ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 34.1 (2016): 107-128
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1664
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile

Study of Van Hiele levels of reasoning in students from vulnerable secondary schools in Chile

María Aravena Díaz
Departamento de Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule. (Talca, Chile).
maravena@ucm.cl

Ángel Gutiérrez, Adela Jaime
Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Magisterio, Universitat de València. (Valencia, España).
angel.gutierrez@uv.es, adela.jaime@uv.es

RESUMEN • Presentamos los resultados de una investigación enfocada a mejorar el aprendizaje de la geometría y la adquisición de destrezas de razonamiento matemático de estudiantes de 2.º año medio de centros de enseñanza secundaria vulnerables de Chile. Se ha diseñado un experimento de enseñanza, con grupos experimental y control, basado en una unidad de enseñanza, diseñada de acuerdo con los niveles y las fases de Van Hiele, y en un pretest y un postest, para evaluar el cambio en el nivel de razonamiento de los estudiantes derivado de la intervención. Los resultados muestran una diferencia significativa, a favor del grupo experimental, en el desarrollo del nivel de razonamiento de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE: Van Hiele; geometría; semejanza; centros vulnerables; educación secundaria en Chile.

ABSTRACT • We present results of a research aimed at improving the learning of geometry and the acquisition of mathematical reasoning skills of students in 2nd year of secondary education in vulnerable centres of Chile. We have designed a teaching experiment, with experimental and control groups, based on a teaching unit, designed according to the Van Hiele levels and phases, and a pretest and postest, to assess the change in students' Van Hiele level of reasoning after the intervention. The results show a significant difference, in favour of the experimental group, in the development of students' level of reasoning.

KEYWORDS: Van Hiele; geometry; similarity; vulnerable schools; secondary education in Chile.

Recepción: enero 2015 • Aceptación: septiembre 2015 • Publicación: marzo 2016

Aravena Díaz, M., Gutiérrez, A., Jaime, A., (2016) Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. Enseñanza de las Ciencias, 34.1, pp. 107-128

INTRODUCCIÓN

En las pruebas PISA (2009, 2012), Chile estuvo muy por debajo de la media internacional, presentando sus estudiantes serias deficiencias en la resolución de problemas y en los procesos deductivos y argumentativos en geometría (Aravena y Caamaño, 2013). En ese estudio se puede observar que solo un 1% de los estudiantes chilenos alcanzaron el nivel 5 o 6 declarado por PISA. El problema de la calidad de la enseñanza de las matemáticas en Chile está directamente relacionado con la segregación de los centros de enseñanza públicos, a los que asisten los estudiantes más vulnerables, como muestran diversos estudios que evidencian serias dificultades en la comprensión de las matemáticas, especialmente de la geometría (Aravena y Caamaño, 2013).

La OCDE (2004, 2009) ha hecho hincapié en esta problemática y ha puesto el énfasis en la severa segmentación que existe en la educación chilena, recomendando centrar la atención de forma urgente en corregir las desigualdades, considerando crucial una mejor preparación del profesorado.

Una de las áreas de las matemáticas con mayores dificultades y obstáculos de aprendizaje en Chile durante los últimos 20 años ha sido la geometría ya que, en la mayoría de los centros de enseñanza, apenas se trabaja (Aravena y Caamaño, 2013).

La problemática descrita en los párrafos anteriores es particularmente importante en la Región del Maule, una de las más pobres del país y en la que el alumnado ha presentado desde hace décadas los más bajos índices de logro en matemática con respecto a las otras regiones, con enormes debilidades, en particular, en el razonamiento geométrico.

En este contexto, centrándonos en el 2.º año medio (educación secundaria, alumnos de 15-16 años), nos planteamos desarrollar un proyecto de investigación enfocado a diseñar y experimentar estrategias de enseñanza de la geometría que permitieran mejorar notablemente los resultados académicos de los estudiantes de la región.

Un factor que hay que tener en cuenta al diseñar estrategias de enseñanza es el estudio de los procesos cognitivos de los estudiantes. Para ello hemos considerado diversos enfoques que explican la evolución del pensamiento de los alumnos e identifican distintas habilidades en la resolución de problemas geométricos. Nos han resultado de interés los trabajos de Van Hiele (1957, 1986), al caracterizar y analizar diversas operaciones mentales o físicas de los estudiantes. La coordinación entre imaginación, visualización, observación y razonamiento resulta de interés en la resolución de problemas geométricos, puesto que esta se constituye en la puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo, donde los ejemplos gráficos forman parte de los diferentes modos de resolución de problemas geométricos.

En este artículo nos centramos en una parte de dicho proyecto de investigación, en la que se abordan las siguientes cuestiones generales de investigación: ¿cuál es el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de 2.º año medio de centros públicos de enseñanza vulnerables? ¿Mejora su nivel de razonamiento cuando son formados mediante unidades de enseñanza basadas en la resolución de problemas?

Los resultados de la investigación dan cuenta de que los estudiantes de secundaria presentan dificultades y obstáculos en los procesos de razonamiento en geometría y que estos pueden ser controlados conociendo cómo se articulan los elementos cognitivos y el nivel de razonamiento en el que se encuentran, mediante organizaciones de la enseñanza diseñadas utilizando como referente teórico el modelo de Van Hiele (Owens y Outhred, 2006; Battista, 2007). Por ello, hemos concretado las cuestiones de investigación anteriores en los siguientes objetivos específicos:

– Caracterizar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes de 2.º año medio de los centros públicos vulnerables de enseñanza de la Región del Maule.

– Evaluar la variación del nivel de razonamiento geométrico de dichos estudiantes como consecuencia de haber sido formados mediante una intervención de enseñanza diseñada de acuerdo con el modelo de Van Hiele.

En este artículo presentamos los resultados de la mencionada investigación experimental referidos a estos objetivos, basada en una intervención de enseñanza de la geometría fundamentada en los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Ello nos ha permitido acumular evidencias empíricas sobre la forma como razonan los estudiantes, organizar al alumnado de acuerdo con su nivel de razonamiento y valorar las mejoras producidas al implementar dicha intervención.

Numerosas investigaciones han utilizando el modelo de Van Hiele para detectar el nivel de razonamiento de estudiantes y profesores o para diseñar y poner en práctica secuencias experimentales de enseñanza. El modelo ha sido utilizado en varios estudios, cuyas aportaciones muestran metodologías para evaluar o describir el nivel de razonamiento de los estudiantes (Usikin, 1982; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Perdikaris, 2004; Aires, Campos y Poças, 2015) y profesores (Mayberry, 1983; Afonso, 2003) o analizan la evolución del razonamiento de los estudiantes poniendo en práctica secuencias de enseñanza (Jaime, 1993; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Guillén, 1996; Aravena y Caamaño, 2013; Cabello, 2013). Otras investigaciones han permitido caracterizar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento en contextos específicos, como isometrías o geometría espacial (Jaime, 1993; Guillén, 1996; Saads y Davis, 1997; Gutiérrez, Pegg y Lawrie, 2004, Aravena y Caamaño, 2013).

La mayoría de dichas investigaciones se han realizado con muestras pequeñas, incluso estudios de casos, que no permiten extrapolar los resultados. En nuestro estudio hemos utilizado una muestra amplia, estadísticamente significativa, con el fin de poder extrapolar los resultados obtenidos a toda la población escolar vulnerable de la región. El interés del estudio radica, por un lado, en lo explicitado anteriormente respecto de las características de la población estudiantil y, por otro, en la representatividad de la muestra.

En las restantes secciones de este artículo caracterizamos el marco teórico del estudio, describimos la metodología aplicada, hacemos un análisis cuantitativo y cualitativo de la actuación de los estudiantes y, finalmente, enunciamos conclusiones e implicaciones del estudio.

MARCO TEÓRICO

Como base para el diseño, implementación y análisis de resultados, asumimos los planteamientos del modelo de Van Hiele, que nos permite analizar el nivel de razonamiento de los estudiantes en el trabajo geométrico y la elaboración y organización de actividades para la enseñanza de la geometría (Van Hiele, 1957; 1986; Gutiérrez y Jaime, 1998; Battista, 2007; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Guillén, 1996; Cabello, 2013). Las publicaciones sobre el modelo de Van Hiele nos aportan evidencias de los tipos de dificultades y errores presentados por los alumnos (Guillén, 1996; Cabello, 2013) y el grado de adquisición alcanzado en cada uno de los niveles (Jaime, 1993; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991). En Owens y Outhred (2006) y Battista (2007) se ofrecen revisiones muy detalladas de la investigación relacionada con el modelo de Van Hiele, así como análisis de cuestiones de investigación abiertas.

Sintetizamos a continuación las características básicas de cada nivel de razonamiento de Van Hiele, descritas con mayor detalle en Fuys, Geddes y Tischler (1988) y Jaime y Gutiérrez (1990). El modelo considera cinco niveles de razonamiento pero, debido a las características de los estudiantes, aquí tenemos en cuenta solo los cuatro primeros.

Nivel 1 (reconocimiento): los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, centrando sus descripciones en el aspecto físico de las figuras. Perciben las figuras como objetos individuales. No son capaces de generalizar características de una figura a otras.

Nivel 2 (análisis): los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas. Pueden deducir y demostrar nuevas propiedades empíricamente. Las clasificaciones que hacen de familias de figuras pueden ser de tipo inclusivo si solo intervienen propiedades con estructura lógica simple o de tipo exclusivo en caso contrario.

Nivel 3 (clasificación): los estudiantes empiezan a desarrollar la capacidad de razonamiento deductivo abstracto, pudiendo realizar demostraciones informales. Pueden clasificar familias de figuras independientemente de la complejidad de sus propiedades y comprender los requisitos de una definición correcta.

Nivel 4 (deducción formal): los estudiantes pueden comprender y realizar demostraciones deductivas formales y entienden su necesidad como medio para verificar la verdad de una afirmación. También pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas. Aceptan la existencia de demostraciones alternativas del mismo teorema y de definiciones equivalentes del mismo concepto.

El razonamiento matemático se basa en realizar, según la tarea planteada, algunos de los procesos de reconocimiento y descripción, uso o formulación de definiciones, clasificación y demostración (Gutiérrez y Jaime, 1998). Por tanto, la correcta evaluación del nivel de razonamiento de Van Hiele obliga a evaluar cómo razonan los estudiantes cuando realizan cada uno de dichos procesos. Estos autores detallan las características de cada proceso matemático en cada nivel de Van Hiele (tabla 1), que es necesario tener en cuenta en la construcción de test para evaluar los niveles de razonamiento.

Tabla 1.
Características de los procesos matemáticos en cada nivel de razonamiento

Procesos	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Reconocimiento y descripción	De atributos físicos	De propiedades matemáticas		
Uso de definiciones		Definiciones con estructura simple	Definiciones con cualquier estructura	Se acepta la equivalencia de definiciones
Formulación de definiciones	Listado de propiedades físicas	Listado de propiedades matemáticas	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Se demuestra la equivalencia de definiciones
Clasificación	Exclusiva basada en atributos físicos	Inclusiva (exclusiva) si la estructura lógica es simple (compleja)	Inclusiva o exclusiva de acuerdo con las definiciones usadas	
Demostración		Empírica, verificación en ejemplos	Deductiva, abstracta, informal	Deductiva, abstracta, lógico-formal

Las celdas en blanco de la tabla 1 corresponden a procesos matemáticos que no tienen características específicas en esos niveles de razonamiento. Por ejemplo: una tarea de reconocimiento y descripción de propiedades de un objeto geométrico solo requiere razonamiento de los niveles 1 o 2; por su parte, las características del nivel 1 hacen que los estudiantes en este nivel no sean capaces de usar definiciones matemáticas dadas ni entiendan el concepto de demostración.

El segundo componente del modelo de Van Hiele son las *fases de aprendizaje*. Se trata de unos criterios para organizar la secuencia de tareas, actividades o problemas que se planteen a los alumnos de manera que se favorezcan su aprendizaje y la mejora de su nivel de razonamiento. De manera resumida, las características de las fases de aprendizaje (descritas con más detalle en Jaime y Gutiérrez, 1990; De la Torre, 2003, y Aravena y Caamaño, 2013) son:

Fase 1 (información): el profesor plantea actividades que introduzcan a los estudiantes en el nuevo tema de estudio. Las actividades sirven también para que el profesor se informe de los conocimientos previos y el nivel de razonamiento de sus alumnos.
Fase2 (orientación dirigida): los estudiantes empiezan a explorar el nuevo tema de estudio resolviendo actividades y problemas planteados con el objetivo de dirigirlos al resultado correcto, para que descubran, comprendan y aprendan los conceptos y propiedades básicos del tema.
Fase 3 (explicitación): esta fase es transversal a las otras fases. Los estudiantes presentan y argumentan resultados y conclusiones. Se fomenta el diálogo, el intercambio de ideas y la discusión en la clase. El vocabulario utilizado es acorde al nivel de razonamiento.
Fase 4 (orientación libre): los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos en las fases anteriores para resolver problemas más complejos o situaciones novedosas. Deben completar y profundizar en su conocimiento, para lo cual se apoyan en lo aprendido en la fase 2.
Fase 5 (integración): el profesor procurará que los estudiantes logren una visión global del tema estudiado, integrando los nuevos conocimientos en una red que los relacione entre sí y con otros contenidos matemáticos pertinentes estudiados con anterioridad.

METODOLOGÍA

La metodología que se siguió en la investigación es de corte cuantitativo, descriptiva-interpretativa, basada en la secuencia pretest-proceso de enseñanza-postest y trabajando con grupos experimental y control.

Población y muestra

La población para el estudio está formada por los alumnos de segundo año de educación secundaria de los establecimientos públicos de enseñanza de la Región del Maule, pertenecientes al área científico humanista, de procedencia urbana y que se encuentran en los niveles socioeconómicos vulnerables. Para la selección de la muestra se utilizó la técnica de muestreo por conglomerado, seguida de una selección con arranque aleatorio y probabilidad proporcional, quedando constituida por 18 cursos distribuidos en 5 comunas, que contienen 625 alumnos, de los cuales 315 corresponden al grupo control (GC) y 310 al grupo experimental (GE). El tamaño de la muestra se estimó considerando un nivel de confianza del 95% y un error de estimación del 5%.

El experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza se inició administrando a todos los estudiantes un pretest, para conocer sus niveles de razonamiento inicial y asegurar la equivalencia en la partida del GC y GE. En la implementación del experimento, los cursos del GE trabajaron con la secuencia de problemas diseñada sobre la base del modelo de Van Hiele y los cursos del GC trabajaron en el mismo tema siguiendo el modelo tradicional expositivo del profesorado. Al final del experimento, se administró a todos los estudiantes un postest, para conocer sus niveles de razonamiento y verificar si se había producido alguna diferencia entre ambos grupos.

Antes de iniciar el experimento en las aulas, se capacitó a los profesores del GE en los elementos teóricos del modelo de Van Hiele y se trabajó, mediante talleres grupales, en analizar la unidad diseñada, los objetivos de aprendizaje, los tipos de problemas, posibles respuestas de los alumnos, posibles dificultades y obstáculos y las estrategias de regulación en cada uno de los niveles y fases de aprendizaje. Con respecto a los docentes del GC, se tuvo la precaución de que ninguno de ellos hubiese trabajado con el modelo de Van Hiele.

Diseño de la secuencia de enseñanza experimental

Para el experimento de enseñanza se consideró el tema de semejanza de figuras planas y espaciales. La selección de los problemas y el diseño de actividades para la secuencia de enseñanza del GE se basaron en objetivos de aprendizaje para cada uno de los niveles y fases del modelo de Van Hiele. Esta secuencia fue validada por jueces expertos en el modelo de Van Hiele, que evaluaron su coherencia con las características de los niveles y fases. Las observaciones de los jueces dieron lugar a modificaciones de la secuencia de enseñanza. La tabla 2 muestra algunos ejemplos de actividades planteadas en el GE. Las celdas correspondientes a la fase 1 de los niveles 2 y 4 están vacías porque, al estar en un proceso de trabajo en clase continuo en el tiempo, no son necesarias y se espera que los estudiantes progresen durante el experimento del nivel 1 al nivel 2 o, si se diera el caso, del nivel 3 al nivel 4.

Tabla 2.
Ejemplos de actividades para el aprendizaje de la semejanza de figuras planas y espaciales

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Fase 1	– Identifica atributos físicos de figuras semejantes y no semejantes del mundo real.		– Demuestra de manera deductiva informal la semejanza de polígonos.	
Fase 2	– Identifica características visuales de figuras semejantes y establece relaciones.	– Construye figuras homotéticas e identifica sus propiedades. – Identifica propiedades de figuras congruentes y semejantes.	– Descubre, a partir de la experimentación, el teorema de Tales y lo demuestra de forma deductiva informal basándose en la semejanza de triángulos.	– Utiliza los criterios de semejanza de triángulos para demostrar el criterio de semejanza de polígonos.
Fase 3	– Expresa, por escrito y oralmente, las características de dos figuras semejantes. – Identifica regularidades en figuras semejantes.	– Argumenta de manera empírica sus conclusiones y resultados.	– Explica a los compañeros la demostración hecha, utilizando argumentos abstractos.	– Presenta, por escrito y oralmente, demostraciones de teoremas usando lenguaje formal.
Fase 4	– Utiliza la semejanza para calcular longitudes proporcionales.	– Demuestra experimentalmente y justifica, mencionando definiciones o propiedades, la semejanza de polígonos.	– Establece conjeturas y demuestra informalmente el teorema de Varignon.	– Establece conjeturas y demuestra formalmente criterios de semejanza de pirámides.
Fase 5	– Realiza una síntesis de las características visuales de figuras semejantes y no semejantes.	– Define los conceptos de semejanza y homotecia. – Resume los criterios de semejanza y homotecia. – Realiza una síntesis de las relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.	– Resume las diferentes formas de construcción de figuras semejantes y explicita sus características. – Asocia las propiedades de semejanza de triángulos a la semejanza de polígonos.	– Determina relaciones entre semejanza de figuras planas y volumen de figuras semejantes. – Construye un mapa conceptual sobre el tema de las semejanza de polígonos y cuerpos geométricos.

En los párrafos siguientes se muestran algunos ejemplos de las actividades que forman parte de la secuencia de enseñanza sintetizada en la tabla 2.

Ejemplo de actividades para el nivel 1

Se apunta al reconocimiento y descripción de atributos físicos de las figuras semejantes. La actividad de la figura 1 corresponde a la fase 1, pues su objetivo es averiguar las concepciones intuitivas de los estudiantes sobre semejanza.

Actividad 1.1 (N1-F1). Observando las figuras, agrupa aquellas que tú crees que son semejantes y explica por qué.

Agrupa aquellas que se parecen pero que crees que no son semejantes. Menciona por qué.
De acuerdo con la agrupación que has realizado, ¿cuándo son semejantes dos figuras?

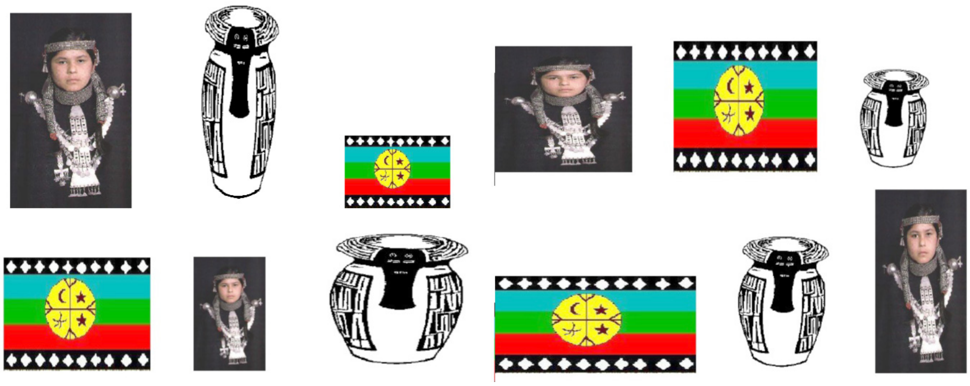


Fig. 1. Actividad del nivel 1, fase 1.

Ejemplo de actividades para el nivel 2

Se apunta al reconocimiento de propiedades geométricas de la semejanza, uso de definiciones con estructura simple y demostración de las propiedades descubiertas de manera empírica (midiendo, haciendo recuentos o cálculos). La actividad de la figura 2 es un ejemplo de la fase de orientación dirigida, pues su objetivo es que los estudiantes descubran y aprendan un criterio de semejanza de triángulos, donde la construcción con regla y compás ayuda a producir una definición de semejanza.

Actividad 2.3 (N2-F2). Construye con regla y compás un triángulo T_1 cualquiera ABC y marca sus ángulos α, β y γ. Construye otro triángulo T_2 A'B'C' de ángulos α', β' y γ' de tal manera que cada uno de sus lados mida el doble de cada uno de los lados del triángulo anterior y que la medida de α' sea igual a la medida de α.

(1) ¿Qué relación existe entre ambos triángulos?
(2) ¿Qué relación matemática es equivalente a decir que las medidas de los lados de T_2 son iguales al doble de las medidas de los correspondientes lados de T_1?
(3) ¿Cómo será la medida de los ángulos β' y γ' respecto de los ángulos β y γ?
(4) Enuncia las condiciones que confirman que estos dos triángulos son semejantes (considera que existe más de una solución). Argumenta detalladamente tu respuesta y explica la estrategia utilizada para resolver el problema.

Fig. 2. Actividad del nivel 2, fase 2.

Ejemplo de actividades para el nivel 3

En la actividad de la figura 3, basada en el teorema de Varignon, se pide realizar demostraciones en las que se deben usar los conocimientos aprendidos. Los enunciados tienen, cuando es posible, la forma de problemas abiertos. Los estudiantes pueden usar ejemplos concretos para generar conjeturas o encontrar caminos para demostrarlas. Durante esta fase deben adquirir un vocabulario matemático más completo.

Actividad 3.15 (N3-F4).

(1) Construye un cuadrilátero convexo cualquiera. Verifica si se cumple que los puntos medios de los lados del cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. ¿Se cumplirá para cualquier cuadrilátero? Si es así, demuestra tu conjetura.

(2) ¿Qué puedes conjeturar respecto del perímetro del paralelogramo encontrado en (1)? ¿Existe alguna relación? Si es así, ¿cuál es? Fundamenta tu respuesta.

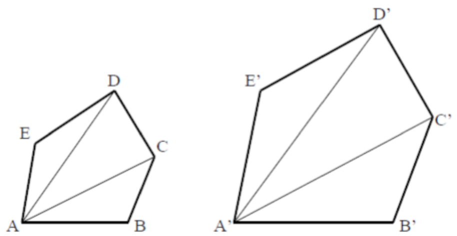
Fig. 3. Actividad del nivel 3, fase 4.

Ejemplo de actividades para el nivel 4

Con las actividades de este nivel se intenta afianzar el razonamiento deductivo mediante la práctica de los diferentes tipos habituales de demostración formal. La actividad que se muestra en la figura 4 corresponde a la fase 2 pues, como los estudiantes todavía están iniciando su aprendizaje de la demostración formal, se les ofrece la ayuda de la figura, aunque se espera que sus demostraciones no se basen en propiedades específicas de los pentágonos.

Actividad 4.4 (N4-F2). Demuestra que dos polígonos convexos semejantes pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente semejantes por las diagonales que parten de vértices homólogos. Observa la figura para determinar las hipótesis y la tesis.

Realiza la demostración utilizando propiedades matemáticas (apóyate en la figura para demostrar).



A partir de la demostración, enuncia los criterios y las condiciones para que dos polígonos convexos cualesquiera sean semejantes.

Fig. 4. Actividad del nivel 4, fase 2.

Diseño de los instrumentos de control

Para asegurar la equivalencia inicial de los grupos y evaluar el progreso de los estudiantes después del experimento de enseñanza, se aplicaron varios instrumentos para valorar la similitud respecto del grado de vulnerabilidad, de acuerdo con los parámetros definidos por el Ministerio de Educación de Chile, la homogeneidad de los alumnos de cada aula, los niveles de razonamiento de los estudiantes y las diferencias entre los niveles inicial y final de cada estudiante y del GE y GC.

En este artículo nos centramos en lo referente a los niveles de razonamiento de los estudiantes. Se diseñaron dos tests, pretest y postest, formados por 10 ítems cada uno, que abarcaran los niveles 1 a 4 y los procesos de razonamiento (tabla 1). En la construcción del pretest se consideraron los programas de estudio vigentes desde 6.º básico a 2.º año de educación secundaria. Para el postest se consideraron las temáticas trabajadas por ambos grupos durante el experimento de enseñanza. Los ítems fueron elaborados a partir de problemas del texto de geometría de Cano (1944), de los textos entregados por el Ministerio de Educación a los centros de enseñanza públicos y de Jaime (1993). Estos problemas fueron modificados y estructurados por los investigadores para adaptarlos a las características del modelo de Van Hiele.

A continuación mostramos ejemplos de los ítems del pretest (figura 5) y del postest (figura 6). De acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1998), lo que determina los niveles de razonamiento asignados a un ítem son sus posibles respuestas. Así, el ítem 5 (figura 5) admite respuestas de los niveles 2, 3 y 4, dependiendo de si los estudiantes producen demostraciones empíricas, deductivas informales o deductivas formales.

Ítem 5 (niveles 2-4).

El triángulo A'B'C' es una traslación del triángulo ABC. Demuestra que al trasladar el triángulo ABC, se conserva la distancia entre dos puntos cualesquiera del triángulo y se conservan sus ángulos.

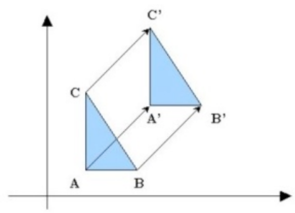


Fig. 5. Ejemplo de ítem del pretest.

Análogamente, las respuestas esperadas al ítem 3 (figura 6) pueden ser de los niveles 2 (demostraciones empíricas basadas en mediciones) o 3 (demostraciones deductivas basadas en los criterios de congruencia de triángulos). En cuanto al ítem 4, se pide describir la relación entre los polígonos de la figura, por lo que los niveles de razonamiento esperados en las respuestas son el 1 (si se basan en atributos físicos) o el 2 (si se basan en atributos matemáticos).

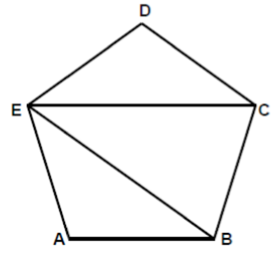
Ítem 3 (niveles 2-3).

Dado el siguiente pentágono regular:

(1) ¿Son congruentes las diagonales del pentágono? Si es así, prueba que son congruentes. Si es *no*, explica por qué no lo son.

(2) ¿Los triángulos ABE y ECD son congruentes? Explica por qué son congruentes y si *no* lo son, explica por qué no.

(3) ¿Qué sucede con las diagonales de un polígono regular de 10 lados, son congruentes? ¿Y las de uno de *n* lados? Demuestra tu conjetura.



Ítem 4 (niveles 1-2).
¿Crees que ambas figuras son semejantes? Si lo son, escribe todas las propiedades importantes que cumplen cuando son semejantes. Si crees que no lo son, explica por qué. *(Si quieres, puedes ayudarte con dibujos para explicar)*

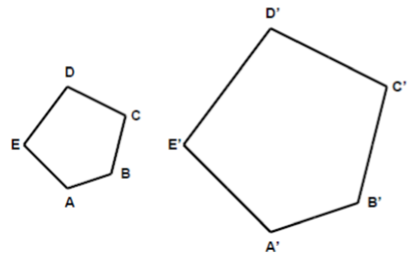


Fig. 6. Ejemplos de ítems del postest.

Para verificar la validez interna de los test, siguiendo el procedimiento indicado en Gutiérrez y Jaime (1998), creamos una matriz que articula los niveles y los procesos matemáticos de cada ítem. La tabla 3 muestra la matriz que se creó para el postest. Podemos observar los niveles de razonamiento esperados de las respuestas a cada ítem, así como los procesos matemáticos utilizados al responder a cada ítem. Por ejemplo, para responder al ítem 6 es necesario utilizar una definición de semejanza aprendida previamente, formular una nueva definición de semejanza diferente y demostrar la equivalencia de ambas definiciones.

Tabla 3.
Niveles de razonamiento y procesos matemáticos en los ítems del postest

Ítems	Niveles				Procesos matemáticos				
	1	2	3	4	Descr. y recon.	Uso de defin.	Form. de defin.	Clasificación	Demostrac.
1. Concepto de semejanza	x	x			•	•	•		
2. Propiedades de polígonos	x	x	x		•	•		•	
3. Congruencia de triángulos y polígonos regulares		x	x			•			•
4. Semejanza de polígonos y figuras homotéticas	x	x			•	•	•		
5. Semejanza de polígonos regulares		x	x		•	•		•	•
6. Equivalencia de definiciones de semejanza		x	x	x		•	•		•
7. Criterios de semejanza de polígonos convexos		x	x		•	•			•
8. Razones de semejanza de longitud, área y volumen	x	x	x			•		•	•
9. Demostración de figuras en posición homotética		x	x	x	•	•		•	•
10. Teorema de Thales. Proporcionalidad de segmentos y triángulos	x	x	x	x	•	•			•

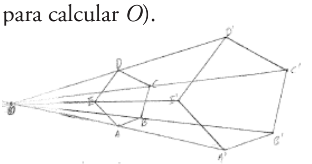
Los test fueron validados por jueces expertos en el modelo de Van Hiele. Se les pidió analizar si los ítems propuestos se ajustaban a los niveles de Van Hiele y a los procesos matemáticos. Posteriormente se realizó un análisis de triangulación, respecto de la coincidencia, de al menos dos de los jueces, con la propuesta para su incorporación al test.

Evaluación de los niveles de razonamiento

Para analizar el razonamiento de los estudiantes, hemos utilizado la metodología de cálculo de los grados de adquisición de los niveles 1 a 4 planteada por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), quienes proponen unos criterios de evaluación de los niveles de razonamiento basados en la consideración de la perfección en el uso de un determinado nivel de razonamiento y en la corrección matemática de las respuestas, valorada esta desde el punto de vista del nivel de razonamiento expresado. Tras esta doble evaluación de las respuestas, se obtienen siete *tipos de calidades* de respuestas. Considerando la adquisición de un nivel de Van Hiele como un continuo desde la no adquisición hasta la adquisición completa, dichos tipos de respuesta son indicadores de diferentes *grados de adquisición* de cada nivel de razonamiento. Siguiendo las indicaciones de estos autores, los grados de adquisición de los niveles se pueden cuantificar como porcentajes: la adquisición de un nivel de razonamiento es *nula* si su grado de adquisición no pasa del 15%, es *baja* si su grado de adquisición es superior al 15% pero no llega al 40%, es *intermedia* si su grado de adquisición está entre el 40 y el 60%, es *alta* si su grado de adquisición es superior al 60% pero no llega al 85%, y es *completa* si su grado de adquisición es como mínimo del 85%.

En la tabla 4 mostramos cómo utilizamos estos criterios para evaluar las respuestas de los estudiantes al ítem 4 del postest (figura 6). Como hemos indicado antes, las respuestas pueden corresponder a los niveles 1 y 2. Por las limitaciones de espacio, presentamos solo los descriptores de respuestas del tipo 6, caracterizadas por mostrar claramente un nivel de razonamiento y, matemáticamente, por ser casi correctas. En la tabla se detallan los descriptores de respuestas típicas, ejemplos de respuestas asociadas a cada descriptor, una justificación de la asignación de nivel de razonamiento y tipo de respuesta hecha a cada descriptor, el nivel de razonamiento y el tipo correspondientes y sus porcentajes de adquisición de los niveles.

Tabla 4.
Descriptores de respuestas al ítem 4 del postest

Ítem 4: Semejanza de polígonos y figuras homotéticas (niveles 1 y 2)					Grados de adquisición			
Descriptores de respuestas	Ejemplos de respuestas esperadas	Justificación	N	T	N1	N2	N3	N4
Reconocimiento basado en observación de atributos físicos	Ambas figuras son pentágonos no regulares. Son parecidas pero de distinto tamaño. Tienen 5 ángulos iguales.	Menciona atributos físicos del pentágono. No considera los lados.	1	6	80	0	- -	- -
Reconocimiento basado en propiedades matemáticas	*Ambas figuras son semejantes porque el pentágono A´B´C´D´E´ se puede obtener del pentágono ABCDE mediante una homotecia de centro en O* (dibuja los rayos para calcular *O*).  *Se comprueba con el compás que la razón de homotecia es 2.*	Utiliza propiedades de la homotecia. Usa la definición de homotecia. Calcula experimentalmente la razón. No menciona el paralelismo de los lados.	2	6	100	80	- -	- -

Estamos de acuerdo con Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) en aceptar la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele. Esto hace que, si una respuesta corresponde al nivel 2 (por ejemplo, el segundo descriptor de la tabla 4), asumimos que esta respuesta ha superado el nivel 1 completamente, por lo que su grado de adquisición del nivel 1 es 100%.

Tomando como base esta metodología, se calcularon los grados de adquisición de los niveles para cada estudiante de la muestra. A continuación, para asignar grados de adquisición de los niveles al GC y GE, se calculó, para cada nivel de Van Hiele, la media aritmética de los grados de adquisición de ese nivel por los alumnos de cada grupo.

Análisis de fiabilidad de los test

Hemos aplicado el coeficiente alfa de Cronbach para analizar la fiabilidad de los test en la evaluación de los niveles de razonamiento. Los resultados obtenidos en el pretest son 0,798 para el GC y 0,786 para el GE, y en el postest 0,901 para el GC y 0,920 para el GE. Por tanto, podemos considerar que los test son fiables (índice superior a 0,70).

Equivalencia inicial de los grupos experimental y control

La tabla 5 presenta un resumen de los resultados del pretest, consistente en las medias aritméticas de los grados de adquisición de los niveles 1 y 2 por los estudiantes del GC y GE. La cantidad de respuestas en los niveles 3 y 4 es irrelevante, ya que casi todas las respuestas de los alumnos estaban en los niveles 1 y 2, por lo que no procede comparar estos niveles. Se observa que, tanto el GC como el GE poseen un grado de adquisición bajo del nivel 1 ($15 < \overline{x} < 40$) y un grado de adquisición nulo del nivel 2 ($\overline{x} \leq 15$), lo cual sugiere la equivalencia de los grupos en el inicio de la experiencia.

Tabla 5.
Medias de los grados de adquisición
de los niveles de razonamiento en el pretest

Grupos	Nivel 1	Nivel 2
GC	28,5	9,29
GE	30,7	13,7

Para asegurar la equivalencia inicial del GC y GE, se aplicó a las respuestas del pretest la prueba t-Student para muestras independientes. Los resultados de la tabla 6 muestran que no se rechaza la hipótesis nula (valores $p > 0,05$), por lo que podemos afirmar que no hay diferencias significativas entre el GC y el GE y que los grados de adquisición de los niveles 1 y 2 son equivalentes en ambos grupos.

Tabla 6.
Equivalencia de los grupos en el pretest mediante la prueba t-Student

	Nivel	X	DS	Valor p
Grupo control Grupo experimental	1	57,54 61,53	33,62 31,42	
				0,434
Grupo control Grupo experimental	2	35,27 39,45	26,72 27,50	
				0,370

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En esta sección presentamos los resultados de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento alcanzados por los estudiantes al final del tratamiento, a partir de sus respuestas al postest, y análisis de tales resultados. Primero mostramos un ejemplo de la forma como se analizaron las respuestas a los ítems para asignarles niveles y tipos, basándonos en tablas de descriptores de respuestas similares a la mostrada en la tabla 4. Después analizamos los grados de adquisición alcanzados por el GC y el GE en cada nivel, mostrando que hay diferencia significativa a favor del GE.

Estudio de los tipos de respuestas

Para describir la forma como se analizó la información sobre los niveles de Van Hiele y los grados de adquisición alcanzados, en primer lugar analizamos, como ejemplo, la respuesta de un estudiante a un ítem del postest. Después presentamos los resultados globales de las respuestas del alumnado a este ítem.

La figura 7 muestra la respuesta de un estudiante del GE al ítem 3 del postest (figura 6). Dicho ítem admite respuestas de los niveles 2 y 3 (tabla 3). La respuesta de este estudiante es de tipo deductivo informal, pues siempre justifica sus conclusiones mediante referencia a propiedades del pentágono, sin utilizar medidas específicas de la figura que acompaña al enunciado verbal. No obstante, las demostraciones son muy pobres, pues no llega a tener en cuenta todas las propiedades necesarias. Así, en la pregunta (1), no identifica la congruencia de triángulos como pieza clave de la demostración, por lo que alude a la igualdad de los lados del pentágono, pero no a los triángulos formados por dos lados y una diagonal, ni a la igualdad de ángulos. Algo similar ocurre en su respuesta a la pregunta (2). En cuanto a la respuesta a la pregunta (3), el estudiante formula su conjetura pero no aporta datos específicos para validarla (en este caso haría falta presentar un contraejemplo). De acuerdo con las caracterizaciones de los *tipos* de respuesta de Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), esta corresponde al nivel 3 y tipo 3, pues muestra claramente este nivel de razonamiento y matemáticamente es correcta (no comete errores), pero es muy pobre.

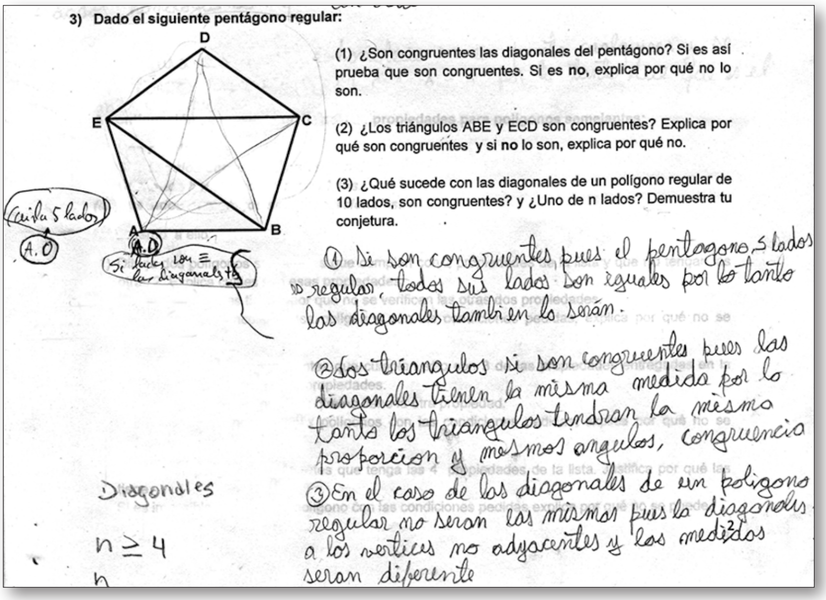


Fig. 7. Respuesta al ítem 3 del postest.

La tabla 7 muestra un resumen de las respuestas al ítem 3 del postest. Se observa una notable diferencia entre los resultados del GC y el GE, ya que una mayoría de alumnos del GC no responde a este ítem y, de los que responden, solo unos pocos lo hacen en el nivel 3, mientras que una cantidad claramente superior de los alumnos del GE han contestado y, de estos, ha habido cuatro veces más respuestas que del GC en el nivel 3.

Tabla 7.
Cantidad de estudiantes en cada nivel de razonamiento en el ítem 3

	Grupo		
	GC	GE	Total
No responde	193 (81,4%)	94 (40,9%)	287 (61,5%)
Nivel 2	33 (13,9%)	87 (37,8%)	120 (25,7%)
Nivel 3	11 (4,6%)	49 (21,3%)	60 (12,8%)
Total	237 (100%)	230 (100%)	467 (100%)

En cuanto a los grados de adquisición alcanzados en las respuestas a este ítem, del 13,9% de estudiantes del GC que respondieron en el nivel 2, el 81% poseen un grado de adquisición bajo, lo que denota procesos de demostración muy incompletos. En cambio, del 37,8% de alumnos del GE que ubicaron su respuesta en el nivel 2, alrededor del 29% dieron una respuesta que muestra un grado de adquisición medio alto de este nivel, es decir, son respuestas bastante completas con procesos de demostración consistentes, argumentando mediante ejemplos o utilizando definiciones y propiedades geométricas.

De los alumnos que ubicaron su respuesta en el nivel 3, los resultados del GC son estadísticamente insignificantes (4,6%), frente al 21,3% de estudiantes del GE que respondieron en este nivel. Alrededor de un 29% de los alumnos del GE que ubicaron su respuesta en el nivel 3 mostraron un grado de adquisición medio alto de este nivel, pues sus demostraciones fueron deductivas informales bastante completas, si bien generalmente no llegaron a realizarlas totalmente por «saltos» en el proceso o por falta de argumentos.

Evolución de los niveles de razonamiento de los estudiantes

Para determinar el efecto del experimento en los niveles de razonamiento de los estudiantes, hemos comparado los promedios de los grados de adquisición de cada nivel alcanzados por los estudiantes del GE y el GC. Recordemos que las respuestas al pretest no dieron diferencias estadísticamente significativas entre el GC y el GE.

Grados de adquisición del nivel 1

La figura 8 muestra la distribución de los grados de adquisición del nivel 1 por los estudiantes de ambos grupos. El GC, con 217 respuestas, logró un grado de adquisición del 34,96% (adquisición baja). El GE, con 223 respuestas, logró un grado de adquisición del 62,75% (adquisición alta). En el GC hay una asimetría de +0,54, es decir, que la mayoría de los estudiantes lograron una adquisición baja de este nivel. En el GE hay una asimetría de -0,29, por lo que la mayoría de sus estudiantes lograron una adquisición alta del nivel.

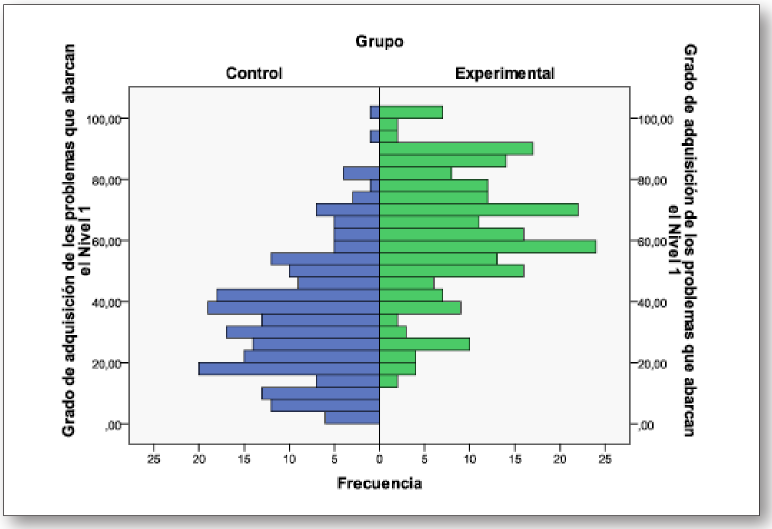


Fig. 8. Grados de adquisición del nivel 1.

La prueba t-Student indica que hay una diferencia significativa entre los resultados del GE y los del GC para el nivel 1 ($t = -14{,}243$, $p < 0{,}001$). Existe suficiente evidencia muestral para afirmar que la adquisición del nivel 1 por el GE ha sido significativamente mayor que la del GC.

Grados de adquisición del nivel 2

La figura 9 muestra la distribución de los grados de adquisición del nivel 2 por los estudiantes de ambos grupos. El GC, con 210 respuestas, logró un grado de adquisición del 10,19% (adquisición nula). El GE, con 215 respuestas, logró un grado de adquisición del 28,26% (adquisición baja). En el GC hay una asimetría de +1,48, que indica que la mayoría de los estudiantes tienen grados de adquisición nulos. En el GE hay una asimetría de +1,00, por lo que la mayoría de estos estudiantes lograron una adquisición baja.

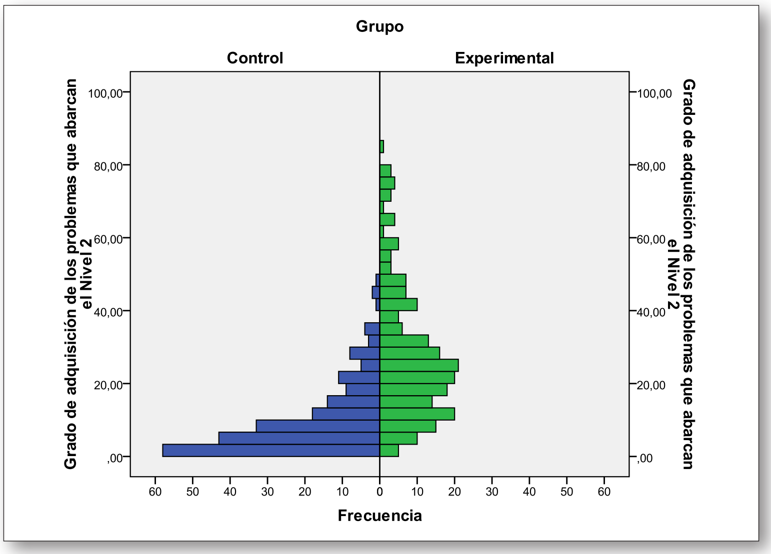


Fig. 9. Grados de adquisición del nivel 2.

Los valores del test t-Student indican una diferencia significativa entre los resultados del GE y los del GC para el nivel 2 (t = -12,394, p < 0,001). La adquisición del nivel 2 al final de la experiencia por el GE, aun siendo baja, es significativamente mayor que la del GC.

Grados de adquisición del nivel 3

La figura 10 muestra la distribución de los grados de adquisición del nivel 3 por los estudiantes de ambos grupos. El GC, con 4 respuestas, logró un grado de adquisición del 13,81% (adquisición nula). El GE, con 32 respuestas, logró un grado de adquisición del 22,55% (adquisición baja). Con una cantidad tan reducida de datos del GC, no es significativo analizar la asimetría.

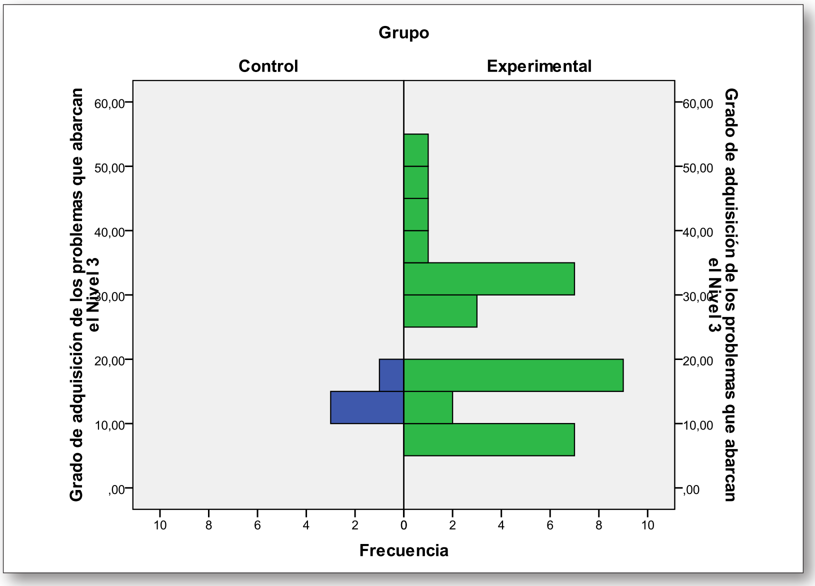


Fig. 10. Grados de adquisición del nivel 3.

La prueba t-Student indica una diferencia significativa entre los resultados del GE y los del GC para el nivel 3 (t = -2,914, p < 0,005). Existe suficiente evidencia muestral para afirmar que la adquisición del nivel 3 por el GE ha sido significativamente mayor que la del GC.

Grados de adquisición del nivel 4

Fueron muy pocos los estudiantes del GC y el GE que respondieron en este nivel. En ambos grupos, el grado de adquisición del nivel es muy inferior al 15% (adquisición nula). No es necesario un análisis estadístico ya que, claramente, los estudiantes de ambos grupos, salvo alguna excepción, tenían una adquisición nula del nivel 4.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

En este artículo hemos presentado resultados de un proyecto de investigación cuyo objetivo central es diseñar y experimentar estrategias de enseñanza de la geometría que ayuden a superar las carencias de estudiantes de los centros públicos de enseñanza vulnerables de la Región del Maule. En concreto, hemos presentado la parte del estudio que tiene que ver con la mejora de la capacidad de razonamiento de los estudiantes, según el modelo de Van Hiele.

Sobre la base de los análisis y resultados presentados en las secciones anteriores, hemos caracterizado y jerarquizado los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele del GE y el GC, al final del experimento. Los resultados muestran una clara diferencia entre los estudiantes del GE y los del GC ya que, partiendo todos los estudiantes de grados de adquisición de los niveles estadísticamente equivalentes, el GE ha mostrado un avance en su adquisición de los niveles de razonamiento 1 a 3 significativamente superior al del GC. Lo anterior, nos permite plantear algunas conclusiones:

1. El GE ha progresado más en el razonamiento del nivel 2 que el GC. Una mayoría de estudiantes del GE reconocen que las figuras geométricas están dotadas de propiedades matemáticas, utilizan definiciones y realizan procesos de demostración empírica. En cambio, una mayoría de alumnos del GC se han mantenido razonando en el nivel 1, ya que solo reconocían atributos físicos de las figuras geométricas.
2. Una pequeña cantidad de alumnos del GE han logrado llegar a razonar en el nivel 3 si bien, en general, sus grados de adquisición son bajos, pues presentan dificultades para utilizar y formular definiciones y para abordar procesos de demostración deductiva. En cuanto al GC, la cantidad de alumnos que logran ubicar respuestas en ese nivel es insignificante, ya que, en los procesos demostrativos, presentan dificultades incluso para explicar con ejemplos.
3. Ningún estudiante de la muestra ha mostrado una mínima adquisición del nivel 4 de razonamiento, pues las respuestas obtenidas que pueden considerarse propias de este nivel son irrelevantes. Este resultado coincide con los obtenidos en otras investigaciones anteriores con estudiantes de educación secundaria (Burguer y Shaughnessy, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1996; Gutiérrez y Jaime, 1998).
4. Una de las mayores fortalezas que ha logrado el GE, mediante la secuencia de aprendizaje basada en los niveles y las fases de Van Hiele, hace referencia al uso de definiciones y a la descripción de propiedades geométricas, pues la mitad de los alumnos hacen uso de ellas, lo que no se evidencia en el GC.
5. Se han detectado, en ambos grupos, aunque en menor medida en el GE, dificultades para hacer referencia a la asociación entre figuras geométricas y sus propiedades. En ambos grupos hay dificultades para visualizar las figuras a partir de la información escrita y una falta de capacidad para argumentar o utilizar contraejemplos.
6. Respecto a establecer conjeturas, generalizar y demostrar, las diferencias son considerables entre el GE y el GC, ya que un alto porcentaje de alumnos del GE se enfrentan a estos procesos, ya sea de forma empírica como de manera deductiva informal. Este aspecto es relevante ya que las investigaciones en esta línea muestran las serias dificultades que presentan los alumnos y la necesidad de que estos vayan comprendiendo el sentido de las demostraciones (De Villiers, 1991, 1993; Harel y Sowder, 1998; Ibáñez y Ortega, 2004; Aravena y Caamaño, 2013).

Como síntesis global de los resultados, vemos que la enseñanza de la geometría basada en el modelo de Van Hiele ha producido unos resultados claramente superiores que la enseñanza tradicional, ya que los grados de adquisición de los niveles 1 a 3 del GE son significativamente mejores que los del GC. Se confirma que, al final de la experiencia, la mayoría de estudiantes del GE razonaban en el nivel 2, pero todavía era difícil que estos empezaran a usar de forma significativa el razonamiento del nivel 3.

Implicaciones didácticas

Sobre la base de lo descrito en la sección anterior, hay algunas sugerencias que es necesario considerar para la enseñanza de la geometría, en especial porque Chile está en proceso de generar una nueva reforma educativa.

La necesidad de cambiar los métodos tradicionales por metodologías de este tipo, que ayuden a introducir a los alumnos, desde los primeros niveles de formación, en la resolución de problemas abiertos, en la formulación de conjeturas, hipótesis, generalización y en procesos de demostración de forma incremental.

Resulta de interés generar espacios de reflexión y comunicación de los alumnos en el trabajo geométrico, orientándolos a la adquisición del lenguaje matemático, la argumentación y la discusión de sus procesos de resolución, permitiendo así la independencia del pensamiento reflexivo.

Se hace necesario incorporar, tanto en la formación inicial de profesores como en la actualización didáctica de profesores en servicio, el conocimiento y uso del modelo de Van Hiele como guía para la enseñanza de la geometría desde los primeros cursos. Esto es particularmente necesario para los estudiantes vulnerables de establecimientos públicos donde la educación, durante décadas, ha sido deficitaria (OCDE, 2009).

La Investigación fue financiada por el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico. FONDECYT 1090617. CONICYT

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Afonso, M. C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio* (tesis doctoral). La Laguna, España: Universidad de La Laguna.

Aires, A. P., Campos, H. y Poças, R. (2015). Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6º ano de escolaridade. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), pp. 151-176.

Aravena, M. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la Región del Maule. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), pp. 139-178.
http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1621

Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, EE. UU.: NCTM.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Educations*, 17(1), pp. 31-48.
http://dx.doi.org/10.2307/749317

Cabello, A. B. (2013). *La modelización de Van Hiele en el aprendizaje constructivo de la geometría en primero de la educación secundaria obligatoria a partir de Cabri* (tesis doctoral). Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

Cano, O. (1944). *Geometría*. Santiago de Chile: La Salle.

De la Torre, A. (2003). El método socrático y el modelo de van Hiele. *Lecturas Matemáticas*, 24(2), pp. 99-121.

De Villiers, M. (1991). Pupils' needs for conviction and explanations within the context of geometry. *Pythagoras*, 26, pp. 18-27.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, pp. 15-30.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education monograph 3). Reston, EE. UU.: NCTM.
http://dx.doi.org/10.2307/749957

Guillén, G. (1996). Identification of Van Hiele levels of reasoning in three-dimensional geometry. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the P.M.E.* (vol. 3, pp. 43-50). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2/3), pp. 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), pp. 237-251. http://dx.doi.org/10.2307/749076

Gutiérrez, A., Pegg, J. y Lawrie, C. (2004). Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. *Proceedings of the 28th International Conference for the P.M.E.* (vol. 2, pp. 511-518). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. En E. Dubinski, A. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education* (vol. 7, pp. 234-283). Providence, EE. UU.: American Mathematical Society.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004). Origen, nudo y desenlace de una investigación sobre los esquemas de prueba. Aspectos cognitivos. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en educación matemática* (pp. 21-57). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática.

Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). Valencia, España: Universidad de Valencia. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), pp. 58-69. http://dx.doi.org/10.2307/748797

OCDE (2004). *Informe Chile 2004.* Recuperado de http://www.scribd.com/doc/19341515/OCDE-Informe-Chile-2004

OCDE (2009). *La educación superior en Chile. Revisión de políticas nacionales de educación*. Recuperado de http://www.oecd-ilibrary.org/education/la-educacion-superior-en-chile_9789264054189-es http://dx.doi.org/10.1787/9789264054189-es

Owens, K., y Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 83-115). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Perdikaris, S. C. (2004). The problem of transition across levels in the van Hiele theory of geometric reasoning. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 18 (revista electrónica sin paginación).

PISA (2009). *Resumen de resultados.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación. Ministerio de Educación de Chile. Recuperado de http://www.educacion2020.cl/sites/default/files/resumen_resultados_pisa_2009_chile.pdf

PISA (2012). *Programa internacional de evaluación de estudiantes. Resultados de Chile.* Santiago de Chile: Gobierno de Chile. Recuperado de http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/04/PISA-Programa-Internacional-de-Evaluación-de-Estudiantes.pdf

Saads, S., y Davis, G. (1997). Spatial abilities, Van Hiele levels, & language use in three dimensional geometry. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International Conference for the P.M.E.* (vol. 4, pp. 104-111). Lathi, Finlandia: University of Helsinki.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (ERIC Document Reproduction Service Nº ED 220 288). Columbus, EE. UU.: ERIC.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (tesis doctoral). Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. Recuperado de http://www.uv.es/angel.gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Nueva York: Academic Press.

Study of Van Hiele levels of reasoning in students from vulnerable secondary schools in Chile

María Aravena Díaz
Departamento de Matemática, Física y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule. (Talca, Chile).
maravena@ucm.cl
Ángel Gutiérrez, Adela Jaime
Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Magisterio, Universitat de València (Valencia, España).
angel.gutierrez@uv.es, adela.jaime@uv.es

In the PISA tests, Chile was well below the international average, with students presenting serious deficiencies in problem solving and deductive geometry and argumentative processes. The problem of the low level of mathematics knowledge in Chile is directly related to the segregation of public schools, which receive the most vulnerable students, as shown by several studies that expose the serious difficulties that the students have to understand mathematics, especially geometry. The OECD has highlighted this issue, emphasising the severe segmentation that exists in Chilean education, recommending to focus urgently on correcting inequalities.

An area of mathematics with greater learning difficulties and obstacles in Chile for the past 20 years has been geometry, because, in most schools, it is rarely taught.

The problems described above is particularly important in the Maule Region, one of the poorest in the country and where, for decades, students have presented the lowest levels of achievement in mathematics compared to other Chilean regions, with enormous weaknesses in particular in the geometric reasoning. In this context, focusing on the 2nd grade of secondary education (students aged 15-16), we present the results of a research project aimed to design and try out strategies for teaching geometry that allowed to significantly improve the academic results of the students in the region. We focused on these specific objectives:

- Characterize the Van Hiele level of geometric reasoning of students of 2nd grade of secondary education from vulnerable public schools in the Maule Region.
- Assess the variation of the level of reasoning of those students as a result of a teaching designed according to the Van Hiele model.

This teaching experiment allowed us to accumulate empirical evidence on how students reason, organise the students according to their level of reasoning and evaluate the improvements produced by this teaching methodology.

As the basis for the design, implementation and analysis of results, we used the Van Hiele model that allowed us to analyse the level of geometric reasoning, and develop and organise a set of activities for teaching geometry.

The population for the study consisted of students in the second year of secondary education in public schools of Maule Region, belonging to the humanist scientific area, living in urban areas and belonging to vulnerable socio-economic levels.

The teaching experiment began with a pre-test, with the aim to evaluate the students' initial degrees of acquisition of the Van Hiele levels of reasoning, and to ensure equivalence of the control and experimental groups. In the implementation of the experiment, students in the experimental group worked with the experimental sequence of problems, which were based on the model of Van Hiele. Students in the control group worked on the same subject with the traditional teacher centred methodology. At the end of the experiment, all students did a post-test to assess their degrees of acquisition of the Van Hiele levels of reasoning, and to see whether there was any difference between the two groups.

For the teaching experiment, the chosen topic was the similarity of plane and spatial figures. The selection of problems and the design of activities for the teaching sequence of the experimental group were based on learning objectives for each of the levels and phases of the Van Hiele model. This sequence was validated by expert researchers on the Van Hiele model, who evaluated their consistency with the characteristics of the levels and phases, and whose comments led to the improvement of the sequence.

The analysis of the answers to the tests is based on assigning each student with a degree of acquisition of the Van Hiele levels. The results show a clear difference between the students in the experimental group and the control group because, while both groups showed statistically equivalent degrees of acquisition of the levels at first, the experimental group had a statistically significant improvement in the acquisition of levels 1 to 3 after the experiment, an improvement higher than the control group. As an overall synthesis of the results, we see that the teaching of geometry based on the Van Hiele model has produced clearly better results than the traditional teaching. The degrees of acquisition of levels 1 to 3 in the experimental group were significantly better than those in the control group. At the end of the experiment, most students in the experimental group reasoned in level 2, but it was still difficult for them to start using a significant amount of reasoning of level 3.