ARGUMENT

Vol. 4 (2/2014)
pp. i–xliv

ANNEX / ANEKS

Metafizyka ruchu w *Geometrii* Kartezjusza

Piotr BŁASZCZYK*

Kazimierz MRÓWKA**

ABSTRACT

Metaphysics of motion in *The Geometry* by Descartes

In Book II of *The Geometry*, Descartes distinguishes some special lines, which he calls geometrical curves. From the mathematical perspective, these curves are identified with polynomials of two variables. In this way, curves, which were understood as continuous quantities in Greek mathematics, turned into objects composed of points in *The Geometry*. In this article we present assumptions which led Descartes to this radical change of the concept of curve.

KEYWORDS

Descartes; *The Geometry*; geometrical curve; pointwise curve

* Doktor hab., profesor Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, kierownik Katedry Dydaktyki i Podstaw Matematyki, Instytut Matematyki. E-mail: pb@up.krakow.pl.

** Doktor hab. filozofii, profesor Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, kierownik Katedry Filozofii Starożytnej i Średniowiecznej, Instytut Filozofii i Socjologii. E-mail: kazimierzmrowka@gmail.com.

Spis treści

1. Wprowadzenie

1.1. **Dwa rodzaje ciągłości.** W matematyce i filozofii greckiej ciągłość charakteryzowała obiekty geometryczne (odcinki, figury, bryły, krzywe), a także ruch i czas. Greccy matematycy nie zdefiniowali ciągłości, zaś wśród definicji filozoficznych wiekową sławę zdobyła ta pochodząca od Arystotelesa: „wszystko ciągłe jest podzielne na te, które są podzielne na zawsze podzielne" (Aristoteles, 1831: 231a 15–16, przeł. P.B., K.M.).

Słowom Arystotelesa można nadać sens matematyczny, mianowicie: podzielność wielkości A oznacza, że $A = A_1 + A_2$, podobnie podzielność części A_1, A_2 oznacza, że $A_1 = A_{1,1} + A_{1,2}$ oraz $A_2 = A_{2,1} + A_{2,2}$ itd. Ta interpretacja odwołuje się do teorii *wielkości ciągłych* z księgi V *Elementów* Euklidesa, wykorzystuje jedynie proste pojęcia algebraiczne i pomija rozróżnienie nieskończoności potencjalnej oraz aktualnej, które nie odgrywało żadnej roli w antycznych tekstach matematycznych.

Z definicji Arystotelesa wynika, że na linii geometrycznej można wyróżnić nieskończenie wiele punktów, chociaż linia jest pierwotną jednością i nie składa się z punktów (Błaszczyk & Mrówka, 2013b).

We współczesnej matematyce występują dwa zasadniczo odmienne rozumienia ciągłości — ciągłość jest cechą albo porządku, albo funkcji. Porządek liniowy $<$ jest ciągły — przypomnijmy — gdy każdy przekrój Dedekinda (L, U) zbioru $(\mathbb{F}, <)$ spełnia warunek[1]:

$$(\exists! x \in \mathbb{F})(\forall y \in L)(\forall z \in U)(y \leqslant x \leqslant z). \tag{1}$$

Dla wyrażenia ciągłości funkcji $f : \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$ w zbiorze $\mathbb{F}$ należy zdefiniować strukturę topologiczną. Z uwagi na porównania, które przedstawimy dalej w § 7, przyjmujemy, że $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym, a topologię wyznaczają przedziały otwarte. Ciągłość funkcji f w punkcie $a \in \mathbb{F}$ jest wówczas wyrażana następującym warunkiem:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{F})(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \tag{2}$$

Dalej, funkcja jest ciągła w dziedzinie, gdy jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Definicja ciągłości porządku pochodzi od Richarda Dedekinda (Dedekind, 1872), definicja ciągłości funkcji – od Eduarda Heinego (Heine, 2014).

Inną koncepcję ciągłości przedstawił Georg Cantor (Cantor, 1883). Utożsamiając funkcję $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ z grafem, $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$,

[1] Para zbiorów (L, U) jest przekrojem Dedekinda zbioru $(\mathbb{F}, <)$, gdy (1) $L, U \neq \emptyset$, (2) $L \cup U = \mathbb{F}$, (3) $(\forall y \in L)(\forall z \in U)(y < z)$.

traktował ją jako kontinuum topologiczne w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{n+1}$ (Błaszczyk & Mrówka, 2013b).

W mechanice klasycznej ruch punktu jest opisywany funkcją rzeczywistą i odpowiednio ciągłość funkcji stanowi współczesny wyraz ciągłości ruchu; ciągłość porządku odpowiada wówczas ciągłości czasu. W artykule rozważamy krzywe kreślone przez poruszające się punkty, dlatego dla dalszych porównań istotna będzie tylko definicja (2).

Kartezjusz nie dysponuje ani definicją (1), ani definicją (2), co więcej, podobnie jak starożytni, nie odróżnia ciągłości czasu od ciągłości ruchu, mimo to jego rozstrzygnięcia matematyczne w istotny sposób wpłynęły na nowożytne pojmowanie ciągłości ruchu i czasu. Wiążąc ruch z równaniem algebraicznym Kartezjusz wprowadził myśl, że ruch jest tworem punktowym. W artykule pokazujemy, jak w wyniku zastosowania algebry dochodzi w *Geometrii* do zmiany koncepcji ruchu: od pierwotnej jedności, jaką był ruch w matematyce i filozofii greckiej, do obiektu złożonego z punktów.

1.2. **Kontinuum punktowe.** W monografiach historii rachunku różniczkowego wyróżniane są dwa okresy związane z kształtowaniem pojęcia liczby rzeczywistej: (1) formowanie idei kontinuum arytmetycznego, (2) krytyka idei kontinuum arytmetycznego (Bell, 2005; Boyer, 1959; Ehrlich, 1994).

Ad (1). W drugiej połowie XIX wieku, w pracach Heinego, Cantora i Dedekinda, w miejsce pojęć wielkości zmiennej czy wielkości ciągłej wprowadzono oś liczb rzeczywistych. Idea ta zyskała z czasem niemal powszechną akceptację, gdyż w zadowalający sposób uporządkowała podstawy rachunku różniczkowego. Zarazem w dyskusjach towarzyszących odkryciu liczb rzeczywistych ożyły antyczne spory o naturę ciągłości i pojawiły się wątpliwości czy liczby te dobrze opisują kontinuum (Bell, 2005).

We współczesnej matematyce liczby rzeczywiste są pojmowane jako ciało uporządkowane w sposób ciągły, słowo „wielkość” — jeżeli w ogóle występuje — pełni co najwyżej dekoracyjną rolę, a pytanie, czy liczby rzeczywiste opisują jakiś inny obiekt, jakieś „kontinuum” różne od samych liczb rzeczywistych, nie ma już charakteru naukowego.

Ad (2). Na przełomie wieków XIX i XX kilku wpływowych matematyków i filozofów, wśród nich Emil du Bois-Reymond, Guiseppe Veronese, Henri Poincaré, Luitzen Brouwer, Herman Weyl, Franz Brentano, Charles Peirce, zakwestionowało samą ideę kontinuum jako obiektu złożonego z innych obiektów — czy to punktów na linii, czy liczb na osi. Bez względu na to, jak te elementy składowe są ułożone, czy są uporządkowane w sposób gęsty, czy ciągły, kontinuum złożone z punktów lub liczb zawsze będzie — twierdzono — obiektem dyskretnym. *Prawdziwe* kontinuum — przekonywano — jest w pierwszym rzędzie jednością (Bell, 2005).

W polemikach na temat kontinuum często przywoływano starożytną matematykę i filozofię, podkreślając, że Grecy pojmowali kontinuum jako jedność. Nawiązaniom historycznym nie towarzyszyły jednak konkretne badania, bo rozwiązania nie szukano w historii. Matematycy krytykujący ideę kontinuum liczbowego przedstawiali alternatywne koncepcje, jedni, jak du Bois-Reymond czy Veronese, wiązali je ze strukturami niearchimedesowymi, inni, jak Brouwer czy Weyl, proponowali zmianę samych podstaw matematyki.

Istotnie, w matematyce greckiej linie proste, stożkowe czy krzywe kreślone przez poruszający się punkt były pojmowane jako jedności: na linii można było wyróżnić punkty, na przykład przecięcia z innymi liniami, ale linia nie składała się z punktów. Myśl, że linia jest obiektem złożonym z punktów, pojawiła się jednak nie w połowie XIX wieku, jak głosili krytycy idei kontinuum punktowego, ale dwieście pięćdziesiąt lat wcześniej — w *Geometrii* Kartezjusza. W niniejszym artykule pokażemy, co doprowadziło do takiego obrazu krzywej. Krótko: idea ta jest wynikiem zderzenia starożytnej metafizyki ruchu, którą Kartezjusz przejął od Pappusa i Archimedesa, z notacją algebraiczną, którą zastosował w geometrii.

Sam Kartezjusz nie był świadom przełomu, jakiego dokonał w matematycznym opisie ruchu, i nigdzie w *Geometrii* nie zostało wprost powiedziane, że linia krzywa „składa się" z punktów. Przesunięcia znaczeń prowadzące do punktowego rozumienia krzywej rozgrywają się między warstwą słowną a warstwą oznaczeń symbolicznych, między tym, co powiedziane wprost, a tym, co wyrażone symbolem, formułą i rysunkiem[2]. W warstwie słownej *Geometrii* znajdujemy, że krzywe są kreślone przez „ciągły ruch", a wtedy ciągłość jest rozumiana tak, jak w filozofii greckiej. W warstwie oznaczeń krzywa jest opisana równaniem algebraicznym $\varphi(x, y)$, a wtedy jest obiektem złożonym z punktów; jedność ruchu, który generuje krzywą, gwarantuje wówczas jedność obiektu złożonego z punktów. Aby uwyraźnić ten moment, w § 7 przedstawiamy fragmenty klasycznych tekstów matematycznych, traktujące o ciągłości funkcji. Zestawienia te w pełni ukazują sens rozstrzygnięć, jakie znajdujemy w *Geometrii*.

Dla ukazania filozoficznego znaczenia omawianej kwestii dodajmy, że punktowe pojmowanie linii zdominowało współczesną filozofię czasu.

[2] Warstwowa budowa tekstu matematycznego jest przedstawiona w: Błaszczyk, 2005; Błaszczyk, 2007.

W tradycji filozoficznej związanej z nauką niekwestionowanym założeniem jest, że czas składa się z chwil tak, jak oś liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, <)$ składa się z punktów. Przekonanie to jest tak powszechne, że nawet filozofowie zajmujący się czasem przeżywanym, żeby wymienić Henriego Bergsona czy Romana Ingardena, dużo energii poświęcali krytyce *punktowej* koncepcji czasu, którą, co znamienne, nazywali też *matematyczną*. Jednak żaden krytyk *matematycznej* koncepcji czasu ani też żaden historyk matematyki czy filozof nie zauważył, że źródłem owej *punktowej* koncepcji czasu jest *Geometria* Kartezjusza.

2. Krzywe mechaniczne vs. krzywe geometryczne

2.1. **Które linie można przyjąć w geometrii.** *Geometria* składa się z trzech ksiąg[3]. W księdze I Kartezjusz definiuje arytmetykę odcinków, wprowadza pojęcia algebraiczne i nowy sposób oznaczania obiektów geometrycznych oraz ilustruje przydatność tych technik w konstruowaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego. Następnie omawia zagadnienie Pappusa polegające na wyznaczeniu „miejsca” punktów leżących w określonej odległości od danych linii prostych i spełniających pewne dodatkowe warunki. Grecy potrafili postawić ten problem tylko dla sześciu prostych i podać rozwiązanie kilku szczególnych przypadków. Dzięki nowej metodzie Kartezjusz sformułował zagadnienie Pappusa dla dowolnej ilości prostych oraz znalazł — jak pisze — jego ogólne rozwiązanie. Zapowiadane rozstrzygnięcie wiąże się z wykorzystaniem pewnych specjalnych krzywych.

Przyjęta przez Kartezjusza metoda rozwiązywania problemów geometrycznych polega na konstrukcji pierwiastków równań algebraicznych z wykorzystaniem cyrkla, linijki oraz krzywych, które nazwał geometrycznymi. W księdze III Kartezjusz pokazuje, jak za pomocą paraboli podzielić kąt na trzy równe części oraz jak skonstruować sześcian dwa razy większy od danego[4]. Dalej, jak za pomocą paraboli skonstruować pierwiastki równań 3. i 4. stopnia oraz jak za pomocą paraboli sześciennej skonstruować pierwiastki równań 5. i 6. stopnia. Równania

[3] Wszystkie cytaty z *Geometrii* Kartezjusza pochodzą z: Błaszczyk & Mrówka, 2014b, numery stron podajemy za pierwszym wydaniem *Geometrii* (Descartes, 1637; Smith & Lathan, 2007). Inne przekłady, z wyjątkiem pracy Heine, 2014, są naszego autorstwa — P.B., K.M. Diagramy zamieszczone w artykule odwzorowują diagramy z cytowanych prac; czasami, dla ułatwienia narracji, poddajemy je pewnym modyfikacjom, wówczas jest to wyraźnie zaznaczone.

[4] To drugie zadanie nazywane jest w *Geometrii*, podobnie jak w matematyce greckiej, konstrukcją trzeciej proporcjonalnej.

te służą rozwiązaniu zasadniczego problemu *Geometrii* — problemu Pappusa.

Konstrukcje przy użyciu kół i linii prostych (konstrukcje klasyczne) stanowiły w starożytności podstawowy sposób rozwiązywania zadań geometrycznych. Ta metoda została przeniesiona do matematyki nowożytnej z *Elementami* Euklidesa. Ale Grecy przeprowadzali też konstrukcje przy użyciu innych krzywych oraz instrumentów innych niż tylko cyrkiel i linijka (konstrukcje nieklasyczne). Za pomocą konchoidy, to jest przyjmując, że na płaszczyźnie wyrysowana jest konchoida, potrafili podzielić dowolny kąt na trzy równe części oraz podwoić sześcian, za pomocą kwadratrysy przeprowadzili kwadraturę koła (Bos, 1981: 33–34, 55; Sefrin-Weis, 2010: 127–136)[5]. I tak jak cyrkiel służył do kreślenia kół, a liniał do kreślenia linii prostych, tak z większością innych krzywych związane były instrumenty służące do ich kreślenia.

Krzywe wykorzystywane w konstrukcjach nieklasycznych traktowano w starożytności łącznie; wyróżnioną grupę stanowiły tylko stożkowe (parabola, elipsa, hiperbola) — konstrukcje, w których były one używane nazywano zagadnieniami bryły. W *Geometrii* natomiast znajdujemy odmienne podejście. Kartezjusz dzieli krzywe na geometryczne oraz mechaniczne i odpowiednio dzieli konstrukcje nieklasyczne. Pierwsze uwagi na ten temat zamieszcza w paragrafie *Które linie można przyjąć w geometrii*. Przekonuje tam, że obok kół i linii prostych, także inne krzywe mogą być stosowane w konstrukcjach z zachowaniem rygorów ścisłości obowiązujących w geometrii. Przedkładane argumenty koncentrują się wokół trzech haseł: (1) instrumenty, (2) dokładność, (3) aksjomaty.

Ad (1). Krzywe wykorzystywane w konstrukcjach nieklasycznych są istotnie kreślone za pomocą instrumentów, ale to samo — przekonuje Kartezjusz — odnosi się do kół oraz linii prostych, bo zarówno cyrkiel, jak i linijka są instrumentami.

Ad (2). Instrumenty służące do kreślenia krzywych używanych w konstrukcjach nieklasycznych mogą być tak samo dokładne, jak cyrkiel i linijka.

Ad (3). Wprowadzenie do badań nowych krzywych wcale nie wymaga wielu nowych postulatów.

W związku z trzecim argumentem Kartezjusz przypomina postulaty Euklidesa opisujące konstrukcje klasyczne: (a) przez dwa punkty można poprowadzić prostą, (b) z danego punktu można zakreślić koło

[5] Dopiero w XIX wieku udowodniono, że przy użyciu cyrkla i linijki nie można dokonać trysekcji dowolnego kąta, podwojenia sześcianu i kwadratury koła. Zob. Browkin, 1978.

o danym promieniu (Błaszczyk & Mrówka, 2013a: 197–204). Zwraca też uwagę na fakt, że definiując parabolę, hiperbolę i elipsę jako przecięcie stożka i odpowiedniej płaszczyzny, Grecy wcale nie wprowadzili do geometrii dodatkowych zasad gwarantujących istnienie tych obiektów. Tym niemniej Kartezjusz podaje trzy aksjomaty, które gwarantują istnienie krzywych geometrycznych: (a) krzywe „mogą być poruszane jedna przez drugą", (b) przecięcia krzywych wyznaczają nowe krzywe, (c) krzywe są kreślone przez „ciągły ruch lub przez kilka następujących po sobie ruchów". Aksjomaty te omówimy niżej w odrębnej części.

Pierwsze uwagi na temat krzywych nie są — jak widzimy — ani przenikliwe, ani oryginalne. Zauważono też, że Kartezjusz, chcąc uzasadnić podział krzywych na geometryczne i mechaniczne, dość swobodnie interpretuje matematykę grecką (Molland, 1976).

Dyskusja na temat konstrukcji nieklasycznych ożywia się, gdy wśród krzywych stosowanych do konstrukcji nieklasycznych Kartezjusz wyróżnia krzywe geometryczne, a więc te, których chce użyć do rozwiązania problemu Pappusa. Omówienie tej kwestii zaczniemy od przykładów.

2.2. **Przykłady.** Kartezjusz dzieli wszystkie krzywe na mechaniczne i geometryczne. Krzywe mechanicznie wymienione w *Geometrii* to spirala Archimedesa i kwadratrysa. Krzywe geometryczne — to stożkowe, konchoida Nikomedesa, parabola sześcienna (parabola Kartezjusza) oraz krzywe kreślone przez mezolabium; do tej grupy należą też linia prosta i koło[6].

Krzywe geometryczne są definiowane na dwa sposoby: (1) za pomocą instrumentu zwanego mezolabium, (2) *via* ruch i przecięcia innych krzywych.

Ad (1). Mezolabium jest pokazane w *Geometrii* jako instrument, który kreśli jednocześnie cztery linie: okrąg i trzy krzywe algebraiczne odpowiednio 4., 8. i 12. stopnia[7]. Krzywe te są kreślone przez punkty, których trajektoria wynika z opisu instrumentu.

Kartezjusz powraca do mezolobium w księdze III, w związku z klasyfikacją linii. W kontekście uwag o „naturze" krzywych rola tego przykładu sprowadza się do następującego zdania:

[6] Współcześnie krzywe mechanicznie nazywane są transcendentalnymi, geometryczne — algebraicznymi.

[7] Mezolabium jest przedstawione na pierwszym rysunku tłumaczenia księgi II *Geometrii* zamieszczonego w niniejszym tomie. Kolejne krzywe są zakreślone przerywanymi liniami i oznaczone odpowiednio literami AB, AD, AF, AH.

> Nie widzę, co może przeszkodzić w zrozumieniu opisu tej pierwszej [tj. krzywej AD], tak jasnym i czystym, jak zrozumienie okręgu lub przynajmniej jak przekroje stożka, ani co może przeszkodzić w zrozumieniu drugiej [tj. krzywej AF] i trzeciej [tj. krzywej AH], i wszystkich innych, które można opisać tak samo jak pierwszą, a co za tym idzie, nie widzę przeszkód, by mogły one służyć dociekaniom w geometrii (s. 318–319).

„Jasność i czystość" ma tu jedynie charakter perswazji i nie prowadzi do niczego, co można wyrazić matematycznie. Krzywe kreślone przez mezolabium nie są definiowane jako przecięcia krzywych, można natomiast opisać je równaniem algebraicznym; to proste zadanie i Kartezjusz w ogóle nie podejmuje tego wątku.

Ad (2). Drugi sposób jest następujący: dwie specjalnie położone krzywe, z których jedna obraca się, a druga przesuwa się wzdłuż prostej, przecinając się, „kreślą" nową krzywą. Ta technika jest stosowana w *Geometrii* trzy razy: dwie proste kreślą hiperbolę, prosta i okrąg kreślą konchoidę, prosta i parabola kreślą parabolę Kartezjusza. Kartezjusz szczegółowo opisuje pierwszy i trzeci przykład, o drugim jedynie wspomina.

Idea linii złożonej z punktów jest związana z drugim sposobem definiowania krzywych.

2.3. **Aksjomaty.** Na stronie 316 Kartezjusz podaje trzy aksjomaty teorii krzywych geometrycznych:

(1) „I nic nie musimy zakładać, by narysować wszystkie linie krzywe, które próbuję tutaj wprowadzić, jeśli tylko dwie lub kilka linii mogą zostać poruszone jedna przez drugą";

(2) „przecięcia [krzywych] wyznaczają inne [krzywe]";

(3) „[krzywe są] zakreślone przez ciągły ruch lub przez kilka następujących po sobie ruchów, z których każdy byłby całkowicie określony przez poprzednie, dzięki czemu zawsze można poznać ich dokładną miarę".

Poniżej przedstawiamy pierwsze uwagi do tych aksjomatów.

Ad (1). Krzywe, o których ogólnie Kartezjusz pisze, że powstają w wyniku przecięcia krzywych, faktycznie powstają w wyniku przecięcia dwóch krzywych, K_1, K_2. Obraz krzywych poruszających jedna drugą wiąże się z kreślącymi je instrumentami, gdzie siła jest przykładana do jednej części instrumentu; gdy siła poruszająca instrument jest przyłożona do K_1, wtedy ta krzywa porusza K_2. Z matematycznego punktu widzenia ruchy krzywych są jednak równoczesne, a związek

„poruszania” jest symetryczny: gdy K_1 porusza K_2, wtedy K_2 porusza K_1.

Ad (2). Ten aksjomat odnosi się tylko do krzywych, które powstają w wyniku przecięcia innych krzywych. Krzywe kreślone przez mezolabium są kreślone przez poruszające się punkty.

Ad (3). Na podstawie założenia, że istnieje „miara” wyrażająca zależność między ruchami, Kartezjusz będzie mógł wykluczyć spośród krzywych dopuszczalnych w geometrii spiralę i kwadratrysę.

W artykule przyjmujemy, że istotne są aksjomaty (2) i (3).

2.4. **Definicja krzywej.** Powszechnie wiadomo, że *novum Geometrii* stanowi powiązanie krzywej z równaniem wielomianowym. W celu ustalenia tej zależności należy jednak wiedzieć, czym jest krzywa, do której odnoszone jest równanie, inaczej: trzeba znać jej definicję. W artykule przyjmujemy, że krzywe są definiowane jako przecięcia poruszających się krzywych. U Kartezjusza — przyznajmy — nie jest to jasne, a niejasność tę odziedziczył on po Grekach. W starożytności krzywe definiowane za pomocą ruchu miały dwuznaczny status, gdyż pojęcie ruchu, nawet takiego jak przesunięcie czy obrót, nie miało matematycznego wyrazu[8]. Dlatego w matematyce greckiej odróżniano genezę (γένεσις) krzywej, czyli opis trajektorii punktu, który kreśli krzywą, oraz jej symptomy (συμπτώματα), czyli własności matematyczne wyprowadzane z genezy jako oczywiste (Sefrin-Weis, 2010: 223–229). U Kartezjusza jest podobnie: linia geometryczna jest z jednej strony zadana przez opis ruchu krzywych, które, przecinając się, wyznaczają daną linię (geneza), z drugiej strony jest ona zadana równaniem algebraicznym (symptomy).

Wskazany brak definicji jest przejawem ogólniejszej przypadłości. Otóż metodologia *Geometrii* jest szczególna, zwłaszcza gdy za wzór przyjmiemy *Elementy* Euklidesa. Tekst rozprawy nie jest podzielony na twierdzenia i dowody, nie znajdziemy w nim wyraźnie postawionych definicji i tylko w przypadku kilku konstrukcji uzasadnienia stanowią jasno wydzielone partie. Taka narracja utrudnia lekturę, a zarazem otwiera pole różnym interpretacjom. W artykule przyjmujemy więc — powtórzmy — że krzywa jest definiowana jako przecięcie dwóch innych krzywych, których ruch i wzajemne położenie są dane. Ich przecięcie jest opisane równaniem $\varphi(x, y)$. Aby jednak utożsamić krzywą z punktami spełniającymi równanie $\varphi(x, y)$, potrzebne są kolejne założenia.

[8] W matematyce współczesnej przesunięcie i obrót są definiowane jako przekształcenia płaszczyzny, czyli pewne funkcje. Pomijając różnice między współczesnym i greckim rozumieniem płaszczyzny, Grecy w ogóle nie dysponowali pojęciem funkcji.

Kartezjusz przyjmuje, że na krzywej leżą te i tylko te punkty, które są opisane równaniem $\varphi(x, y)$. W ten sposób krzywa składa się tylko z punktów przecięcia i zostaje pojęta jako obiekt złożony z punktów.

Uzasadnienie powyższych słów przedstawimy w kolejnych paragrafach, rozwijając następujące tezy:

(a) w matematyce greckiej krzywą kreśli poruszający się punkt, w *Geometrii* — poruszające się krzywe K_1, K_2 (*vide* § 3);

(b) punkt przecięcia krzywych K_1, K_2 jest opisany równaniem $C = \varphi(x, y)$ (*vide* § 4);

(c) kreślona krzywa składa się tylko z punktów przecięcia (*vide* § 5).

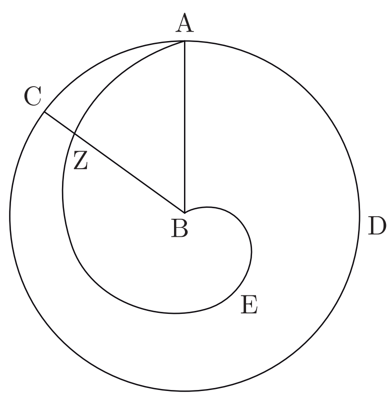
3. Krzywa jako obraz poruszającego się punktu vs. krzywa jako przecięcia poruszających się krzywych

3.1. **Pappus.** W tej części porównamy definicje krzywych pochodzące od Pappusa i Kartezjusza.

3.1.1. *Spirala.* Oto definicja podana przez Archimedesa:

> Jeśli linia prosta narysowana na płaszczyźnie obraca się z równą prędkością (ἰσοταχέως) wokół jednego ze swoich krańców (πέρατος), który zostaje przytwierdzony i powraca do początkowego położenia, i jeżeli w czasie, w którym linia się obraca, punkt (σημεῖον) porusza się z równą prędkością (ἰσοταχέως) wzdłuż tej linii, poczynając od punktu, w którym prosta jest przytwierdzona, to punkt zakreśli (γράψει) na płaszczyźnie spiralę (Heiberg, 1880: 50–52)[9].

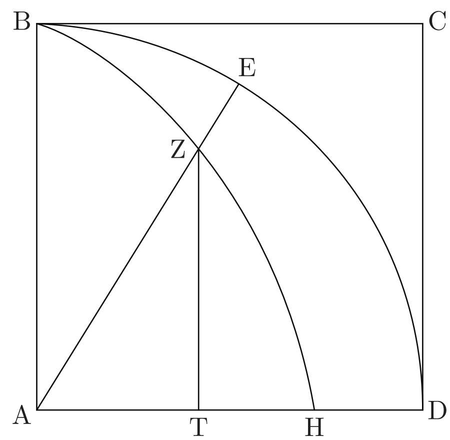
A oto definicja Pappusa:



[9] W rozprawie Archimedesa definicji nie towarzyszy rysunek spirali, pojawia się on dalej, w związku z kolejnymi twierdzeniami.

Niech dane będzie koło (κύκλος) o środku B i promieniu BA. Przyjmijmy, że linia BA została wprawiona w ruch (κεκινήσχω) tak, że gdy B pozostaje na swoim miejscu, A porusza się jednostajnie (ὁμαλῶς) po obwodzie koła, a wraz z nim pewien punkt (σημεῖον) wyruszający z B, o którym przyjmuje się, że porusza się jednostajnie (ὁμαλός) wzdłuż niej, z B w kierunku A; i przyjmijmy, że w tym samym czasie, w którym ten przechodzi BA, punkt A przechodzi obwód koła. Punkt poruszający się wzdłuż BA zakreśli (γράψει) w czasie obrotu linię taką jak BEZA, a jej punktem początkowym będzie B, a początkiem obrotu będzie BA (Sefrin-Weis, 2010: 42–43.).

3.1.2. *Kwadratrysa.* Oto definicja kwadratrysy z *Kolekcji* Pappusa:



Niech zostanie położony kwadrat ABCD i zakreślony (γεγράφθω) łuk BED okręgu o środku w A i przyjęte, że AB porusza się tak, że gdy punkt (σημεῖον) A pozostaje w miejscu, B porusza się po łuku BED, podczas gdy BC przesuwa się za punktem B w dół po BA, pozostając cały czas równoległą do AD i tak, że w tym samym czasie zarówno AB, poruszając się jednostajnie (ὁμαλῶς), zakreśla kąt BAD, to jest gdy punkt B łuk BED, zaś BC przechodzi przez linię prostą BA, to jest punkt B porusza się w dół BA. Oczywiście zarówno AB jak BC osiągną linię AD w tym samym czasie. W czasie tego ruchu linie BC, BA będą się przecinać w punkcie, który stale będzie zmieniał swoje położenie (συμμεθιστάμενον) wraz z nimi. Punkt ten zakreśli pewną linię BZH w przestrzeni między liniami BA i AD oraz łukiem BED, wypukłą w tym samym kierunku, która okazuje się pomocna przy wyznaczeniu kwadratu równego danemu kołu. A jej symptom (σύμπτωμα) jest taki, że jeśli jakakolwiek

> linia jest poprowadzona z wnętrza w kierunku łuku, taka jak AZE, to linia prosta BA będzie tak do ZT, jak cały łuk jest do ED, co jasno wynika z genezy linii (Sefrin-Weis, 2010: 53–54).

A oto, co o spirali i kwadratrysie napisał Kartezjusz:

> Naprawdę należą [te krzywe] tylko do mechanicznych i nie należą do tych, które muszę tu dołączyć, ponieważ wyobrażamy je sobie jako nakreślone przez dwa oddzielne ruchy, które nie są w żadnym dającym się dokładnie zmierzyć stosunku (s. 317).

„Dwa oddzielne ruchy" w kreśleniu spirali to ruch prostoliniowy punktu wzdłuż odcinka i ruch obrotowy tego odcinka, w przypadku kwadratrysy — ruch obrotowy odcinka BA i ruch prostoliniowy odcinka BC. Słowa „w żadnym dającym się dokładnie zmierzyć stosunku" nie są dalej wyjaśniane; komentatorzy wiążą je z przekonaniem Kartezjusza, że nie da się wyznaczyć długości krzywej (Bos, 2001; Mancosu, 1999). W artykule przyjmujemy prostsze wyjaśnienie: zależność między ruchami musi być wyrażona jako stosunek odcinków. Taka interpretacja oparta jest na literalnym odczytaniu pierwszego zdania *Geometrii*:

> Wszystkie problemy geometrii da się łatwo sprowadzić do takich wyrażeń, że wystarczy znać długości pewnych linii prostych, aby przeprowadzić ich konstrukcje (s. 297).

Istotnie, *w Geometrii* wszystkie rozwiązania wyrażane są jako proporcje odcinków.

Przy rysowaniu kwadratrysy odcinki AB oraz BC poruszają się niezależnie od siebie i nie jest tu spełniony pierwszy aksjomat Kartezjusza: „dwie lub kilka linii mogą zostać poruszone jedna przez drugą". Pappus wskazuje co prawda pewien związek między tymi ruchami. Więcej nawet, wprost ustala proporcję wielkości występujących w tych dwóch ruchach, mianowicie: „linia prosta BA będzie tak do ZT, jak cały łuk jest do ED", czyli

$$BA : ZT = \overset{\frown}{BD} : \overset{\frown}{ED}.$$

Odpowiada to — jak można sądzić — postulatowi, aby ruchy odcinków BA oraz BC były „w stosunku, który można dokładnie zmierzyć". Nie jest to jednak proporcja odcinków, a właśnie takie wymaganie stawia Kartezjusz[10].

[10] Pappus pokazuje, że dwa ruchy, w wyniku których powstaje spirala, są powiązane proporcją $BC : BZ$ :: obwód koła : łuk ADC. Tutaj, podobnie jak w przypadku kwadratrysy, zależność między ruchami nie jest wyrażona proporcją odcinków.

3.1.3. *Rysowanie kwadratrysy.* Christopher Clavius (1538–1612), wybitny matematyk, wydawca i tłumacz *Elementów*, autor wielu prac matematycznych, które wywarły duży wpływ na rozwój naukowy Kartezjusza, podał taki oto prosty sposób kreślenia kwadratrysy: dwusieczna kąta BAD w przecięciu z symetralną odcinka BA wyznacza punkt należący do kwadratrysy. Dwusieczne powstałych w ten sposób kątów w przecięciu z symetralnymi powstałych w ten sposób odcinków wyznaczą kolejne dwa punkty należące do kwadratrysy. Ogólnie, zarówno kąt BAD, jak i odcinek BA, można dzielić na części za pomocą cyrkla i linijki liczbami postaci $\frac{k}{2^n}$, odpowiednie dwusieczne dzielące części kąta BAD oraz proste dzielące odcinek BA, przecinając się, wyznaczą następne punkty kwadratrysy[11].

Postępując w wyżej opisany sposób, Clavius może wyznaczyć tylko specjalnie wyróżnione, a nie dowolne punkty krzywej. W związku z tym Kartezjusz pisze:

> Słusznie jest zauważyć, że jest wielka różnica między tym sposobem [tj. sposobem przyjętym przez Kartezjusza] odnajdywania wielu punktów w celu poprowadzenia linii krzywej, a tym, którym posługujemy się przy spirali i jej podobnym [tj. sposobem przyjętym przez Claviusa]. W tym ostatnim nie odnajdujemy bowiem dowolnie wszystkich punktów szukanej linii, ale tylko te, które mogą być określone przez jakąś prostszą miarę od tej wymaganej do narysowania jej. W ten sposób, ściśle mówiąc, nie znajdujemy każdego jej punktu, to znaczy żadnego z tych, które odpowiadają jej tak bardzo, że nie mogą być odnalezione inaczej niż przez nią samą (s. 339–340).

Sposób „odnajdywania punktów" wspomniany w pierwszym zdaniu jest opisywany w *Geometrii* wielokrotnie. Zacytujemy fragment, w którym jest on wyłożony krótko i jasno:

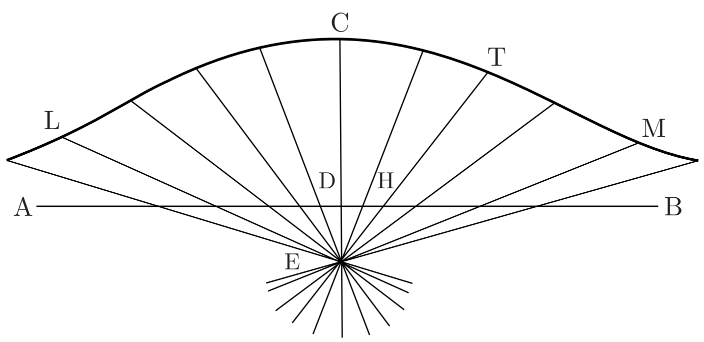
> By wyznaczyć punkt C, wymagany jest tylko jeden warunek, mianowicie, by iloczyn pewnej liczby tych linii był równy iloczynowi pozostałych lub, co jest tak samo łatwe, by był w danej proporcji do iloczynu pozostałych. Skoro warunek ten można wyrazić jednym równaniem z dwoma niewiadomymi, to możemy przypisać dowolną wartość albo x, albo y, a wartość drugiej wyznaczyć z tego równania. Przyjmując nawet kolejno nieskończoność różnych wielkości dla linii y, znajdziemy również nieskończoność wielkości dla linii x,

[11] Zob. Clavius, 1589: 895–896.

> i tak otrzymamy nieskończoność różnych punktów, takich jak ten oznaczony przez C, dzięki którym narysujemy szukaną linię krzywą (s. 313)[12].

Załóżmy więc, że punkt C leży na krzywej, która jest opisana wielomianem $\varphi(x,y)$. Przyjmując y_0 i wyznaczając pierwiastki równania $\varphi(x,y_0) = 0$, znajdziemy x_0 i ostatecznie dostajemy $C = (x_0,y_0)$. W tej metodzie kreślenia krzywych punkt y_0 wybierany jest dowolnie, natomiast w metodzie Claviusa y może przyjmować tylko określone wartości, mianowicie $y = \frac{k}{2^n}AB$ i nie może być równy na przykład $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$. Na tym polega zarzut Kartezjusza wobec metody Claviusa. Jednocześnie zauważmy, że równanie, które charakteryzuje zależność x od y, czyli równanie krzywej, jest w istocie proporcją odcinków. Czytamy bowiem: „By iloczyn pewnej liczby tych linii był równy iloczynowi pozostałych lub, co jest tak samo łatwe, by był w danej proporcji do iloczynu pozostałych”. Pamiętając, że w arytmetyce Kartezjusza iloczyn odcinków jest odcinkiem, otrzymujemy, że równanie prostej jest proporcją odcinków.

3.1.4. *Konchoida.* Oto definicja Pappusa:



> Niech będzie poprowadzona prosta (εὐθεῖα) AB i prosta CDZ pod kątami prostymi do niej, i niech zostanie obrany pewien punkt (σημεῖον) E na CDZ jako dany; i kiedy punkt E, pozostając w miejscu (τὸπω), w którym jest, prosta CDEZ przechodzi wzdłuż prostej ADB ciągnięta (ἑλκομένη) przez

[12] Adolf P. Juszkiewicz w słynnym opracowaniu na temat historycznego rozwoju pojęcia funkcji tak skomentował powyższe słowa Kartezjusza: „Wiążąc krzywą algebraiczną z równaniem, w którym występują współrzędne jej punktów, rozumiane jako odcinki, Kartezjusz napisał: *Prenant successivement* [...] *la linge courbe démandée*” (Youschkevitch, 1977: 52). Podkreślmy zatem: wskazany fragment *Geometrii* traktuje jedynie o tym, jak wykreślić krzywą, mając równanie; nie zawiera on żadnej uwagi na temat związku między definicją krzywej (genezą), a jej równaniem (symptomami).

> punkt E w ten sposób, że D przechodzi przez całą prostą AB i nie pada na zewnątrz, a CDEZ jest ciągnięta przez E. Kiedy więc taki ruch (κινήσεως) tworzy się po obu, to jest oczywiste, że punkt C zakreśli (γράψει) linię, jaką jest LCM, a jej symptom (σύμπτωμα) jest taki, że ilekroć pewna prosta wychodząca do linii z punktu E pada na nią (προσπίπτῃ), wtedy prosta odcięta między prostą AB i linią LCM jest równa prostej CD. AB bowiem pozostaje w miejscu i punkt E pozostaje w miejscu, gdy D dochodzi do H, punkt C do T i prosta CD osiąga HT (Sefrin-Weis, 2010: 48–49).

Zacytowany fragment składa się z dwóch części. Definicję właściwą (γένεσις) kończy zdanie: „Kiedy więc taki ruch tworzy się po obu [stronach], to jest oczywiste, że punkt C zakreśli linię, jaką jest LCM". W drugiej części Pappus przedstawia symptomy (συμπτώματα), czyli własności konchoidy.

Słowa: „Prosta CDEZ przechodzi wzdłuż prostej ADB ciągnięta przez punkt E w ten sposób, że D przechodzi przez całą prostą AB i nie pada na zewnątrz" oznaczają w istocie, że półprosta $CDEZ$ obraca się wokół punktu E, a konchoida jest kreślona przez punkt C poruszający się wraz z prostą $CDEZ$. Fakt, iż część obracanej półprostej, zawarta między konchoidą LCM a prostą AB, ma stałą długość, jest zakodowany w dwóch pierwszych literach oznaczenia $CDEZ$.

Gdy krzywa LCM jest już zdefiniowana i wykreślona, Pappus bez trudu ustala jej symptomy: „ilekroć pewna prosta wychodząca do linii z punktu E pada na nią [na krzywą LCM], wtedy prosta odcięta między prostą AB i linią LCM jest równa prostej CD". Zatem punkty L, T, M umieszczone na diagramie to przecięcia konchoidy i prostych „wychodzących z punktu E". Są one przedstawione jako odrębne punkty na tle ciągłego obrazu ruchu punktu C.

W opisie konchoidy podanym przez Kartezjusza następuje — jak niżej zobaczymy[13] — istotna zmiana: symptomy stają się definicją krzywej, bo definiują położenie oraz ruch krzywych (prostej i okręgu) kreślących konchoidę. Punkt C jest zdefiniowany jako przecięcie prostej EC z okręgiem o środku w D i promieniu CD, punkt T — jako przecięcie prostej EH z okręgiem o środku w H i promieniu CD, ogólnie: konchoida jest zbiorem punktów, jakie powstają, gdy obracająca się prosta EC przecina okrąg o promieniu CD i środku w punkcie przecięcia prostej EC z AB.

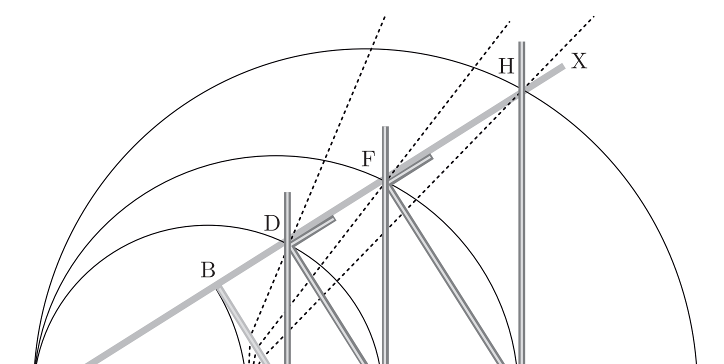
---

[13] Chodzi o zdanie: „Tak samo, jeśli CNK jest okręgiem o środku L, wtedy wykreślimy pierwszą konchoidę starożytnych"(s. 320).

3.2. **Kartezjusz.** W *Geometrii* znajdujemy trzy opisy krzywych geometrycznych: (1) pierwszy jest związany z mezolabium, (2) w drugim parabola powstaje jako przecięcie dwóch prostych, (3) w trzecim parabola Kartezjusza powstaje jako przecięcie paraboli i prostej. W drugim i trzecim przypadku Kartezjusz konstruuje równania krzywych.

3.2.1. *Mezolabium.* Oto opis instrumentu podany przez Kartezjusza:

> Spójrzcie na linie AB, AD, AF i podobne. Zakładam, że zostały narysowane za pomocą instrumentu YZ, który jest zbudowany z kilku linijek tak połączonych, że ta oznaczona YZ położona jest na linii AN, a kąt XYZ można otwierać i zamykać, a kiedy jest całkiem zamknięty, punkty B, C, D, E, F, G, H są wszystkie złączone w punkcie A, ale w miarę jej otwierania, linijka BC, która jest połączona za pomocą kątów prostych z XY w punkcie B, pcha do Z linijkę CD, która przesuwa się po YZ, tworząc z nią wciąż kąty proste; a CD pcha DE, która tym samym przesuwa się po YZ, pozostając równoległą do BC; DE pcha EF, EF pcha FG, a ta z kolei pcha GH, i tak można tworzyć nieskończoność innych, które kolejno pchają tak samo jedna drugą i z których jedne tworzą zawsze te same kąty z YX, a inne z YZ. Kiedy więc otwieramy w ten sposób kąt XYZ, wtedy punkt B kreśli linię AB będącą okręgiem (*cercle*); a inne punkty D, F, H, w których tworzą się przecięcia innych linijek, kreślą inne linie krzywe AD, AF, AH, z których kolejne są bardziej złożone od poprzedniej, a ta bardziej od okręgu (s. 317–318).

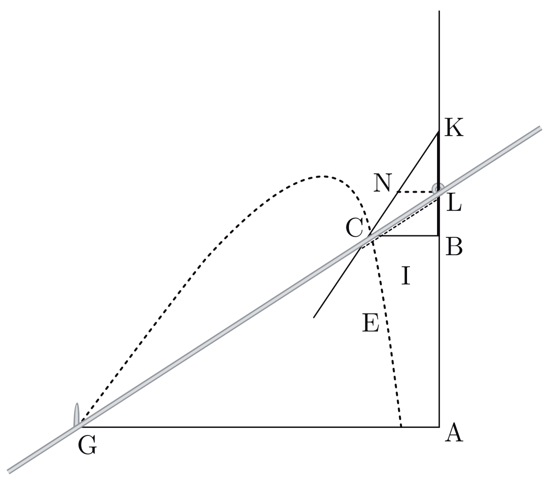


W tym opisie, podobnie, jak u Pappusa, kolejne krzywe są kreślone przez punkty: „punkt B kreśli linię AB będącą okręgiem; a inne punkty

D, F, H, w których tworzą się przecięcia innych linijek, kreślą inne linie krzywe AD, AF, AH".

3.2.2. *Hiperbola.* Oto opis kreślenia hiperboli:

> Chcę wiedzieć, jakiego rodzaju jest linia EC, która, jak zakładam, została wykreślona przez przecięcie (*intersection*) linijki GL oraz figury płaskiej prostoliniowej CNKL, której bok KN jest nieograniczenie przedłużony ku C, a która jest poruszana
> w tej samej płaszczyźnie wzdłuż linii prostej, to znaczy tak, że jej oś KL przylega zawsze do linii BA przedłużonej z jednej i drugiej strony, wprawia w ruch kołowy linijkę GL dookoła punktu G, ponieważ jest ona z nim tak złączona, że przechodzi zawsze przez punkt L (s. 319–320).



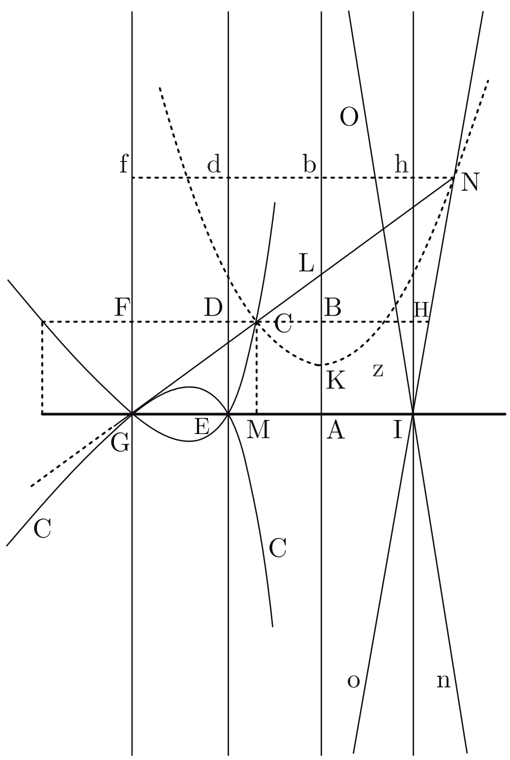
Linia EC powstaje w wyniku „przecięcia" dwóch prostych: prostej GL obracającej się wokół punktu G i prostej CK, która przesuwa się w dół. Proste te są połączone odcinkiem KL. Dla fizycznej realizacji tego instrumentu, w punkcie L winno być specjalne łączenie pozwalające prostej GL skracać odcinek GL tak, aby mogła ona jednocześnie obracać się wokół punktu G i przesuwać wzdłuż osi KA[14].

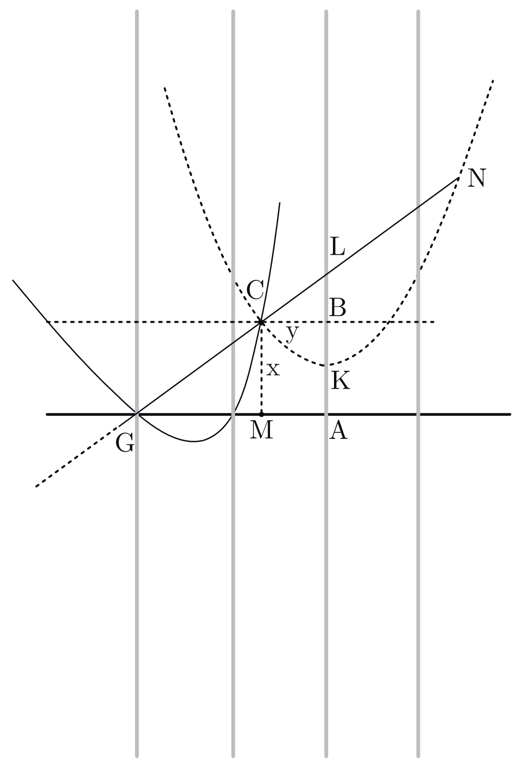
3.2.3. *Parabola Kartezjusza.* W wyżej opisanej konstrukcji w miejscu prostej NK mogą wystąpić inne krzywe.

[14] Za definicję tworzonej linii przyjmujemy zdanie: „Linia, która powstała przez przecięcie linijki GL oraz figury płaskiej prostoliniowej, której bok KN jest nieograniczenie przedłużony". W definicji tej należałoby doprecyzować położenie punktów G, L, K, N.

> Jeżeli w instrumencie, który służy do jej [tj. hiperboli] rysowania, w miejscu linii prostej CNK znajdzie się hiperbola lub jakaś inna linia krzywa pierwszego rodzaju, która ogranicza powierzchnię CNKL, przecięcie tej linii oraz linijki GL zamiast hiperboli EC wykreśli inną linię krzywą drugiego rodzaju. Tak samo, jeśli CNK jest okręgiem o środku L, wtedy wykreślimy pierwszą konchoidę starożytnych; a jeśli jest to parabola, której osią jest KB, to w tym wypadku wykreślimy linię krzywą, o której wyżej powiedziałem, że jest pierwszą i najprostszą w zagadnieniu Pappusa, kiedy jest tylko pięć linii prostych o danym położeniu (s. 321).

Krzywa opisana w ostatnim zdaniu nosi nazwę paraboli sześciennej lub paraboli Kartezjusza. Występuje ona w *Geometrii* kilka razy. Kartezjusz podaje jej równanie oraz wykorzystuje ją do konstrukcji pierwiastków równania 6. stopnia. Oto dwa inne miejsca, gdzie przesuwana parabola jest skierowana ramionami raz do góry, raz w dół.





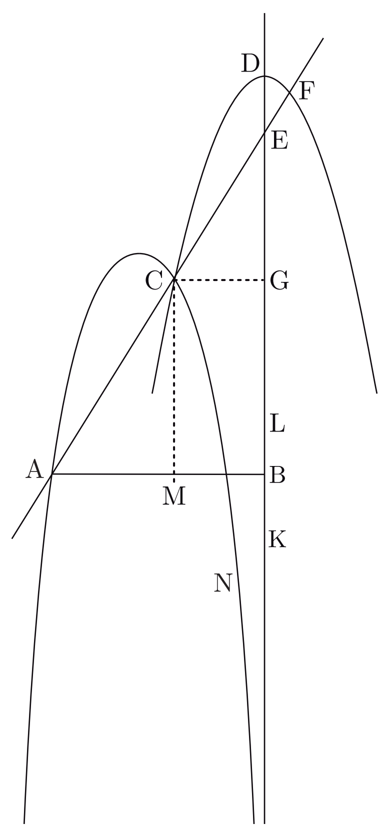
> Następnie rozpatruję linię krzywą CEG, którą wyobrażam sobie jako wykreśloną przez przecięcie (*décrite par l'intersection*)

> paraboli CKN, którą przesuwamy w ten sposób, że jej średnica KL jest zawsze na linii prostej AB, z linijką GL, która obraca się dookoła punktu G (s. 337).

Na diagramie powyżej, z lewej strony, znajduje się rysunek z *Geometrii*; gdy zachowamy w nim jedynie linie związane z kreśleniem krzywej, wówczas otrzymamy schemat taki, jak ten zaprezentowany z prawej strony.

W drugim przykładzie parabola sześcienna jest wykorzystywana do rozwiązania równania 6. stopnia. Oto schemat rysunku (w oryginale naniesione są wszystkie linie służące do konstrukcji pierwiastków).

> Dzięki temu przecięcie (*l'intersection*) paraboli i linijki, które dokona się w punkcie C, wykreśli (*déscrira*) linię krzywą ACN (s. 405).



3.3. **Porównania.** W cytowanych tekstach antycznych krzywa jest kreślona przez poruszający się punkt[15]. Oto najważniejsze fragmenty:

> Punkt porusza się z równą prędkością [...] punkt zakreśli (γράψει) na płaszczyźnie spiralę (Archimedes o spirali).
>
> Punkt poruszający się wzdłuż BA zakreśli (γράψει) w czasie obrotu linię taką jak BEZA (Pappus o spirali).
>
> W czasie tego ruchu linie BC, BA będą się przecinać w punkcie, który stale będzie zmieniał swoje położenie wraz z nimi. Punkt ten zakreśli (γράψει) pewną linię BZH w przestrzeni między liniami BA i AD oraz łukiem BED (Pappus o kwadratrysie).
>
> Kiedy więc taki ruch tworzy się po obu [stronach], to jest oczywiste, że punkt C zakreśli (γράψει) linię, jaką jest LCM (Pappus o konchoidzie).

Zauważmy przy tym, że punkt kreślący kwadratrysę i konchoidę jest końcem („krańcem") odpowiedniego odcinka lub półprostej; przypadek spirali wydaje się szczególny, gdyż kreślący ją punkt nie jest końcem żadnego odcinka i jest on — niejako — samodzielnym obiektem. Ale tak jest tylko w definicji, bo dalej, przy ustalaniu różnych zależności, punkt leżący na spirali jest traktowany jako koniec odcinka.

Uwzględniając definiowanie i kreślenie krzywych, obserwujemy w *Geometrii* znaczące przesunięcie akcentów. Dwa momenty są tu istotne: (1) nowa krzywa jest kreślona przez „przecięcie" (*l'intersection*) poruszających się linii, (2) kreślony jest tylko fragment krzywej.

Ad (1). Zacznijmy od przypomnienia kluczowych fragmentów.

> Następnie rozpatruję linię krzywą CEG, którą wyobrażam sobie jako wykreśloną przez przecięcie (*décrite par l'intersection*) paraboli CKN, [...] z linijką GL, która obraca się dookoła punktu G (Kartezjusz o paraboli sześciennej).
>
> Dzięki temu przecięcie (*l'intersection*) paraboli i linijki, które dokona się w punkcie C, wykreśli (*déscrira*) linię krzywą ACN (Kartezjusz o paraboli sześciennej).
>
> Jeżeli w instrumencie, który służy do jej rysowania, w miejscu linii prostej CNK znajdzie się hiperbola lub jakaś inna

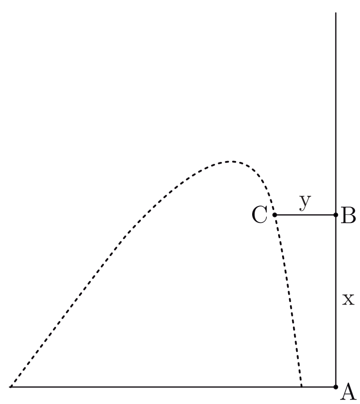
[15] Znamienne, że Kartezjusz zauważał tę specyfikę greckiej geometrii. Pisał w dziele *Le Monde*: „I przeciwnie, tak łatwo jest poznać naturę omawianego tu ruchu, iż sami geometrzy, którzy uważają siebie za najbardziej uczonych ze wszystkich ludzi, aby pojmować wyraźnie badane rzeczy, uznali ją za bardziej prostą i zrozumiałą od tej ich powierzchni i linii; co jest widoczne w tym, że linię (*ligne*) wyjaśnili przez ruch punktu (*point*), zaś powierzchnię (*superficie*) przez ten linii" (Descartes, 1664: 84).

> linia krzywa pierwszego rodzaju, która ogranicza powierzchnię CNKL, przecięcie (*l'intersection*) tej linii oraz linijki GL zamiast hiperboli EC wykreśli (*déscrira*) inną linię krzywą drugiego rodzaju (s. 322).

Widzimy zatem, że krzywa jest kreślona przez przecięcie linii. Takie przecięcie jest owszem punktem, Kartezjusz nadaje mu nazwę C, ale dzięki temu, że ruch jest przypisany w pierwszym rzędzie krzywym, a punkt przecięcia C jest związany z pewnymi odcinkami, to może on być niejako wycofany na drugi plan, *zatrzymany* i poddany dalszej analizie. I tak właśnie jest w pierwszym przykładzie:

> Chcę wiedzieć, jakiego rodzaju jest linia EC, która, jak zakładam, powstała przez przecięcie (*intersection*) linijki GL oraz figury płaskiej prostoliniowej CNKL, której bok KN jest nieograniczenie przedłużony ku C (s. 319).

W cytowanym fragmencie punkt C nie występuje wprost jako przecięcie prostych, pojawia się natomiast w nazwie krzywej EC i „figury" $CNKL$[16]. Dopiero gdy bliżej analizujemy przykład, zauważamy, że C jest przecięciem dwóch prostych.



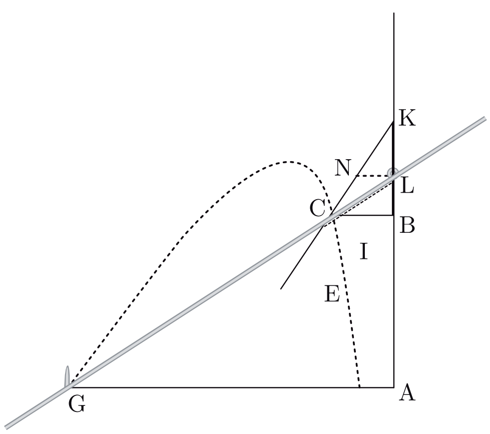
Efekt *zatrzymania* powstaje w wyniku powiązania punktu C z odcinkami x, y. Podczas tworzenia równania krzywej x, y są traktowane jako wielkości dane. Ilustruje to powyższy diagram.

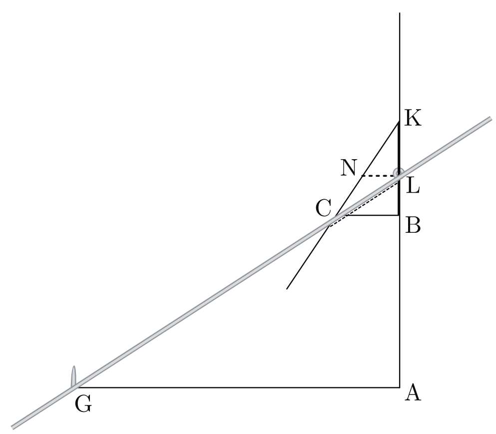
[16] Znamienne, że prosta CNK jest definiowana jako „przedłużenie boku" trójkąta NKL. Ten zabieg pozwala Kartezjuszowi ustalić jej współczynnik kierunkowy. W *Geometrii* nie występują równania prostych, jakie znamy ze współczesnych kursów geometrii analitycznej, tj. $y = ax + b$. Podobne postępowanie odnajdujemy u Pierra Fermata w *Ad Locos Planos et Solidos* (1636), gdzie linia prosta jest charakteryzowana jako przedłużenie boku trójkąta.

Fakt, że jeden z nich jest zmienną niezależną, wypłynie dopiero wtedy, gdy Kartezjusz będzie objaśniał, jak wykreślić krzywą na podstawie równania. Na etapie budowania równania x, y są *zwykłymi* odcinkami; w *Geometrii* litery x, y oznaczają „nieznane wielkości”, a nie „wielkości zmienne”; słowo „wielkość” oznacza po prostu odcinek domknięty.

W technice przyjętej przez Kartezjusza punkt przecięcia krzywych charakteryzują dwie diametralnie różne cechy: (1) z jednej strony punkt C zmienia położenie wraz z przecinającymi się krzywymi, (2) z drugiej, w związku z tworzeniem równania, punkt C nie porusza się, bo jest połączony z odcinkami x, y. W samym równaniu, jak zobaczymy, nie występuje punkt C, a tylko odcinki x, y; z rysunków zaś możemy wnosić, że C jest wyróżnionym końcem odcinka y. W definicji krzywej akcentowany jest aspekt dynamiczny, przy tworzeniu równania — statyczny. W definicji krzywej jest mowa o przecięciu prostych i wtedy punkt C występuje jako samodzielny obiekt; przy tworzeniu równania, gdy ustalane są proporcje odcinków, punkt C jest łączony w pary z innymi punktami, tworząc odcinki CB, CL, CK.

Niżej zamieszczamy oryginalny rysunek z *Geometrii* (s. 320) oraz jego modyfikację, gdzie $CB = y, AB = x$.





W tym zestawieniu widzimy, że aspektowi dynamicznemu odpowiada zarys krzywej — na diagramie jest ona zaznaczona przerywaną linią. Przy tworzeniu równania Kartezjusz korzysta jedynie z podobieństwa trójkątów; wtedy rozważa odcinki, a zarys kreślonej krzywej jest pomijany.

Gdy Kartezjusz kreśli krzywą na bazie równania, wtedy aspekt dynamiczny skupia się w pojęciu wielkości zmiennej. Zmienną niezależną jest wówczas y, zaś x jest wyznaczany jako pierwiastek równania $\varphi(x, y)$. Pojęcie wielkości zmiennej nie występuje w *Geometrii*, ale będzie obecne w późniejszych tekstach matematycznych w związku z pojęciem funkcji[17].

Aby uchwycić nowość techniki Kartezjusza, wróćmy raz jeszcze do *Kolekcji*. Kreśląc kwadratrysę, Pappus zrazu postępuje podobnie, jak Kartezjusz, bo definiuje krzywą jako przecięcie linii. Siła tradycji skłania go jednak do tego, by na pierwszym planie umieścić punkt. Jest wręcz tak, że przecięcie prostych służy Pappusowi jedynie temu, aby zdefiniować punkt, który kreśli kwadratrysę. W rezultacie krzywa jest kreślona przez „stale zmieniający się punkt":

> W czasie tego ruchu linie BC, BA będą się przecinać w punkcie, który stale będzie zmieniał swoje położenie wraz z nimi. Punkt ten zakreśli pewną linię BZH [...].

Ad (2). Druga znacząca różnica polega na tym, że w tekstach antycznych krzywe są kreślone globalnie, w całości, w *Geometrii* — lokalnie, we fragmencie. Od Pappusa otrzymujemy opis pełnego okresu spirali, całej kwadratrysy, a w przypadku konchoidy (krzywej nieograniczonej) wskazany jest punkt początkowy C i krzywa jest kreślona „po jego obu [stronach]". W *Geometrii* kreślony jest tylko fragment krzywej. Krzywe rozważane przez Kartezjusza są co prawda nieograniczone, ale gdyby przyjął on technikę starożytnych, to kreślenie hiperboli mogłoby zaczynać się od wierzchołka i dalej by było prowadzone „po obu jego stronach". Kartezjusz zmienia sposób postępowania: z jednej strony przyjmuje, że całość krzywej jest uchwycona w jej równaniu, z drugiej łatwo widzi, że samo równanie można otrzymać, analizując tylko jeden punkt.

4. Równanie krzywej geometrycznej

4.1. **Mezolabium.** Kartezjusz klasyfikuje problemy geometryczne z uwagi na stopnie krzywych wykorzystywanych do ich rozwiązania. Takie podejście nie jest jednoznaczne, bo te same problemy można rozwiązać za pomocą krzywych różnych stopni. Odpowiedni przykład związany jest z mezolabium. Kartezjusz co prawda nie buduje równań krzywych kreślonych przez ten instrument, wspomina tylko, że za pomocą krzywej AD, która jest 4. stopnia, można rozwiązać zagadnienie trzeciej proporcjonalnej, w księdze III zaś pokazuje, jak wyznaczyć trzecią proporcjonalną za pomocą paraboli, czyli krzywej 2. stopnia.

Podamy teraz matematyczny opis krzywych AD, AF, AH zaznaczonych na diagramie przerywanymi liniami; krzywa AB jest oczywiście łukiem okręgu.

[17] Zob. niżej § 8.

(1) Niech $YA = YB = a$, $YC = x$, $YD = z$, $CD = y$. Trójkąty prostokątne YBC, YCD są podobne, zatem $a : x = x : z$. Stosując do trójkąta YCD twierdzenie Pitagorasa, dostajemy $x^2 + y^2 = z^2$. Z tych dwóch zależności otrzymujemy, że krzywa AD ma równanie $x^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

(2) Niech $YA = YB = a$, $YE = x$, $EF = y$, $YF = z$. Biorąc pod uwagę trójkąty zaznaczone na diagramie, otrzymujemy zależności[18]:

$\triangle YFE \sim \triangle YDE \Rightarrow z : x = x : YD$,

$\triangle YDE \sim \triangle YDC \Rightarrow x : YD = a : YC$,

$\triangle YDC \sim \triangle YBC \Rightarrow YD : YC = YC : a$.

Przekształcając trzy powyższe równania i uwzględniając to, że w trójkącie prostokątnym YFE zachodzi $x^2 + y^2 = z^2$, otrzymujemy, że krzywa AF ma równanie $x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$.

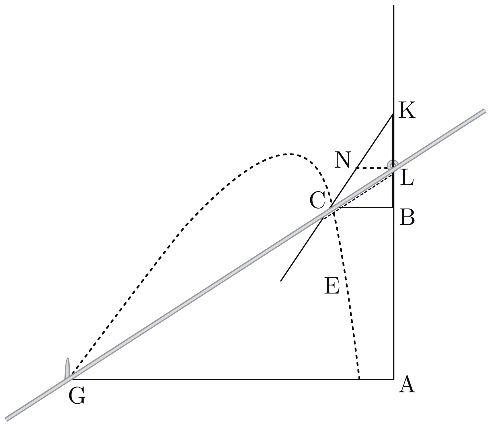
(3) Niech $YA = YB = a$, $YG = x$, $GH = y$. Rozumując podobnie, jak w poprzednich przypadkach, dochodzimy do tego, że krzywa AH ma równanie $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)^5$.

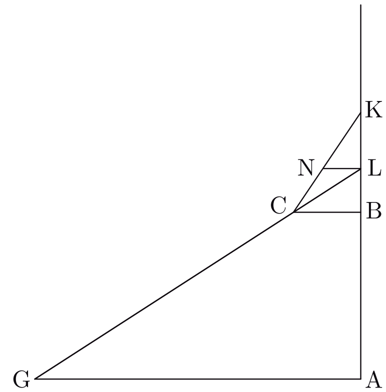
4.2. **Hiperbola.** Oto, jak Kartezjusz dochodzi do równania hiperboli:

> Dalej, obierając dowolnie jeden punkt na krzywej, dajmy na to C, do którego, jak zakładam, przylega instrument służący do jej kreślenia, prowadzę z tego punktu C linię CB równoległą do GA, a ponieważ CB i BA są dwiema wielkościami nieokreślonymi i nieznanymi, to pierwszą z nich nazywam y, drugą zaś x; a wreszcie po to, by znaleźć stosunek jednej do drugiej, przyjmuję również wielkości znane, które określają rysunek linii krzywej, jak GA, którą nazywam a, KL, którą nazywam b, oraz NL, równoległą do GA, którą nazywam c (s. 321).

Biorąc pod uwagę tylko zależności wykorzystywane przy ustalaniu związku między x oraz y, oryginalny rysunek z *Geometrii*, przedstawiony niżej po lewej stronie, zredukuje się do rysunku umieszczonego niżej po prawej stronie. Oryginalny rysunek ma więc pewien niematematyczny, acz bardzo sugestywny, naddatek.

[18] Symbol $\sim$ oznacza podobieństwo trójkątów.





Kartezjusz przyjmuje oznaczenia $GA = a, KL = b, NL = c$ oraz $CB = y, BA = x$. Na podstawie podobieństwa trójkątów $\triangle CBK \sim \triangle NLK$ otrzymuje, że $LB = \frac{b}{c}y - b$. Dalej, na podstawie podobieństwa trójkątów $\triangle GAL \sim \triangle CBL$ otrzymuje proporcję

$$y : LB = a : (LB + x),$$

skąd dostaje równanie

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac. \tag{C}$$

Równanie (C) to zależność między odcinkami x, y wyznaczającymi punkt C. Przerywana linia imitująca hiperbolę EC sugeruje wielość punktów takich jak C. Nie ma jednak w *Geometrii* żadnego pojęcia matematycznego, które by to uzasadniało. Ruch, obracanie się linii GL — to podstawowe, niematematyczne założenie przedstawionej konstrukcji. Jest ono na tyle sugestywne, że sam Kartezjusz, a za nim wszyscy komentatorzy przyjmują, iż (C) jest równaniem krzywej, a nie jedynie relacją między odcinkami x, y.

Opis budowy równia (C) kończy zdanie:

> A oto równanie, które należało znaleźć:
> $$yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac,$$
> z którego wynika, że linia EC jest pierwszego rodzaju, w rzeczywistości będąc hiperbolą (s. 322)[19].

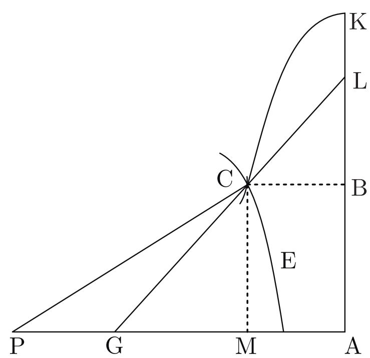
Przejścia od równania punktu, do równania krzywej nie jest opatrzone żadnym komentarzem.

---

[19] Osobną kwestią pozostaje to, skąd Kartezjusz wie, że hiperbola, która jest przecież definiowana jako odpowiedni przekrój stożka, może być wyrażona właśnie takim równaniem. Współcześnie jest to rozstrzygane na podstawie prostego twierdzenia. Zob. Leja, 1954: 114.

4.3. **Parabola sześcienna.** Oto, jak Kartezjusz dochodzi do równania paraboli sześciennej.

> Tak samo, jeśli CE jest linią krzywą opisaną przez ruch paraboli w wyżej wyjaśniony sposób i jeśli podstawiliśmy b za GA, c za KL i d za prostopadły bok na średnicy paraboli KL, to mamy równanie, które wyjaśnia stosunek między x i y:
>
> $$y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0 \quad \text{(s. 343).}$$



Podobnie, jak wyżej, $BA = x$, $CB = y$.

Gdy znane jest równanie $\varphi(x, y)$, wtedy w celu wykreślenia całej krzywej należy postępować według następującego przepisu: przyjmujemy y_0, wyznaczamy pierwiastek równania $\varphi(x, y_0) = 0$, niech to będzie x_0, i nowy punkt ma wówczas postać $C = (x_0, y_0)$. W związku z tym Kartezjusz pisze:

> punkty tych [krzywych], które można nazwać geometrycznymi, [...] z konieczności mają jakiś związek z wszystkimi punktami linii prostej, który można wyrazić pewnym równaniem, tym samym dla wszystkich [punktów] (s. 319).

Ów związek polega na tym, że wybierając na prostej odcinek y_0, *via* równie $\varphi(x, y)$, otrzymamy punkt na krzywej $C = \varphi(x, y)$[20].

Skąd jednak wiadomo, że na krzywej leży wiele punktów $C = \varphi(x, y)$? W odpowiedzi możemy ponownie wskazać jedynie niewyjawione przeświadczenie Kartezjusza, że krzywa kreślona przez ciągły ruch jest obiektem ciągłym i jako taki ma nieskończenie wiele punktów. Pojęcie nieskończoności jest jednak niewystarczające. Omawiając Claviusa sposób kreślenia kwadratrysy, zauważyliśmy, że punkty o współrzędnych $\frac{k}{2^n}AB$, chociaż tworzą nieskończony zbiór, wcale nie wyczerpują, zdaniem Kartezjusza, wszystkich punktów na krzywej.

[20] Przyjmując współczesną terminologię, zależność x od y nie jest dana *explicite*, ale w postaci funkcji uwikłanej.

5. Wszystkie punkty krzywej

Pokażemy teraz, jak Kartezjusz odpowiada na pytanie: skąd wiadomo, że na krzywej nie ma innych punktów niż te opisane równaniem $\varphi(x, y)$? Fakt, że są w *Geometrii* uwagi na ten temat, świadczy, iż widział on problem.

W związku z omawianą kwestią znajdujemy w *Geometrii* deklaracje, takie jak te poniżej:

> Z drugiej strony nie istnieje żaden punkt na liniach służących do [rozwiązania] postawionego zagadnienia, którego nie można by było znaleźć wśród tych wyznaczonych w wyjaśniony sposób [tj. za pomocą równania] (s. 340).

> [...] wszystkie punkty tych [krzywych], które można nazwać geometrycznymi, to znaczy te, które podpadają pod dokładną i ścisłą miarę, z konieczności mają jakiś związek z wszystkimi punktami linii prostej, który można wyrazić pewnym równaniem, tym samym dla wszystkich [punktów] (s. 319).

Zdania te można interpretować na dwa sposoby: można uznać je za aksjomat albo przyjąć, że wynikają z zupełnie nowego sposobu definiowania, polegającego na tym, że krzywe są określane jako przecięcia pewnych innych krzywych. W obu przypadkach punkty przecięcia można opisać równaniem, *ergo* na definiowanej krzywej nie ma innych punktów niż te opisane równaniem. W ten sposób krzywa definiowana metodą Kartezjusza może być utożsamiona z równaniem.

Zauważmy przy tym, że przedstawione rozumowanie nie odnosi się do wszystkich krzywych geometrycznych. Proste i okręgi poza wszelką dyskusją są krzywymi geometrycznymi, ale nie znajdziemy w *Geometrii* odpowiadających im równań. Zatem teza, iż krzywe geometryczne składają się z punktów, odnosi się do krzywych, które są opisane równaniem wielomianowym.

6. Henk Bos i A. G. Molland o teorii krzywych Kartezjusza

Henk Bos w opracowaniu (Bos, 1981) przyjął, że kluczem do analizy teorii Kartezjusza są cztery sposoby reprezentowania krzywych: (1) za pomocą ciągłego ruchu przecinających się krzywych, (2) przez wyznaczanie dowolnych punktów krzywej, (3) za pomocą instrumentu kreślącego krzywą, (4) za pomocą równania. Bos uznał, że najważniejszy jest pierwszy sposób. Co szczególne, skupiając się na reprezentacji krzywych, Bos nie zwraca uwagi na to, czy i jak są one definiowane.

Nie jest to bynajmniej przypadkowe potknięcie, ale pewna słabość jego metody. Referując arytmetykę odcinków Kartezjusza, Bos podobnie nie zwraca uwagi na to, czy działania na odcinkach są definiowane, czy wyprowadzane z twierdzeń Euklidesa; w rezultacie dochodzi do twierdzenia — błędnego — że w *Geometrii* występują dwie różne operacje pierwiastka kwadratowego (Bos, 2001).

Zobaczmy zatem, jak Bos komentuje przykład, który służy Kartezjuszowi za wzór tworzenia równania krzywej[21].

> Przecięcie C tych dwóch poruszających się prostych opisuje (*describes*) krzywą GCE. Kartezjusz wyprowadził równanie tej krzywej
> $$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$
> [...] konstatując, że jest to krzywa pierwszego rodzaju (Bos, 1981: 311.).

Przyjmijmy, że „przecięcie C" opisuje krzywą GCE i zapytajmy: czym jest krzywa, jaka jest jej definicja. Słowom Bosa towarzyszy rysunek zamieszczony w *Geometrii* na stronie 321, zatem GCE to linia przedstawiona na rysunku, a nie matematycznie zdefiniowany obiekt.

Dalej Bos podaje jako oczywiste, że „Kartezjusz wyprowadził równanie tej krzywej". Fakty jednak są takie, że Kartezjusz owszem wyprowadził, ale zależność między odcinkami x, y, które opisują punkt C[22]. Stwierdzenie, że formuła $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$ jest równaniem krzywej, opiera się na sugestywności rysunku i wiąże się z Kartezjusza metafizyką ruchu, a więc tym, co nie wynika ani z fizycznego, ani z matematycznego pojęcia ruchu.

Przejście od zależności między x i y do równania krzywej można wyjaśnić na dwa sposoby: (1) albo przyjmiemy, że na mocy definicji krzywa składa się z samych przecięć, (2) albo przyjmiemy jako dodatkowy aksjomat następujące stwierdzenie Kartezjusza: „nie istnieje żaden punkt na liniach służących do postawionego zagadnienia, którego nie można by było znaleźć wśród tych wyznaczonych w wyjaśniony sposób"(s. 340).

Pierwsze rozwiązanie to założenie, które stanowi podstawę przedkładanej interpretacji. Drugie rozwiązanie ma bezpośrednie podstawy w tekście *Geometrii*, a interpretacja polega na uznaniu wskazanych słów za aksjomat. W jednym i drugim przypadku dokonujemy — podkreślmy to — interpretacji.

---

[21] Chodzi o budowę równania (C).

[22] Przypomnijmy kluczowe słowa: „prowadzę z tego punktu C linię CB równoległą do GA, a ponieważ CB i BA są dwiema wielkościami nieokreślonymi i nieznanymi, to pierwszą z nich nazywam y, drugą zaś x".

A. G. Molland analizuje teorię krzywych Kartezjusza z perspektywy pojęć „geneza"i „symptomy" linii. Czytamy:

> Jednoznaczną charakterystykę krzywej (która może, ale nie musi, być traktowana jako definicja) nazwę opisem (*specification*) tej krzywej. [...] Zarówno u Kartezjusza, jak i w starożytności odnajdujemy podstawową różnicę między sposobami opisu. Możemy ją nazwać różnicą między opisem własności i opisem genezy. Opis własności ustanawia własność (zwykle jakościową, którą posiadają wszystkie punkty krzywej), którą wystarczy znać, by wyznaczyć krzywą. U Kartezjusza, co znamienne, jest ona wyrażona w formie równania. Opis genezy wyznacza krzywą, określając sposób jej konstrukcji (Molland, 1976: 22–23.).

Kwestia, którą uznajemy za kluczową — na bazie jakich założeń krzywa jest utożsamiana ze zbiorem punktów — w cytowanym fragmencie jest ujęta w nawias, a w referowanym artykule nie jest w ogóle wyjaśniana.

Przechodząc do przykładu kreślenia hiperboli i tworzenia równania krzywej, Molland pisze:

> Ustalając równanie krzywej, Kartezjusz wybiera linię prostą, powiedzmy AB, oraz punkt na niej, powiedzmy A. Z dowolnego punktu C na krzywej prowadzona jest do AB linia prosta CB, przecinająca ją pod danym kątem. Linie AB, BC są wielkościami określającymi położenie C i są nazywane x oraz y. Równanie zawierające x, y, wyznacza krzywą, opisując własność, którą muszą mieć wszystkie jej punkty (Molland, 1976: 37–38).

Z cytowanych zdań wynika, że Molland przyjmuje jako oczywiste założenie, że krzywa składa się z punktów. W ten sposób równanie opisujące punkt C staje się jednocześnie równaniem wszystkich punktów i ostatecznie równaniem krzywej. W *Geometrii* — jak pokazaliśmy — jest jednak inaczej: punkt C jest wybrany na krzywej i dopiero na mocy dodatkowych założeń Kartezjusz dochodzi do konstatacji, że na krzywej nie ma innych punktów niż te opisane równaniem.

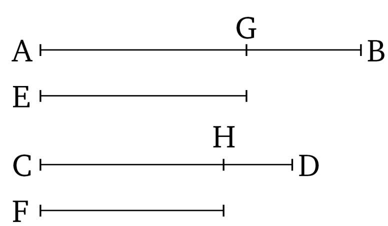
7. Euklides i pojęcie wielkości

7.1. **Krańcami prostej są punkty.** W tej części wskażemy, w jaki sposób teoria Kartezjusza zależy od założeń matematycznych zawartych w *Elementach* Euklidesa. Zaczniemy od kilku cytatów. Oto pierwsze definicje z księgi I *Elementów*:

> Punkt (σημεῖον) jest tym, co nie ma części (μέρος).
>
> Linia (γραμμή) zaś to długość (μῆκος) bez szerokości.
>
> Krańcami (πέρατα) zaś linii są punkty.
>
> Linia prosta (εὐθεῖα γραμμή) jest tym, co leży równo względem punktów na niej.
>
> Powierzchnia (ἐπιφάνεια) zaś jest tym, co ma tylko długość (μῆκος) i szerokość (πλάτος).
>
> Krańcami (πέρατα) zaś powierzchni są linie.

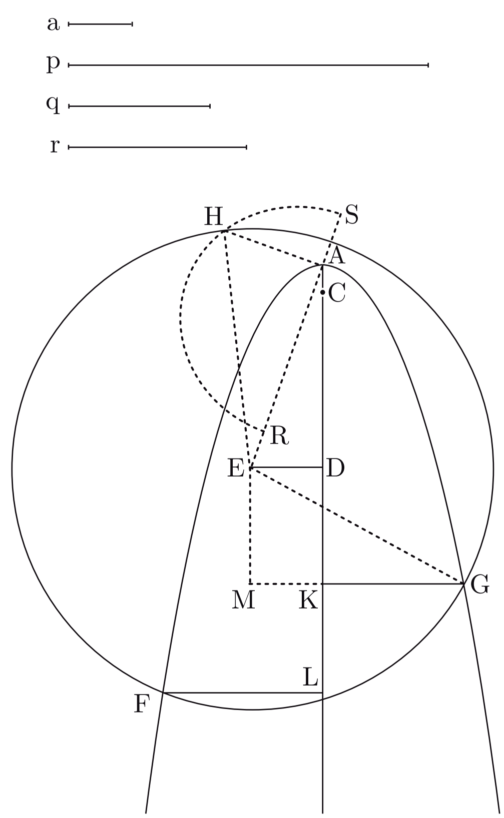
Z definicji tych wynika, że punkt jest — na co zwracaliśmy już kilkakrotnie uwagę — niesamodzielną częścią odcinka. To, co zapisane w pierwszych definicjach, jest konsekwentnie powtarzane w kolejnych trzynastu księgach. Oto dla przykładu teza twierdzenia 25 z księgi V wraz z towarzyszącym diagramem.

> Jeśli cztery wielkości są proporcjonalne, to największa [z nich] i najmniejsza są większe od dwóch pozostałych.



W księdze V Euklides przedstawia teorię wielkości. Wszystkim twierdzeniom z tej księgi towarzyszą podobne diagramy, na których wielkości są przedstawiane w ten sam sposób — jako odcinki domknięte, z wyraźnie zaznaczonymi *krańcami*.

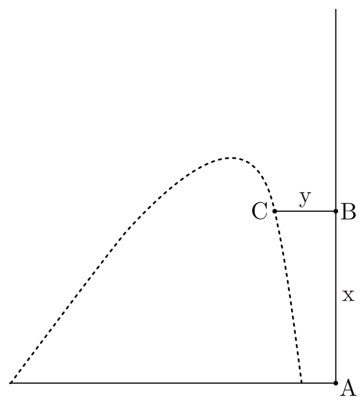
Oto dla porównania jeden z drzeworytów *Geometrii*, gdzie litery a, p, q, r oznaczają wielkości, które są współczynnikami wielomianu.



Wielkości oznaczone literami a, p, q, r są tu przedstawiane tak jak w *Elementach*: jak odcinki domknięte, z wyraźnie zaznaczonymi krańcami.

Zwracaliśmy już uwagę na fakt, że w matematyce greckiej krzywe były definiowane i kreślone przez poruszające się punkty, a w *Geometrii* — przez przecięcia krzywych. Punkt przecięcia, oznaczany literą C, jest następnie związany z dwoma odcinkami x, y, co schematycznie przedstawia poniższy rysunek.

Punkty A, B to „krańce" odcinka x, punkty B, C — „krańce" odcinka y. Obraz ten obrócony o kąt $\pi/2$ w prawo powróci w *Introductio in analysin infinitorum*, gdzie Euler opisuje „geometryczne przedstawienie funkcji" (zob. niżej § 8).



7.2. **Carl C. Boyer o linii Kartezjusza.** Na stronie 319 *Geometrii*, w uwagach wprowadzających do równania hiperboli, Kartezjusz pisze:

> wszystkie punkty tych [krzywych], które można nazwać geometrycznymi, to znaczy te, które podpadają pod dokładną i ścisłą miarę, z konieczności mają jakiś związek (*rapport*) z wszystkimi punktami linii prostej, który można wyrazić pewnym równaniem, tym samym dla wszystkich (s. 319).

Carl C. Boyer tak skomentował to zdanie[23]:

> Należy zauważyć, że Kartezjusz milcząco korzysta tu z aksjomatu Cantora-Dedekinda, tj. zakłada, że między punktami linii a liczbami rzeczywistymi zachodzi odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna; podobnie taką samą doskonałą odpowiedniość można ustanowić między płaszczyzną i parami odcinków czy liczb rzeczywistych (Boyer, 2004: 92.).

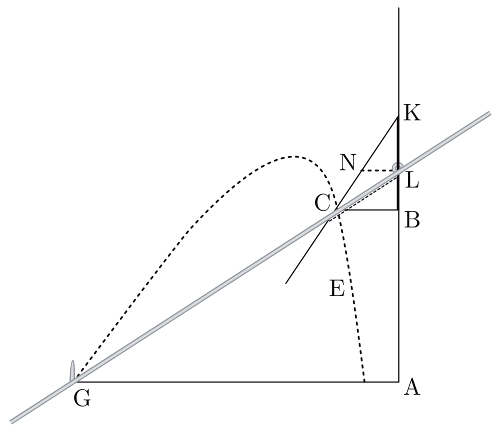
W *Geometrii* jednak rzecz wygląda inaczej. Rozwijając dalej swoją myśl, Kartezjusz pokazuje, jak powstaje równanie hiperboli kreślonej przez dwie poruszające się proste:

> Chcę wiedzieć, jakiego rodzaju jest linia EC, która, jak zakładam, została wykreślona przez przecięcie linijki GL oraz figury płaskiej prostoliniowej CNKL [...]. Gdy chcę sprawdzić, do jakiej klasy należy ta krzywa [hiperbola] wybieram linię prostą AB i do niej odnoszę wszystkie punkty z linii

[23] Roshdi Rashed, podobnie jak Boyer, uznaje to zadanie za klucz do Kartezjusza teorii krzywych. Czytamy: „W tym fragmencie, o ile wiem, Kartezjusz najbardziej precyzyjnie sformułował związek zachodzący między krzywą a jej równaniem" (Rashed, 2015: 252). Uwagi, które niżej przedstawiamy, odnoszą się także do interpretacji Rasheda.

> krzywej EC. Na linii AB wybieram punkt A i od niego zaczynam obliczanie (s. 319–320).

Słowom tym, jak już wiemy, towarzyszy rysunek.



(1) Wprost z rysunku wnosimy, że punkt C ma związek z punktem B, który jest końcem odcinka AB. Gdy przedłużymy odcinek CB, to przetnie on krzywą EC w jeszcze jednym punkcie, zatem *odpowiedniość*, o której pisze Boyer, nie jest wzajemnie jednoznaczna.

(2) Związek między C i B jest wyrażony, jak już wiemy, równaniem $C = \varphi(x, y)$, gdzie $y = CB$, $x = AB$. W *Geometrii* równania krzywych są budowane na podstawie proporcji odcinków, najpierw x, y, a następnie tych, które Kartezjusz przyjmuje jako dane. O ile więc, interpretując rysunek, można przyjąć, że punkt C jest „związany" z punktem B, to w równaniu nie występuje już punkt B, ale odcinek AB.

(3) *Geometria* jest podzielona na księgi i krótkie rozdziały. Tytuły rozdziałów są umieszczone na marginesach. Rozdział, w którym znajduje się omawiane zdanie, nosi następujący tytuł: „Sposób rozróżnienia wszystkich linii krzywych na pewne rodzaje oraz poznania stosunku (*rapport*), jaki mają ich punkty do pewnych linii prostych"(s. 319)

Słowo *rapport* można przetłumaczyć jako stosunek, związek czy proporcja. Boyer przyjmuje, że Kartezjusz pisze o *związku* punktów C i B. Analizując słowa Kartezjusza w szerszym kontekście, widzimy, że chodzi o związek punktu C z odcinkami x, y; matematycznie jest on opisany relacją proporcji. Proporcja jest relacją między odcinkami, nie między punktami.

(4) W historii matematyki myśl Kartezjusza doprowadzono dalej do tego, że punkt C był opisywany parą liczb (x, y). Wiąże się to ze zmianą znaczeń, w której odcinek $AB = x$ jest opisywany liczbą x, która odpowiada *długości* odcinka AB.

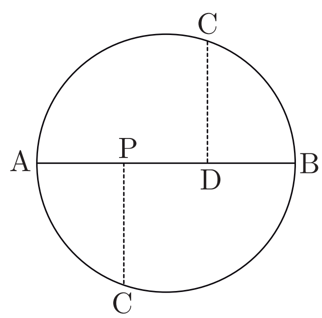
(5) We współczesnej geometrii analitycznej płaszczyzną kartezjańską nazywany jest zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a punkty płaszczyzny są interpretowane jako pary liczb (x, y). W tym ujęciu płaszczyzna posiada jeden wyróżniony punkt, mianowicie $(0, 0)$. W *Geometrii* nie ma takiego rozumienia płaszczyzny i dlatego dla każdego zagadnienia przyjmowany jest nowy punkt odniesienia. W opisie hiperboli jest to punkt A.

(6) Jednym z założeń teorii krzywych Kartezjusza jest to, że krzywe geometryczne przecinają się. Uwzględniając to założenie, otrzymujemy, że modelem płaszczyzny kartezjańskiej jest zbiór $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, gdzie $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ jest rzeczywiście domknięte. Przykłady ciał tego rodzaju stanowią liczby algebraiczne rzeczywiste, liczby rzeczywiste, niestandardowe liczby rzeczywiste. Modelem prostej kartezjańskiej $(\mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1, <)$ wcale nie muszą być więc liczby rzeczywiste, jak twierdzi Boyer[24]; może to być zbiór przeliczalny (liczby algebraiczne) albo ciało niearchimdesowe (niestandardowe liczby rzeczywiste).

8. Od zagadnień miejsca do pojęcia funkcji

W tej części pokażemy kilka epizodów z historii punktowego pojmowania krzywej. Uznajemy je za rozwinięcie idei zawartych w *Geometrii.*

8.1. **John Wallis, 1685.** Oto jak w roku 1685 John Wallis objaśnia, na czym polega zagadnienie *miejsca*:



> Gdy na przykład dana jest linia prosta (zakończona) z A do B, to należy znaleźć taki punkt, że prostopadła poprowadzona z niego do tej linii będzie średnią proporcjonalną między jej częściami. Eutokius (na wstępie komentarza do *Stożkowych* Appoloniusza) pisze, że geometrzy nazywali to miejscem (*place*), gdyż nie tylko jeden punkt (czy pewna liczba punktów) spełnia postawiony warunek, ale całe miejsce, mianowicie obwód koła zakreślonego tak, że dana linia jest średnicą. Gdy bowiem z punktu C na obwodzie CC

[24] Ten sam błąd powtarza Rashed, zob. Rashed, 2015: 254–255.

> poprowadzona jest prostopadła CP do średnicy AB, to C (na podstawie 13. z szóstej Euklidesa) jest średnią proporcjonalną między częściami tak podzielonej średnicy (Wallis, 1685: 257)[25].

W cytowanym fragmencie okrąg jest przedstawiony jako zbiór rozwiązań pewnego problemu. Pojedyncze rozwiązanie jest punktem, zbiór wszystkich rozwiązań — zbiorem punktów. W ten sposób obwód koła jest pojęty jako składający się z punktów.

Dla porównania zestawmy rozstrzygnięcie Wallisa z Euklidesa definicją koła:

> Koło (κύκλος) jest figurą płaską ograniczoną jedną linią [nazywaną obwodem (περιφέρεια)] i wszystkie proste wychodzące z jednego punktu leżącego we wnętrzu tej figury są równe jedna drugiej.

W tej definicji okrąg (obwód koła) jest linią. W geometrii Euklidesa na każdej linii można wyróżnić punkty, na przykład jako przecięcia z innymi liniami, czasami można nawet wybrać dowolny punkt. Ale linia nie składa się z punktów. Gdy obwód koła jest pojęty jako „miejsce" (*locus*), czyli rozwiązanie pewnego problemu — tak jak u Wallisa — to wtedy składa się z punktów.

W traktacie Wallisa punkt C nie jest opisany równaniem. W *Geometrii* także nie ma równania okręgu. Kartezjusz posługuje się kołem dla ustalenia odległości; punkt leżący na okręgu jest opisywany za pomocą odległości od środka, co jest wyrażane odpowiednim równaniem za pomocą twierdzenia Pitagorasa i operacji pierwiastka.

8.2. **Leonard Euler, 1748.** *O liniach krzywych ogólnie*

„1. Skoro wielkość zmienna (*quantitas variabilis*) jest ogólnie uznawana za wielkość (*magnitudo*) zawierającą (*complectens*) w sobie wszystkie określone wielkości (*quantitates determinatas*), to w geometrii najodpowiedniejszym przedstawieniem wielkości zmiennej będzie nieograniczona linia prosta RS.

Bo gdy z nieograniczonej linii możemy odciąć (*abscindere*) jakąś określoną wielkość (*magnitudinem*), to w ten sposób przedstawiamy

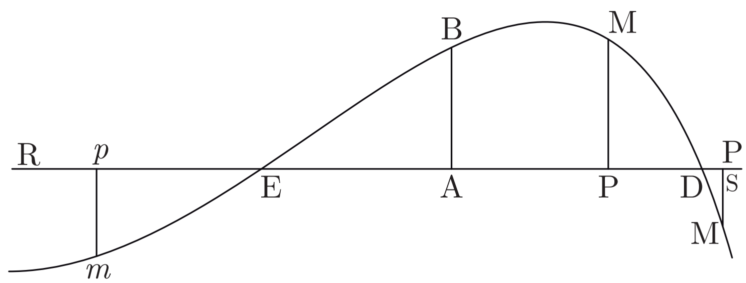
[25] Zwrot „na podstawie 13. z szóstej Euklidesa" oznacza: na podstawie twierdzenia 13. z księgi VI *Elementów* Euklidesa. Diagram pochodzi z pracy Wallisa. Następne diagramy pochodzą z cytowanych prac.

umysłowi taką samą wielkość zmienną. Zatem wpierw na nieograniczonej linii RS obieramy punkt A, który może być uznany za początek odcięcia określonej wielkości (*magnitudines*). W ten sposób określona wielkość AP przedstawi określoną wartość (*valorem determinatum*) zawartą w zmiennej wielkości.

2. Niech zatem x będzie zmienną wielkością, która może być przedstawiona przez prostą nieograniczoną RS. Jest oczywiste, że wszystkie wartości (*valores*) określonego x, które są rzeczywiste (*reales*), mogą być przedstawione przez części (*portiones*) odcięte z linii RS. Niewątpliwie, jeśli za punkt P może być wzięty sam punkt A, to zanikający odcinek (*intervallum*) AP pokaże wartość $x = 0$. Im bardziej (*magis*) punkt P będzie oddalony (*removetur*), tym większą (*major*) określoną wartość x będzie przedstawiał odcinek AP. Ponadto te odcinki AP nazywane są odciętymi (*abscissae*). Zatem odcięte pokazują określone wartości zmiennej x.

[...]

4. Niech zatem nieograniczona linia prosta pokazuje zmienną wielkość x; zobaczmy, w jaki sposób funkcja (*functio*) x może być przedstawiona geometrycznie i najbardziej właściwie.



Niech więc y będzie pewną funkcją x, która może przyjąć (*induat*) określoną wartość, gdy określona wartość jest podstawiona za x. Wraz z nieograniczoną linią prostą RAS oznaczającą wartości x, biorąc dla dowolnej wartości x ograniczoną AP, prostopadle przykładamy (*normaliter applicetur*) prostą PM równą odpowiedniej wartości y. Jeśli wartość y będzie pozytywna (*affirmativus*), to niewątpliwie PM będzie utworzona nad prostą RS, jeśli jednak wartość y okaże się negatywna (*negativus*), to może być prostopadle przyłożona pod prostą RS. Zatem wartości pozytywne obranego y będą padały (*cadent*) nad prostą RS, znikające (*evanescentes*) wartości na samą RS, a negatywne pod nią.

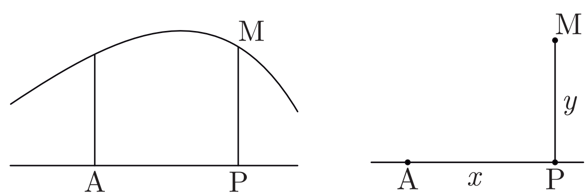
[...]

6. Jeśli zatem dla wszystkich wartości określonego x będą zdefiniowane w ten sposób odpowiadające im wartości y, to dla pojedynczych (*singula*) punktów P utworzonej prostej RS przyłożone linie PM będą wyrażały (*exprimentes*) wartości funkcji y; i z tych przyłożonych PM jeden koniec (*alteri termini*), P, pada (*incident*) na prostą RS, a drugi, M, będzie umieszczony powyżej albo nad RS, jeśli wartość y będzie pozytywna; albo pod, jeśli będzie negatywna; albo pada na samą RS, jeśli znikająca (*evanescant*), jak to jest w punktach D i E. Pojedyncze krańce (*extremitates*) przyłożonych, M, będą więc reprezentowały (*repraesentabunt*) pewną linię czy to prostą, czy krzywą, która w ten sposób będzie określona przez funkcję y. Dlatego więc pewna funkcja samego x przeniesiona (*translata*) w ten sposób do geometrii, określi pewną linię, czy to prostą, czy krzywą, której natura będzie zależeć (*pendebit*) od natury funkcji y.

7. W ten sam sposób linia krzywa (*linea curva*), która wynika z funkcji y, jest doskonale znana, ponieważ wszystkie jej punkty (*omnia ejus puncta*) są określone przez funkcję y. Może być ona bowiem uznana za długość prostopadłej PM przyłożonej do pojedynczego punktu P, której punkt krańcowy (*extremum punctum*) M powinien być położony na linii krzywej. I w jakikolwiek sposób linia krzywa będzie rozpatrywana (*comparata*), z jej pojedynczych punktów (*singulis punctis*) można poprowadzić prostopadłą do prostej RS i w ten sposób otrzymamy (*obtinentur*) odcinek, który pokaże wartość zmiennej x oraz długość (*longitudines*) przyłożonej PM, która przedstawia (*repraesentant*) wartość funkcji y. Na tej podstawie żaden punkt nie znajdzie się poza (*extabit*) krzywą, ponieważ nie jest tak zdefiniowany przez funkcję y.

8. Chociaż wiele linii krzywych może być opisanych (*describi*) mechanicznie jako ciągły ruch punktu (*per motum puncti continuum*), przez który może być ujrzana cała utworzona linia krzywa, to uznamy tutaj te linie krzywe, które pochodzą od funkcji (*ex functionibus originem*), mają one bowiem większy zakres zastosowań analitycznych i są bardziej dostosowane do obliczeń. Zatem pewne funkcje x dają potrzebne linie czy to proste, czy krzywe, dzięki czemu następnie linie krzywe mogą być nazwane funkcjami. Natura każdej linii krzywej będzie wyrażona przez tego rodzaju funkcję x, odcinek AP, do którego prostopadła (*perpendicula*) MP może być opuszczona (*demittuntur*) z pojedynczego punktu krzywej M w kierunku prostej RS, zostanie wskazany przez zmienną x (*per variabilem x indicantur*), wartość funkcji pokaże prawdziwą długość przyłożonej linii MP"(Euler, 1748: 3–6).

W *Geometrii* nie ma pojęcia przestrzeni i układy odniesienia budowane przy okazji kolejnych zadań mają charakter lokalny. W traktacie Eulera odnajdujemy konstrukcję osi, na której znajdują się wszystkie możliwe wielkości. Jednocześnie, tak jak w *Geometrii*, wielkość (*quantitas*) jest utożsamiana z odcinkiem. Punkt A, wspólny dla wszystkich odcinków x, jest początkiem osi (punktem 0). Drugim końcem odcinka x jest punkt P, zatem $x = AP$. W P wystawiany jest odcinek prostopadły PM. Wielkość $y = PM$ jest wartością funkcji dla argumentu x. Możemy zilustrować to diagramem, który jest modyfikacją oryginalnego miedziorytu *Introductio*.



Krzywa składa się z punktów M, które są „krańcami wielkości" y: „krzywa, która wynika z funkcji y jest doskonale znana, ponieważ wszystkiej jej punkty są określone przez funkcję y [...] żaden punkt nie znajdzie się poza (*extabit*) krzywą, ponieważ nie jest tak zdefiniowany przez funkcję y".

W wywodzie Eulera wyraźna jest dwuznaczność pojęcia wartości y: z jednej strony jest to cały odcinek PM („długość"), z drugiej — tylko jego koniec M. Z czasem, w pracach kolejnych matematyków, gdy pojęcie wielkości zostanie zastąpione pojęciem liczby rzeczywistej, w miejsce odcinków x, y wystąpią liczby. Ilustrują to zamieszczone niżej fragmenty prac Cauchy'ego i Heinego.

Zarys idei osi liczbowej zawiera myśl Kartezjusza o powiązaniu krzywej geometrycznej, *via* równanie, z punktami prostej; natomiast zdanie „krzywa, która wynika z funkcji y jest doskonale znana, ponieważ wszystkiej jej punkty są określone przez funkcję y [...] żaden punkt nie znajdzie się poza (*extabit*) krzywą, ponieważ nie jest tak zdefiniowany przez funkcję y" wprost wiąże się z metodą Kartezjusza, gdzie krzywa jest definiowana jako zbiór przecięć, a każdy punkt przecięcia można opisać równaniem $\varphi(x, y)$; *ergo* na krzywej nie ma innych punktów niż te opisane równaniem $\varphi(x, y)$.

8.3. **August Cauchy, 1821.** Oto definicja funkcji podana przez Cauchy'ego:

> *Ogólne rozważania na temat funkcji*
>
> Kiedy wielkości zmienne (*des quantités variables*) są tak związane ze sobą, że mając daną wartość (*la valeur*) jednej z nich, możemy wywnioskować wartości wszystkich innych, to zwykle pojmujemy te różne wielkości jako wyrażone za pomocą jednej z nich, która przyjmuje w ten sposób nazwę zmiennej niezależnej (*variable indépendante*), a pozostałe wielkości wyrażone za pomocą zmiennej niezależnej nazywamy funkcjami tej zmiennej (*fonctions de cette variable*).
>
> Kiedy wielkości zmienne są tak związane ze sobą, że mając pewne wartości, możemy wywnioskować wszystkie inne, to rozumiemy te różne wielkości wyrażone za pomocą kilku z nich, które przyjmują w ten sposób nazwę zmiennych niezależnych (*variables indépendantes*), a pozostałe wielkości, wyrażone za pomocą zmiennych niezależnych, nazywamy funkcjami tych samych zmiennych (Cauchy, 1821: 19).

Pierwszy akapit cytowanego tekstu traktuje o funkcji jednej zmiennej, $f : \mathbb{F} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{F}$. W tym opisie zmienną, *tym, co się porusza*, jest w pierwszym rzędzie parametr x — „zmienna niezależna". Na krzywej zaś leżą „zmienne zależne".

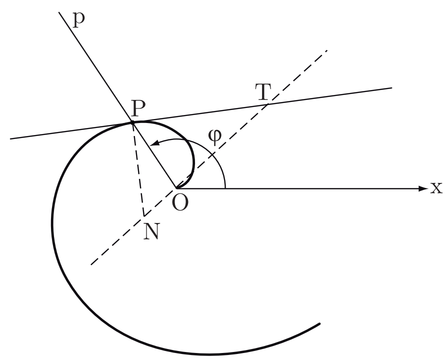
8.4. **Eduard Heine, 1872.** Oto definicja funkcji z rozprawy *Elementy teorii funkcji*:

> *Definicja. Funkcją jednowartościową* zmiennej x nazywa się wyrażenie, które dla każdej pojedynczej wymiernej lub niewymiernej wartości x jest jednoznacznie zdefiniowane.
>
> *Komentarz.* Wartość funkcji dla niewymiernej wartości zmiennej nie może zatem być tak zdefiniowana, aby zależała od szczególnego szeregu liczbowego, przez który owa niewymierna wartość akurat była podana, *musi ona raczej pozostawać taka sama, co było też uzasadnione wybraniem jednego i tego samego znaku dla wartości niewymiernej x* (Heine, 2014: 180).

W tym ujęciu funkcja jest funkcją rzeczywistą, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, zmienna x jest liczbą rzeczywistą. Liczby rzeczywiste są zbiorem liniowo uporządkowanym $(\mathbb{R}, <)$, *składają się* z punktów i odpowiednio z punktów $(x, f(x))$ na płaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ składa się wykres funkcji, $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.

8.5. **Współczesna geometria analityczna.** Oto współczesna definicja spirali zaczerpnięta z książki Franciszka Lei *Geometria analityczna*:

> Spiralę Archimedesa opisuje punkt P oddalający się od punktu stałego O po prostej p, która obraca się dookoła punktu O tak, że odległość $r = OP$ jest proporcjonalna do kąta obrotu $\varphi = \measuredangle(x, OP)$ (Leja, 1954: 157).



Równanie biegunowe spirali Archimedesa ma postać $r = a \cdot \varphi$, gdzie a jest stałą, zaś r, φ są zmiennymi. Związek między ruchem obrotowym prostej i ruchem punktu dany jest „proporcją" $a = r : \varphi$, która oznacza ni mniej, ni więcej jak iloraz liczb rzeczywistych. Tak pojęta „proporcja" jest możliwa, bo r, φ są liczbami rzeczywistymi: r oznacza długość odcinka, nie sam odcinek, φ oznacza miarę kąta, nie sam kąt. Kartezjusz posługuje się antyczną teorią proporcji, w której porównywane są wielkości „tego samego rodzaju" — odcinki tworzą jeden rodzaj, kąty — drugi rodzaj, figury — trzeci; odcinki i kąty są wielkościami różnego rodzaju i dlatego nie można wyznaczyć ich stosunku (Błaszczyk & Mrówka, 2013a: 97–117).

A oto definicja spirali, w której nie występuje pojęcie ruchu, zaczerpnięta z książki Karola Borsuka *Multidimensional analytic geometry*:

> Niech a będzie stałą różną od zera, zaś b dowolna stałą i niech θ będzie taką, że $a(\theta + b)$ jest nieujemną. Wówczas równanie $r = a(\theta + b)$ definiuje krzywą zwaną spiralą Archimedesa (Borsuk, 1969: 189).

W wykładzie Karola Borsuka pojęcie ruchu powraca na poziomie interpretacji. Autor wspomina, że niektóre krzywe mogą być pojmowane jako zakreślone przez poruszający się punkt. Czytamy:

> Obrót płaszczyzny o kąt t złożony z translacją $[rt, 0]$, można interpretować kinetycznie jako ruch sztywny płaszczyzny taki, że koło o środku w O toczy się po linii prostej o równaniu $x_2 = -r$ (Borsuk, 1969: 187).

Pamiętamy dwa składniki definicji krzywych w matematyce greckiej: genesis i symptomy. Powyższa definicja redukuje zagadnienie do symptomów. W greckich początkach matematyki krzywe bardziej złożone niż stożkowe były definiowane za pomocą ruchu. W matematyce współczesnej krzywa jest podzbiorem przestrzeni opisanym równaniem, a pojęcie ruchu jest wiązane z krzywą na poziomie interpretacji. *Geometria* Kartezjusza jest etapem pośrednim w pojmowaniu krzywej między antykiem a współczesnością.

Bibliografia

Aristoteles. (1831). *Physica*. W: I. Bekker (Red.). *Aristotelis opera* (231a 15–16; vol. 1). Berlin: Academia Regia Borussica.

Bell, J. (2005). *The continuous and the infinitesimal in mathematics and philosophy.* Milano: Polimetrica.

Błaszczyk, P. (2005). On the mode of existence of the real numbers. *Analecta Husserliana*, *LXXXVIII*, 137–155.

Błaszczyk, P. (2007). *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda* Stetigkeit und irrationale Zahlen. Kraków: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej.

Błaszczyk, P. & Mrówka, K. (2010). O *La Géométrie* Kartezjusza. *Konspekt*, *37*, 51–55. Dostęp: www.konspekt.up.krakow.pl/files/konspekt-37.9.12.pdf (19.05.2014).

Błaszczyk, P. & Mrówka, K. (2013a). *Euklides, Elementy. Księgi V–VI. Teoria proporcji i podobieństwa. Tłumaczenie i komentarz.* Kraków: Copernicus Center Press.

Błaszczyk, P. & Mrówka, K. (2013b). Euklides i Arystoteles o ciągłości (cz. 1: Euklides). *Filozofia Nauki*, *4*, 91–115.

Błaszczyk, P. & Mrówka, K. (2014a). Dwie tęcze Kartezjusza. *Konspekt*, *51*, 149–154.

Błaszczyk, P. & Mrówka, K. (2014b). *Kartezjusz, Geometria. Tłumaczenie i komentarz* (maszynopis).

Borsuk, K. (1969). *Multidimensional analytic geometry.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Bos, H. (1981). On the representation of curves in Descartes' *Géométrie*. *Archive for the History of Exact Science*, *24*, 295–339.

Bos, H. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction.* New York: Springer.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications Inc.

Boyer, C. (2004). *History of analytic geometry.* New York: Dover Publications Inc.

Browkin, J. (1978). *Teoria ciał.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Cantor, G. (1883). Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, *21*, 545–586. (Polski przekład fragmentów: O nieskończonych liniowych rozmaitościach punktowych. (Przeł. J. Pogonowski). Dostęp: www.eudoxos.pl (19.05.2014)).

Cauchy, A.-L. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique* (cz. 1: *Analyse algébraique*). Paris: Courcier.

Clavius, Ch. (1589). *Euclidis Elementorum Libri XV*. Roma: Cholinus.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Descartes, R. (1637). *La Géométrie*. Leyde: l'Imprimerie de Jan Maire.

Descartes, R. (1664). *Le monde de Mr Descartes, ou Le traité de la lumière et des autres principaux objets des sens. Avec un discours de l'action des corps et un autre des fièvres, composez selon les principes du mème auteur*. Paris: Jacques Le Gras.

Descartes, R. (1999). *Discours de la méthode et essays*. Paris: Gallimard.

Domski, M. (2009). The intelligibility of motion and construction: Descartes' early mathematics and metaphysics, 1619–1637. *Studies in History and Philosophy of Science*, *40*, 119–130.

Ehrlich, Ph. (Red.). (1994). *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer.

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum* (t. 2). Lausanae: M.-M. Bousquet.

Heiberg, J. (Red. i przekł.). (1880). *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii* (t. 2). Leipzig: Teubner.

Heine, E. (2014). Elementy teorii funkcji. (Przeł. J. Pogonowski). *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, *6*, 153–166. (Wyd. oryg.: Elemente der Funktionenlehre. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 1872, *74*, 172–188).

Kartezjusz. (2010). Geometria, Księga I, 297–304. (Przeł. P. Błaszczyk & K. Mrówka). *Konspekt*, *37*. Dostęp: www.eudoxos.pl (19.05.2014).

Kartezjusz. (2013). Geometria, Księga III, ss. 369–389. (Przeł. P. Błaszczyk & K. Mrówka). W: H. Jakuszko (Red.). *Z badań nad filozofią XVII wieku, jej źródłami i kontynuacjami* (s. 331–351). Lublin: Lubelskie Towarzystwo Naukowe.

Kartezjusz. (2014a). Geometria, Księga II, strony 315–323. (Przeł. P. Błaszczyk & K. Mrówka). *Argument. Biannual Philosophical Journal*, *4* (2), 439–466.

Kartezjusz. (2014b). O tęczy. (Przeł. P. Błaszczyk & K. Mrówka). *Konspekt*, *51*, 250–270.

Leja, F. (1954). *Geometria analityczna*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Mancosu, P. (1999). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford: Oxford University Press.

Molland, A. G. (1976). Shifting the foundations: Descarte's transformation of ancient geometry. *Historia Mathematica*, *3*, 21–49.

Mostowski, A. & Stark, M. (1970). *Elementy algebry wyższej.* Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Olscamp, P. (2001). *René Descartes, Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meterology.* Indianapolis: Hackett Publishing Company.

Rashed, R. (2015). *Classical mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes.* (Przeł. M. H. Shank). New York: Routledge.

Sasaki, Ch. (2003). *Descartes's mathematical thought.* Dordrecht: Kluwer.

Sefrin-Weis, H. (Red. i przekł.). (2010). *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection.* London: Springer.

Smith, E. & Lathan, M. (2007). *The Geometry of Rene Descartes.* New York: CosimoClassics.

Wallis, J. (1685). *Treatise of algebra.* London: University of Oxford.

Youszkevitch, A.-A. (1977). The concept of function up to the middle of the 19^{th} century. *Archive for the History of Exact Science*, *16*, 39–85.