This is a preprint of: "Periodic orbits and nonintegrability of the Henon-Heiles Hamiltonian systems", Fatima E. Lembarki, Mastersthesis, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 2011.

Université Autonome de Barcelone
Département de Mathématiques

Mémoire de Master
En Mathématiques Avancées

Les orbites périodiques et la non–intégrabilité des systèmes hamiltoniens de Hénon–Heiles

Fatima Ezzahra Lembarki

Dirigé par le Dr. Jaume Llibre

Juillet 2011

A totes les persones que m'han ajudat
a realitzar aquesta memoria i, en especial,
al meu tutor el Professor Jaume Llibre i
a la meva familia, moltíssimes gràcies ..

Table des matières

Introduction générale

Dans la nature et dans la vie des hommes, de nombreux processus, sont en constante évolution. Nous parlons donc de systèmes dynamiques. Généralement ces changements incessants sont souvent difficiles à prédire et modéliser car ils surviennent de manière non linéaire et n'obéissent pas pleinement aux simples lois du hasard.

0.1 Système dynamique

Tout processus en mouvement, une entité ou un système constamment en évolution, parfois de façon complexe et imprévisible est dit ***système dynamique***.

D'un moment à l'autre, un système dynamique n'est jamais tout à fait le même, à moins qu'il ne bouge plus et devienne statique et, dans ce cas, nous parlons d'un système mort.

En mathématiques, en physique théorique et en ingénierie, un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- ***causale***, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- ***déterministe***, c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur *un et un seul* état « futur » possible.

La modélisation de l'évolution ***déterministe*** du système dynamique peut peut se faire de deux façons distinctes :

- une évolution ***continue*** dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire. Et, c'est là, a priori, la plus naturelle physiquement, puisque le paramètre temps nous semble continu ;
- une évolution ***discontinue*** dans le temps. Et c'est ce cas-là qui est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler moins réaliste. Physiquement, cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

0.2 Classification des dynamiques

On peut diviser les systèmes dynamiques en deux grandes catégories ayant des propriétés très distinctes :
- les systèmes ***dissipatifs***, qui sont soumis à des frottements et
- les systèmes ***non dissipatifs, ou Hamiltoniens***, sans frottements ni entretien, dont l'énergie se conserve au cours du temps.

Les mouvements des corps célestes, planètes, étoiles, astéroïdes dont les frottements sont négligeables sont des exemples de mouvements Hamiltoniens. Et c'est sur ces mouvements que sera basé le mémoire.

0.3 La mécanique hamiltonienne

C'est une reformulation de la mécanique classique présentée en 1833 par le mathématicien Hamilton [1] qui a surgi de la Mécanique lagrangienne, une

1. **Sir William Rowan Hamilton** (1805–1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais . Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantiques .

autre reformulation de mécanique classique, présentée par Joseph Louis Lagrange[2] en 1788.

Les équations de Hamilton sont des équations différentielles du premier ordre et donc plus faciles à résoudre que les équations de Lagrange qui sont du second ordre.

Cependant, les étapes qui conduisent à ces équations sont plus complexes que celles de la mécanique lagrangienne : à partir des coordonnées généralisées et du lagrangien, il faut calculer l'hamiltonien, exprimer les vitesses généralisées en fonction des moments conjugués et remplacer celles-ci dans la définition de l'hamiltonien.

La méthode de Lagrange est moins lourde en termes de manipulations mathématiques. L'avantage principal de l'approche hamiltonienne est de fournir, grâce à la simplicité de son formalisme, un fondement théorique en mécanique.

Un système hamiltonien c'est un système mécanique régi par les équations de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

avec H l'hamiltonien,
$x_i (i = 1, \cdots, n)$ fonctions des grandeurs (penser à des positions ou angles),
$p_i (i = 1, \cdots, n)$ fonctions des grandeurs (penser à des impulsions).

L'ensembles de solutions d'un tel système différentiel est dit orbite. Topologiquement parlant, cet orbite peut être des points (des points d'équilibre), des cercles (dans le cas des orbites périodiques) ou des droites (pour le reste des cas).

La fonction H ne dépend pas explicitement du temps, i.e.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0,$$

2. **Joseph Louis Lagrange** (1763–1836), est un mathématicien, mécanicien et astronome italien d'origine française, fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques.

et $H =$ Constante s'interprète comme l'énergie totale invariante du système ou ***l'intègrale première*** du système.

S'il arrive que d'autres quantités que l'énergie soient conservées, elles aussi, on les appelle des ***intégrales premières*** du système hamiltonien.

Si un système hamiltonien a assez d'intégrales premières, Joseph Liouville, a démontré au XIX$^{\text{éme}}$ siècle qu'on peut résoudre le système différentiel par des quadratures en calculant des intégrales ; c'est pourquoi on dit que le système est ***complètement intégrable***.

Par contre, beaucoup de systèmes hamiltoniens ne sont pas intégrables, comme par exemple le système hamiltonien de Hénon–Heiles, qui sera l'objet principal de ce mémoire.

L'hamiltonien de Hénon–Heiles

C'est l'Hamiltonien proposé par Michel Hénon [3] et son étudiant Carl Heiles [4] dans un modèle d'évolution des étoiles dans une galaxie

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + xy^2 - \frac{1}{3}x^3$$

Il a été généralisé par l' introduction de deux paramètres A et B pour chacun des deux termes cubiques.

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + Bxy^2 + \frac{1}{3}Ax^3 \tag{1}$$

3. **Michel Hénon** (né en 1931) est un mathématicien et astronome. Il est actuellement à l'Observatoire de Nice. En astronomie, Hénon est bien connu pour sa contribution à la dynamique stellaire.

4. **Carl Heiles** (né en 1939) est un américain astrophysicien réputé par sa contribution à la compréhension de diffusion de la matière interstellaire à travers l'observation radio-astronomique.

Les équations de Hamilton associées à (1) sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -x - (Ax^2 + By^2) \\ \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \\ \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = -y - 2Bxy \end{cases} \tag{2}$$

On désigne par le point la dérivée par rapport à la variable indépendante temps, t.

Le mémoire sera consacré à l'étude de ce dernier système (2). Nous nous baserons sur l'article de Jaume Llibre et Lidia Jimenez-Lara [1].

Dans le premier chapitre nous allons étudier une méthode clé de ce mémoire, il s'agit de ***« la théorie de la moyenne »***, une méthode simple, bien sûr, si nous la comparons avec d'autres théories antérieures, qui nous permettra d'apporter les conditions suffisantes qui doivent vérifier les deux paramètres A et B de ce système généralisé, afin d'étudier l'existence des orbites périodiques, à tous les niveaux d'énergie positive, et de les calculer numériquement.Ces orbites périodiques obtenues forment dans l'espace de phase une famille continue d'orbites périodiques paramétrisées par l'énergie.

Dans le deuxième chapitre nous allons rappeler le théorème de l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens au sens de Liuoville–Arnold, ainsi que certains effets de ce dernier sur les systèmes hamiltoniens, et nous allons présenter le théorème résultat de Poincaré pour démontrer la non-intégrabilité des systèmes hamiltoniens de Hénon–Heiles et toutes ses généralisations au sens de Liouville–Arnold, indépendamment de la classe de différentiabilité de la deuxième intégrale première.

Les deux techniques utilisées, dans le premier et le deuxième chapitre, sont valables pour des systèmes hamiltoniens ayant des nombres arbitraires de degrés de liberté. Dans ce mémoire, l'étude sera limitée à deux degrés de liberté.

Dans la conclusion nous présenterons les résultats obtenus.

Chapitre 1

Les orbites périodiques du système hamiltonien de Hénon–Heiles

1.1 Le modèle de Hénon–Heiles

Le système potentiel classique de Henon–Heiles a été introduit en 1964 comme un modèle dans la mécanique hamiltonienne afin d'étudier l'existence de l'intégrale troisième du mouvement d'une étoile dans un plan méridien en rotation autour d'une galaxie dans le voisinage d'une orbite circulaire [2].

Il est constitué de deux potentiels harmoniques de dimension 2 plus deux termes cubiques.

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + xy^2 - \frac{1}{3}x^3. \tag{1.1}$$

Ce système potentiel classique de Hénon–Heiles a été généralisé par l' introduction de deux paramètres A et B pour chacun des deux termes cubiques.

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + Bxy^2 + \frac{1}{3}Ax^3. \tag{1.2}$$

Le système hamiltonien associé à (1.2) est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - (Ax^2 + By^2) \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -y - 2Bxy \end{cases} \tag{1.3}$$

Nous désignons par le point, la dérivée par rapport à la variable indépendante temps, t.

Nous appelons (1.3) le système hamiltonien de Hénon–Heiles avec deux paramètres, ou simplement le système de Hénon–Heiles.

L'ensemble des solutions les plus simples et les non-triviales d'un tel système différentiel est celui des orbites périodiques. Cet ensemble est d'une importance et d'un intérêt particuliers car le mouvement au voisinage des orbites périodiques peut être déterminé par leur type de stabilité.

De plus, si le système n'est pas intégrable au sens de Liouville–Arnold, l'existence des orbites périodiques isolées, pour des niveaux d'énergie positives d'un système hamiltonien, qui ont des multiplicateurs différents de 1, est liée à la non existence de n'importe quelle deuxième intégrale première de classe C^1. Ce qui rend l'étude de ce type d'orbites périodiques pertinente.

1.2 La théorie de la moyenne

Dans ce travail nous utilisons ***« la théorie de la moyenne »*** du second ordre pour le calcul des orbites périodiques comme il est établi par Buica et Llibre [3] et qui sera énoncée et détaillée dans le paragraphe suivant.

Cette méthode nous permet de trouver analytiquement des orbites périodiques du système de Hénon–Heiles pour des valeurs positives de l'énergie, en fonction des paramètres A et B.

En effet, cette méthode réduit le problème de trouver des solutions périodiques de certains systèmes différentiels à trouver des zéros de certaines fonctions convenables de dimension finie.

Avant d'énoncer et démontrer la méthode de la moyenne, nous aurons besoin de quelques remarques et propriétés liées à la théorie du degré de Brower.

1.2.1 A propos du degré de Brower

Notation. A Partir d'aujourd'hui on désigne par :

D_xF	:	la matrice jacobienne des dérivées des composantes de F par rapport à x.
D_x^2F	:	certaines matrices dont les composantes sont des dérivées de deuxième ordre.
$J_f(a)$	:	le déterminant jacobien de f calculé en (a).

avec D un ouvert de $\mathbb{R}$. $F, f\colon D \to R^n$ des fonctions.

Définition 1. *Degré de Brower.*
Soit D un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit V un sous ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $V \subset D$, $f\colon \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $0 \notin f(\partial V, \varepsilon)$ pour un certain ε. Nous appelons $\mathbf{d_B(f(\cdot,\varepsilon), V, 0)}$ ***le degré de Brower*** *de la fonction $f(\cdot,\varepsilon)$ par rapport à l'ensemble V et le point 0, tel comme c'est définie en [4].*

Propriété 1. *Une des principales propriétés topologiques du degré de Brower : Si $d_B(f(\cdot,\varepsilon), V, 0)) \neq 0$ alors l'équation $f(\cdot,\varepsilon) = 0$ a une solution dans V.*

Lemme 1. *On considère des fonctions continues $f_i\colon \bar{V} \to \mathbb{R}^n$,*
pour $i = 0 \cdots k$ et $f, g, r\colon \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$ des fonctions continus telles que :

$$g(\cdot,\varepsilon) = f_0(\cdot) + \varepsilon f_1(\cdot) + \varepsilon^2 f_2(\cdot) + \ldots + \varepsilon^k f_k(\cdot),$$
$$f(\cdot,\varepsilon) = g(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(\cdot,\varepsilon).$$

On suppose que

$$g(z,\varepsilon) \neq 0, \text{ pour tout } z \in \partial V,\ \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\},$$

Alors, pour un $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, $d_B(f(\cdot,\varepsilon), V, 0))$ est bien définie et $d_B(f(\cdot,\varepsilon), V, 0)) = d_B(g(\cdot,\varepsilon), V, 0))$.

Démonstration. Nous utilisons l'invariance sous homotopie du degré de Brower.
En effet pour chaque $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$ et *pour*$0 \leq t \leq 1$ on considère l'homotopie continue :

$$g_t(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + t(f(\cdot, \varepsilon) - g(\cdot, \varepsilon)) \text{ pour } 0 \leq t \leq 1.$$

Nous démontrerons que, quand ε est suffisamment petit, $0 \notin g_t(\partial V, \varepsilon)$ pour tout $0 < t \leq 1$. Nous supposons par l'absurde que pour un certain $t_0 \in (0, 1]$ et un certain $x_0 \in \partial V$, $g_{t_0}(x_0, \varepsilon) = 0$. Soit $M > 0$ tel que $|r(z, \varepsilon)| \leq M$ pour tout $z \in \bar{V}$ et pour chaque $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Alors $|g(x_0, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{k+1}$ ce qui n'est pas vrai pour un ε suffisamment petit puisque

$$|g(x_0, \varepsilon)| = |f_0(x_0) + \varepsilon f_1(x_0) + \varepsilon^2 f_2(x_0) + \ldots + \varepsilon^k f_k(x_0)| \neq 0.$$

$\square$

Remarque 2. *(une continuation du lemme 1)*
Supposons que les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées pour le cas $k = 0$ et que, en plus, pour $a \in D$, nous avons $f_0(a) = 0$, alors il existe un voisinage V de a, tel que $f_0(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(f(., \varepsilon), V, 0) \neq 0$.

Définition 2. *Degré de Brouwer pour des fonctions C^1*
Soient $g \in C^1(D)$, $\bar{V} \subset D$ et $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. Supposons aussi que $J_g(z) \neq 0$ pour tout $z \in Z_g$ avec $J_g(z)$ le déterminant jacobien de g en z. Ce qui assure que Z_g est finie, alors

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \operatorname{sign}(J_g(z)).$$

1.2.2 La théorie de la moyenne du 1^{er} ordre

Théorème 3. *On considére le système différentiel suivant :*

$$x'(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \tag{1.4}$$

où $F_1 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T-périodiques par rapport à la première variable et D est un sous *ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit $f_1 : D \to \mathbb{R}^n$ comme suit :*

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s,z)ds, \tag{1.5}$$

Et on suppose que :
(i) F_1 et R sont localement Lipschitzienne par rapport à x ;
(ii) pour $a \in D$ avec $f_1(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $f_1(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.
Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T–périodique $\varphi(\cdot,\varepsilon)$ du système (1.4) tel que $\varphi(0,\varepsilon) \to a$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. **Première partie :**

Commençons par démontrer l'équivalence entre le problème de trouver des solutions T-périodiques d'un certain système différentiel et celui de trouver des zéros à certaines fonctions convenables de dimension finie.

Considérons le système différentiel :

$$x'(t) = F(t,x,\varepsilon), \tag{1.6}$$

où $F : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, T-périodique par rapport à la première variable, localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et D est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Pour chaque $z \in D$ on désigne par $x(\cdot,z,\varepsilon) : [0,t_z) \to \mathbb{R}^n$ la solution de (1.6) avec $x(0,z,\varepsilon) = z$. On suppose que

$$t_z > T \text{ pour tout } z \in D. \tag{1.7}$$

On considère la fonction $f : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$, donnée par

$$f(z,\varepsilon) = \int_0^T F(t, x(t,z,\varepsilon), \varepsilon)dt. \tag{1.8}$$

Chaque solution de (1.6)

$$x : [0,T] \to \mathbb{R}^n \text{ avec } x(0) = x(T) \tag{1.9}$$

peut être prolongée par périodicité à $\mathbb{R}$ et nous aurons la relation :

$$x(T,z,\varepsilon) - x(0,z,\varepsilon) = f(z,\varepsilon).$$

Alors, chaque $(z_\varepsilon, \varepsilon)$ telle que :

$$f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0 \tag{1.10}$$

fournit la solution T–périodique $x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ de (1.6).

L'inverse est aussi vrai, i.e. pour chaque solution T–périodique de (1.6), si on désigne par z_ε sa valeur lorsque $t = 0$ alors (1.10) est vérifiée.

Par conséquent, le problème de trouver des solutions T–périodiques de (1.6), peut être remplacé par le problème de trouver des zéros de la fonction de dimension finie $f(\cdot, \varepsilon)$ donnée par (1.8).

Dans le but d'appliquer le lemme 1 nous avons besoin de la formule de Mac-Laurin. Quand $f : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ est continue et de classe C^k pour ε on écrit :

$$f(z, \varepsilon) = g(z, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(z, \varepsilon), \tag{1.11}$$

avec g donnée par :

$$g(z, \varepsilon) = f(z, 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(z, 0) + ... + \varepsilon^k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \varepsilon^k}(z, 0). \tag{1.12}$$

A l'exception du cas où $\varepsilon = 0$, la fonction r est bien définie et continue. Si on démontre que r est borné dans un certain ensemble de la forme $K \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec K sous ensemble compact de D, donc on aura r continue sur $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Par exemple, si $\dfrac{\partial^k f}{\partial \varepsilon^k}$ est Lipschitzienne dans $K \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, alors r est bornée sur cet ensemble. La continuité de r est nécessaire dans le lemme 1 et, dans ce cas, et à partir d'aujourd'hui, au lieu d'écrire la formule (1.11) avec la fonction r donnée explicitement, on utilise le symbole de Landau (voir par exemple [5] page 11) et on écrit donc dans $K \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$:

$$f(z, \varepsilon) = g(z, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} O(1).$$

Deuxième partie : Pour tout $z \in \overline{V}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, à chaque fois que $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $x(\cdot, z, \varepsilon)$ est définie sur $[0, T]$, i.e. que la relation (1.7) est valable. En effet, par l'existence locale et le théorème d'unicité (voir, par exemple, le théorème 1.2.2, page 2 du [5]), $t_z > h_z$ et $h_z = \inf(T, \frac{b}{M(\varepsilon)})$ où $M(\varepsilon) \geq \left|\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)\right|$ pour tout $t \in [0, T]$, pour chaque x avec

$|x-z| \leq b$ et pour chaque $z \in \overline{V}$. Lorsque $|\varepsilon|$ est suffisamment petit, $M(\varepsilon)$ peut être arbitrairement large, telle que $h_z = T$ pour tout $z \in \overline{V}$.

Pour tout $t \in [0,T]$, $z \in \overline{V}$ et $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ en intégrant 1.4, la relation suivante est vérifiée :

$$x(t,z,\varepsilon) = z + \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s,z,\varepsilon))ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s,z,\varepsilon), \varepsilon)ds, \quad (1.13)$$

et la fonction f donnée par (1.8) devient pour notre système :

$$f(z,\varepsilon) = \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s,z,\varepsilon))ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s,z,\varepsilon), \varepsilon)ds.$$

Maintenant nous démontrons que :

$$f(z,\varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 O(1) \text{ dans } \overline{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \quad (1.14)$$

où f_1 est donnée par (1.5). Remarquons tout d'abord qu'il existe un compact K, un sous ensemble compact de D, tel que $x(t,z,\varepsilon) \in K$ pour tout $t \in [0,T]$, $z \in \overline{V}$ et $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Alors il est facile de voir que :

$$f(z,\varepsilon) - \varepsilon f_1(z) = \varepsilon \int_0^T \left[F_1(s, x(s,z,\varepsilon)) - F_1(s,z)\right] ds + \varepsilon^2 O(1). \quad (1.15)$$

En utilisant le fait que F_1 est lipshitzienne par rapport à x dans $[0,T] \times K$ et la formule (1.13), on obtient les relations suivantes :

$$|F_1(s, x(s,z,\varepsilon)) - F_1(s,z)| \leq L_K \, |x(s,z,\varepsilon) - z| = \varepsilon O(1).$$

Ainsi, (1.14) est vérifiée. En utilisant la remarque (2) , on obtient que l'hypothèse (ii) assure l'existence de z_ε telle que $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ et $z_\varepsilon \to a$ lorsque $\varepsilon \to 0$, alors $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ est la solution périodique de (1.4) et $\varphi(\cdot, \varepsilon) \to a$ quand $\varepsilon \to 0$ (cette implication est due à la propriété de continuité des solutions de (1.4) par rapport à un paramètre et aux données initiales). □

1.2.3 La théorie de la moyenne du 2$^{\text{ème}}$ ordre

Théorème 4. *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t,x) + \varepsilon^2 F_2(t,x) + \varepsilon^3 R(t,x,\varepsilon), \quad (1.16)$$

où F_1*,* $F_2 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$*,* $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ *sont des fonctions continues,* T*–périodiques par rapport à la première variable et* D *un sous ensemble ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. Nous supposons que :*

(i) $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,* F_1*,* F_2*,* R *et* $D_x F_1$ *sont localement Lipschitziennes par rapport à* x*, et* R *est differentiable par rapport à* ε*.*

On a f_1*,* $f_2 : D \to \mathbb{R}^n$ *tel que :*

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s,z)ds = 0,$$
$$f_2(z) = \int_0^T [D_z F_1(s,z) \int_0^s F_1(t,z)dt + F_2(s,z)]ds.$$

(ii) Pour $V \subset D$ *un ensemble ouvert et borné, et pour chaque* $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)\backslash\{0\}$*, il existe* $a \in V$ *tel que* $f_2(a) = 0$ *et* $d_B(f_2, V, 0) \neq 0$*.*

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ *suffisamment petit, il existe une solution* $T-$*périodique* $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ *du système* (1.16) *tel que* $\varphi(0, \varepsilon) \to a$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$*.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est la même que celle du théorème antérieur. Dans toutes les relations qui viendront à continuation, nous considérons qu'elles sont vérifiées pour tout $t \in [0,T]$, $z \in \overline{V}$ et $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Tant que la partie droite du système (1.16) est différentiable par rapport à ε, alors la solution $x(t,z,\varepsilon)$ l'est aussi. Ainsi, par analogie avec (1.13) nous obtenons :

$$x(t,z,\varepsilon) = z + \varepsilon \int_0^t F_1(s,z)ds + \varepsilon^2 O(1),$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t,z,\varepsilon) = \int_0^t F_1(s,z)ds + \varepsilon O(1).$$

En utilisant le fait que $D_x F_1$ etF_2 sont localement Lipschitziennes (donc Lipschitziennes dans $[0,T] \times \overline{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$) on obtient les relations suivantes :

$$F_1(t, x(t,z,\varepsilon)) = F_1(t,z) + \varepsilon D_z F_1(t,z) \cdot \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}(t,z,0) + \varepsilon^2 O(1).$$
$$F_2(t, x(t,z,\varepsilon)) = F_2(t,z) + \varepsilon O(1).$$

En utilisant la relation (4), la fonction f donnée par (1.8) peut être écrite pour notre système $f(z,\varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 f_2(z) + \varepsilon^3 O(1)$ dans $\overline{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Alors en appliquant le lemme (1) on obtient que l'hypothèse (ii) assure l'existence de $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ la solution T–périodique du système (1.16). $\square$

1.3 Les orbites périodiques de Hénon–Heiles

Dans cette section et aprés avoir démontré la théorie de la moyenne dans la section antérieure, nous allons l'appliquer à notre système hamiltonien de Henon–Heiles (1.3). Pour cela nous allons remplacer les variables (x, y, p_x, p_y) par les nouvelles variables (X, Y, p_X, p_Y) en utilisant un petit paramètre ε tel que $x = \varepsilon X$, $y = \varepsilon Y$, $p_x = \varepsilon p_X$ et $p_y = \varepsilon p_Y$.

Le système (1.3) avec les nouvelles variables devient :

$$\begin{cases} \dot{X} &= p_X, \\ \dot{p}_X &= -X - \varepsilon(AX^2 + BY^2), \\ \dot{Y} &= p_Y, \\ \dot{p}_Y &= -Y - 2\varepsilon BXY. \end{cases} \tag{1.17}$$

Ce système reste encore hamiltonien. Son hamiltonien est donné par :

$$\frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2 + X^2 + Y^2) + \varepsilon\left(BXY^2 + \frac{1}{3}AX^3\right). \tag{1.18}$$

Comme le changement de variable n'est qu'une transformation d'échelle, pour tout ε différent de zéro, alors les systèmes originaux (1.3) et leur transformés (1.17) ont essentiellement le même portrait de phase. En plus, le système (1.17), pour un ε suffisamment petit, est proche d'un système intégrable.

Premièrement, on change l'hamiltonien (1.18) et les équations du mouvement (1.17) aux coordonnées polaires. Pour $\varepsilon = 0$ le système (1.17) sera un oscillateur harmonique :

$$X = r\cos\theta, \quad p_X = r\sin\theta, \quad Y = \rho\cos(\theta + \alpha), \quad p_Y = \rho\sin(\theta + \alpha).$$

Rappelons que ce changement de variables est possible quand $r > 0$ et $\rho > 0$. Après avoir fait ce changement de variables, il apparaît dans le système les variables angulaires θ et α. Plus tard la variable θ sera utilisée pour obtenir la periodicité nécessaire afin d'appliquer la théorie de la moyenne.

La valeur fixée de l'énergie dans les coordonnées polaires est :

$$h = \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) + \varepsilon\left(\frac{1}{3}Ar^3\cos^3\theta + Br\rho^2\cos\theta\cos^2(\theta + \alpha)\right), \tag{1.19}$$

et les équations du mouvement sont données par :

$$\begin{array}{rcl}\dot{r} &=& -\varepsilon\sin\theta\left(A\,r^2\cos^2\theta + B\,\rho^2\cos^2(\theta+\alpha)\right),\\ \dot{\theta} &=& -1-\varepsilon\cos\theta\left(A\,r\cos^2\theta + \frac{\rho^2}{r}B\,\cos^2(\theta+\alpha)\right),\\ \dot{\rho} &=& -\varepsilon B\,r\rho\cos\theta\sin(2(\theta+\alpha)),\\ \dot{\alpha} &=& \varepsilon\dfrac{\cos\theta}{r}\left(A\,r^2\cos^2\theta + B(\rho^2-2r^2)\cos^2(\theta+\alpha)\right).\end{array} \tag{1.20}$$

Cependant les dérivées du côté gauche de ces équations sont par rapport à la variable t du temps, qui n'est pas périodique. Alors on change à la variable θ et on la considère comme la variable indépendante et on designe par prime, la dérivée par rapport à θ. Le système (1.20) devient alors :

$$\begin{array}{rcl} r' &=& \dfrac{\varepsilon\,r\sin\theta\left(A\,r^2\cos^2\theta + B\rho^2\cos^2(\theta+\alpha)\right)}{r+\varepsilon(A\,r^2\cos^3\theta + B\rho^2\cos\theta\cos^2(\theta+\alpha))},\\ \rho' &=& \dfrac{\varepsilon\,Br^2\rho\cos\theta\sin(2(\theta+\alpha))}{r+\varepsilon(A\,r^2\cos^3\theta + B\rho^2\cos\theta\cos^2(\theta+\alpha))},\\ \alpha' &=& -\dfrac{\varepsilon\cos\theta\left(B\left(\rho^2-2r^2\right)\cos^2(\theta+\alpha) + A\,r^2\cos^2\theta\right)}{r+\varepsilon(B\rho^2\cos\theta\cos^2(\theta+\alpha) + A\,r^2\cos^3\theta)}.\end{array}$$

Bien sûr, ce système, désormais n'a que trois équations, car nous n'aurons pas besoin de l'équation de θ. Si on écrit le système précédent sous la forme des séries de Taylor en puissance de ε, on a :

$$\begin{array}{rcl} r' &=& \varepsilon\sin\theta(A\,r^2\cos^2\theta + B\rho^2\cos^2(\theta+\alpha)) -\\ && \varepsilon^2\frac{\sin 2\theta}{8r}\left(A\,r^2(1+\cos(2\theta)) + B\rho^2(1+\cos(2(\theta+\alpha))\right)^2 + O(\varepsilon^3),\\ \rho' &=& \varepsilon Br\rho\cos\theta\sin(2(\theta+\alpha)) -\\ && \varepsilon^2 B\rho\cos^2\theta\sin(2(\theta+\alpha))(Ar^2\cos^2\theta + B\rho^2\cos^2(2(\theta+\alpha))) + O(\varepsilon^3),\\ \alpha' &=& -\varepsilon\dfrac{\cos\theta}{r}(A\,r^2\cos^2\theta + B(\rho^2-2r^2)\cos^2(\theta+\alpha)) +\\ && \varepsilon^2\,\frac{\cos^2\theta}{r^2}\,(Ar^2\cos^2\theta + B\rho^2\cos^2(\theta+\alpha))\\ && (A\,r^2\cos^2\theta + B(\rho^2-2r^2)\cos^2(\theta+\alpha)) + O(\varepsilon^3).\end{array} \tag{1.21}$$

Maintenant le système (1.21) est 2π-périodique par rapport à la variable θ.

Afin d'appliquer le théorème 4 nous devons fixer la valeur de l'intégrale première à $h > 0$, et en résolvant l'équation (1.19)pour ρ on obtient :

$$\rho = \sqrt{\frac{h - r^2/2 - \varepsilon A\, r^3 \cos^3\theta/3}{1/2 + \varepsilon\, B\, r\cos\theta\cos^2(\theta+\alpha)}}. \tag{1.22}$$

Alors en substituant ρ dans les équations (1.21), on obtient les deux équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}
r' &= \varepsilon\sin\theta(A\,r^2\cos^2\theta + B(2h-r^2)\cos^2(\theta+\alpha)) - \\
&\quad \varepsilon^2\Big(\frac{\sin 2\theta}{8r}\big(A\,r^2(1+\cos(2\theta)) + B\left(2h-r^2\right)(1+\cos(2(\theta+\alpha)))\,\big)^2 + \\
&\quad \frac{2}{3}AB\,r^3\sin\theta\cos^3\theta\cos^2(\theta+\alpha) + \\
&\quad 2B^2hr\sin(2\theta)\cos^4(\theta+\alpha) - B^2r^3\sin(2\theta)\cos^4(\theta+\alpha)\,\Big) + O(\varepsilon^3),\\
\alpha' &= \varepsilon\left(\frac{B}{r}(3r^2-2h)\cos\theta\cos^2(\theta+\alpha) - Ar\cos^3\theta\right) + \\
&\quad \varepsilon^2(A^2r^2\cos^6\theta + \tfrac{2}{3}AB(6h-5r^2)\cos^4\theta\cos^2(\theta+\alpha) + \\
&\quad \frac{B^2}{r^2}(r^2-2h)^2\cos^2\theta\cos^4(\theta+\alpha)\,) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Effectivement le système(1.23) satisfait les suppositions du théorème 4, et il a la forme de (1.16) avec $F_1 = (F_{11}, F_{12})$ et $F_2 = (F_{21}, F_{22})$ tel que :

$$\begin{aligned}
F_{11} &= \sin\theta\big(A\,r^2\cos^2\theta + B(2h-r^2)\cos^2(\theta+\alpha)\big),\\
F_{12} &= \frac{B}{r}(3r^2-2h)\cos\theta\cos^2(\theta+\alpha) - Ar\cos^3\theta,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_{21} &= -\frac{\sin 2\theta}{8r}\,\big(A\,r^2(1+\cos(2\theta)) + B\left(2h-r^2\right)(1+\cos(2(\theta+\alpha)))\,\big)^2 - \\
&\quad \frac{2}{3}AB\,r^3\sin\theta\cos^3\theta\cos^2(\theta+\alpha) - 2B^2hr\sin(2\theta)\cos^4(\theta+\alpha) + \\
&\quad B^2r^3\sin(2\theta)\cos^4(\theta+\alpha),\\
F_{22} &= A^2r^2\cos^6\theta + \frac{2}{3}AB(6h-5r^2)\cos^4\theta\cos^2(\theta+\alpha) + \\
&\quad \frac{B^2}{r^2}(r^2-2h)^2\cos^2\theta\cos^4(\theta+\alpha).
\end{aligned}$$

Comme $r \neq 0$, les fonctions F_1 et F_2 sont analytiques. Par ailleurs elles sont 2π-périodiques par rapport à la variable θ, la variable indépendante du système (1.23).

Par contre la théorie de la moyenne du 1$^{\text{er}}$ ordre n'est pas applicable car f_1 s'annule. En effet,

$$f_1(r,\alpha) = \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12})\, d\theta = (0,0)\,.$$

Comme f_1 du théorème 4 s'annule, on calcule la fonction f_2 en appliquant la théorie de la moyenne du 2$^{\text{ème}}$ ordre. Si on trouve que f_2 est différente de zéro alors les zéros de $f_1 + \varepsilon f_2$ sont les zéros de f_2. Alors nous avons f_2 définie comme suit :

$$f_2(r,\alpha) = \int_0^{2\pi} [D_{r\alpha}F_1(\theta,r,\alpha).y_1(\theta,r,\alpha) + F_2(\theta,r,\alpha)]\, d\theta, \tag{1.24}$$

avec

$$y_1(\theta,r,\alpha) = \int_0^{\theta} F_1(t,r,\alpha)\, dt\,.$$

Les deux composantes du vecteur y_1 sont

$$\begin{aligned} y_{11} &= \int_0^{\theta} F_{11}(t,r,\alpha)\, dt = \\ &\frac{1}{3}\left(B(2h-r^2)\sin^2(\theta/2)\left(\cos(2(\theta+\alpha)) + 2\cos(2\alpha+\theta) + 3\right) - A\,r^2(\cos^3\theta - 1)\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{12} &= \int_0^{\theta} F_{12}(t,r,\alpha)\, dt = \\ &-\frac{Ar}{12}(9\sin\theta + \sin 3\theta) - \frac{Bh}{6r}(3\sin(2\alpha+\theta) + \sin(2\alpha+3\theta) - 4\sin 2\alpha + 6\sin\theta) + \\ &\frac{Br}{4}(3\sin(2\alpha+\theta) + \sin(2\alpha+3\theta) - 4\sin(2\alpha) + 6\sin\theta). \end{aligned}$$

Pour la matrice Jacobienne

$$D_{r\alpha}F_1(\theta,r,\alpha) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_{11}}{\partial r} & \dfrac{\partial F_{11}}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial F_{12}}{\partial r} & \dfrac{\partial F_{12}}{\partial \alpha} \end{pmatrix},$$

On obtient

$$\begin{pmatrix} \left(2Ar\cos^2\theta - 2Br\cos^2(\theta+\alpha)\right)\sin\theta & -2B(2h-r^2)\cos(\theta+\alpha)\sin\theta\sin(\theta+\alpha) \\ \begin{array}{c} -A\cos^3\theta + 6B\cos^2(\theta+\alpha)\cos\theta + \\ -\dfrac{B}{r^2}\left(3r^2-2h\right)\cos^2(\theta+\alpha)\cos\theta \end{array} & -\dfrac{2B}{r}(3r^2-2h)\cos\theta\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix}.$$

On peut calculer à partir du théorème 4 la fonction(1.24) et on obtient :

$$\begin{aligned} f_2 \;=\; & \Big(-\frac{Br}{12}(6B-A)(r^2-2h)\sin 2\alpha, \\ & \frac{1}{12}\big(r^2(5A^2-12AB-3B^2)-2B(A-6B)(h-r^2)\cos(2\alpha)+2Bh(6A-B)\big) \Big). \end{aligned}$$

nous devons trouver les zéros (r^*, α^*) du $f_2(r, \alpha)$, et vérifier que Jacobien :

$$|D_{r,\alpha} f_2(r^*, \alpha^*)| \neq 0. \tag{1.25}$$

C'est la condition suffisante dont on aura besoin pour démontrer que le degré de Brower de la fonction f_2 en un point fixe (r^*, α^*) est non nul. En résolvant l'équation $f_2(r, \alpha) = 0$ on obtient 5 solutions (r^*, α^*) avec $r^* > 0$, à savoir

$$\left(\sqrt{2}h, \pm \operatorname{arcsec} \frac{B(A-6B)}{4B^2+6AB-5A^2}\right), \tag{1.26}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2Bh}{3B-A}}, 0\right), \tag{1.27}$$

$$\left(\sqrt{\frac{14Bh}{9B-5A}}, \pm\pi/2\right). \tag{1.28}$$

- Les deux premières solutions (1.26) ne sont pas acceptables car on obtient dans la relation (1.22) que $\rho = 0$ lorsque $\varepsilon = 0$, et ρ doit être strictement positive.
- La troisième solution (1.27) existe si $B(3B - A) > 0$.
- Les deux dernières solutions (1.28) existent si $B(9B - 5A) > 0$.

Le Jacobien (1.25) de la troisième solution est :

$$-\frac{5B^2h^2(A-6B)(A-2B)(A+B)}{9(A-3B)}, \tag{1.29}$$

et pour les deux dernières solutions les Jacobiens coïncident. Le Jcobien obtenu est égal à :

$$\frac{7B^2h^2(A-6B)(5A-2B)(A-B)}{9(5A-9B)}. \tag{1.30}$$

En resumé, à partir du théorème 4, la troisième solution de $f_2(r, \alpha) = 0$ produit une orbite périodique pour le système (1.23) (et par conséquent au système hamiltonien (1.17) où le niveau d'énergie de l'hamiltonien h est strictement positif), si

$$B(3B-A)>0,\ (A-6B)(A-2B)(A+B)\neq 0,$$

de la relation (1.22) on a $\rho = \sqrt{2(A-2B)h/(A-3B)}$ lorsque nous avons $(2B-A)(3B-A)>0$.

Les conditions $B(3B-A)>0$ et $(2B-A)(3B-A)>0$ peuvent être réduites à $B(2B-A)>0$, avec $(A-6B)(A-2B)\neq 0$ inclue, mais en excluant $A+B\neq 0$. Donc la troisième solution produit une solution lorsque $B(2B-A)>0$ et $A+B\neq 0$.

De la même façon les deux dernières solutions du $f_2(r,\alpha)=0$ produisent deux orbites périodiques du système (1.23) si

$$B(9B-5A)>0,\ (A-6B)(5A-2B)(A-B)\neq 0.$$

Du (1.22) on obtient $\rho = \sqrt{2(5A-2B)h/(5A-9B)}$ lorsque nous avons $(2B-5A)(9B-5A)>0$.

Les conditions $B(9B-5A)>0$ et $(2B-5A)(9B-5A)>0$ peuvent être réduites à $B(2B-5A)>0$, où la condition $(A-6B)(5A-2B)(A-B)\neq 0$ est inclue. Alors la quatrième et la cinquième solutions produisent deux orbites périodiques à chaque fois que $B(2B-5A)>0$. Donc :

- Il y a une orbite périodique si la troisième solution existe et les deux dernières solutions n'existent pas.
- Il y a deux orbites périodiques si les deux dernières solutions existent et la troisième n'existe pas, i.e. lorsque $A+B=0$.
- Finalement, il y a 3 orbites périodiques si la troisième, la quatrième et la cinquième existent.

Les conditions suffisantes que doivent vérifier les deux paramètres A et B dans le système de Hénon–Heiles pour garantir l'existence des orbites périodiques sont données dans le théorème suivant :

Théorème 5. *Pour chaque niveau d'énergie positive, le système hamiltonien de Hénon–Heiles* (1.3) *a au moins* *(a) Une orbite périodique si* $(2B-5A)(2B-A)<0$ *(voir Figure 1.1),*

(b) Deux orbites périodiques si $A+B=0$ *et* $A\neq 0$ *(Ce cas inclut le système classique de Hénon–Heiles), et*

(c) Trois orbites périodiques si $B(2B-5A)>0$ *et* $A+B\neq 0$ *(voir Figure 1.2).*

Les régions, dans l'espace de paramètres, où les orbites périodiques existent sont résumées dans les figures 1.1 et 1.2.

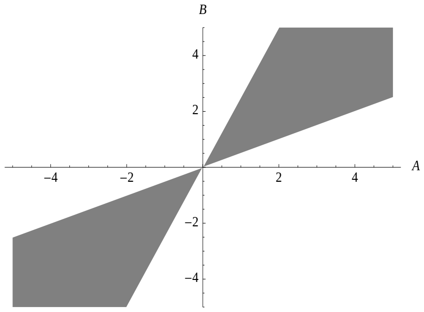

FIGURE 1.1 – Région ouverte $(2B-5A)(2B-A)<0$ dans l'espace de paramètres (A,B) où il existe au moins une orbite périodique avec des multiplicateurs différents de 1.

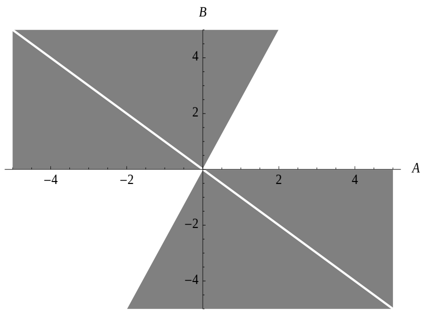

FIGURE 1.2 – Région ouverte $B(2B-5A)>0$ et $A+B\neq 0$ dans l'espace de paramètres (A,B) où il existe au moins trois orbites périodiques avec des multiplicateurs différents de 1. Lorsque $A+B=0$, il existe au moins deux orbites périodiques avec des multiplicateurs différents de 1.

Chapitre 2

La non–intégrabilité au sens de Liouville–Arnold des systèmes hamiltoniens généralisés de Hénon–Heiles

Dans ce chapitre nous allons démontrer la non–intégrabilité au sens de Liouville–Arnold [1] de notre système(1.23).

L'outil, sur lequel on se basera pour faire cette étude, est un théorème résultat de Poincaré qui utilise les multiplicateurs (i.e. les valeurs propres) de la matrice de monodromie obtenue de l'équation variationnelle de la solution périodique du système différentiel étudié.

1. **Joseph Liouville** (1809–1882) est un mathématicien français. Il a publié dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie.
Vladimir Igorevitch Arnold (1937–2010) est un mathématicien russe, l'un des plus grands mathématiciens du XX[e] siècle, sa thèse sous la direction de Kolmogorov étudie la stabilité du mouvement planétaire. Par sa célèbre conjecture sur les trajectoires périodiques des systèmes hamiltoniens, il est reconnu comme l'un des fondateurs de la topologie symplectique.

Tout d'abord, rappelons quelques définitions, théorèmes et propositions concernant l'intégrabilité au sens de Liouville–Arnold.

2.1 Préliminaires

2.1.1 L'intégrabilité au sens de Liouville–Arnold

Soit H un hamiltonien avec deux degrés de liberté. Il est dit ***intégrable*** au sens de Liouville–Arnold s'il a une intégrale première C : indépendante de H (i.e. le vecteur gradient de H et de C sont indépendants en tous points de l'espace de phase sauf peut être pour un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle) et en involution avec H (i.e. la parenthèse de Poisson de H et C est nulle, $\{H, C\} = 0$).

Remarque 6. *Pour les systèmes hamiltoniens avec deux degrés de liberté, la condition d'involution est toujours vérifiée. Le fait que C soit intégrale première du système hamiltonien implique que la parenthèse de Poisson est toujours égale à zéro.*

Là, nous présenterons le théorème de Liouville–Arnold restreint aux systèmes hamiltoniens avec deux degrés de liberté.

Théorème 7. *De Liouville–Arnold.*

Nous supposons qu'un système hamiltonien avec deux degrés de liberté et définie sur l'espace de phase M, a son hamiltonien H et la fonction C comme deux intégrales premières indépendants en involution. Si $I_{hc} = \{p \in M : H(p) = h \text{ et } C(p) = c\} \neq \emptyset$ et (h, c) est une valeur régulière dans l'application (H, C) alors les affirmations suivantes sont vérifiées :

(a) I_{hc} est une sous variété de M, de dimension deux, sous le flot du système hamiltonien.

(b) Si le flot d'une composante connexe I^*_{hc} de I_{hc} est complet, alors I^*_{hc} est isomorphe soit au tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, soit au cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, soit au plan $\mathbb{R}^2$. Si I^*_{hc} est compact, alors le flot sur lui est toujours complet et $I^*_{hc} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(c) Sous les hypothèses de (b) *le flot sur* I_{hc}^* *est conjugué à un flot linéaire sur* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$*, sur* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$*, ou sur* $\mathbb{R}^2$*.*

Résultat du théorème de Liouville–Arnold

Le principal résultat de ce théorème est de pouvoir réduire l'espace de phase de 4 dimensions du système de Hénon–Heiles, à une sous variété de deux dimensions I_{hc}. En plus si le flot sur la composante connexe I_{hc}^* est complet alors I_{hc}^* isomorphes à un tore, à un cylindre ou à un plan où le flot est conjugué à un flot linéaire.

Dans le cas où la composante connexe I_{hc}^* est isomorphe à un tore, alors nous avons :

– soit toutes les orbites de ce tore sont ***périodiques*** si le nombre de rotations associées à ce tore est rationnel,
– soit elles sont ***quasi–périodiques*** (i.e. chaque orbite est dense dans le tore) si le nombre de rotations associées à ce tore est irrationnel.

2.1.2 A propos de la matrice de monodromie

On considère maintenant un système différentiel autonome

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

où $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ est C^2, U est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ et le ($\cdot = \frac{\partial}{\partial t}$). La solution générale de (2.1) est $\phi(t, x_0)$ avec $\phi(0, x_0) = x_0 \in U$ et t appartient à son intervalle maximal de définition.

On dit que $\phi(t, x_0)$ est T**–périodique** avec $T > 0$ si et seulement si

$$\phi(t, x_0) = \begin{cases} x_0 & \text{si } t = T \\ \neq x_0 & \text{si } t \in (0, T) \end{cases}$$

L'**orbite périodique** associée à la solution périodique $\phi(t, x_0)$ est

$$\gamma = \{\phi(t, x_0), t \in [0, T]\}$$

.

L' ́equation variationnelle associée à la solution T–Périodique $\phi(t, x_0)$ est :

$$\dot{M} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Big|_{x=\phi(t,x_0)} \right) M, \tag{2.2}$$

où M est une matrice $n \times n$.

La matrice de monodromie associée à la solution T–périodique est la solution $M(T, x_0)$ de (2.2) qui vérifie la relation suivante $M(0, x_0) = Id$. Les valeurs propres λ de $M(T, x_0)$ sont appelées **les multiplicateurs** de l'orbite périodique.

Proposition 8. *Pour un* ***système différentiel autonome****, un de ses multiplicateurs est toujours égal à* 1 *et son vecteur propre associé est tangent à l'orbite périodique.*

Démonstration. Soit $\phi(t, x_0)$ une solution T–périodique de (2.1) avec $t \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in U$ qui n'est pas un point d'équilibre. Nous avons :

$$\phi(\tau, \phi(t, x_0)) = \phi(t + \tau, x_0) \tag{2.3}$$

En dérivant (2.3) par rapport à x et en remplaçant t par 0 et τ par T :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x_0)\dot{\phi}(0, x_0) = \dot{\phi}(T, x_0). \tag{2.4}$$

Comme $\phi(T, x_0) = x_0$ donc $\dot{\phi}(T, x_0) = f(\phi(T, x_0)) = f(x_0)$

de la même manière on obtient que $\dot{\phi}(0, x_0) = f(x_0)$ donc (2.4) sera :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(T, x_0) f(x_0) = f(\phi(t, x). \tag{2.5}$$

D'autre part comme $\phi(t, x)$ est une solution de (2.1) alors $\frac{d\phi(t,x)}{dt} = f(x)$ et en dérivant par rapport à x on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{d\phi(t, x)}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} f(\phi(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x)$$

En utilisant le lemme de Schwartz le résultat est :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(\phi(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x).$$

Donc, on constate que $\frac{d\phi(t,x)}{dx}$ est solution de (2.2). Alors la matrice de monodromie associée à $\phi(t, x_0)$ est $\frac{\partial}{\partial x}\phi(T, x_0)$ avec

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(0, x) = Id \text{ parceque } (\phi(0, x) = x).$$

Donc, de la relation (2.5) nous obtenons que 1 est le multiplicateur de la matrice de monodromie $\frac{\partial}{\partial x}\phi(T, x_0)$ et que $f(x_0)$ est son vecteur associé, avec $f(x_0) \neq 0$ (x_0 n'est pas un point d'équilibre). Le fait que $\dot{\phi}(0, x_0) = f(x_0)$ montre que ce vecteur propre est tangent à l'orbite périodique en x_0. □

Proposition 9. *Une solution périodique d'**un système Hamiltonien autonome** a toujours deux multiplicateurs égaux à 1. En effet le premier multiplicateur est égal à 1 dû au fait qu'il existe une orbite périodique et le deuxième dû à l'existence de la première intégral H donnée par l'hamiltonien.*

Démonstration. L'hamiltonien H est intégrale première de (2.1) alors nous avons toujours $H(\phi(t, x)) = H(x)$. Si on dérive par rapport à x nous aurons :

$$\nabla H(\phi(t, x))\frac{\partial\phi(t, x)}{\partial x} = \nabla H(x),$$

En remplaçant t par T, x par x_0 et $\phi(T, x_0)$ par x_0 on obtient :

$$\nabla H(x_0)\frac{\partial\phi(T, x_0)}{\partial x} = \nabla H(x_0),$$

qui est équivalente à

$$(\frac{\partial\phi(T, x_0)}{\partial x})^T\nabla H(x_0) = \nabla H(x_0),$$

$\nabla H(x_0)$ est le vecteur propre de $(\frac{\partial\phi(T,x_0)}{\partial x})^T$ associé à la valeur propre 1. D'autre part comme nous avons déjà démontré dans la proposition antérieure :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(T, x_0)f(x_0) = f(x_0).$$

i.e. $f(x_0)$ est le vecteur propre de $\frac{\partial\phi}{\partial x}(T, x_0)$ associé à la valeur propre 1. Donc si ∇Het f sont linéairement indépendants, le système étudié aura au moins 2 multiplicateurs égaux à 1. □

2.1.3 Poincaré et l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens

Théorème 10. *Théorème dûe au résultat de Poincaré*

Si un système hamiltonien, ayant deux degrés de liberté et un hamiltonien H est intégrable au sens de Liouville–Arnold et C est une deuxième intégrale première telle que les gradients de H et C sont linéairement indépendants en chaque point de l'orbite périodique du système (i.e. leur gradients sont linéairement indépendants en tout point de leur domaine de définition sauf pour un ensemble dont la mesure de Lebesgue vaut zéro) alors tous les multiplicateurs de cette orbite périodique sont égaux à 1.

Ce théorème sera la technique clé de l'étude de la non–intégrabilité du système de Hénon–Heiles, indépendamment de la classe de la différentiabilité qui peut avoir la deuxième intégrale première. En revanche, ce n'était pas évident de trouver des orbites périodiques avec des multiplicateurs différents de 1.

2.2 La non-intégrabilité des systèmes de Hénon–Heiles

Donc, d'après ce que nous venons de démontrer dans la première partie de ce deuxième chapitre, deux des valeurs propres de la matrice de monodromie de l'équation variationnelle associée à la solution périodique du système de Hénon–Heiles, sont égales à 1.

Reste à chercher les deux valeurs propres restantes λ_1, λ_2.

Pour cela, on se basera sur le livre de Malkin [6] où il est démontré que si le Jacobien $|D_{r,\alpha}f_2(r,\alpha)|$ des points d'équilibre (r^*,α^*) du système différentiel moyenné de $2^{\text{éme}}$ ordre du système (1.23), est différent de zéro, alors cela fournit des orbites périodiques.

Il y est également démontré que les valeurs propres de la matrice de monodromie associée au système (1.23), sont les mêmes valeurs propres de la matrice $D_{r,\alpha}f_2(r,\alpha)$.

Donc, notre système (1.23) a comme valeurs propres : 1, 1, λ_1, λ_2. D'autre part, comme le Jacobien $|D_{r,\alpha} f_2(r,\alpha)|$ n'est que le produit de ces valeurs propres donc :

$$|D_{r,\alpha} f_2(r,\alpha)| = \lambda_1 \lambda_2.$$

Dans le cas de la troisième solution, le Jacobien est égal à :

$$-\frac{5B^2h^2(A-6B)(A-2B)(A+B)}{9(A-3B)} = \lambda_1\lambda_2\,, \tag{2.6}$$

Dans le cas de la quatrième et de la cinquième solution, le Jacobien est égal à :

$$\frac{7B^2h^2(A-6B)(5A-2B)(A-B)}{9(5A-9B)} = \lambda_1\lambda_2\,. \tag{2.7}$$

Et ces Jacobiens sont en général différents de 1 donc $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ et cela implique qu'au moins une des deux valeurs propres est différente de 1.

Le résultat obtenu après cette étude, via les orbites périodiques et le théorème résultat de Poincaré, se résume dans le théorème suivant :

Théorème 11. *Supposons que le système* (1.3) *de Hénon–Heiles satisfait les conditions d'une, des affirmations énoncées dans le théorème* (5)*, et on note* (x) *cette affirmation alors sous les conditions de l'affirmation* (x) *:*

– *Soit le système de Hénon–Heiles est intégrable au sens de Liouville–Arnold et les gradients des deux constantes du mouvement H et C sont linéairement dépendants en quelques points de ses orbites périodiques,*
– *Soit le système de Hénon–Heiles n'est pas intégrable avec n'importe quelle deuxième intégrale première de C^1.*

Chapitre 3

Conclusion

Le système de Hénon–Heiles généralisé admet, pour chaque niveau d'énergie positive, au moins :

- **Une orbite périodique** si $(2B - 5A)(2B - A) < 0$,
- **Deux orbites périodiques** si $A + B = 0$ et $A \neq 0$ (ce cas contient le système classique de Hénon–Heiles),
- **Trois orbites périodiques** si $B(2B - 5A) > 0$ et $A + B \neq 0$.

Le système de Hénon–Heiles **n'est pas intégrable** au sens de Liouville–Arnold car
Si on suppose qu'il satisfait les conditions d'une des affirmations du théorème 5 alors d'après le théorème dû au résultat de Poincaré :

- Soit le système de Hénon–Heiles est intégrable au sens de Liouville–Arnold et les gradients des deux constantes du mouvement H et C sont lineairement dépendants en quelques points de ses orbites périodiques,
- Soit le système de Hénon–Heiles n'est pas intégrable avec n'importe quelle deuxiéme intégrale première de C^1.

.

Bibliographies

[1] Llibre J. et Jiménez-Lara L., *Periodic orbits and non–integrability of Hénon–Heiles systems*,J. Phys. A : Math. Theor. **44** (2011), 205103 (14pp).

[2] Hénon M. et Heiles C., *The applicability of the third integral of motion : some numerical experiments*, Astron. J. **69** (1964), 73–84.

[3] Buică A. et Llibre J., *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 7–22.

[4] Brower F., *Fixed point theory and nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **9** (1983), 1–39.

[5] Sanders J.A. et Verhulst F., *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Appl. Math. Sci. **59** (1985), Springer.

[6] Malkin I.G., *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.

[7] Llibre J. et Valls C. *On the C^1 non–integrability of differential systems via periodic orbits* in European J. of Applied Math. **22** (2011), 381–391.

[8] Verhulst F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer, 1991.