $P_r(A\,/\,B_i) = \frac{r}{i-1}$, $i = r+1, r+2, \dots, N$.

Per tant, $P_r(A)$, que denotarem també com a $p(N,r)$, val

$$\begin{aligned} p(N,r) := P_r(A) &= \frac{1}{N}\sum_{i=r+1}^{N} \frac{r}{i-1} \\ &= \frac{1}{N}\Big(1 + r\Big(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \frac{1}{N-1}\Big)\Big) = \frac{1}{N}\Big(1 + r\big(h_{N-1} - h_r\big)\Big). \end{aligned} \tag{13}$$

Per acabar l'estudi, només ens falta saber, per a cada N fixat, per a quin valor $r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ la funció $r \to p(N,r)$ té un màxim. Aquest és un problema discret, que per a N petit es pot resoldre directament calculant quin dels N possibles valors de r dóna el màxim. Per exemple, a la Figura 4 mostrem els valors per $N = 20$. En aquest cas, l'òptim es dóna per $r = R = 7$ i $p(20,7) \approx 0.384$.

Per tant, hem vist que, si $N = 20$ i si triem el primer candidat que sigui millor que els set primers, en un 38.4% dels casos ens quedaríem amb el millor candidat; una gran millora respecte al 5% que s'obtindria si triéssim el candidat a l'atzar.

Veiem per acabar, i usant un cop més el resultat d'Euler que ens assegura que, per a n prou gran, $h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$, que hi ha una manera analítica prou satisfactòria per a trobar una expressió explícita del valor $r = R(N)$

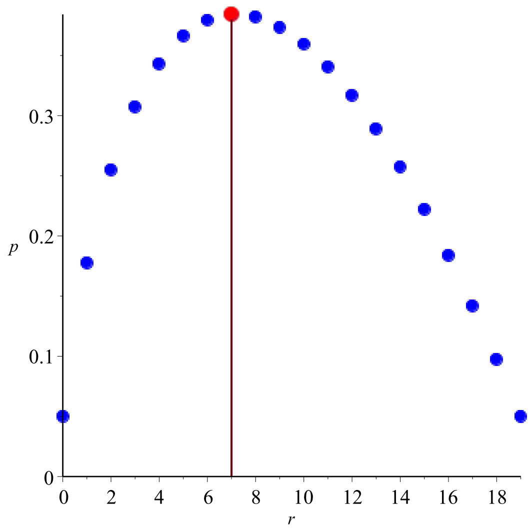


Figura 4: Valors $p(20, r)$ per $r = 0, 1, \ldots, 19$.

que fa màxima la probabilitat $p(N, r)$. Usant el resultat esmentat d'Euler i (13) tenim que per r prou gran,

$$\begin{aligned} p(N,r) &= \frac{1}{N}\Big(1 + r\big(h_{N-1} - h_r\big)\Big) \\ &\approx \frac{1}{N}\Big(1 + r\Big(h_{N-1} - \Big(\gamma + \ln(r) + \frac{1}{2r}\Big)\Big)\Big) =: \widehat{p}(N,r). \end{aligned}$$

A continuació, fixat N, per a trobar una aproximació del màxim de $p(N, r)$ el que fem és buscar el màxim de la seva aproximació $\widehat{p}(N, r)$. Per això, resolem l'equació

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{p}(N,r) = \frac{1}{N}\Big(h_{N-1} - \gamma - \ln(r) - 1\Big) = 0.$$

Així, el màxim de $\widehat{p}(N, r)$ està a $r = \widehat{R}$, on

$$\begin{aligned} \widehat{R} &= \mathrm{e}^{h_{N-1}-\gamma-1} \approx \mathrm{e}^{\left(\ln(N-1)+\frac{1}{2(N-1)}-1\right)} = \frac{(N-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{2(N-1)}}}{\mathrm{e}} \\ &\approx \frac{(N-1)\big(1+\frac{1}{2(N-1)}\big)}{\mathrm{e}} = \frac{N-\frac{1}{2}}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Notem que hem usat de nou el resultat d'Euler per a aproximar h_{N-1} i també que $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ per $x \approx 0$.

N	5	10	20	50	100	1000
$R(N)$	2	3	7	18	37	368
$p(N,R(N))$	0.433	0.399	0.384	0.374	0.371	0.368
$[[N/\mathrm{e}]]$	2	4	7	18	37	368
$1/\mathrm{e}$	0.368					

Taula 2: Valors de $R(N)$, $P(N,R(N))$ i els corresponents valors estimats, $[[N/\mathrm{e}]]$ i $1/\mathrm{e}$ per a certs valors de N.

Per tant, aquesta aproximació ens diu que l'estratègia òptima seria prendre com a R el número $\left[\left[\frac{N-\frac{1}{2}}{\mathrm{e}}\right]\right]$, on el doble claudàtor denota l'enter més proper a $\frac{N-\frac{1}{2}}{\mathrm{e}}$. A tots els materials consultats se sol a prendre com a estratègia òptima $R = \left[\left[\frac{N}{\mathrm{e}}\right]\right]$, ja que la diferència entre ambdós és prou petita. Observem que, per a aquest valor de R,

$$p(N,R) \approx p(N,\widehat{R}) \approx \widehat{p}(N,\widehat{R}) = \frac{\widehat{R}+\frac{1}{2}}{N} \approx \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Així, per a N prou gran, l'estratègia proposada prenent $r = R = \left[\left[\frac{N}{\mathrm{e}}\right]\right]$, permet triar el millor candidat amb probabilitat aproximada $\frac{1}{\mathrm{e}}$, és a dir, amb èxit, en un 36.79% dels casos. A la Taula 2 veiem per a uns quants valors de N la diferència entre el resultat que acabem d'obtenir i aquell al qual s'arriba fent l'estudi directe de la funció cas per cas. Com es pot observar, per a N gran, ambdós resultats són indistingibles.

4.8 Un algoritme d'ordenació

L'algoritme QUICKSORT va ser proposat per l'informàtic britànic C. A. R. Hoare, l'any 1959 i és, en mitjana, un dels millors per a reordenar N quantitats quan N és gran. Anem a descriure'l i a veure que tot i que de vegades pot necessitar un número de comparacions d'ordre $\frac{N^2}{2}$, en mitjana només en necessita $2N\ln(N)$. Un cop més els valors h_N i les seves aproximacions ens apareixeran en el procés.

Donats N elements que s'han d'ordenar es repeteixen els passos següents:

1. S'en tria un a l'atzar. Anomenem r al lloc que ocupa a la llista ordenada, $1 \leq r \leq N$. A priori no coneixem aquest r.

2. Es compara cadascun dels $N-1$ elements restants amb aquest. Els menors es col·loquen a l'esquerra d'aquest (n'hi ha $r-1$) i els majors a

la dreta (n'hi ha $N-r$). Obtenim dues piles amb $r-1$ i $N-r$ objectes que estan en principi desordenats ja que no s'ha fet cap comparació entre ells.

3. S'agafa cadascuna de les piles amb $r-1$ i $N-r$ objectes i es procedeix de la mateixa manera, començant al pas **1**, a no ser que algun dels valors r o $N-r$ sigui 1. En aquests casos, la corresponent branca del algoritme s'atura.

Anem a veure quin és el temps mitjà que necessitarà l'algorisme per a ordenar els N elements. Normalitzarem a 1 els temps usat per a comparar dos elements i col·locar el més gran (o el mes petit) a la dreta (o a l'esquerra) de l'altre. També assignarem temps 1 a procés de triar a l'atzar un element d'una llista.

Per a matematitzar l'algoritme anem a definir dues variables aleatòries. La primera, X_N, ens mesura "el temps necessari per a ordenar N objectes seguint l'algoritme proposat". Observem que el seu valor depèn de les tries (aleatòries) dels successius valors de r que apareixen en l'algoritme. La segona, Y_N ens diu "quin lloc ocupa l'element escollit en la llista ordenada dels N objectes". La variable aleatòria X_N pren valors a $\mathbb{R}$ mentre que la segona pren valors a $\{1, 2, \ldots, N\}$, cadascun d'ells amb probabilitat $\frac{1}{N}$.

Anomenarem T_N a l'esperança de X_N, és a dir $T_N = E(X_N)$. Tenim les igualtats següents

$$\begin{aligned}
T_N = E(X_N) &= \sum_{k=1}^{N} E\big(X_N \,/\, Y_N = k\big) P\big(Y_N = k\big) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Big(E\big(X_N \,/\, Y_N = k\big)\Big) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Big(N + E(X_{k-1}) + E(X_{N-k})\Big) \\
&= N + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Big(T_{k-1} + T_{N-k}\Big) = N + \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_k.
\end{aligned}$$

El punt clau en la cadena d'igualtats anterior és que el pas **2** ens diu, que un cop sabem que hem triat l'element k-èsim de la llista, aleshores el temps esperat que necessitarem per a ordenar-la tota és la suma dels temps esperats per a ordenar piles de mides $k-1$ i $N-k$, que són T_{k-1} i T_{N-k}, respectivament, més N, que correspon a les $N-1$ comparacions per a fer dos piles del pas, més 1, que correspon a la primera tria. Per tant, $E\big(X_N \,/\, Y_N = k\big) = N + T_{k-1} + T_{N-k}$.

La relació anterior i la corresponent per $N-1$ s'escriuen com

$$NT_N = N^2 + 2\sum_{k=0}^{N-1} T_k \quad \text{i} \quad (N-1)T_{N-1} = (N-1)^2 + 2\sum_{k=0}^{N-2} T_k.$$

Restant-les, arribem a $NT_N - (N-1)T_{N-1} = 2N - 1 + 2T_{N-1}$, o equivalentment,

$$NT_N = (N+1)T_{N-1} + 2N - 1.$$

A més, els primers termes de la recurrència anterior són $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, ...

Per tal de trobar una expressió explícita de T_N introduïm el canvi de variable $S_k = \frac{T_k}{k+1}$. Aleshores la recurrència s'escriu com

$$S_N = \frac{T_N}{N+1} = \frac{T_{N-1}}{N} + \frac{2N-1}{N(N+1)} =: S_{N-1} + c_N, \quad S_0 = \frac{T_0}{1} = 0.$$

Aquesta segona recurrència és fàcil de resoldre ja que

$$\begin{aligned} S_N &= S_{N-1} + c_N = \Big(S_{N-2} + c_{N-1}\Big) + c_N = \Big(\big(S_{N-3} + c_{N-2}\big) + c_{N-1}\Big) + c_N \\ &= \cdots = S_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k = \sum_{k=1}^{N} c_k. \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=1}^{N} c_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{2k-1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{3}{k+1} - \frac{1}{k}\Big) = 3\big(h_{N+1} - 1\big) - h_N \\ &= 3\Big(\frac{1}{N+1} + h_N - 1\Big) - h_N = 2h_N + \frac{3}{N+1} - 3. \end{aligned}$$

Finalment, usant un cop més (18) tenim que

$$\begin{aligned} T_N &= (N+1)S_N = 2(N+1)h_N - 3N \approx 2(N+1)\Big(\gamma + \ln(N) + \frac{1}{2N}\Big) - 3N \\ &= 2(N+1)\ln(N) + (2\gamma - 3)N + \frac{N+1}{N} + 2\gamma \approx 2N\ln(N), \end{aligned}$$

tal i com volíem veure.

És clar que si tenim mala sort en la tria dels elements r-èsims de l'algoritme, el temps per a ordenar N elements és més gran. Així la pitjor situació és que, a cada pas, l'element que triem sempre sigui el primer de la llista. Aleshores hauríem de fer

$$N + (N-1) + (N-2) + \cdots + 2 = \frac{(N+2)(N-1)}{2} \approx \frac{N^2}{2}$$

comparacions, és a dir $X_N \approx \frac{N^2}{2}$. Prenent com a unitat de temps 10^{-6} segons, observem que si $N = 10^6$,

$$\frac{N^2}{2} \times 10^{-6}\,\text{segons} \approx 5.8\,\text{dies} \quad \text{i} \quad 2N\ln(N) \times 10^{-6}\,\text{segons} \approx 0.46\,\text{minuts},$$

i per tant el temps mitjà és molt inferior a la pitjor situació possible.

Per tal de disminuir les possibilitats de que aquesta es doni, hi ha una modificació usada habitualment, i que no canvia essencialment el número esperat de comparacions de l'algoritme, que consisteix en substituir el pas **1** per un de similar:

1'. Es trien 3 elements a l'atzar d'entre els N. El que està entre mig dels tres és el que dona lloc al valor r.

4.9 Creuant el desert

Exposarem aquí la versió del problema seguint [29]. Suposem que volem creuar un desert de mida d amb un jeep que funciona amb combustible (no elèctric) i que té una autonomia que li permet recórrer exactament una distància 1 (és a dir, prenem com a unitat de mesura de distàncies l'autonomia d'un jeep). Per a fer-ho disposem de tants jeeps i conductors com necessitem. L'objectiu és que, al final de tots els moviments dels jeeps, un d'ells hagi creuat el desert i els altres hagin pogut tornar al seu punt de partida, és a dir, ni cap jeep ni cap conductor poden quedar perduts al mig desert.

La pregunta és si és possible fer-ho i, si és que sí, quants jeeps necessitarem? Hi ha altres versions, igualment interessants del problema, en les quals només hi ha un jeep involucrat, però que permeten deixar dipòsits durant el camí. No les considerarem aquí, però admeten un tractament similar.

Vegem primer quan hauria de ser com a molt d per a poder travessar-lo amb dos jeeps, seguint les regles donades. Els dos jeeps J_1 i J_2 recorren $\frac{1}{3}$. Aleshores, el jeep J_2 dóna $\frac{1}{3}$ del seu combustible a J_1 i torna al punt de sortida. Per tant, J_1 pot recórrer una distància màxima de $\frac{1}{3} + 1$.

Si comencem amb tres jeeps, fem el següent. Els tres recorren primer $\frac{1}{5}$. Aleshores, J_3 dóna $\frac{1}{5}$ del seu combustible a J_1 i un altre $\frac{1}{5}$ a J_2. Per tant, a distància $\frac{1}{5}$ de la base de partida hi ha els tres jeeps, J_1, J_2 i J_3, amb capacitats de recórrer distàncies respectives 1,1 i $\frac{2}{5}$. Continuant com en el cas de dos jeeps obtenim que J_1 pot recórrer $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1$ i J_2 pot tornar, arribant ja sense combustible, on l'espera J_3 amb $\frac{2}{5}$ de combustible. Els dos se'l reparteixen per a tornar a la base.

Raonant de la mateixa manera és clar que, amb N jeeps, el primer podrà recórrer

$$s_N = \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N-3} + \cdots + \frac{1}{3} + 1.$$

El procés començaria amb els N jeeps recorrent $\frac{1}{2N-1}$, i el jeep J_N quedant-se amb $\frac{N-1}{2N-1}$ del seu combustible i donant $\frac{1}{2N-1}$ parts a cada un dels jeeps $J_1, J_2, \ldots, J_{N-1}$ i continuaria d'una manera semblant amb els $N-1$ jeeps amb el dipòsit ple que estarien ja a distància $\frac{1}{2N-1}$ de la base. És clar que $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ i que, per tan, qualsevol desert pot ser creuat si N és prou gran.

Per acabar, vegem com obtenir la relació entre el N que necessitem i d en termes de certs h_j. Observem primer que

$$\begin{aligned} h_{2N} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2N} \\ &= \Big(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2N-1}\Big) + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2N}\Big) \\ &= s_N + \frac{1}{2} h_N. \end{aligned}$$

Per tant, $s_N = h_{2N} - h_{\frac{N}{2}}$. Usant de nou que per a n prou gran $h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$, tenim que

$$s_N \approx \Big(\gamma + \ln(2N) + \frac{1}{4N})\Big) - \frac{1}{2}\Big(\gamma + \ln(N) + \frac{1}{2N})\Big) = \frac{\gamma + \ln(4N)}{2}.$$

Igualant s_N amb d i aïllant tenim que $N \approx \mathrm{e}^{\frac{2d-\gamma}{4}}$. Per tant, si $d = 5$, el nombre de jeeps que necessitaríem sera $\mathrm{e}^{\frac{10-\gamma}{4}} \approx 3091.74$. De fet $s_{3092} \approx 5.000042$.

4.10 Torres amb molta volada

En aquest exemple final mostrarem una construcció en forma de torre, curiosa i ben coneguda amb N peces amb forma de dòmino. En aquesta torre, el que es vol és que, prenent N prou gran, i només tenint en compte la força de la gravetat, la torre sigui estable i la peça de dalt s'allunyi cap a una banda, i tant com vulguem, respecte a la que hi ha a la base. La torre de la portada n'és un exemple. Aquestes construccions han estat estudiades a molt llocs (vegeu, per exemple, [26, Sec. 6.3] o [28, 50] i les seves referències).

No és restrictiu pensar que totes les peces tenen longitud 2 i pes 1. L'amplada no jugarà cap paper i l'alçada tampoc, però la pensarem bastant més petita que 2. Si agafem només una o dues peces, les torres buscades són les que es mostren a la Figura 5. Vegem en primer lloc que la figura amb dues peces és estable calculant el seu centre de masses (cdm) i veient que cau sobre de la taula. És convenient agafar com a $x = 0$ el cdm de la peça de sobre. Aleshores, el cdm de la torre se situa a x igual a

$$\frac{-1 \times 1 + 0 \times 1}{1+1} = -\frac{1}{2},$$

que correspon precisament a l'extrem dret de la taula. El vol total de la torre és $h_2 = 1 + \frac{1}{2}$.

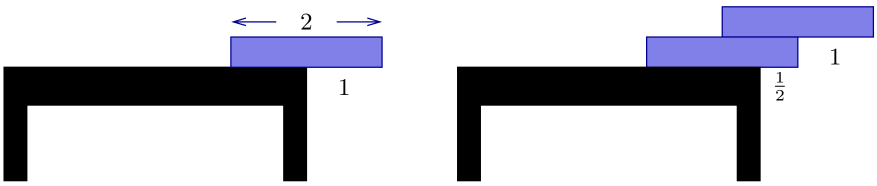


Figura 5: Torres amb una o dues peces.

Calculem, quan agafem tres o quatre peces, els cdm de les dues construccions de la Figura 6. De nou suposarem que $x = 0$ és al cdm de la peça de sobre. Aquests cdm estan situats als valors de x,

$$\frac{0 - 1 - (1 + \frac{1}{2})}{3} = -\frac{h_1 + h_2}{3} \text{ i}$$
$$\frac{0 - 1 - (1 + \frac{1}{2}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{4} = -\frac{h_1 + h_2 + h_3}{4},$$

respectivament. Com veurem a continuació, $-\frac{h_1+h_2}{3} = 1 - h_3$ i $-\frac{h_1+h_2+h_3}{4} = 1 - h_4$. Per tant, en ambdós casos, de nou el cdm coincideix amb l'extrem dret de la taula.

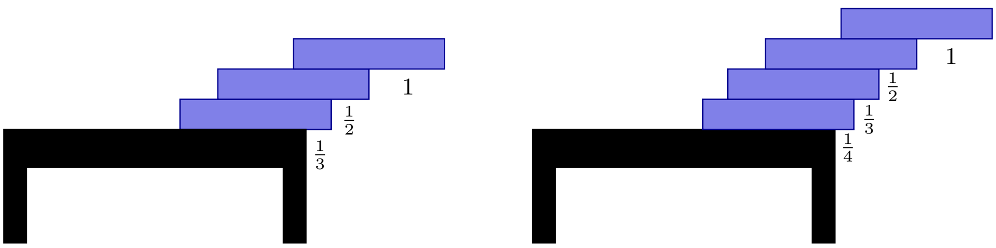


Figura 6: Torres amb tres o quatre peces.

En general, quan prenem N peces, i agafant com sempre $x = 0$ en el cdm de la peça de sobre, tenim que els cdm de les altres peces són a $-h_1$, $-h_2, \ldots, -h_{N-1}$. Per tant, el cdm de la torre està situat a x igual a

$$-\frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_{N-1}}{N} = 1 - h_N.$$

Mirem de provar aquesta última igualtat per inducció. La igualtat és equivalent a demostrar $h_1 + h_2 + \cdots + h_{N-1} = Nh_N - N$. Ara bé, $h_1 = 2h_2 - 2$, i suposant-la certa per a $N-1$, tenim

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + \cdots + h_{N-1} + h_N &= Nh_N - N + h_N = (N+1)h_N - N \\ &= (N+1)\Big(h_{N+1} - \frac{1}{N+1}\Big) - N \\ &= (N+1)h_{N+1} - (N+1), \end{aligned}$$

tal com volíem veure.

Així, hem provat que amb N peces podem construir una torre "harmònica" de manera que l'última peça "vola" una distància h_N i s'allunya de la que hi ha a la base h_{N-1}. La divergència de la sèrie ens prova que agafant N prou gran podem volar tant com vulguem!

Hi ha un problema d'optimització molt interessant que consisteix a aconseguir que la torre voli el màxim possible respecte de la taula, però sense la condició que la peça més allunyada sigui la superior. Aleshores les construccions es fan d'una manera totalment diferent, vegeu [50]. Com hem vist per tres i quatre peces, les construccions "harmòniques" volen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \approx 1.83$ i $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \approx 2.083$, respectivament. Les solucions òptimes volen 2 i $\frac{15-4\sqrt{2}}{4} \approx 2.34$ i són força divertides de trobar.

5 Reordenacions de la sèrie harmònica alternada i prova del Teorema de Pringsheim

Per tal de provar el Teorema de Pringsheim, necessitem introduir en primer lloc la constant d'Euler. Euler, el 1731, va provar que

$$\lim_{n\to\infty} \big(h_n - \ln(n)\big) = \gamma \in [0,1), \tag{14}$$

on γ és precisament el número que avui en dia anomenem constant d'Euler i que és una de les constants més famoses a matemàtiques, vegeu [29, 40]. El seu valor és $\gamma \approx 0.577218$. També s'anomenada constant d'Euler-Mascheroni, ja que Mascheroni la va calcular l'any 1790 amb dinou xifres decimals correctes. L'any 1812, Gauss la va obtenir amb quaranta xifres significatives. Avui encara no se sap si γ és racional o irracional. Altres expressions de γ que es donen [29, 40], i que no són gens evidents, són

$$\gamma = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} \quad \text{on} \quad \zeta(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^n},$$

o

$$\gamma = -\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln(x)\, dx = \int_0^{\infty} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \Big)\, dx = \int_0^1 \Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\ln(x)} \Big)\, dx.$$

Per a demostrar que el límit (14) existeix, provarem que la successió $\gamma_n = h_n - \ln(n)$ és decreixent i que esta fitada inferiorment. Així,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n = h_{n+1} - h_n - \ln(n+1) + \ln(n) &= \frac{1}{n+1} + \ln\Big(\frac{n}{n+1}\Big) \\ = \frac{1}{n+1} + \ln\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) &= \varphi\Big(\frac{1}{n+1}\Big) < 0, \end{aligned}$$

on l'últim pas és degut a que per $x \in (0,1)$, $\varphi(x) = x + \ln(1-x) < 0$. Aquesta desigualtat es compleix ja que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ i $\varphi''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} < 0$.

Per tant $\gamma_{n+1} < \gamma_n$ tal i com volíem veure.

Anem ara a veure que $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ és una successió fitada. Per això observem que

$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} < \frac{1}{k-1},$$

ja que per t a l'interval $(k-1, k)$ és compleix que $\frac{1}{k} < 1/t < \frac{1}{k-1}$. Aleshores, sumant les anteriors desigualtats per $k = 1, 2, \ldots, n$, obtenim

$$h_n - 1 < \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n) < h_{n-1}. \qquad (15)$$

Així, $h_n - 1 < \ln(n) < h_{n-1}$, o equivalentment, $h_n - 1 < \ln(n) < h_n - \frac{1}{n}$. D'on, restant $\ln(n)$, deduïm que $\gamma_n - 1 < 0 < \gamma_n - \frac{1}{n}$. És a dir, $\frac{1}{n} < \gamma_n < 1$, tal i com volíem demostrar. Per tant, com $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ és decreixent i fitada, el seu límit existeix, i si l'anomenem γ, tenim que $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma < 1$.

En el que segueix de vegades no necessitarem saber el valor concret de γ, sinó només la seva existència. Ens serà molt útil escriure la següent expressió equivalent a (14),

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + R(n), \quad \text{amb} \quad \lim_{n\to\infty} R(n) = 0. \qquad (16)$$

La funció $R(n)$ mesura la velocitat amb la que $\ln(n)+\gamma$ s'acosta als h_n. Demostrarem a continuació un refinament de (16) degut a Young ([62]),

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq h_n - \ln(n) - \gamma \leq \frac{1}{2n}, \tag{17}$$

seguint el mètode introduït a [30], que usa les anomenades sèries telescòpiques.

Recordem que una sèrie telescòpica és una sèrie de la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ amb $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Per a aquestes sèries,

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_{n+1}) = (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_N-a_{N+1}) = a_1 - a_{N+1}.$$

Per tant, $S=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = \lim_{N\to\infty}(a_1 - a_{N+1}) = a_1$. Observeu que les sumes parcials es pleguen com un telescopi!

A partir de les dues desigualtats de (17) no és difícil provar la següent millora de (16),

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + R_2(n), \quad \text{amb} \quad \lim_{n\to\infty} nR_2(n) = 0, \tag{18}$$

que és la que usem en aquest treball.

Comencem a continuació la prova de (17). N. Mercator el 1668 va donar el següent desenvolupament per la funció $\ln(1+x)$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \cdots, \tag{19}$$

i va demostrar que és vàlid per $x \in (-1,1]$. De fet, la sèrie obtinguda per Mercator és un cas particular del que avui en dia es coneix com a sèrie de Taylor, en honor al matemàtic anglès Brook Taylor (1685-1731).

Si prenem $n \geq 1$, i $x = -\frac{1}{n+1}$ arribem a

$$\begin{aligned}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) &= -\ln\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\frac{1}{4(n+1)^4}+\cdots\end{aligned} \tag{20}$$

Com a primer pas per a provar (17), anem a demostrar que

$$\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)} < \gamma_n-\gamma_{n+1} < \frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)} \tag{21}$$

i per tant tindrem $\{\gamma_n-\gamma_{n+1}\}_{n\geq 1}$ encaixat entre dues sèries telescòpiques, fàcilment sumables. A partir de (20) tenim que

$$\begin{aligned}\gamma_n-\gamma_{n+1} = h_n-h_{n+1}-\ln(n)+\ln(n+1) &= \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\frac{1}{4(n+1)^4}+\cdots\end{aligned}$$

Per tant,

$$\gamma_n-\gamma_{n+1} > \frac{1}{2(n+1)^2} > \frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)},$$

on l'última desigualtat es deguda a que

$$\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} < \frac{1}{2(n+1)^2}.$$

Per tal d'acotar $\gamma_n-\gamma_{n+1}$ per sobre observem que

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = 1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)} &= \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)^2}\cdot\frac{n+1}{n}\\ &= \frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{2(n+1)^3}+\frac{1}{2(n+1)^4}+\frac{1}{2(n+1)^5}+\cdots\\ &> \frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\frac{1}{4(n+1)^4}+\frac{1}{5(n+1)^5}+\cdots\\ &= \gamma_n-\gamma_{n+1}.\end{aligned}$$

Com que la desigualtat (21) val per a tot valor de $n > 1$, la considerem per als valors $n, n+1, n+2, \ldots, N$. Aleshores, usant que els seus tres termes tenen la mateixa estructura que una sèrie telescòpica, sumant-los arribem a

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(N+2)} < \gamma_n - \gamma_{N+1} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(N+1)}.$$

Si fem limit quan N tendeix a més infinit obtenim,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma_n - \lim_{N\to\infty} \gamma_{N+1} \leq \frac{1}{2n},$$

que ens dóna precisament (17), ja que usant (16),

$$\lim_{N\to\infty} \gamma_{N+1} = \lim_{N\to\infty} (h_{N+1} - \ln(N+1)) = \gamma.$$

De fet, la funció $R(n)$ introduïda a (16) es coneix amb molt més detall. Tot i que no els usarem en aquest treball, donem a continuació un parell de resultats més sobre $R(n)$, vegeu [29, 40, 61]. Euler, el 1775, va provar el desenvolupament asimptòtic a l'infinit següent:

$$h_n \sim \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2\,n} - \frac{1}{12\,n^2} + \frac{1}{120\,n^4} - \cdots = \ln(n) + \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{kn^k}, \quad (22)$$

on els B_k són els anomenats números de Bernoulli. Una variació d'aquesta fórmula, que és equivalent, apareix als quaderns del matemàtic indi Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920), vegeu [10, p. 521]:

$$h_n \sim \frac{1}{2}\ln(2\,m) + \gamma + \frac{1}{12\,m} - \frac{1}{120\,m^2} + \frac{1}{630\,m^3} - \frac{1}{1680\,m^4} + \cdots,$$

on $m = \frac{n(n+1)}{2}$ és l'enèsim número triangular.

Molt relacionada amb la constant d'Euler γ hi ha un altra constant $\mathcal{C} \approx 0.261497$, anomenada constant de Mertens, en honor del matemàtic alemany Franz Mertens (1840-1927), que el 1874 va provar ([44]) que

$$\sum_{p \text{ primer},\ p\leq n} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + \mathcal{C} + T(n), \text{ amb } \lim_{n\to\infty} T(n) = 0,$$

vegeu també [40, 51]. De fet, Euler mateix ja va conjecturar la relació anterior, però sense la constant de Mertens. Clarament, aquest resultat també implica la divergència de la sèrie formada pels inversos dels primers.

En aquest punt, un es pot preguntar què passaria si consideréssim la sèrie formada pels inversos dels primers bessons, és a dir, si només poséssim a la suma els inversos de números p i $p+2$, quan ambdós són primers. El matemàtic noruec Viggo Brun (1885-1978) va demostrar el 1919 ([15]) que

$$\sum_{p,\, p+2 \text{ primers}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31}\right) + \left(\frac{1}{59} + \frac{1}{61}\right) + \cdots$$

és convergent. El valor de la seva suma es coneix avui en dia com la constant de Brun, $\mathcal{B}_2$, i el seu valor aproximat és $1.90216\ldots$ ([27, 48, 64]). Observem que aquest resultat no demostra si hi ha infinites parelles de primers bessons o no, ja que és coherent amb ambdues situacions. El que si que dóna és una via per a intentar veure que n'hi ha infinits: demostrar que $\mathcal{B}_2$ és irracional.

De fet va ser durant el càlcul de $\mathcal{B}_2$ que, el 1994, Thomas Nicely ([47, 48]) va trobar el famós error (*bug*) en les divisions que feia el processador Intel Pentium, i més precisament quan considerava el parell de primers bessons 824 633 702 441 i 824 633 702 443, vegeu [29]. El seu famós *e-mail* començava:

> Sembla que hi ha un error a la unitat de coma flotant (coprocessador numèric) de molts, i potser tots, els processadors Pentium. En resum, el Pentium FPU torna valors erronis per a determinades divisions. Per exemple, 1/824 633 702 441.0 es calcula incorrectament (tots els dígits més enllà del vuitè dígit significatiu són erronis)...

Per acabar aquesta secció, recordarem l'enunciat del Teorema de Pringsheim i el provarem.

Teorema de Pringsheim. *Una reordenació simple de la sèrie harmònica alternada convergeix (incloent els valors més i menys infinit) si i només si la densitat asimptòtica (α) de termes positius de la reordenació existeix. La suma d'aquesta reordenació val*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right), \quad si \quad \alpha \in (0,1),$$

i pels casos $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ el resultat també és cert prenent límits a l'expressió de la dreta. Així, aquests casos corresponen a suma menys i més infinit, respectivament.

Prova. Usarem (16) i les notacions de la introducció. Per tant, p_n és la quantitat de termes positius dins de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $q_n = n - p_n$ és la quantitat de termes negatius en el mateix conjunt. A més,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} = \alpha.$$

És molt fàcil veure que si alguna de les successions $\{p_n\}_{n\geq 1}$ o $\{q_n\}_{n\geq 1}$ és fitada, aleshores el teorema és cert. Si la successió fitada és $\{p_n\}_{n\geq 1}$, aleshores la sèrie suma menys infinit i si ho és l'altra, suma més infinit. Per tant suposarem que $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

Així, tenim que

$$\begin{aligned} h_n &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p_n - 1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2q_n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2p_n - 1} + \frac{1}{2p_n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2p_n}\right) \\ &\qquad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2q_n}\right) \\ &= \ln(2p_n) + \gamma + R(2p_n) - \frac{1}{2}\big(\ln(p_n) + \gamma + R(p_n)\big) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\big(\ln(q_n) + \gamma + R(q_n)\big) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) + \left(R(2p_n) - \frac{1}{2}R(p_n) - \frac{1}{2}R(q_n)\right), \end{aligned}$$

on a la penúltima igualtat hem usat tres cops (16). Prenent límits

$$S = \lim_{n\to\infty} h_n = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right),$$

tal i com volíem veure, ja que $\lim_{n\to\infty} R(n) = 0$. □

5.1 Prova alternativa del resultat d'Ohm

Suposem que volem saber la suma d'una reordenació simple com la donada en el resultat d'Ohm, que recordem consisteix en prendre alternativament blocs amb $r \geq 0$ números positius i $s \geq 0$ números negatius. Per a concretar agafem per exemple la reordenació (2) amb $r = 2$ i $s = 1$.

El mètode alternatiu que presentem per a calcular la suma, seguint també [12], és el següent. Suposem en primer lloc que ja sabem que la suma

$$S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

és finita i volem saber el seu valor. Considerem la funció

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x) + \ln(1-x^4)\Big).$$

Usant la següent sèrie de Taylor, donada a (19) i vàlida per $(-1, 1]$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \cdots,$$

obtenim

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \cdots\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} + \cdots\Big) \\ &\quad - \frac{1}{2}\Big(x^4 + \frac{x^8}{2} + \frac{x^{12}}{3} + \frac{x^{16}}{4} + \frac{x^{20}}{5} + \cdots\Big) \\ &= x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{6} + \cdots, \end{aligned}$$

on, de moment, no podem precisar els valors de x pels quals la igualtat és certa. Així la darrera sèrie obtinguda avaluada a $x = 1$ coincideix amb el valor S que volem calcular. La qüestió és saber si podem assegurar que la igualtat anterior es compleix per $x = 1$. Si és certa ja hem obtingut S, ja que

$$\begin{aligned} S = g(1) &= \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x) + \ln(1-x^4)\Big)\Big|_{x=1} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln\big((1+x)^2(1+x^2)\big)\Big)\Big|_{x=1} = \frac{3}{2}\ln(2), \end{aligned}$$

com a (2). La igualtat entre S i $g(1)$ ens la dóna el següent resultat del matemàtic noruec Niels Henrik Abel (1802-1829): *Considerem una sèrie de termes reals, convergent,* $\sum_{n\geq 0} a_n < \infty$. *Aleshores la sèrie de variable complexa* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *convergeix per* $|z| < 1$ *cap a una funció analítica* $h(z)$ *de manera que*

$$h(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \textit{per a tot} \quad |z| < 1 \quad \textit{i} \quad \lim_{x\to 1^-} h(x) = h(1) = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

El resultat general d'Ohm es pot obtenir considerant la funció

$$g(x) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x^s) - \ln(1-x^s) + \ln(1-x^{2r})\Big)$$

i aplicant de nou el teorema d'Abel.

6 Sèrie harmònica amb signes. Prova del Teorema A

Per comoditat, recordem aquí l'enunciat de Teorema A.

Teorema A. *Considerem la sèrie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{3} + \frac{\varepsilon_4}{4} + \cdots,$$

on $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, *i suposem que existeix* $m \geq 1$ *tal que a tot* $k \geq 0$,

(i) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m) = (\varepsilon_{km+1}, \varepsilon_{km+2}, \ldots, \varepsilon_{km+m})$,

(ii) Entre els nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *hi ha* $r \geq 0$ *valors* $+1$ *i* $s = m - r$ *valors* -1.

Aleshores és convergent si i només si $r = s$. *A més, quan* $r = s$, *la corresponent suma val*

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j \left(\ln(2m) + \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{j\pi}{m}\right) - 2 \sum_{0<n\leq \frac{m}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n j}{m}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi n}{m}\right)\right)\right).$$

Prova. Farem la demostració de la primera part del Teorema A només pel cas $m = 4$. Fer-la en el cas general només complicaria la notació. Com es veurà, els punts clau serien els mateixos.

Considerem les sumes parcials $S_\ell = \sum_{n=1}^{\ell} \frac{\varepsilon_n}{n}$. Observem que si la subsuccessió $\{S_{4j}\}_{j\geq 1}$ té límit, el mateix passa amb tota la successió $\{S_\ell\}_{\ell \geq 1}$, ja que, per $t \in \{1, 2, 3\}$, la diferència entre S_{4j+t} i S_{4j} tendeix a zero quan j va a infinit.

Així, en tenim prou estudiant les sumes parcials

$$\begin{aligned}
S_{4j} &= \sum_{n=1}^{4j} \frac{\varepsilon_n}{n} = \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{\varepsilon_{4k+1}}{4k+1} + \frac{\varepsilon_{4k+2}}{4k+2} + \frac{\varepsilon_{4k+3}}{4k+3} + \frac{\varepsilon_{4k+4}}{4k+4}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \left(\frac{\varepsilon_1}{4k+1} + \frac{\varepsilon_2}{4k+2} + \frac{\varepsilon_3}{4k+3} + \frac{\varepsilon_4}{4k+4}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \frac{64\big(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4\big)k^3 + A(\varepsilon)k^2 + B(\varepsilon)k + C(\varepsilon)}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} \\
&= \sum_{k=0}^{j} \frac{64(r-s)k^3 + A(\varepsilon)k^2 + B(\varepsilon)k + C(\varepsilon)}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} := \sum_{k=0}^{j} b_k(\varepsilon).
\end{aligned}$$

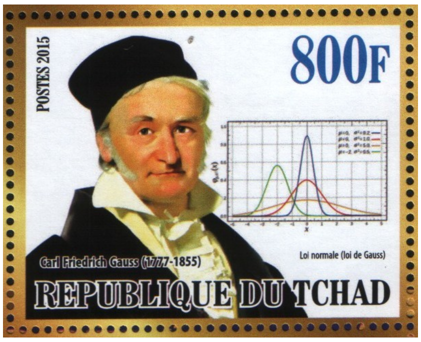
Aquí A, B i C denoten polinomis en ε_j, $j = 1, 2, 3, 4$ i coeficients enters. Com que per k prou gran els coeficients $b_k(\varepsilon)$ no canvien de signe i $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{b_k(\varepsilon)}{1/k} = \frac{r-s}{4}$, pel criteri de comparació entre sèries, quan $r \neq s$ aquesta sèrie es comporta igual que la sèrie harmònica i com a conseqüència és divergent.

Per altra banda, quan $r = s$, tenim que el límit $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{b_k(\varepsilon)}{1/k^2}$, existeix. Aplicant el mateix criteri, provem la convergència de la sèrie ja que $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ és una sèrie convergent. Per tant hem acabat la primera part de la prova del teorema.

Anem a provar la segona part. Usarem propietats de la funció digamma, $\Psi(z)$, que es la derivada logarítmica de la funció gamma, $\Gamma(z)$. Recordem que $\Gamma(z)$ és una extensió als nombres complexos del factorial, ja que compleix que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ i per $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. De fet per $\mathrm{Re}(z) > 0$ la funció gamma és

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx,$$

i es pot estendre per continuació analítica com una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ amb pols a $z = -n, n \in \mathbb{N}$ i a $z = 0$.



K. T. W. Weirstrass i C. F. Gauss

La següent representació equivalent de la funció gamma va ser donada pel matemàtic alemany Karl T. W. Weirstrass (1815-1897):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}, \tag{23}$$

vegeu [1, 25, 43, 57], on γ és la constant d'Euler. Aleshores

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

i compleix propietats heretades de Γ, com per exemple $\Psi(z+1) = \Psi(z) + \frac{1}{z}$. La funció Ψ té una forta relació amb les sumes harmòniques, ja que es pot veure que $\Psi(n) = h_{n-1} - \gamma$. A més, a partir de (23) és fàcil demostrar que es compleix la relació

$$\Psi(z) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z-1}{(k+1)(k+z)} = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+z} \right), \tag{24}$$

que serà la igualtat clau per demostrar el teorema.

Per a provar el resultat que volem, en primer lloc, i de manera similar a com hem fet a l'inici d'aquesta prova, observem que la suma buscada és $S = \lim_{j\to\infty} S_{mj}$. Ara bé,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_1}{mk+1} + \frac{\varepsilon_2}{mk+2} + \cdots + \frac{\varepsilon_m}{mk+m} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{\varepsilon_1}{m}}{k+\frac{1}{m}} + \frac{\frac{\varepsilon_2}{m}}{k+\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{\frac{\varepsilon_m}{m}}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j}{k+\frac{j}{m}} \right) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon_j}{k+\frac{j}{m}} - \frac{\varepsilon_j}{k+1} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j \left(\Psi\left(\frac{j}{m}\right) + \gamma \right), \end{aligned}$$

on hem usat que $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j = r - s = 0$, l'expressió (24) i els passos detallat a [1, 2, 53].

Gauss, el 1813, va provar ([24, 34, 41]) que per a cada parell j, m amb $0 < j < m$ i $\operatorname{mcd}(j, m) = 1$,

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{j}{m}\right) = -\gamma - \ln(2m) - \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{j\pi}{m}\right) \\ + 2 \sum_{0<n\le \frac{m}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n j}{m}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi n}{m}\right)\right). \end{aligned}$$

Per tant

$$S = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j \left(\ln(2m) + \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{j\pi}{m}\right) - 2 \sum_{0<n\le \frac{m}{2}} \cos\left(\frac{2\pi n j}{m}\right) \ln\left(\sin\left(\frac{\pi n}{m}\right)\right) \right),$$

tal i com volíem demostrar. $\square$

Per alguns casos molt particulars les sumes del teorema anterior es poden obtenir de manera més directa i senzilla. Per exemple, anem a demostrar que

$$\begin{aligned}\alpha := S_{+,+,-,-} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \cdots \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}, \\ \beta := S_{+,-,-,+} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \cdots \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$

Observem en primer lloc que

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots\Big) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln(2).\end{aligned} \tag{25}$$

D'altra banda $\alpha + \beta = 2\big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\big)$. El valor d'aquesta darrera expressió és ben conegut i es pot calcular, per exemple, usant les eines introduïdes a la Secció 5.1, és a dir les sèries de Taylor i el resultat d'Abel. Més concretament, la sèrie de Taylor de la funció $\arctan(x)$ a $x = 0$ és

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - \cdots,$$

i té radi de convergència 1. Com que α i β són finits, podem aplicar el resultat d'Abel per $x = 1$ que ens assegura que $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$, i per tant $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Usant aquesta igualtat i (25) obtenim que $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$ i $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$, tal com volíem veure.

7 Sèries harmòniques aleatòries

En aquesta darrera secció estudiarem la convergència de dues sèries aleatòries construïdes a partir de la sèrie harmònica. Aquesta és la part més tècnica del treball.

7.1 Escollint termes al atzar en la sèrie harmònica alternada

Estudiem la següent qüestió: considerem les dues successions de números ordenats:

$$A := \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19} \ldots\right\}$$
$$B := \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \ldots\right\}$$

Aleshores tirem successivament una moneda que té probabilitat p de que surti cara i probabilitat $q = 1-p$ de que surti creu. Cada cop que surt cara agafem el primer element del conjunt A i el retirem. De manera similar, si surt creu agafem el primer element del conjunt B i el retirem també. D'aquesta manera construïm una sèrie aleatòria

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{26}$$

on c_n és el número retirat en la n-èsima tirada per al procés acabat de descriure. Observem que la sèrie (26) és sempre una certa reordenació simple de la sèrie harmònica alternada.

Ara, ens preguntem sobre la convergència de (26). Com a conseqüència de Teorema de Pringsheim, obtenim el següent resultat:

Corol·lari C. *Amb probabilitat 1,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

Prova. Pel Teorema de Pringsheim, per a provar el corol·lari només cal demostrar que la probabilitat de que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\text{Número de } c_n \text{ positius, quan } 1 \leq n \leq N}{N} = p,$$

és 1. Precisament la igualtat anterior és conseqüència de la Llei forta dels grans nombres de Kolmogórov, que ja hem usat en aquest treball. Això és degut a que si agafem una variable aleatòria de tipus Bernoulli X, complint $P\{X = 1\} = p, P\{X = 0\} = 1 - p$, aleshores la fracció de l'esquerra és la mitjana mostral de N variables aleatòries independents amb la mateixa distribució que X i la fracció de la dreta correspon a l'esperança de X, $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$.

De fet, la Llei forta per variables aleatòries de tipus Bernoulli és anterior a Kolmogórov i ja va ser provada a 1909 pel matemàtic frances Émile Borel (1871-1956), veure [13]. □

7.2 Canviant els signes al atzar en la sèrie harmònica. Prova del Teorema B

Començarem aquesta secció enunciant el Teorema 22.6 de [11], la prova del qual està basada en la coneguda com *desigualtat de Kolmogórov*. Aquest resultat ens permetrà demostrar sense massa dificultats el Teorema B.

Teorema D. ([11, Thm 22.6]) *Sigui $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successió de variables aleatòries independents amb $E(X_n) = 0$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}(X_n)$ és convergent, aleshores la sèrie aleatòria $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergeix amb probabilitat 1.*

Abans de demostrar el Teorema B, per a facilitar la lectura, l'enunciarem de nou. Quan un succés té probabilitat 1 també es diu que succeeix quasi segurament.

Teorema B. *Considerem la sèrie harmònica aleatòria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n},$$

on $\{U_n\}_{n\geq 1}$ són variables aleatòries independents i equidistribuïdes, amb distribució de tipus Bernoulli, tal que $P\{U_n = 1\} = p, P\{U_n = -1\} = 1-p$. Aleshores:

(i) Si $p = \frac{1}{2}$, la sèrie és convergent amb probabilitat 1.

(ii) Si $p > \frac{1}{2}$, la sèrie divergeix cap a més infinit amb probabilitat 1.

(iii) Si $p < \frac{1}{2}$, la sèrie divergeix cap a menys infinit amb probabilitat 1.

Prova. Definim

$$X_n = \frac{U_n - E(U_n)}{n}.$$

Per a veure si podem aplicar el Teorema D prenent aquestes variables aleatòries necessitem calcular $E(X_n)$ i $\operatorname{var}(X_n)$. Tenim que,

$$E(X_n) = \frac{E\big(U_n - E(U_n)\big)}{n} = \frac{E(U_n) - E(U_n)}{n} = 0,$$
$$\operatorname{var}(X_n) = \operatorname{var}\left(\frac{U_n - E(U_n)}{n}\right) = \frac{\operatorname{var}(U_n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Per tant,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

és convergent (el valor és irrellevant). Així doncs, estem sota les hipòtesis del Teorema D i podem concloure que $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergeix amb probabilitat 1. Ara bé, com que $E(U_n) = 1 \cdot p - 1 \cdot (1-p) = 2p - 1$, tenim que

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n - (2p-1)}{n} \tag{27}$$

convergeix amb probabilitat 1.

Quan $p = 1/2$ obtenim la convergència quasi segura de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n}$ i, per tant, l'item (i) del teorema queda demostrat.

Per a provar (ii)-(iii), escrivim les sumes parcials de (27):

$$\sum_{n=1}^{m} X_n = \sum_{n=1}^{m} \frac{U_n + (1-2p)}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{U_n}{n} + (1-2p) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}. \tag{28}$$

Observem que, quan $2p-1 \neq 0$, la part $(1-2p) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$ de (28) divergeix, quan m tendeix a infinit, cap a més o menys infinit, depenent de si $p < 1/2$ o $p > 1/2$, respectivament. Per tant, a partir de la convergència quasi segura per la sèrie involucrant X_n, s'obtenen de manera directa els resultats desitjats. $\square$

En general, per a estudiar altres sèries de variables aleatòries independents són molt útils els resultats que enunciem a continuació, ambdós també deguts a Kolmogórov: el Teorema de les tres sèries i un corol·lari de la Llei del $0-1$, veure [11, 33]. Usarem la notació 1_B per l'indicador d'un conjunt B, es a dir $1_B(x) = 1$ si $x \in B$ i $1_B(x) = 0$ si $x \notin B$.

Teorema de las tres sèries (1928-29). *Sigui $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successió de variables aleatòries independents. La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergeix quasi segurament si i només si, per algun $A > 0$, es satisfan les següents tres condicions:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} P\big(|X_n| \geq A\big)$ *convergeix,*

(b) Sigui $Y_n = X_n \cdot 1_{\{|X_n| \leq A\}}$*, aleshores* $\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n)$*, la sèrie dels valors esperats de* Y_n*, convergeix,*

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{var}(Y_n)$ *convergeix.*

A. N. Kolmogórov

Es interessant observar com aquest teorema ens permet reduir un problema aleatori a tres problemes deterministes.

Corol·lari de la llei del $0-1$ de Kolmogórov. *Sigui $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una successió de variables aleatòries independents. Aleshores, la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ o bé convergeix quasi segurament, o bé divergeix quasi segurament.*

Acabarem aquest treball amb alguns resultats sobre la distribució de la variable aleatòria (5), $Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{n}$, o en altres paraules sobre quina és la distribució dels possibles valors de la seva suma. Aquests resultats estan extrets de [59].

En primer lloc, com que $\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{U_n}{n}\right)^2$ és finita i $E(U_n) = 0$, tenim que les sumes parcials $\sum_{n=1}^{k} \frac{U_n}{n}$ també convergeixen a Z en mitjana quadràtica (és a dir en $L^2(\Omega)$). En particular, aquest fet implica que $E(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(U_n)}{n} = 0$. A més, usant de nou que $E(U_n) = 0$, tenim també que

$$E(Z^2) = \sum_{n01}^{\infty} \frac{E(U_n^2)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Per tant, utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz, $E(|Z|) \leq E(Z^2)^{1/2}$, i arribem a que el valor absolut de la esperança de la suma està acotat per

$$E(|Z|) \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \approx 1.28.$$

Per a tenir més informació, per a tot $t \in \mathbb{R}^+$, acotarem les següents esperances:

$$\begin{aligned} E(\exp(tZ)) &\leq \prod_{n=1}^{\infty} E\Big(\exp\Big(\frac{tU_n}{n}\Big)\Big) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\big(\frac{t}{n}\big) + \exp\big(-\frac{t}{n}\big)}{2} \\ &\leq \prod_{n=1}^{\infty} \exp\Big(\frac{t^2}{2n^2}\Big) = \exp\Big(\frac{t^2\pi^2}{12}\Big), \end{aligned}$$

on, a la primera desigualtat hem utilitzat el Lema de Fatou, i més endavant, que per tot $y \in \mathbb{R}$, $2\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}} - \mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y} \geq 0$. Per a demostrar aquesta desigualtat, en primer lloc calculem les següents series de Taylor a l'origen

$$\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{2^k\, k!}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!},$$

que s'obtenen fàcilment a partir de la de e^y. Com que el seu radi de convergència és més infinit, per a provar la desigualtat $\mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}} \geq \frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}$ ni ha prou en veure que es compleix que $(2k)! \geq 2^k\, k!$, per a tot $k \geq 0$. Per $k = 0, 1$ és una igualtat. Per $k \geq 2$, com que $(2k)! = (2k)(2k-1)\cdots(k+1)\, k!$, la desigualtat és equivalent a $(2k)(2k-1)\cdots(k+1) \geq 2^k$, que és clarament certa, fins i tot amb desigualtat estricta.

Usem a continuació la desigualtat de Markov (veure [11]), que diu que donats $\lambda > 0$ i X variable aleatòria positiva amb esperança finita, aleshores

$$P\big(X \geq \lambda\big) \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

Per tant, per a tot $t > 0$ i $z > 0$,

$$\begin{aligned} P\big(Z \geq z\big) &= P\big(\exp(tZ) \geq \exp(tz)\big) \leq \frac{E\big(\exp(tZ)\big)}{\exp(tz)} \leq \frac{\exp\Big(\frac{t^2\pi^2}{12}\Big)}{\exp(tz)} \\ &\leq \inf_{t\in\mathbb{R}^+} \exp\Big(\frac{t^2\pi^2}{12} - tz\Big) = \exp\Big(\frac{t^2\pi^2}{12} - tz\Big)\Big|_{t=\frac{6z}{\pi^2}} = \exp\Big(-\frac{3z^2}{\pi^2}\Big). \end{aligned}$$

Com a conseqüència important obtenim que Z pren valors molt grans amb probabilitat extremadament petita. Per exemple,

$$P\big(Z \geq 4\big) \leq 0.00773,\ P\big(Z \geq 6\big) \leq 0.000018,\ P\big(Z \geq 8\big) \leq 3.6 \times 10^{-9},$$

i clarament $P\big(|Z| \geq 4\big) \leq 2 \times 0.00773$.

Finalment, anem a veure que per a cap interval $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, la probabilitat $P\big(Z \in \mathcal{I}\big)$ és zero. Ja hem vist que la probabilitat de que Z convergeixi és 1. Per tant, donat qualsevol $\delta > 0$, existeix n_1 de manera que

$$P\Big(\Big|\sum_{n>N} \frac{U_n}{n}\Big| \le \frac{\delta}{2}\Big) \ge \frac{1}{2}, \tag{29}$$

sempre que $N \ge n_1$. És fàcil veure també que donat qualsevol $z \in \mathbb{R}$ existeix una tria $\{u_n\}_{n\ge1}$, no aleatòria de números més 1 i menys 1, de manera que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n} = z$. Prenem ara n_2 prou gran de manera que per a $N \ge n_2$,

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{n} - z\Big| \le \frac{\delta}{2}. \tag{30}$$

Prenent $N = \max(n_1, n_2)$, i usant (29) i la independència de les variables U_n tenim:

$$\begin{aligned} 0 < \Big(\frac{1}{2}\Big)^N \frac{1}{2} &\le P(U_1 = u_1) \cdots P(U_N = u_N) P\Big(\Big|\sum_{n>N} \frac{U_n}{n}\Big| \le \frac{\delta}{2}\Big) \\ &= P\Big(U_1 = u_1, \ldots, U_N = u_N, \Big|\sum_{n>N} \frac{U_n}{n}\Big| \le \frac{\delta}{2}\Big) \\ &\le P\big(|Z - z| \le \delta\big), \end{aligned} \tag{31}$$

on a la darrera desigualtat hem usat (30) i que

$$\Big\{U_1 = u_1, \ldots, U_n = u_n, \Big|\sum_{n>N} \frac{U_n}{n}\Big| \le \frac{\delta}{2}\Big\} \subset \Big\{|Z - z| \le \delta\Big\}.$$

La desigualtat (31) demostra que la distribució de Z té com a suport tot $\mathbb{R}$ i en particular que la suma aleatòria pren valors més grans que qualsevol valor fixat amb probabilitat positiva. A [46, 59] es prova també que Z és una variable absolutament continua amb funció de densitat f de classe $\mathcal{C}^\infty$ i es donen altres propietats de f.

Agraïments. Agraeixo a la Maria Jolis la seva ajuda en diversos llocs d'aquest treball.

L'autor està secundat pel projecte MINECO/FEDER MTM2016-77278-P i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2014SGR568.

Referències

[1] M. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1964.

[2] S. Adhikari, N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *Transcendental infinite sums*, Indag. Math. (N.S.) **12** (2001) 1–14.

[3] M. J. Agana, *The classical theory of rearrangements.* Thesis of Master of Science in Mathematics, Boise State University, 2015.

[4] M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from The Book, Springer, Berlin, 1988.

[5] J. Andel, Mathematics of Chance. John Wiley & Sons, Inc., 2001. Wiley Series in Probability and Statistics.

[6] G. T. Bagni, *Prime Numbers are Infinitely Many: Four Proofs from History to Mathematics Education*, 2004. Accessible a http://www.syllogismos.it/history/Icme10-TSG17.pdf

[7] X. Bardina, *Records: Quina és la probabilitat d'obtenir-ne? Quan apareixen? Quins valors prenen?*, But. Soc. Catalana de Matemàtiques **22**, (2007) 5–22.

[8] X. Bardina, *Quants rècords veurem al llarg de la nostra vida?*, Materials Matemàtics (MAT^2), treb. 3, (2007) 14 pp.

[9] X. Bardina, *Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma*, Materials Matemàtics (MAT^2), treb. 3, (2008) 29 pp.

[10] B. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Vol. **5**, Springer, New York, 1998.

[11] P. Billingsley, Probability and Measure, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, 1986.

[12] J. Bonet, *Reordenación de series. El teorema de Levy Steinitz*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. **16** (2013) 449–464.

[13] E. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétique*, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909) 247–271.

[14] F. Brown, L. O. Cannon, J. Elich, D. G. Wright, *On Rearrangements of the Alternating Harmonic Series,* The College Math. Journal **16** (1985) 135–138.

[15] V. Brun, *La série* $1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+1/19+1/29+1/31+1/41+1/43+1/59+1/61+\dots$, *où les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente ou finie*, Bull. des Sci. Mathématiques **43** (1919) 100–104, 124–128.

[16] K. Conrad, *Pell's equation-I,II*. Accessible a http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/ Consultat el juliol de 2016.

[17] C. C. Cowen, K. R. Davidson, R. P. Kaufman, *Rearranging the Alternating Harmonic Series*, Amer. Math. Monthly **87** (1980) 817–819.

[18] P. Erdös, P. (1938), *Über die Reihe* $\sum 1/p$, Mathematica , Zutphen **B 7** (1938) 1-2.

[19] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I. John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1950.

[20] M. Ferrante, M. Saltalamacchia, *The Coupon Collector's Problem*, Materials Matemàtics (MAT^2), treb. 2, (2014) 35 pp.

[21] F. J. Freniche, *On Riemann's Rearrangement Theorem for the Alternating Harmonic Series*, Amer. Math. Monthly **117** (2010) 442–448.

[22] S. Galanor, *Riemann's rearrangement Theorem*, Mathematics Teacher **80** (1987) 675–681.

[23] A. Gasull, *La sèrie harmònica*, Nou Biaix **39** (2016) 6–31.

[24] K. F. Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.*, Comment. Gottingen **2** (1813) 1–46. Veure també *Werke* **3** (1876) 122–162.

[25] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. Table of Integrals, Series, and Products. Edited by A. Jeffrey and D. Zwillinger. Academic Press, New York, 7th edition, 2007.

[26] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, Concrete Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2nd edition 1994.

[27] D. A. Goldston, *Are there infinitely many twin primes?*, Bay Area Math Adventure (BAMA), 2010. Accessible a http://www.math.sjsu.edu/~goldston/publications.htm

[28] J. F. Hall, *Fun with stacking blocks*, American Journal of Physics. **73** (2005) 1107–1116.

[29] J. Havil, Gamma: Exploring Euler's Constant. Princeton, NJ: Princeton University Press 2003.

[30] M. D. Hirschhorn, *Approximating Euler's Constant*, Fibonacci Quart. **49** (2011), 243–248.

[31] W. Horn, M. Ndiaye, *On reaarangements of alternating series*, Atlantic Elect. J. of Math. **3** (2008) 6–17.

[32] F. Irwin, *A Curious Convergent Series*, Amer. Math. Monthly **23** (1916) 149–153.

[33] K. Itô, An Introduction to Probability Theory. Cambridge University Press, 1984.

[34] J. L. W. V. Jensen, *An elementary exposition of the Gamma function*, Ann. of Math. (2) **17** (1916) 124–166.

[35] N. W. Johnson, *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian J. of Mathematics, **18** (1966) 169–200.

[36] A. J. Kempner, *A Curious Convergent Series*, Amer. Math. Monthly **21** 21 (1914) 48–50.

[37] S. J. Kifowit, *More Proofs of Divergence of the Harmonic Series*, Preprint 2006. Accessible a: http://stevekifowit.com/pubs/

[38] S. J. Kifowit, T. A. Stamps, *The Harmonic Series Diverges Again and Again*, The AMATYC Review **27** (2006) 31–43.

[39] S. J. Kifowit, T. A. Stamps, *Serious About the Harmonic Series II*, 31st Annual Conference of the Illinois Mathematics Association of Community Colleges; Monticello, IL, 2006. Accessible a: http://stevekifowit.com/pubs/

[40] J. C. Lagarias, *Euler's constant: Euler's work and modern developments*, Bul. of the AMS **50** (2013) 527–628.

[41] D. H. Lehmer, *Euler constants for arithmetical progressions*, Acta Arith. **27** (1975) 125–142.

[42] H. W. Lenstra Jr., *Solving the Pell Equation*, Notices Amer. Math. Soc. **49** (2002), 182–192.

[43] L. A. Medina, V. H. Moll, *The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 10: The digamma function*, SCIENTIA, Ser. A: Math. Sciences **17** (2009), 45–66.

[44] F. Mertens, *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie*, J. Reine Angew. Math. **78** (1874), 46–62.

[45] E. W. Montroll, *Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices* J. SIAM **4** (1956) 241–260.

[46] K. E. Morrison, *Cosine Products, Fourier Transforms, and Random Sums*, Amer. Math. Monthly **102** (1995) 716–724.

[47] T. R. Nicely, Article sense títol sobre la falla en les divisions del Pentium. San Francisco Examiner (18 December 1994), p. B-5.

[48] T. R. Nicely, *Enumeration to* $1.6 * 10^{15}$ *of the twin primes and Brun's constant* Some Results of Computational Research in Prime Numbers (Computational Number Theory), 1999.

[49] M. Ohm, *De nonnullis seriebus infinitis summandis* typis Trowitzschii et filii, 1839, 15 pàgines.

[50] M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler, U. Zwick, *Maximum Overhang*, Amer. Math. Monthly **116** (2009) 763–787.

[51] P. Pollack, *Euler and the partial sums of the prime harmonic series*, Elem. Math. **70** (2015) 13–20.

[52] A. Pringsheim, *Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte*, Mathematische Annalen, **XXII** (1883) 455–503.

[53] M. Ram Murty, N. Saradha, *Transcendental values of the digamma function*, Journal of Number Theory **125** (2007) 298–318.

[54] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Gesammelte Mathematische Werke (Leipzig, 1876) 213–253.

[55] S. Ross, A first course in probability, 9th Edition, Pearson, 2012.

[56] M. Sanz-Solé, Probabilitats. Col·lecció UB, 28. Universitat de Barcelona, 1999.

[57] P. Sebah, X. Gourdon, *Introduction to the Gamma Function,* 2002. Accessible a la plana web "Numbers, constants and computation." http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html

[58] T. Schmelzer, R. Baillie, *Summing a Curious, Slowly Convergent Series*, Amer. Math. Monthly **115** (2008) 525–540.

[59] B. Schmuland, *Random Harmonic Series*, Amer. Math. Monthly **110** (2003) 407–416

[60] H. Tijms, Understanding probability. Third edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[61] M. B. Villarino, *Ramanujan's harmonic number expansions into negative powers of a triangular number*, J. of inequalities in pure and applied math. **9** (2008) 12 pp.

[62] R. M. Young, *Euler's constant*, Math. Gaz. **75** (1991) 187–190.

[63] J. Webb, *In perfect harmony*, +plus magazine 2000. https://plus.maths.org/content/perfect-harmony

[64] Diversos autors, Suites & séries. Bibiliothèque Tangente HS **41**. Éditions POLE 2011.

Departament de matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Publicat el 1 de març de 2017