ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 33.3 (2015): 117-136
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1630
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Descubrimiento de conocimiento matemático mediante la reformulación de conjeturas falsas en un ambiente de pruebas y refutaciones

Discovery of mathematical knowledge by reformulation of false conjectures in an proofs and refutations environment

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN-México
bustos.rubilar@gmail.com

Gonzalo Zubieta Badillo
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN-México
gzubieta@cinvestav.mx

RESUMEN • Este trabajo expone los resultados obtenidos en un estudio llevado a cabo con futuros profesores de educación secundaria. Se presenta cómo descubrieron conocimiento matemático a partir de una conjetura falsa, la cual reformularon en un proceso de discusión basado en algunos elementos del método cuasiempírico de pruebas y refutaciones. También se describen las etapas del proceso junto con los elementos que fueron observados, y cómo el uso de un software de geometría dinámica facilitó a los estudiantes la exploración, verificación, análisis y aclaración de conceptos matemáticos relacionados con las conjeturas reformuladas.

PALABRAS CLAVE: reformulación de conjeturas; pruebas y refutaciones; contraejemplos; cuasiempirismo; experimentación en matemáticas.

ABSTRACT • This paper exposes the results of a study carried out to future secondary school teachers. We present how the students discovered mathematical knowledge from a false conjecture, which was reformulated in a process of discussion based on some of the elements of the quasi-empirical method of proofs and refutations. Process steps along with the elements that were method are also described, and how the use of a dynamic geometry software allowed to students the exploration, verification, analysis and explanation of mathematical concepts related to reformulated conjecture.

KEYWORDS: reformulation of conjectures; proofs and refutations; counterexamples; quasi-empiricism; experimentation in mathematics.

Recepción: diciembre 2014 • Aceptación: mayo 2015 • Publicación: octubre 2015

INTRODUCCIÓN

No hay duda de que las matemáticas –como las conocemos en la actualidad– están cargadas de un estilo deductivista, en el cual «todas las proposiciones son verdades y todas las inferencias son válidas» (Lakatos, 1986: 166). En esta investigación se trató de no apegarse al estilo deductivista, sino más bien de seguir un estilo heurístico con la intención de que los estudiantes descubrieran o redescubrieran conocimiento. Lo anterior, siguiendo los lineamientos del modelo simplificado del método de pruebas y refutaciones propuesto por Davis, Hersh y Marchisotto (2012), junto con el concepto de experimentación en matemáticas expresado por De Villiers (2010), además de elementos teóricos de un marco conceptual basado en el método de pruebas y refutaciones propuesto por Larsen y Zandieh (2010).

Es importante mencionar que en este artículo se expone parte de una investigación mayor, la cual abarca desde el proceso de reformulación de conjeturas matemáticas falsas hasta el análisis de la prueba de una conjetura cuando los estudiantes trabajan en un ambiente basado en pruebas y refutaciones y utilizan tecnología. Dado lo anterior, en este artículo se documenta el proceso mediante el cual futuros profesores reformularon conjeturas matemáticas falsas hasta obtener una conjetura ingenua.[1]

Antecedentes

En las últimas décadas, el método cuasiempírico de pruebas y refutaciones expuesto por Lakatos (1986) ha sido objeto de estudio por investigadores de educación matemática, que han evidenciado el funcionamiento de algunos elementos del método en actividades llevadas a cabo con estudiantes de diferentes niveles educativos. Por ejemplo, Atkins (1997) trabajó la funcionalidad de los contraejemplos catalogados como monstruos[2] con estudiantes de primaria y De Villiers (2000) expuso el proceso de validación mediante pruebas y refutaciones de una prueba (propuesta por un estudiante de preparatoria) relacionada con la serie de Fibbonacci durante una discusión asincrónica en una revista de educación matemática. Otro estudio es el de Larsen y Zandieh (2007), en el cual los autores propusieron un marco conceptual basado en el método cuasiempírico de pruebas y refutaciones.

Investigaciones más recientes, como las de Swinyard y Larsen (2010) y Karakus y Bütün (2013), tuvieron en cuenta el marco conceptual propuesto por Larsen y Zandieh (2007) para la realización de sus estudios. Los primeros investigaron el funcionamiento del método de excepción de monstruos cuando estudiantes de licenciatura trabajaban la definición de límite. Los segundos llevaron a cabo un estudio en el cual se propuso una conjetura a futuros profesores, quienes la reformularon y probaron en un ambiente de pruebas y refutaciones. En ambos casos se probó la efectividad del marco conceptual propuesto por Larsen y Zandieh (2007).

Problema y objetivos de la investigación

Al revisar la literatura referente a educación matemática, la mayoría de los estudios relacionados con el proceso de conjeturar tratan sobre la generalización de patrones y la formulación de conjeturas, las cuales son verificadas por medio de ejemplos, o bien, descartadas por algún contraejemplo. El proceso posterior a evaluar una conjetura mediante ejemplos válidos ha sido ampliamente estudiado y repor-

1. Se entenderá por conjetura ingenua una conjetura que ya ha sido reformulada hasta llegar a un punto en el cual surge la necesidad de la formulación de una prueba.

2. En el método cuasiempírico de pruebas y refutaciones un monstruo es aquel contraejemplo atípico que encaja en el concepto o definición del objeto u objetos matemáticos a los que hace referencia la conjetura, el cual no fue considerado en el momento de elaborar la conjetura.

tado, a saber, la prueba. Sin embargo, cuando la conjetura es refutada, generalmente se descarta con el fin de retomar la exploración y observación de patrones nuevamente para formular nuevas conjeturas.

En el libro *Matemáticas y razonamiento plausible* de Polya (1966) se encuentra el estudio de una conjetura que es rechazada, reformulada y evaluada. A partir de una idea se formula una conjetura, la cual es reformulada varias veces hasta obtener la conocida fórmula de Euler, que relaciona las caras, vértices y aristas de un poliedro. Lo que describe Polya (1966) se basa en inducción y analogías para la obtención de la fórmula de Euler, conjetura con la cual Lakatos (1986) inicia el debate del análisis de la prueba de dicha conjetura.

No obstante lo anterior, en esta investigación se intenta estudiar lo que sucede cuando un estudiante se ve envuelto en un proceso de refutaciones, es decir, cuando sus afirmaciones son puestas a prueba mediante contraejemplos. En esta línea, De Villiers (2000) señala que la refutación de una conjetura por medio de contraejemplos debe ser aprovechada. Mediante el análisis de la conjetura es posible descubrir o redescubrir conocimiento matemático, o simplemente profundizar en definiciones subyacentes relacionadas directa o indirectamente con su enunciado. Siguiendo lo expuesto, la investigación se enmarca en la fase posterior del rechazo de una conjetura por algún contraejemplo, a fin de estudiar el proceso de reformulación de una conjetura falsa cuando los estudiantes trabajan en un ambiente basado en el método de pruebas y refutaciones y utilizan un software de geometría dinámica. Por lo cual, en este trabajo se persiguieron los siguientes objetivos:

1. Determinar las fases en el proceso de reformulación de conjeturas falsas cuando los estudiantes trabajan en un ambiente de discusión basado en el método cuasiempírico de pruebas y refutaciones.
2. Determinar el rol del uso de un software de geometría dinámica en la generación y evaluación de ejemplos y contraejemplos por parte de los estudiantes al analizar conjeturas falsas.

MARCO CONCEPTUAL

Los referentes teóricos que sustentan la investigación son algunos elementos del método cuasiempírico de pruebas y refutaciones, el marco conceptual propuesto por Larsen y Zandieh (2010), la experimentación en matemáticas según De Villiers (2010) y una propuesta de Fahlgren y Brunström (2014) para llevar a cabo actividades en un ambiente donde se utilice un software de geometría dinámica.

El modelo de Lakatos simplificado para la heurística del descubrimiento matemático

Dado que en la presente investigación el problema de estudio está centrado en la refutación y reformulación de conjeturas falsas, se tomó parte del modelo de Lakatos simplificado para la heurística del descubrimiento matemático propuesto por Davis *et al.* (2012).[3] En este modelo, los autores se refieren al método de pruebas y refutaciones como un proceso en el cual una conjetura primitiva es evaluada, refutada y probada una y otra vez durante un proceso cíclico. En la figura 1 se observa parte del modelo, en el cual la conjetura inicial puede ser refutada mediante un contraejemplo global y a continuación reformulada otra vez para dar paso a una nueva evaluación de esta.

3. Para una revisión completa del modelo, véase Davis *et al.*, 2012: 324.

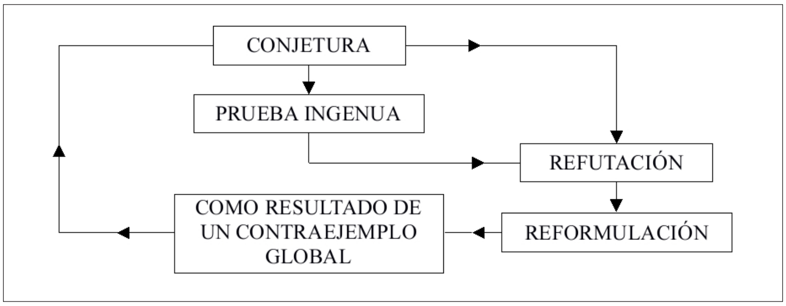


Fig. 1. Proceso durante el cual una conjetura es reformulada (Davis *et al.*, 2012)

En el método cuasiempírico de pruebas y refutaciones son trascendentales los contraejemplos; a partir del surgimiento de estos es posible crear controversia respecto a alguna declaración o conjetura, y a la vez, generar un ambiente de discusión mediante el cual es posible descubrir o redescubrir conocimiento matemático. Principalmente son dos los tipos de contraejemplos que se observan en un ambiente de pruebas y refutaciones: contraejemplos globales y contraejemplos locales. Un contraejemplo global consiste en un ejemplo que satisface las condiciones de la conjetura, pero refuta su conclusión. Los contraejemplos locales son aquellos que refutan algún paso o fase –lemas según Lakatos (1986)– de la prueba de una conjetura sin refutar necesariamente la conjetura. La combinación entre estos dos tipos de contraejemplos da origen a un tercer tipo, contraejemplo local y global, que refuta tanto un lema de la prueba como la conclusión de la conjetura.

Además de los contraejemplos, se presentan técnicas a través de las cuales se reformulan tanto la conjetura inicial como su prueba. Algunas de estas consisten en redefinir los conceptos a los cuales se refiere la conjetura (exclusión de monstruos), limitar el dominio de validez de la conjetura (exclusión de excepciones) y el análisis de la prueba, la cual lleva a la redefinición de la conjetura o modificación de su prueba mediante el análisis de los lemas que la componen. Larsen y Zandieh (2007) proponen un marco conceptual en el cual incluyen las tres técnicas anteriormente mencionadas; los autores sugieren que estas deben ser consideradas en el momento de diseñar actividades para la instrucción, a fin de lograr que los estudiantes descubran conocimiento. A continuación, se describe cada una de las técnicas junto con las sugerencias que Larsen y Zandieh (2007) indican en el marco conceptual.

Método de exclusión de monstruos. Modificación del concepto o definición al cual hace referencia una conjetura con la finalidad de excluir aquellos casos (monstruos) para los cuales no es válida la conjetura. Para Larsen y Zandieh (2007), esta técnica es útil ya que a veces es necesario redefinir los términos involucrados en la conjetura para poder mejorarla. Sin embargo, los mismos autores sostienen que el método también puede ser contraproducente al utilizarlo «porque al redefinir una definición que prohíbe un tipo de contraejemplo puede admitir otros contraejemplos o prohibir ejemplos para los que el teorema es válido» (p. 207).[4]

Método de exclusión de excepciones. Modificación del campo de dominio de una conjetura con la intención de hacerla válida, excluyendo aquellos contraejemplos en los cuales la conjetura se inválida. Análogo al método de exclusión de monstruos, se debe tener cuidado al utilizarlo, porque «se corre el riesgo de restringir demasiado el dominio de validez del teorema» (Larsen y Zandieh, 2007: 207).[5]

4. Traducción libre del autor.
5. Traducción libre del autor.

Análisis de la prueba. Analizar la prueba de la conjetura creando una lista de los lemas no triviales que la componen, buscando contraejemplos tanto globales como locales. Si la conjetura es refutada por un contraejemplo global, se debe buscar un lema que sea también refutado por el mismo contraejemplo, y en seguida, redefinir (mejorar) la conjetura integrando el lema (anteriormente refutado) en su prueba. Larsen y Zandieh (2007) indican que en esta técnica el foco de la actividad de los estudiantes recae sobre la prueba, contraejemplo y conjetura.

Es importante tener en cuenta que, al documentar este artículo, en lo referente al proceso de reformulación de una conjetura falsa, en la sección de análisis de datos y discusión de resultados, solo se tuvieron en cuenta los métodos de exclusión de monstruos y exclusión de excepciones, debido a que el proceso de análisis de la prueba de la conjetura ingenua corresponde a una etapa posterior.

Experimentación en matemáticas

Los matemáticos a diario dedican tiempo a la experimentación cuando se ocupan de investigar algún enunciado o conjetura matemática; entonces, no se debe negar a los estudiantes la oportunidad de explorar. De Villiers (2010) sostiene que la exploración puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor el significado de un enunciado matemático, incluso antes de saber su valor de verdad. La experimentación es una parte esencial en el descubrimiento o redescubrimiento del conocimiento matemático (De Villiers, 2010).

Algunas de las principales funciones que se presentan durante el proceso de experimentación mencionadas por De Villiers (2010) son: conjetura, verificación, refutación global, heurística de refutación y comprensión, entre otras. El mismo autor indica que la primera es cuando se buscan patrones y se formulan conjeturas a partir de la generalización de alguna afirmación o modelo con base en los patrones observados. En este proceso, la intuición juega un papel fundamental en el descubrimiento de conocimiento, además de estar estrechamente ligada con la experiencia; se desarrolla a través de la manipulación y exploración de objetos o ideas matemáticas (De Villiers, 2010).

Por otro lado, la verificación o convicción son el requisito previo para que un matemático inicie la búsqueda de una prueba. De Villiers (2010) señala que si no se está convencido de la veracidad de una conjetura, no se debe tratar de buscar una prueba; lo primero es verificar mediante casos particulares en los cuales la conjetura pueda ser falible, o bien, tratar de encontrar un contraejemplo que la refute. Ahora, si una conjetura es refutada por un contraejemplo global, según De Villiers (2010), esta puede ser modificada y reformulada después de un proceso de heurística de refutación, durante el cual la comprensión que se tenía de la conjetura es mayor a la de un comienzo.

De Villiers (2010) también señala que la experimentación puede ayudar a mejorar la comprensión que se tiene de algún concepto o propiedad matemática. Muchas veces los matemáticos, para estar seguros de comprender correctamente un teorema o prueba matemática, llevan a cabo un proceso de experimentación cuando verifican con ejemplos particulares. La comprensión ayuda a entender de forma más profunda un concepto o a descubrir conocimiento oculto en alguna definición matemática subyacente.

Experimentación y uso de software de geometría dinámica

En las últimas décadas el uso de la tecnología ha cambiado la forma de explorar cuando se lleva a cabo el proceso de generación de conjeturas matemáticas. Debido al uso de software de geometría dinámica (SGD en adelante), la geometría euclidiana ha renacido. Con la utilización de un SGD es posible abarcar una infinidad de ejemplos, debido a que la observación de patrones es casi inmediata, lo que permite descubrir resultados que con lápiz y papel es más difícil determinar por su característica de ser un ambiente estático (De Villiers, 2010).

De Villiers (2010) sostiene que la tecnología, sobre todo el uso de un SGD, puede ser útil en la generación de contraejemplos. Con la prueba experimental de las herramientas de arrastre que ofrecen los SGD es posible analizar el comportamiento de una configuración geométrica, como observar si se mantienen las propiedades o patrones de una construcción cuando se manipulan los elementos que la componen.

En la misma línea, Fahlgren y Brunström (2014) proponen un modelo para el diseño de actividades en un ambiente de geometría dinámica, centradas en la exploración, explicación y generalización. Los autores proporcionan un conjunto de fases que se inician con la búsqueda de patrones y terminan en la generalización de un enunciado matemático.

En la propuesta de Fahlgren y Brunström (2014), la situación matemática debe ser un enunciado no tradicional; ellos recomiendan reformular aquellos problemas tradicionales para evitar enunciados que señalen directamente la conclusión del concepto que se pretende estudiar. Para esta investigación se consideraron las sugerencias relacionadas con las primeras fases del modelo, las cuales dan énfasis a los procesos de exploración, verificación y explicación.

Exploración y conjetura. Fahlgren y Brunström (2014) sugieren incentivar a los estudiantes para que sean ellos mismos los creadores de las configuraciones geométricas, debido a que si crean sus propias construcciones, tendrán más facilidad para añadir nuevos elementos. Además, siempre deben tener claridad para distinguir los objetos dependientes e independientes que forman la construcción. Cuando los estudiantes realizan una construcción, a continuación surge el proceso de exploración durante el cual destacan las distintas modalidades de arrastre del software de geometría dinámica. Si los estudiantes identifican un patrón y piensan que es válido para todos los casos, están preparados para formular una conjetura y enseguida reflexionar respecto a su veracidad. Como sostienen Fahlgren y Brunström (2014), «cuando los estudiantes formulan sus conjeturas por escrito, su trabajo sale a la superficie, y por lo tanto puede convertirse en objeto de reflexión»[6] (p. 8).

Verificación. Incentivar a los estudiantes a utilizar el SGD para apoyar o refutar sus conjeturas, ya que durante este proceso deben convencerse de que la conjetura es completamente válida antes de encaminarse a la búsqueda de una prueba (Fahlgren y Brunströn, 2014).

Explicación. Si un estudiante está convencido de la validez de una conjetura, Fahlgren y Brunström (2014) sugieren motivarlo a explicar con sus propias palabras por qué es cierta la conjetura. Además, los autores afirman que durante la explicación es muy probable que los alumnos tengan que agregar nuevos elementos a sus construcciones «para explorar y descubrir las propiedades subyacentes que podrían usarse para explicar la conjetura» (Fahlgren y Brunström, 2014: 9).[7]

6. Traducción libre del autor.
7. Traducción libre del autor.

METODOLOGÍA

Participantes y diseño de los problemas

En el estudio participaron 18 estudiantes que cursaban la asignatura Figuras y Cuerpos Geométricos de cuarto semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México. Para el caso de las entrevistas, solo fueron aplicadas a tres estudiantes del total de participantes.

Para el diseño de los problemas utilizados en el estudio se consideró el temario del curso Figuras y Cuerpos Geométricos. En este, los futuros profesores debían repasar tres bloques: Figuras en el plano, Simetrías y Los Sólidos. El contenido en el cual se enmarcaron los problemas es en el primer bloque, específicamente en el tema de análisis de figuras planas. Para la elección de los problemas se escogieron proposiciones conocidas por los futuros profesores, las cuales fueron manipuladas a fin de convertirlas en conjeturas matemáticas falsas.

El propósito de los problemas fue generar controversia en los estudiantes durante las entrevistas, mediante un proceso de discusión basado en el método de pruebas y refutaciones. Además, fomentar a que realizaran un proceso de experimentación en matemáticas según como indica De Villiers (2010), para generar instancias –utilizando el SGD– en las cuales los estudiantes exploraran, verificaran y se explicaran con sus palabras durante el proceso de reformulación de conjeturas, tal como recomiendan Fahlgren y Brunström (2014). Lo anterior, con la intención de descubrir o redescubrir conocimiento matemático e identificar las fases que se presentan durante el proceso de reformulación de conjeturas falsas. Al mismo tiempo, determinar cómo y de qué manera influye el uso de un software de geometría dinámica en la exploración y análisis de ejemplos y contraejemplos.

Por limitaciones de espacio, en este artículo solo se presenta el análisis de uno de los problemas propuestos a los estudiantes. Se analiza la respuesta escrita proporcionada por un alumno y la posterior entrevista que se le hizo. El enunciado del problema es el siguiente: *Un cuadrilátero siempre puede inscribirse en una circunferencia*.

Acopio de la información

La recolección de datos se llevó a cabo en dos fases, la primera durante la aplicación de los problemas para ser desarrollados por los participantes en la modalidad de lápiz y papel. Luego, con base en el análisis de las respuestas obtenidas y a fin de obtener más información de estas, se seleccionó a tres alumnos para las entrevistas que iban a realizarse en la segunda fase. En las entrevistas se consideraron los lineamientos sugeridos por Fahlgren y Brunström (2014) para trabajar con los estudiantes, quienes podían hacer uso del software de geometría dinámica Geogebra para verificar sus conjeturas, explorar y analizar ejemplos o contraejemplos formulados tanto por ellos como por el investigador, quien hizo el rol de entrevistador. La duración promedio de las entrevistas fue de 45 minutos. En todas las sesiones se grabaron el audio y la pantalla del ordenador en el que trabajaba cada estudiante.

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación se expone el caso de uno de los estudiantes, Nicanor, al desarrollar el problema expuesto en la metodología. Primero se presenta el análisis de la respuesta escrita que el alumno proporcionó y enseguida los momentos claves observados durante la entrevista.

Análisis de la respuesta escrita

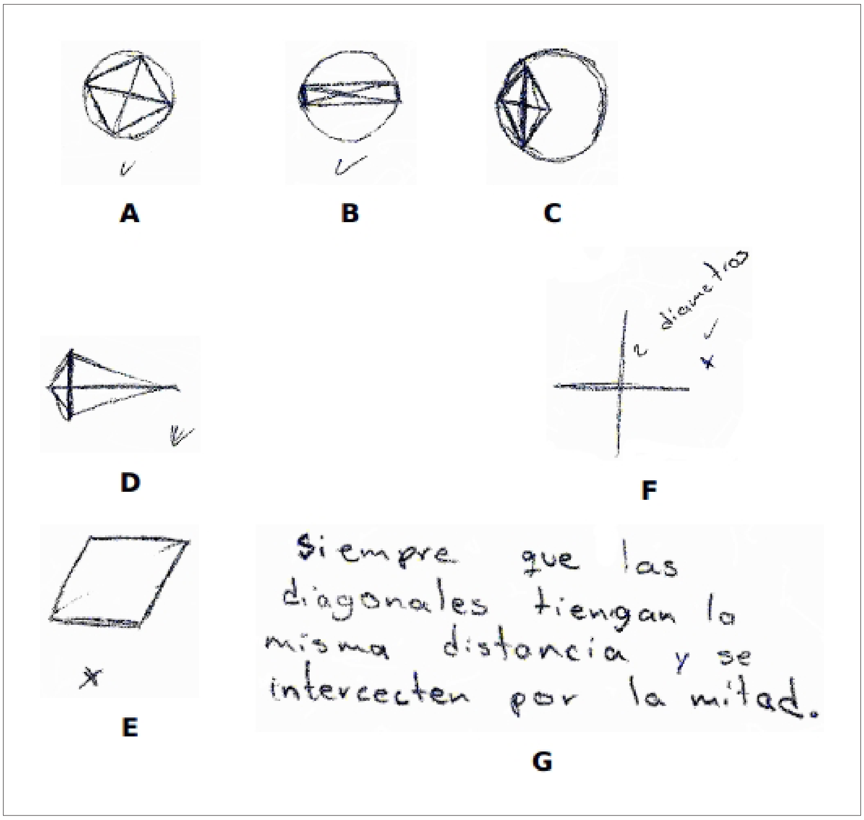


Fig 2. Respuesta en lápiz y papel proporcionada por el estudiante

Nicanor verificó la conjetura al trazar tres ejemplos válidos de figuras en las cuales sí es posible circunscribir una circunferencia (véanse A, B y D en figura 2) y que están junto a un visto bueno (se infiere que visto bueno significa que sí es posible inscribir la figura en una circunferencia). Por otro lado, refutó el enunciado del problema al dar como contraejemplos las figuras C y E (figura 2). Como consecuencia de lo anterior, se infiere que el estudiante concluyó que la conjetura era falsa y que luego formuló una condición a fin de hacerla válida en un determinado dominio (véase figura 2G). La interpretación de la conjetura reformulada en la cual pensó el estudiante es la siguiente:

Conjetura reformulada. *Un cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia siempre que las diagonales tengan la misma longitud y se intersequen en la mitad.*

La conjetura es verdadera, pero la figura 2D –contraejemplo– la refuta, ya que no existe un trapezoide simétrico con diagonales iguales y que a la vez se intersequen (las diagonales) en sus puntos medios; de ser así, la figura dejaría de ser un trapezoide simétrico. Quizá el estudiante se basó en el cuadrado y rectángulo para formular la condición, debido a que estas figuras cumplen con la igualdad de diagonales y su intersección coincide con el centro de la circunferencia circunscrita.

Es importante destacar que al refutar la conjetura con el contraejemplo global de la figura 2C, Nicanor trató de mejorarla al formular una condición que limitara su campo de validez. En la formulación de la condición se identifica que el estudiante utilizó el método de exclusión de excepciones, pero limitó demasiado el campo de dominio al excluir otros ejemplos válidos.

Análisis de la entrevista

Determinación del valor de verdad de la conjetura

El punto de inicio de la entrevista fue el análisis de la conjetura reformulada obtenida al incorporar la condición que el estudiante proporcionó en su respuesta escrita. Al preguntarle si estaba seguro de la condición que había propuesto, Nicanor dudó, ya que creyó posible inscribir un cuadrilátero en una circunferencia siempre y cuando sus diagonales fueran diámetros de dicha circunferencia, pero al darse cuenta de que la condición de igualdad de diagonales no «encajaba» con el trapezoide simétrico, descartó la condición debido a que aún estaba convencido de que siempre es posible inscribir dicha figura en una circunferencia.

[1] Nicanor: Sí, según yo… pero después cuando lo intenté con el rombo, dije a lo mejor que midan dos diagonales, que las diagonales midan dos diámetros. Porque aquí [señalando el trapezoide simétrico de la figura 2D] sí se puede y no miden dos diámetros.

Antes de continuar la discusión, se solicitó al estudiante que respondiera en forma directa si es posible o no inscribir cualquier cuadrilátero en una circunferencia, a lo que respondió que no siempre. Esta respuesta concuerda con la conclusión obtenida del análisis de su contestación escrita.

Determinación del campo de validez de la conjetura

Como el estudiante ya estaba convencido de la falsedad del enunciado y la intención era sacar provecho de la conjetura, se le planteó una pregunta con el fin de determinar en qué cuadriláteros sí es posible circunscribir una circunferencia.

[2] Entrevistador: ¿En qué casos [cuadriláteros] sí se puede siempre?

[3] Nicanor: En los cuadrados, rectángulos y en los trapezoides.

Al igual que en su respuesta escrita, el estudiante señaló que las figuras en las cuales sí es posible circunscribir una circunferencia son el cuadrado, rectángulo y trapezoide simétrico. La respuesta de Nicanor es considerada como una conjetura ingenua relacionada con algunas figuras geométricas en las cuales siempre es posible circunscribir una circunferencia. La interpretación del enunciado de la conjetura en la cual pensó el estudiante es la siguiente:

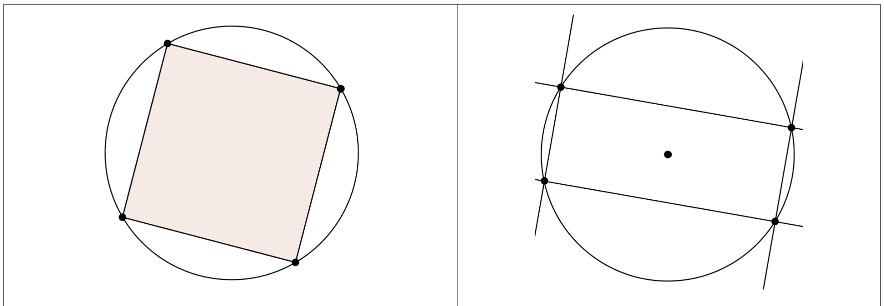
Conjetura. *En los cuadrados, rectángulos y trapezoides simétricos siempre se puede circunscribir una circunferencia*.

Con objeto de verificar la conjetura mediante el análisis de las propiedades de las figuras en las cuales el estudiante consideró que sí es posible circunscribir una circunferencia, se le solicitó que construyera dichas figuras y trazara sus respectivas circunferencias circunscritas.

Análisis del cuadrado y rectángulo

Mediante las herramientas del software, el estudiante construyó una circunferencia circunscrita en el cuadrado (véase figura 3A) y asumió que el centro se encontraba en el punto medio de los vértices opuestos (intersección de las diagonales). Luego, al hacer la prueba del arrastre, verificó que la configuración geométrica se mantenía y afirmó lo siguiente:

[4] Nicanor: En el cuadrado sí, por ser regular yo creo. Sí, creo que sí, en todas las figuras regulares, el pentágono…



A. Cuadrado B. Rectángulo

Enseguida, construyó un rectángulo mediante el trazo de rectas perpendiculares –procedimiento regla y compás– y trazó el punto medio de una de sus diagonales (sin trazar la diagonal). Luego, con la herramienta del software que le permite construir una circunferencia si se conoce el centro y uno de los puntos por donde pasa, trazó una circunferencia que circunscribía el rectángulo (véase figura 3B). El estudiante afirmó, de forma análoga al caso del cuadrado, que el centro de la circunferencia circunscrita es el punto medio de una diagonal (intersección de las diagonales). Además, al mover los vértices independientes del rectángulo –prueba del arrastre–, verificó que su afirmación era válida para cualquier rectángulo.

Análisis del trapezoide simétrico

Nicanor construyó un modelo de trapezoide simétrico a partir de sus diagonales, de las cuales podía manipular su longitud y el punto donde se intersecaban. Como en este caso el estudiante no intuía dónde se encontraba el centro de la circunferencia circunscrita, utilizó la herramienta del software que le permite trazar una circunferencia sabiendo tres de sus puntos para trazar la circunferencia que pasa por tres de los vértices del trapezoide simétrico (figura 4). Al notar que la circunferencia no circunscribía al trapezoide –contraejemplo–, manipuló el tamaño de las diagonales hasta hacer coincidir los cuatro vértices con la circunferencia. Como consecuencia de la exploración, Nicanor modificó el campo de dominio de la conjetura que había estado defendiendo –método de exclusión excepciones– y reformuló su enunciado de la siguiente forma:

Reformulación de la conjetura. *En los cuadrados y rectángulos siempre se puede circunscribir una circunferencia y en algunos trapezoides simétricos.*

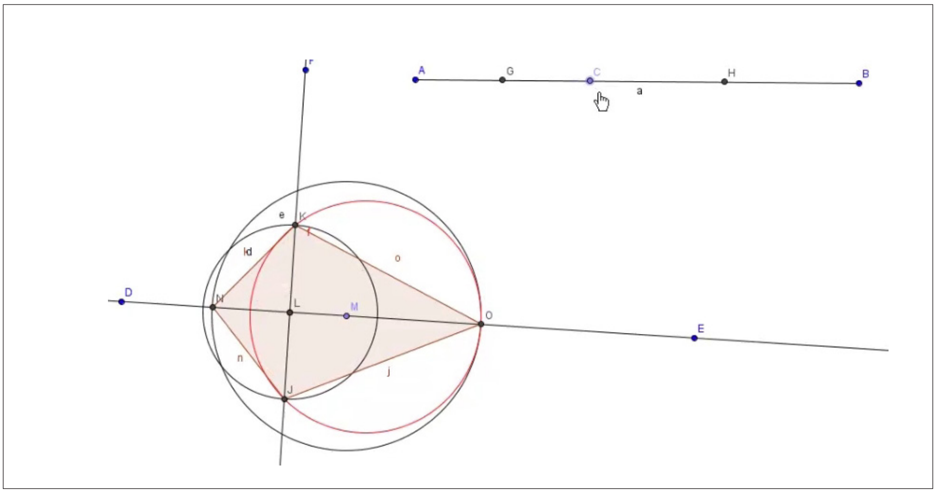


Fig. 4. Modelo del trapezoide simétrico

Hasta el momento, el estudiante había encontrado parte del campo de validez de la conjetura, a saber, figuras como el cuadrado, rectángulo y algunos trapezoides simétricos. A fin de encontrar más figuras en las cuales sí es posible trazar la circunferencia circunscrita, se le consultó por el rombo y romboide.

Análisis del rombo y romboide

Al contrario de su respuesta escrita, Nicanor dudó sobre la imposibilidad de inscribir un rombo en una circunferencia. El estudiante creía que quizá sí era posible, siempre y cuando las diagonales del rombo fueran iguales. Con la intención de causar la aparición de un contraejemplo, a fin de refutar su creencia y de motivarlo a reflexionar, el entrevistador construyó un rombo utilizando el SGD. Luego, Nicanor se apoyó en las herramientas del software para trazar las diagonales y la circunferencia que pasa por tres de los cuatro vértices del rombo (figura 5A). Al notar que la circunferencia no quedaba circunscrita –surgimiento del contraejemplo–, arrastró uno de los vértices independientes de la configuración hasta que la circunferencia quedara circunscrita (véase figura 5B). En ese momento el estudiante se percató de que las diagonales coinciden en longitud, pero la figura dejaba de ser un rombo al convertirse en un cuadrado.

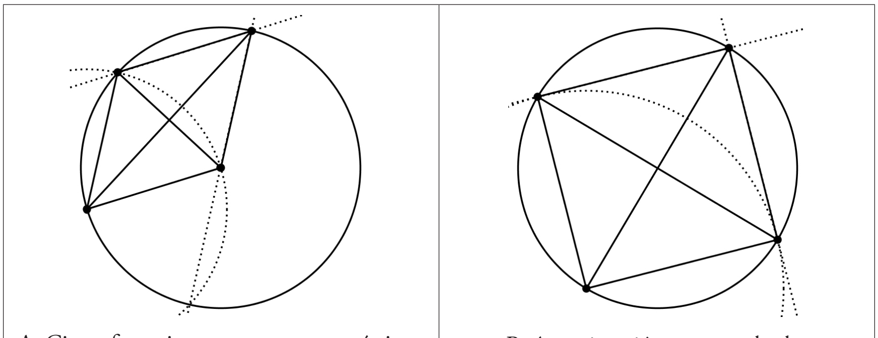

A. Circunferencia que pasa por tres vértices. B. Aproximación a un cuadrado.

Fig. 5. Caso del rombo

Cuando el estudiante analizó el caso del rombo, manifestó inseguridad respecto al dominio que tenía sobre la propiedad de desigualdad de las diagonales de un rombo, pero con la exploración llevada a cabo mediante el SGD aclaró la duda relacionada con dicho concepto y a la vez descartó la posibilidad de circunscribir una circunferencia en tal figura.

[5] Nicanor: No son del mismo tamaño (las diagonales), porque si fueran del mismo tamaño se convertiría en un cuadrado.

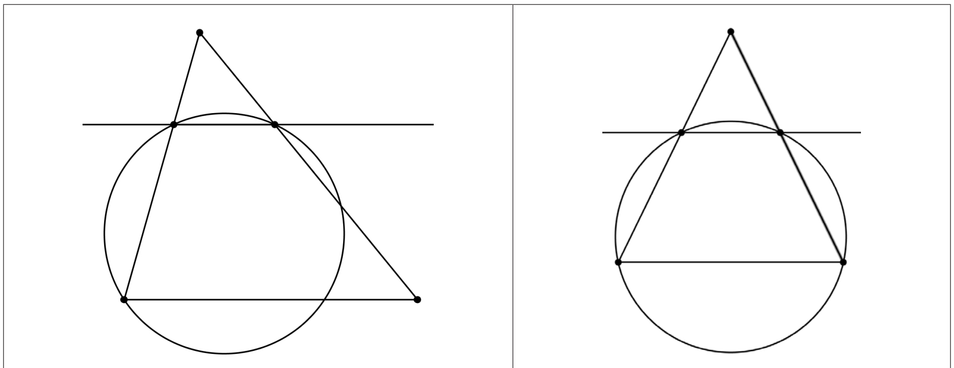
Para el caso del romboide, el estudiante construyó uno utilizando una circunferencia y rectas paralelas –procedimiento regla y compás–. Luego, dedujo que solamente sería posible circunscribirle una circunferencia cuando este se convirtiera en un rectángulo. El razonamiento anterior es análogo a cuando el estudiante afirmó que en un rombo es posible solo si se convierte en un cuadrado.

[6] Nicanor: No, el único caso será que fueran de 90° (los ángulos interiores) y ese es un rectángulo.

Análisis de los trapecios

Después de analizar los paralelogramos y el trapezoide simétrico, Nicanor planteó el caso de los trapecios, figuras que no consideró en su respuesta escrita porque no las recordó en aquel momento. Entonces, a partir de la construcción de un triángulo escaleno, el estudiante construyó un trapecio escaleno y utilizó las herramientas del SGD para trazar una circunferencia que pasara por tres vértices del trapecio (figura 6A). Luego, al aproximar los vértices del trapecio hasta hacerlos coincidir con la circunferencia, se dio cuenta de que el trapecio escaleno se aproximaba a un trapecio isósceles (figura 6B).

[7] Nicanor: Tendría que ser [el trapecio] isósceles.



Circunferencia que pasa por tres vértices del trapecio escaleno. | Aproximación a un trapecio isósceles.

Fig. 6. Análisis de los trapecios

Enseguida, trató de aproximar el trapecio escaleno a un trapecio rectángulo, percatándose de que la circunferencia dejaba de ser circunscrita. Entonces, teniendo en cuenta la exploración de los trapecios, el estudiante formuló una nueva conjetura al señalar que no era posible circunscribir una circunferencia en los trapecios rectángulos y escalenos, pero que siempre se puede en los trapecios isósceles.

Conjetura. *Un trapecio isósceles siempre puede inscribirse en una circunferencia.*

Para verificar la nueva conjetura, el entrevistador construyó un trapecio isósceles cualquiera y el estudiante trazó la circunferencia que pasa por tres de sus vértices, que también pasa por el cuarto vértice (véase figura 7). Al hacer la prueba del arrastre, Nicanor verificó la veracidad de la conjetura y determinó una nueva figura en la cual siempre es posible circunscribir una circunferencia.

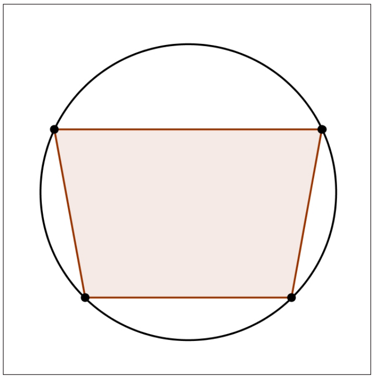


Fig. 7. Trapecio isósceles

Con el análisis del trapezoide simétrico, las familias de los paralelogramos y trapecios, el estudiante determinó el campo de dominio en cuadriláteros conocidos de la conjetura inicial que se le propuso. Además, al final de esta etapa señaló que los cuadriláteros en los cuales sí es posible circunscribir una circunferencia debían cumplir alguna condición. Dado lo anterior, se formularon preguntas al estudiante con el objetivo de hacerlo reflexionar sobre la condición que debe existir para poder inscribir un cuadrilátero en una circunferencia, o trazar la circunferencia circunscrita al cuadrilátero.

Búsqueda e incorporación de una condición para mejorar la conjetura

Con objeto de determinar la condición que deben cumplir los cuadriláteros, Nicanor se dedicó a buscar el centro de la circunferencia circunscrita del trapecio isósceles de la figura 7. Para esto, utilizó las herramientas del SGD para trazar desde un punto exterior a la circunferencia dos rectas tangentes y a la vez determinar los respectivos puntos de tangencia. A continuación, en un primer intento por encontrar el centro, por cada uno de los puntos de tangencia trazó rectas paralelas a las rectas tangentes (figura 8A). Al notar que las rectas paralelas no determinaban el centro de la circunferencia decidió probar trazando rectas perpendiculares (figura 8B), coincidiendo esta vez la intersección de tales rectas con el centro de la circunferencia. Enseguida trazó una circunferencia con centro en el punto donde se intersecaban las rectas perpendiculares que había trazado y que pasara por uno de los puntos de tangencia, superponiéndose esta nueva circunferencia a la circunferencia circunscrita. Entonces, de esa forma el estudiante verificó que el punto encontrado correspondía al centro de la circunferencia circunscrita.

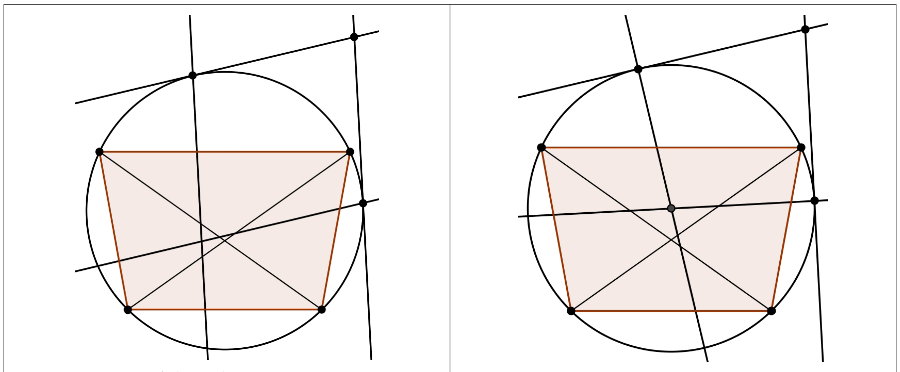

Rectas paralelas a las rectas tangentes. Rectas perpendiculares a las rectas tangentes.

Fig. 8. Trazado de rectas para determinar el centro de la circunferencia

Como el estudiante ya sabía determinar el centro de la circunferencia circunscrita, se le invitó a reflexionar sobre las propiedades que tienen en común las figuras en las cuales sí es posible trazar una circunferencia circunscrita, a fin de encontrar la condición que se está buscando para mejorar la conjetura.

Después de reflexionar un momento y observar detenidamente la figura 8B, el estudiante intuyó que el centro de la circunferencia circunscrita estaba relacionado con las mediatrices de los lados del cuadrilátero.

[8] Nicanor: Las perpendiculares [mediatrices] a sus lados, ¿no?

Inmediatamente después de la afirmación, Nicanor trazó las mediatrices de los cuatro lados del trapecio y comprobó que todas concurrían en el centro de la circunferencia. Al ser consultado sobre las otras figuras en las cuales también trazó una circunferencia circunscrita, este enseguida lo verificó para todas ellas al trazar las mediatrices de los lados correspondientes de cada una, y luego formuló la condición necesaria para inscribir un cuadrilátero en una circunferencia.

[9] Nicanor: Las mediatrices y todas tienen que intersecarse en un punto para circunscribir una circunferencia.

Al consultarle si estaba seguro de la condición que había formulado, el estudiante construyó un cuadrilátero escaleno y trazó las mediatrices de cada lado. Luego verificó por aproximación que cuando las mediatrices son concurrentes, es posible trazar una circunferencia circunscrita (véase figura 9).

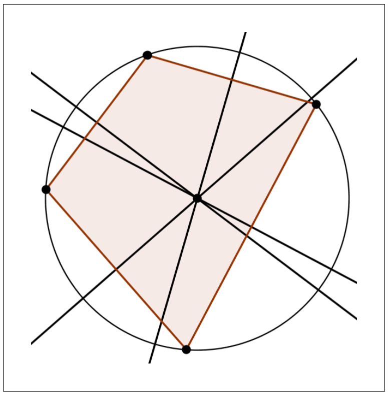


Fig. 9. Cuadrilátero escaleno

Al verificar en un cuadrilátero convexo cualquiera la condición que formuló, Nicanor reformuló la conjetura al incorporar la condición que permite determinar cuándo un cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia.

Conjetura reformulada. *Un cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia si las mediatrices de sus lados se intersecan en un mismo punto.*

Es importante mencionar que el enunciado de la conjetura reformulada obtenida por el estudiante es distinto al enunciado que aparece frecuentemente en los textos de geometría. Cuando se hace referencia a los cuadriláteros inscriptibles, por ejemplo, Landaverde (1991) define el concepto bajo la condición de que los ángulos opuestos del cuadrilátero sean suplementarios (reciproco de cuadrilátero cíclico), lo cual es válido solo para cuadriláteros convexos. En cambio, el estudiante proporcionó una condición basada en la concurrencia de las mediatrices, condición que permite incluir tanto a los cuadriláteros convexos como a los cóncavos (como se verá en el siguiente apartado).

Verificación de la conjetura en el caso de un monstruo

Con la intención de cuestionar la conjetura reformulada (la cual era correcta), el entrevistador construyó un cuadrilátero cóncavo como el de la figura 10 y consultó al estudiante si la conjetura reformulada era válida para este tipo de cuadriláteros. Nicanor se mostró sorprendido al ver dicha figura, debido a que la definición de cuadrilátero que consideró desde que se le propuso el problema no incluía los cuadriláteros cóncavos, limitándose solamente a los cuadriláteros convexos. Dada la sorpresa que manifestó el estudiante, el ejemplo del cuadrilátero cóncavo se consideró como un monstruo, debido a que este no tuvo en cuenta tales figuras en la definición de cuadrilátero con la cual trabajó durante el proceso de reformulación de la conjetura.

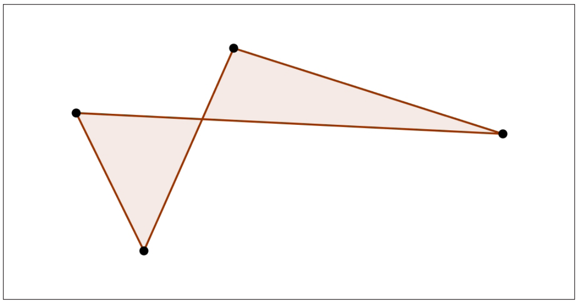


Fig. 10. Cuadrilátero cóncavo

Para verificar si la conjetura era válida en los cuadriláteros cóncavos, Nicanor trazó las mediatrices de los lados, haciéndolas concurrir –por aproximación– en un punto. A continuación, trazó una circunferencia de centro en el punto de intersección y que pasara por uno de los vértices del cuadrilátero, para comprobar así que la circunferencia pasaba por los tres vértices restantes; en consecuencia, circunscribía al cuadrilátero. Con lo anterior, el estudiante comprobó y posteriormente afirmó que la conjetura reformulada era válida tanto para los cuadriláteros convexos como para los cóncavos.

Formulación de una nueva conjetura

Además de reformular la conjetura inicial y generalizarla para todos los cuadriláteros, Nicanor formuló una nueva conjetura relacionada con las diagonales –definición subyacente– de los cuadriláteros.

[10] Nicanor: Entonces, no nada más tiene que ver con los lados, tiene que ver con los… con las diagonales.

[11] Entrevistador: ¿Con las diagonales?

[12] Nicanor: En este caso, si yo lo quisiera ver como un… cuadrilátero de los que estábamos haciendo anteriormente, de hecho son sus diagonales. Y también trazamos sus mediatrices de esas diagonales, también se cumple.

Después del diálogo, Nicanor trazó las mediatrices de las diagonales de todos los cuadriláteros que había construido y en los cuales sí era posible trazar una circunferencia circunscrita. Verificó que en todos estos las mediatrices de las diagonales también concurrían en el centro de la circunferencia circunscrita. Entonces, el estudiante formuló una nueva conjetura.

Nueva conjetura. *Si las mediatrices de las diagonales de un cuadrilátero se intersecan en un punto, el cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia.*

Para hacer reflexionar a Nicanor sobre la nueva conjetura, se mostró como contraejemplo global el cuadrilátero cóncavo de la figura 11, en el cual las diagonales son concurrentes, pero no las mediatrices de sus lados.

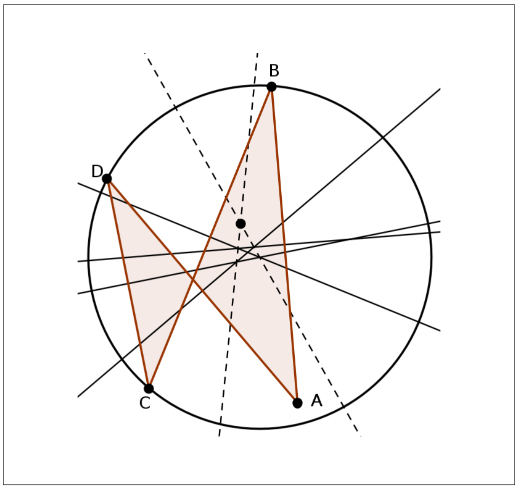


Fig. 11. Cuadrilátero en el cual las mediatrices de las diagonales son concurrentes, pero no las mediatrices de los lados[8]

Cuando Nicanor observó el contraejemplo dado por el entrevistador se generó el siguiente diálogo:

[13] Entrevistador: Entonces, ¿se puede de esa forma?

[14] Nicanor: Con las diagonales no. Yo pensé que sí se iba a poder.

[15] Entrevistador: ¿Pero sí con los lados?

[16] Nicanor: Con los lados es más general.

En el diálogo anterior se observa que Nicanor se dio cuenta de que la conjetura que había formulado no era válida, pero trató de salvarla al señalar que si las mediatrices de los lados coincidían

8. Con la intención de facilitar la comprensión de la figura proporcionada por el estudiante, se modificó la forma continua de las mediatrices de las diagonales del cuadrilátero por líneas punteadas.

también coincidirían las mediatrices de las diagonales. Entonces, la nueva conjetura reformulada fue la siguiente:

Conjetura reformulada. *Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero coinciden en un mismo punto, también lo harán en el mismo punto las mediatrices de las diagonales de dicho cuadrilátero.*

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

En general, se observaron tres fases durante el proceso de reformulación de conjeturas. La primera, cuando los estudiantes dedicaron tiempo para comprender el enunciado y determinar su valor de verdad, mediante ejemplos y contraejemplos formulados por ellos mismos y en ocasiones por el entrevistador. Cuando los estudiantes estaban convencidos del valor de verdad de la conjetura, se daba inicio a una segunda fase, en la cual se dedicaban a buscar ejemplos válidos para determinar el campo de validez de la conjetura. Luego, en la última fase, se dedicaron a la búsqueda de una condición para incorporarla en el enunciado de la conjetura, con vistas a mejorarla mediante el análisis de las propiedades de aquellos cuadriláteros pertenecientes al campo de dominio.

El elemento del método de pruebas y refutaciones observado tanto en las respuestas escritas como en el proceso de discusión llevado a cabo en las entrevistas fue la refutación por medio de contraejemplos. Estos jugaron un rol trascendente en todas las etapas, debido a la controversia que el uso de estos generó en los estudiantes cuando sus conjeturas eran refutadas. Se observaron refutaciones a causa de contraejemplos que no cumplían las condiciones formuladas por los estudiantes, pero sí eran ejemplos válidos de la conjetura, y refutaciones por contraejemplos globales. Los primeros causaban un rechazo a la condición de la conjetura, mientras que los segundos rechazaban su conclusión. La utilización de contraejemplos formulados tanto por los estudiantes como por el entrevistador ayudó a estos en la comprensión de por qué las conjeturas, condiciones o enunciados que planteaban no eran válidos, dando paso a la búsqueda de nuevas condiciones o a la limitación del campo de dominio de la conjetura que se estaba analizando.

En la fase durante la cual los estudiantes requerían determinar el campo de validez de la conjetura, es indiscutible la necesidad de utilizar el método de exclusión de excepciones, pues sin esta técnica no habrían descubierto figuras correspondientes a ejemplos válidos, para luego analizar sus propiedades y lograr determinar una condición en pro de mejorar la conjetura que se les planteó. Tal como señalan Larsen y Zandieh (2007), el método de exclusión de excepciones estuvo centrado en los contraejemplos y conjetura, lo que llevó a una modificación de esta.

La formulación intencional por parte del entrevistador de un ejemplo catalogado como monstruo (el cuadrilátero cóncavo) motivó a uno de los estudiantes a explorar figuras que no había considerado en la definición de cuadrilátero con la cual estaba trabajando; esto lo obligó en cierta forma a analizar nuevamente la conjetura que se suponía ya estaba reformulada. Esta situación fue superada por el estudiante sin la necesidad de hacer uso del método de exclusión de monstruos, dado que la conjetura, que ya estaba reformulada, era válida para cualquier tipo de cuadrilátero. Sin embargo, el estudiante amplió aún más el campo de dominio al incorporar la familia de cuadriláteros cóncavos, además de reflexionar sobre la importancia de tener claridad respecto a la definición de cuadrilátero y conceptos subyacentes involucrados en el enunciado de la conjetura.

Respecto al uso del software de geometría dinámica, este permitió a los estudiantes llevar a cabo la experimentación. Se observó que inmediatamente después de formular una conjetura, construían la configuración geométrica que la representaba y la verificaban o refutaban mediante el análisis de figuras. Tal como señala De Villiers (2010), el software les permitió abarcar más ejemplos en menos tiempo, incluso hacer aproximaciones mediante el arrastre de los elementos independientes de las configuraciones. El rol del software fue de una herramienta que facilitó el proceso de experimentación, exploración y análisis de enunciados matemáticos que surgieron durante el proceso de reformulación de conjeturas.

Se observó que los estudiantes formularon conjeturas, las evaluaron y analizaron por medio del software de geometría dinámica. Las conjeturas fueron refutadas mediante contraejemplos propuestos por ellos o por el entrevistador, para luego ser reformuladas y evaluadas nuevamente, con lo que se generó un proceso cíclico similar al descrito en el esquema propuesto por Davis *et al.* (2012). A partir de una conjetura falsa los estudiantes descubrieron conocimiento al trabajar en un ambiente basado en pruebas y refutaciones. Lo anterior se dio en los tres casos estudiados, destacando el de Nicanor, quien después de reformular la conjetura, formuló una nueva conjetura relacionada con las propiedades de las figuras involucradas en la conjetura reformulada. Lo destacable del enunciado de la conjetura reformulada, proporcionada por Nicanor, es que la condición incluye cualquier tipo de cuadrilátero, caso contrario a la condición que se ofrece comúnmente en los textos de geometría, la cual se limita a los cuadriláteros convexos.

Entonces, cuando los estudiantes reformularon conjeturas en un ambiente basado en el método de pruebas y refutaciones, se observó que descubrieron conocimiento e hicieron un análisis de los conceptos geométricos involucrados directa o indirectamente con el enunciado de la conjetura, lo cual los llevó a mejorar la comprensión que tenían de algún concepto o propiedad matemática, similar a lo expresado por De Villiers (2010) cuando se refiere al proceso de comprensión en la experimentación en matemáticas.

Es importante mencionar que lo expuesto en este artículo, referente al proceso de reformulación de conjeturas llevado a cabo por futuros profesores, finalizó cuando obtuvieron la conjetura reformulada final –conjetura ingenua–, momento idóneo para pasar a la siguiente fase, la propuesta de una prueba para la conjetura y su posterior análisis.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Atkins, S. (1997). Lakato's Proofs and Refutations Comes Alive in an Elementary Classroom. *School Science and Mathematics*, 97(3), pp. 150-154.
http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.1997.tb17358.x

Davis, P., Hersh, R. y Marchisotto, E. (2012). *The Mathematical Experience, Study Edition*. USA: Birkhäuser.
http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-8295-8

De Villiers, M. (2000). A Fibonacci generalization: A Lakatos example. *Pythagoras*, 10-29. Disponible en línea: <http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/fibo.pdf>.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics. *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perpectives*, pp. 205-221.
http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0576-5_14

Fahlgren, M. y Brunström, M. (2014). A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry. *Technology, Knowledge and Learning*.
http://dx.doi.org/10.1007/s10758-014-9213-9

Karakus, F. y Bütün, M. (2013). Examining the Method of Proof and Refutations in Pre-Service Teachers Education. *Boletim de Educação Matemática*, 27(45), pp. 215-232.

Lakatos, I. (1986). *Pruebas y refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático* (trad. C. Solis). Madrid: Alianza.

Landaverde, F. (1991). *Curso de Geometría: para secundaria y preparatoria.* México, D. F.: Progreso.

Larsen, S. y Zandieh, M. (2007). Proof and refutations in the undergraduate. *Educational Studies in Mathematics*, 67, pp. 205-216.
http://dx.doi.org/10.1007/s10649-007-9106-0

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Swinyard, C. y Larsen, S. (2010). *Proofs and Refutations as a Model for Defining Limit*. Trabajo presentado en Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. Disponible en línea http://sigmaa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Swinyard.pdf

Discovery of mathematical knowledge by reformulation of false conjectures in a proofs and refutations environment

Álvaro Sebastián Bustos Rubilar
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN-México
bustos.rubilar@gmail.com

Gonzalo Zubieta Badillo
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN-México
gzubieta@cinvestav.mx

In this paper we expose the results obtained in a study carried out with future secondary school teachers. The context research is the reformulation of false conjectures through a discussion process, based on some elements of the quasi-empirical method of proof and refutations, when students use a dynamic geometry software.

Our first aim in this investigation was to determine the stages present between the reformulation process of false conjectures and the obtaining of a naive conjecture, that is, to the moment when the student is required to formulate a proof for the validation of the conjecture. The second aim was to determine the role of the dynamic geometry software, when the students generate and evaluate examples and counterexamples. We always worked these two aims with students in a discussion process based on some elements of the quasi-empirical method of proof and refutations.

To carry out the study we take into consideration theoretical elements related to the method of proof and refutations exposed by Lakatos (1986), like the Simplified Lakatos model for the heuristics of mathematics discovery proposed by Davis, Hersh and Marchisotto (2012), and a framework based on the method of proof and refutations proposed by Larsen and Zandieh (2010). In relation to technology use, we take elements about the experimentation in mathematics according to De Villiers (2010), and the recommendations for work in a dynamic geometry environment suggested by Fahlgren and Brunströn (2014) were incorporated.

The participants in the investigation were students in the forth semester of the Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad Matemática at the Escuela Normal Superior de México. We presented the students a set of false geometry conjectures to solve in a paper and pencil environment. After that, some students were chosen to be interviewed. The intention was to delve into their answers provided in the paper and pencil environment. At the same time, in the interviews we tried to generate an environment based on some elements of the proof and refutation method. The data analysis was obtained from the answers provided by the students in the paper and pencil environment and also from the records of the interviews.

Through the presentation of a student's case, we expose in detail how the student discovers knowledge from a false conjecture, and improves the grasp he had regarding the concepts or properties related to the conjecture's statement. Even he attempted to formulate an additional conjecture linked to a concept of the reformulated conjecture's statement. In this process, we highlight the generation of counterexamples of the statements provided by the students. These counterexamples triggered the modification or the limitation of the validity domain of the conjecture. Besides, this generated controversy in the students regarding their statements. We also show how the dynamic geometry software allowed students in the process of the reformulation conjecture: the exploration, analysis and verification of the examples and counterexamples or concept related to the reformulated conjecture.