特集　数理情報

原著論文

ゲーム理論に基づいた複雑ネットワーク形成のモデル化

今井哲郎*・田中　敦**・吉澤康介***・三宅修平***

情報通信や社会学，生物学など多様な分野において，要素とその要素間の関係で構成されるネットワーク構造（トポロジ）が複雑ネットワークと呼ばれる特性を持っていることが明らかになってきている．多数の主体が自己組織的に複雑ネットワークを形成する原理を，構成主体の個人合理性に落とし込むことで明らかにするために，我々はこれまでにゲーム理論に基づいた複雑ネットワーク形成のモデル化を行い，その特性について分析してきた．本稿では，これまでの研究成果を概観し，今後の展望について述べる．

キーワード：複雑ネットワーク，ネットワーク形成ゲーム，戦略的ネットワーク形成，ネットワークダイナミクス，コンピュータシミュレーション

Modeling of Complex Network Formation Based on Game Theory

Tetsuo IMAI*, Atsushi TANAKA**,
Kousuke YOSHIZAWA*** and Shuhei MIYAKE***

In various fields such as communication technology, sociology, and biology, it has been revealed that network structure（topology）composed of elements and relationships of the elements has property of the complex networks. By the concept of individual rationality, in order to reveal why numerous individuals tend to self-organize complex networks, we have modeled complex networks formation based on game theory and analyzed their properties. In this paper, an overview of the research results and prospects are described.

Keywords: Complex network, Network formation game, Strategic network formation, Network dynamics, Computer simulation

*東京情報大学　看護学部　遠隔看護実践研究センター
Telenursing Research Center, Faculty of Nursing, Tokyo University of Information Sciences
**山形大学大学院　理工学研究科
Graduate School of the Science and Engineering, Yamagata University
***東京情報大学　総合情報学部
Faculty of Informatics, Tokyo University of Information Sciences

2017年５月15日受付
2017年８月18日受理

1　はじめに

情報通信や社会学，生物学など多様な分野において，要素とその要素間の関係で構成されるネットワーク (以下，NW) の構造 (トポロジ) が複雑 NW と呼ばれる特性を持っていることが明らかになってきている．複雑 NW は，スケールフリー性 [注 1] やスモールワールド性 [注 2] といった特徴を持つ NW である．スケールフリー性については，ノードやリンクのランダムな障害に対して頑健である一方，ハブやインフルエンサーといった NW の中で重要性の高い要素の障害に対しては，非常に脆弱であるという特徴を持つことが知られている．そのため，例えば通信 NW のトポロジとしては，必ずしも望ましい特性ではない．複雑 NW の中には，高度に自律的な判断能力を持った多数の主体によって自己組織的に構築されたものが多数ある．近年隆盛の Facebook や Instagram などに代表される SNS における友人間 NW のトポロジも，そのような NW の一つと見られている．

複雑 NW を生成するモデルも，複雑 NW 研究の火付け役となった Barabási-Albert モデルや Watts-Strogatz モデルなど，これまでに多数提案されている．しかしその多くは，多数の主体が利己的な選好を持ち，お互いの相互承認によってリンクが形成されているという面を十分に表現しきれていなかった．言い換えれば，多数の主体が「どのように」振る舞えば複雑 NW が形成されるかを明らかにしたモデルは多くある一方で，多数の主体が「なぜ」複雑 NW を形成するのかを十分に明らかにしたモデルは，筆者らの知る限り多くない．

この問いを解決するための有望なアプローチとして，ゲーム理論の分野における **NW 形成ゲーム**がある．ゲーム理論は，複数の行動主体の意思決定が相互に影響を与え合う状況を分析するための理論的枠組みである．NW 形成ゲームは，このゲーム理論の枠組みを用いて，利己的な多主体によるゲーム的な状況下で構築されるトポロジを明らかにする取り組みの中で提案されたものである．ゲーム理論に基づいて複雑 NW 形成をモデル化することは，多数の主体が「なぜ」自己組織的に複雑 NW を形成するのかという問いを，NW を構成する主体の個人合理性に落とし込むことで明らかにすることを意味している．このような立場からは将来的に，個人合理性を考慮した NW を設計するための手法の確立に繋がり，それは強力で現実的に実行可能な手法となることが期待される．

筆者らはこれまでに，ゲーム理論に基づいて複雑 NW の形成をモデル化し，その特性について分析してきた．本稿ではそれらの研究成果を概観し，今後の展望について議論する．

2　ネットワーク形成ゲーム

2.1　静学的モデル

NW 形成ゲーム (network formation game) は，Myerson によって提案 (Myerson 1976)[13] され，後に Jackson と Wolinsky によって戦略形ゲームの形で定式化 (Jackson and Wolinsky 1996)[10] された [注 3]．本稿では，筆者らが提案しているモデルとの対比のために，Jackson らのモデルを**「静学的」NW 形成ゲーム**と呼ぶ．

静学的 NW 形成ゲームは以下のように定式化される．なお本稿では簡単のため，ノード i と j を結ぶリンクを ij と記し，ある NW のトポロジ (グラフ理論におけるグラフと同義)$g \in G$ をリンクの集合で表す．本稿で扱う NW トポロジは全てリンクに向きを持たせない無向グラフである．

プレイヤー　それぞれのノードがプレイヤーを表す．

戦略　ノード i の戦略は，ブール変数の $n-1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{s_i} = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{i(i-1)}, s_{i(i+1)}, \dots s_{in}) \in \{0,1\}^{n-1}$ で表される．ここで $s_{ij} = 0$ のとき，ノード i がノード j とリンクを張ることを希望しないことを意味し，$s_{ij} = 1$ であれば希望することを意味する．

帰結　戦略の組 $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, \dots, \boldsymbol{s_n})$ に対して帰結として得られる NW トポロジ $g(\boldsymbol{s})$ は，$g(\boldsymbol{s}) = \{ij | s_{ij} = s_{ji} = 1\}$ となる．すなわち，すべてのノードペアで，ペアの双方が共に希望したときにリンクが形成される．

利得　NW トポロジ $g(\boldsymbol{s})$ におけるノード i の利得 $u_i(g(\boldsymbol{s})) : G \to \mathbb{R}$ として，本稿では以下の関数を用いる [注 4]．

$$u_i(g(\boldsymbol{s})) = \sum_{j \neq i} \delta^{d_{ij}} - \sum_{j \in \{j | ij \in g(s)\}} c_{ij} \quad (1)$$

ここで $0 < \delta < 1$ は減衰パラメータを，d_{ij} はノード i, j 間の最短経路長 (ただし i と j が到達可能でないときには $d_{ij} = \infty$) を，c_{ij} はノード i, j 間のコストパラメータを表す．

静学的 NW 形成ゲームにおける安定性については，通常の戦略形ゲームにおけるナッシュ均衡に代わって，以下によって定義される「対安定 [注 5](pairwise stability)」の概念が提案されている．

対安定性の定義の前にまず，表記を整理する．$ij \notin g$ である g に対しリンク ij を追加した NW トポロジを $g + ij$，同様に $ij \in g$ である g に対しリンク ij を削除した NW トポロジを $g - ij$ と表記すると，ある NW トポロジ g からリンク ij の有無を変化させたときのノード i の利得の変化量 $\Delta u_i^g(ij)$ は

$$\Delta u_i^g(ij) = \begin{cases} u_i(g - ij) - u_i(g), & \text{if} \quad ij \in g \\ u_i(g + ij) - u_i(g), & \text{if} \quad ij \notin g. \end{cases} \tag{2}$$

と表される．ある NW トポロジ g が対安定であるとは，

$$\forall ij \in g \text{ に対し } \Delta u_i^g(ij) \le 0, \Delta u_j^g(ij) \le 0 \tag{3}$$

かつ

$$\forall ij \notin g \text{ に対し } \Delta u_i^g(ij) > 0 \Rightarrow \Delta u_j^g(ij) < 0 \tag{4}$$

が成り立つことをいう．この対安定性は，既に存在するリンクに対しては，両端のノードのどちらもそのリンクを切断するインセンティブ (誘因) がないこと (式 (3))，またリンクが存在しないノードペアに対しては，少なくとも一方のノードにはリンクを形成するインセンティブがないことを表している (式 (4))．

ここで後の議論のために，**可能なリンク変動 (possible link change)** についても述べる．以下の条件が成り立つとき，リンク ij は可能なリンク変動であるという．

$ij \in g$ であれば

$$\Delta u_i^g(ij) > 0 \quad \text{または} \quad \Delta u_j^g(ij) > 0 \tag{5}$$

$ij \notin g$ であれば

$$\Delta u_i^g(ij) \ge 0 \quad \text{かつ} \quad \Delta u_j^g(ij) \ge 0, \\ \text{ただし} \Delta u_i^g(ij) = \Delta u_j^g(ij) = 0 \text{ を除く．} \tag{6}$$

すなわち，可能なリンク変動とは，両端のプレイヤーの少なくとも一方の利得を増加させるリンク除去，あるいは両端のプレイヤーの利得を共に増加させる (または一方の利得を増加させ，もう一方の利得を変化させない) ようなリンク追加のことをいう．あるトポロジが対安定であることは，全てのノードペアの間に可能なリンク変動が一つも存在しないことであると言い換えることができる．

戦略形ゲームの解概念にはナッシュ均衡が用いられることが多い．しかし静学的 NW 形成ゲームにナッシュ均衡 (とその精緻化) の概念を用いて分析をすると，リンクの形成にリンクの両端のプレイヤーの合意がなければならないという静学的 NW 形成ゲームの特殊性によって，無意味な均衡点が多くなってしまうという問題がある [注 6]．対安定性は，この特殊性を反映して提案された概念であるが，以下の 2 点について注意が必要である．一つは，ナッシュ均衡が戦略の変更に関する均衡概念であったのに対して，対安定性はリンクの有無の変更に関する安定性の概念であるという点，もう一つは，プレイヤーの戦略に確率的な混合戦略を許せば，必ずナッシュ均衡が存在することが保証されているのに対し，対安定解は存在しない場合があるという点である．

ここで，静学的 NW 形成ゲームに関する既存の解析的結果について 2 点紹介する．一つ目は，リンクコストが全て等しい場合 ($c_{ij} = c$) の，対安定解と効率解の関係に関する 2 つの定理である．

定理 2.1. リンクコストが全て等しい場合の接続モデルにおいて，効率解に関して以下が成り立つ．

(1) $c < \delta - \delta^2$ のとき，すべてのノードペアの間にリンクが存在する完全 NW が唯一の効率解である．

(2) $\delta - \delta^2 < c < \delta + \frac{n-2}{2}\delta^2$ のとき，全ノードによるスター型 NW が唯一の効率解である．

(3) $\delta + \frac{n-2}{2}\delta^2 < c$ のとき，1 つもリンクを持たない空の NW が唯一の効率解である．

定理 2.2. 利得関数を式 (1) とし，リンクコストが全て等しい場合の接続モデルにおいて，対安定解に関して以下が成り立つ．

(1) 対安定な NW が持つ非空の連結成分の数は高々 1 つである．
(2) $c < \delta - \delta^2$ のとき，唯一の対安定 NW は完全 NW である．
(3) $\delta - \delta^2 < c < \delta$ のとき，全ノードによるスター型 NW は対安定であるが，必ずしも唯一の対安定 NW とは限らない．
(4) $\delta < c$ のとき, 対安定な NW は空の NW か, もしくはすべてのノードが 2 本のリンクを持つ．

各定理の証明は，三上 (2006)[18] あるいは増山 (2013)[19] を参照されたい．以上の結果をまとめたものを図 1 に示す．最も注目すべきは領域③(すなわち $\delta < c < \delta + \frac{n-2}{2}\delta^2$ のとき) で，このときは対安定解と効率解は常に異なる．

この結果は，対安定解と効率解がどのような NW トポロジを取るかを，リンクコストと減衰パラメータの大きさの関係に関する各ケースについて解析的に示したもので，重要な結果である．一方で，この結果はリンクコストが全て等しい場合に限定したものであることに注意が必要である．そのため，定理に現れる NW トポロジも，対称かそれに近いものになっている．言うまでもなく，現実の NW では各ノードの間のリンクコストが等しくなるという保証はないであろう．

既存の解析的結果として二つ目に挙げるのは，Jackson and Rogers (2005)[8] によって成された，静学的 NW 形成ゲームと複雑 NW との関連性に関する結果である [注 7]．彼らはリンクコストに関して島モデルと呼ばれるモデルを扱った．島モデルでは，全てのノードが K 個の島に J ノードずつ割り当てられ，自分と同じ島のノードとの接続には小さなリンクコスト c が，自分とは異なる島のノードとの接続には大きなリンクコスト C が必要となる．また利得関数は切り捨てありの接続モデルで，切り捨てられない距離の上限を D とする．彼らはこの島モデルにおいて，$c < \delta - \delta^2, C < \delta + (J-1)\delta^2$ を満たすリンクコストでは，対安定なトポロジが以下の 3 つの性質を持つことを解析的に示した．(1) 島内ではすべてのノードが完全に接続される部分完全 NW となること．(2) 直径 (すべてのノードペアの最短経路長の最大値) および平均最短経路長は，$D + 1$ よりも小さくなること．(3) また特に $\delta - \delta^3 < C$ を満たすときには，各ノードのクラスタリング係数は $\frac{(J-1)(J-2)}{(JK)^2}$ よりも大きくなること．島モデルにおける対安定なトポロジの一例を図 2 に示す．

この結果により，切り捨てありの連結モデルにおいては，リンクコストに関する少しのバリエーションを許すことによって，あるパラメータセットにおいて短い平均最短経路長と高いクラスタリング係数をもつスモールワールド NW が対安定なトポロジとして現れることが示された．これは，現実の様々な場面で現れる複雑 NW の形成の仕組みが，NW 形成ゲームの枠組みで表現される可能性があることを示唆したものである．一方で，島モデルのリンクコストの設定はやや恣意的で，現実のリンクコストはもっと複雑な分布をしているであろうという点，複雑 NW のもう一方の性質であるスケールフリー性に関しては言及していない点を指摘しておく．

以上，静学的 NW 形成ゲームの結果について整理をした．では，大規模なノード数を持ち，不均一な分布を持つコストパラメータに対して，このモデルで予測される帰結はどういったものになるだろうか？現実に観測される，スケールフリー性やスモールワールド性を備えた NW は，このモデルから生成されるのだろうか？この問いに答えるには，静学的 NW 形成ゲームの枠組みでは十分ではない．具体的には，以下の 3 つの問題点が挙げられる．

1. 対安定解の探索が困難

対安定性の定義は「どのノードペアもそのトポロジを変動させるインセンティブを持たない」ということであるが，対安定となるトポロジを効率よく求めるアルゴリズムは未だ知られていない．またノード数が n 個のとき，そのノードが取り得るトポロジの総数は $2^{\binom{n}{2}}$ である．n が大きいときには，探索すべき空間は非常に大きくなり，解の探索は一般には難しい．

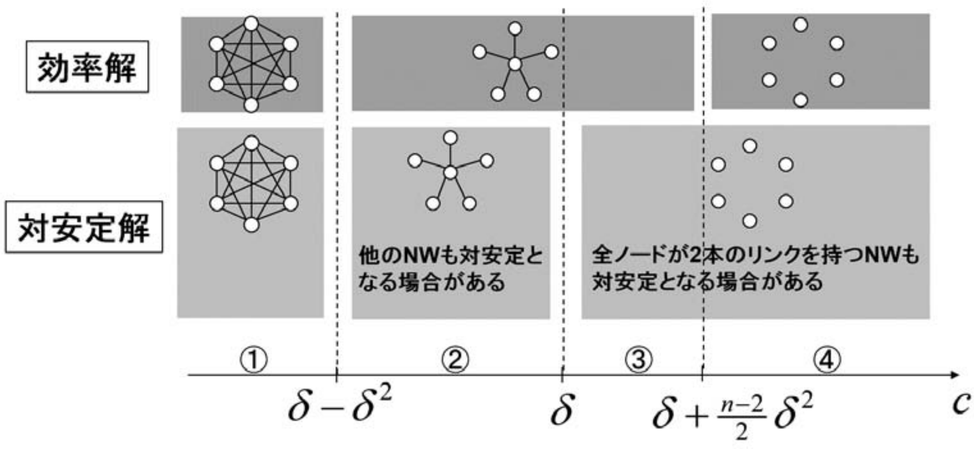


図 1: 効率解と対安定解の関係．三上 (2006)[18] と増山 (2013)[19] の記述を基に筆者らが作成．
リンクコスト c と減衰パラメータ δ の関係によって領域①〜④に分類され，それぞれの領域における効率解と対安定解を図示した．

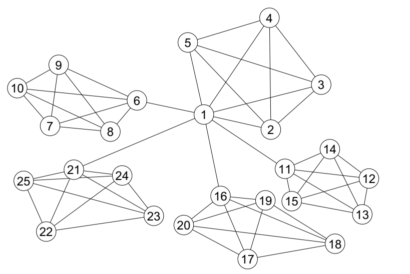


図 2: 島モデルにおける対安定なトポロジの例．Jackson による著書 (Jackson 2008)[7] の Figure 6.2 を基に筆者らが作成．
島内リンクのコスト $c < 0.04$，島外リンクのコスト $1 < C < 4.5$，減衰パラメータ $\delta = 0.95$ の場合である．島は全部で 5 つあり，各島内のノードは完全に接続され，島間は少ない数のリンクで接続されている．25 個のノードに対して平均経路長は 2.833，クラスタリング係数は 0.905 である．

2. **ゲームのプレイヤーに過大な能力を仮定している**
各プレイヤーが合理的な行動を取り，対安定解を導くためには，他のプレイヤーがどのような戦略をとるかを正確に判断するための情報を観測する必要がある (観測能力の問題)．さらに，取得した情報の下で，自身にとって最適な戦略を選び取る能力が必要である (最適化能力の問題)．静学的モデルの枠組みでは，プレイヤーがこれらの能力を持っていることを暗黙に仮定していることになる．ノード数が大きい NW では，これらの仮定の不自然さは特に顕著となる．複雑 NW の分析対象はある程度規模の大きな NW で，このような複雑 NW の形成を静学的モデルの枠組みだけでモデル化することは，非現実的と言わざるを得ない．

3. **対安定解同士の比較ができない**
静学的 NW 形成ゲームには一般に複数の対安定解が存在する．今井・田中は 6 ノードの NW について，あるパラメータにおいて対安定解の数がどのくらい現れるかについて全数調査を行っており，その結果の一例では取り得るトポロジの総数は 32,768($= 2^{\binom{6}{2}}$) 個あり，その中の対安定解は 100〜1,000 個程度存在した (今井・田中 2010)[16]．対安定性の定義からも分かるように，対安定性という枠組みだけでは，各対安定解の間の優劣を測ることはできない．これは，一般に戦略形ゲームにナッシュ均衡が多数存在し，その優劣を比較することが難しいという問題と同じ問題である．

次小節では，これらの問題点を踏まえた動学的モデルについて述べる．

2.2 動学的モデル

動学的 NW 形成ゲームモデルは，上記の問題を緩和し，また多くの NW が小規模な NW から大規模な NW に成長していったという点に注目して，Jackson and Watts の動学性の研究 (Jackson and Watts 2002)[9] を基に Imai and Tanaka によって提案された (Imai and Tanaka 2010)[4]．動学的 NW 形成ゲームモデルの基本的なアイデアは，以下の通りである．

- 各離散時間で静学的 NW 形成ゲームを実施し，各ノードの戦略を決定する．
- 各離散時間 t では，可能なリンク変動のうち 1 本のみが実際に変動し，次時刻 $t+1$ の NW トポロジが決定する．可能なリンク変動が存在しない場合，リンクは変動しない．
- 変動するリンクは，そのリンクを変動させることによってリンク両端のノードの利得を最も改善するリンクが選択される．より形式的には，可能なリンク変動の集合を L_{PLC} とすると，変動するリンク ij は
$$ij \in \operatorname*{argmax}_{ij \in L_{\mathrm{PLC}}} \Big(\max \big\{ \Delta u_i^g(ij),\, \Delta u_j^g(ij) \big\} \Big)$$
を満たす．このようなリンクが複数存在する場合は，何らかの決定論的な方法 (ノード ID が若い方を優先する，など) によって決定する．
- 各プレイヤー (=ノード) は，各時刻においてリンクが 1 本しか変動しないことを知っており，また近視眼的に戦略を決定するものとする．すなわち，次時刻の自身の利得のみを考え，最終的な NW トポロジにおける利得が最適かどうかを考えない．

動学的 NW 形成ゲームモデルでは，状態遷移過程が任意の初期状態から開始すると，毎時刻に 1 本ずつリンクが変動していく．初期状態が可能なリンク変動が存在しない NW トポロジに到達すると，その後その状態にずっと留まり続ける．これは力学系における不動点に相当する状態で，定義よりこの状態は対安定な NW トポロジであるから，これを**対安定解**と呼ぶ．任意の初期状態がいつでも対安定な NW トポロジに相当する状態に到達するわけではなく，力学系における**周期解**に到達することもある．リンクの変動はその両端のノードの意思決定によってのみ成されるため，そのリンク変動によって他のノードペアがまた別のリンク変動をもたらし，そのような連鎖が連続して元の状態に戻ることがある．周期解はそのような場合に現れる．周期の長さは最低でも 4 以上である．任意の初期状態が最終的に到達する状態は，対安定解と周期解の 2 種類に分かれる．状態空間のサイズは有限であり，周期の長さも有限となるため，無限の周期長を持つカオス解は存在しない．

以下では，静学的 NW 形成ゲームの問題点として挙げた 3 つの点に対して詳しく検討する．

1. **対安定解の探索が困難**
   動学的 NW 形成ゲームモデルは，(全てではないものの) ある 1 つの対安定解を求めるための方法となっている．ただし，求めた解が周期解である場合もある．
2. **ゲームのプレイヤーに過大な能力を仮定している**
   各プレイヤーは現在の NW トポロジとリンクが 1 本だけ異なる NW トポロジだけを考慮すれば良く，また自身が次時刻の結果に寄与できるのは自身と他のプレイヤーとのリンク変動だけなので，考慮すべきは $n-1$ 個のリンク変動だけである．各プレイヤーはこれらのそれぞれについて，自身の利得を増大させるかどうかを検討すれば良い．静学的 NW 形成ゲームでは，自身の戦略を決定するためには全ての他プレイヤーの戦略の組 ($2^{n(n-1)}$ 個のパターンがある) を検討しなければならなかったので，求められる能力は大幅に減っている．
3. **対安定解同士の比較ができない**
   動学的 NW 形成ゲームモデルにおいては，各対安定解に対して引き込み領域 (最終的にその対安定解に到達する状態の集合) が定まることから，この大きさや形状によって，各対安定解同士を比較することができる．詳しくは 4 節で述べる．

3 計算機シミュレーション

動学的 NW 形成ゲームモデルによって生成される NW トポロジの傾向を調査し，現実に観測される NW の特徴，特に複雑 NW の特徴が現れるかどうかを検証することで，複雑 NW 形成の説明モ

デルとしての妥当性を評価するために，計算機シミュレーションを行った．NW の統計的特徴量には，異なる規模の NW を正しく比較するための正規化が難しいものが多くある．そのため小規模の計算機シミュレーションだけでなく，より大規模なシミュレーションを行い，形成される NW トポロジの特徴量を評価することが必要である．本節では，その計算機シミュレーションの概要と結果について述べる．

3.1　シミュレーションの実行

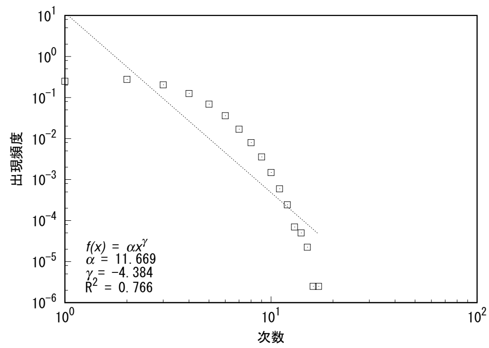
本モデルは，各プレイヤーが各時刻で利己的に戦略を決定することから，多数のプレイヤーによる大規模シミュレーションを行うためには，大量の計算能力が必要になる．具体的には，1 時刻先の NW トポロジの状態を計算するために必要な計算量のオーダーは (粗い見積もりではあるが)$O(n^5)$ となる．また，本モデルはいくつかのパラメータを持ち，異なるパラメータによるシミュレーションは異なる NW をもたらす．そのために，本モデルが生成する NW の特徴を評価するためには，様々なパラメータセットによる網羅的なシミュレーションの実行が必要であるが，膨大な数のシミュレーションの実行は，シミュレーションの実行と結果の管理を煩雑にするという課題をもたらす．

筆者らは本モデルの 2000 ノードのシミュレーションを実行するに当たり，これらの課題に対応するために，以下の 3 つの対策を行った．まず第一に，シミュレーションプログラムの並列化を行い，大規模並列計算機で実行することで，計算時間の短縮を図った．本モデルでは，個々のプレイヤーの戦略決定は分散的に行うことができる．理想的な最大並列数は $O(n^3)$ であるため，並列化技術が効果的である．今回のシミュレーションには，北海道大学情報基盤センターのスーパーコンピュータ HITACHI SR16000/M1 を用いた．また第二に，グラフ探索の計算を最適化し，シミュレーションの計算量の削減を図った．事前の調査により，本モデルのシミュレーションプログラムにおいて費やされる計算時間のほとんどは，利得関数の算出のための最短路探索によって占められることが確認された (今井・田中 2013)[17]．そこで，シミュレーションプログラムの最短路探索の部分にグラフ探索ライブラリ「LEMON」(Dezső et al. 2011)[3] を採用して，効率的なグラフ探索により利得関数算出のための計算量の削減を図った．第三に，大規模シミュレーション群管理ソフトウェア OACIS(Murase et al. 2014)[12] を採用し，シミュレーション実行と結果の管理の効率化を図った．OACIS は，理化学研究所計算科学研究機構で開発されているソフトウェアで，社会シミュレーションのように多くのパラメータを持つモデルにおいて巨大なパラメータ空間の探索を行うために，大規模なシミュレーションの実行と結果の管理を行うためのものである．

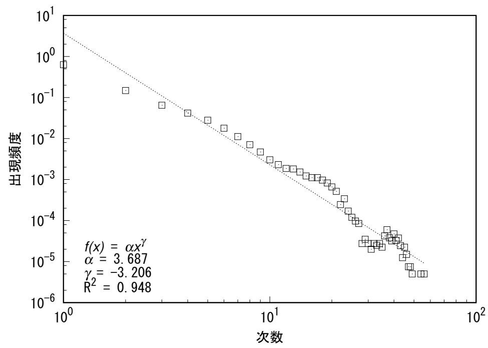
以下の小節では，これらの対策を採用して行ったシミュレーションの結果の一部を紹介する．

3.2　結果と考察

2000 ノードシミュレーションの結果の一部を，図 3 に示す．(a) および (c) の左側が，後述するトランスファーを導入しない基本モデルについての結果である．(a) の次数分布から分かるように，スケールフリー性の特徴であるベキ分布よりも，ランダムグラフの次数分布の特徴であるポアソン分布に近い．ここでは C=140 の例のみを示しているが，C の値を変化させてみても，この傾向は変わらなかった．この原因として，(c) の最大次数の値 (11.86) に示されているように，大きな規模のハブが形成されにくくなっていることが挙げられる．この原因を，ベキ則に従う次数分布を持つ BA モデルと対比することで述べる．BA モデルでは，新規参入ノードが既存のノードにリンクを張る確率は，そのノードの次数に比例する．したがって，一度大きくなったハブノードは，他のノードに比べて新規リンクを獲得するのに有利な状況となり，結果としてハブノードはますます大規模なハブとなって成長していき，次数分布はベキ則にしたがうようになる．本モデルでは，他のノードが一度大きくなったハブノードに対してリンクを張るメリットは，ハブノードに接続することで多数のノードに少ない距離で接続できるようになるため，ハブノードの規模に応じて大きくなる．この点では BA モデルと同じである．しかし本モデルでは，リンクの形成に際して両端のノードの合意が必要であった．つまり，双方にとって利得をもたらすような潜在リンクに対してのみ，実際のリンク形成が成立する．他のノードから見ると，ハブが成長するにつれて，ハブノードにリンクを張るメリットはどんどん増加していく一



(a) 次数分布 (トランスファーなし)



(b) 次数分布 (トランスファーあり)

NW 特徴量	トランスファーなし	トランスファーあり
最大連結成分のサイズ	1979.86	1940.15
平均次数	2.72	1.99
最大次数	11.86	38.04
クラスタリング係数	0.00	2.26×10^{-7}
平均最短経路長	7.49	5.38

(c) 各 NW 特徴量

図 3: 動学的 NW 形成ゲームモデルがもたらす NW トポロジの特徴.
ノード数を 2000，各リンクコスト c_{ij} を $(0, C]$ の範囲の一様分布にしたがう乱数とし，100 組のリンクコストセットについてシミュレーションを行い，現れる NW 特徴量の平均値を示した．(a) および (b) は次数分布で，横軸を次数，縦軸を出現頻度とする両対数グラフである．点線で示されているフィッティング関数は，$f(x) = \alpha x^{\gamma}$ の α と γ を推定することによって求められたもの．(a) トランスファーなし ($\delta = 0.99, C = 140$) の場合．フィッティング関数は $\alpha = 11.669, \gamma = -4.384$，決定係数 $R^2 = 0.766$. (b) トランスファーあり ($\delta = 0.99, C = 240$) の場合．フィッティング関数は $\alpha = 3.687, \gamma = -3.206$，決定係数 $R^2 = 0.948$. (c) それぞれの場合の各 NW 特徴量の平均.

方で，ハブノードにとっては，次数の少ないノードにわざわざリンクを張るメリットは変わらないために，リンク形成の合意が成立せず，結果としてハブノードの次数は極端には大きくならない．これが，動学的 NW 形成ゲームモデルの基本モデルにおいて，巨大なハブが形成されない理由である．

では, ゲーム理論を基にした動学的 NW 形成ゲームモデルでは，スケールフリー NW は形成されないのだろうか．この問いに答えるために，ここでは本モデルにトランスファーの概念を導入したものを考える．トランスファーとはゲームのプレイヤー間で行われる財の交換のことである．財のトランスファーの導入によって，取引に参加する全てのプレイヤーの利得を増加させるような合意を取り付けることができるようになる場合がある．本モデルにおけるトランスファーとは，リンクの変化に際し，利得を増加させるプレイヤーから利得を減少させるプレイヤーにその減少分を補填させることとする．この仕組みを導入することによって，他のノードがハブとのリンクを形成することによって十分な (ハブに対する補填分を差し引いてもまだ利得の増加をもたらすような) 利得の増加をもたらすような場合，ハブに対してその利得の減少を補填することができ，結果として新たな (特にハブに関係する) リンク形成を促進させることができる．

トランスファーつきモデルのシミュレーション結

果を，図 3 の (b) および (c) の右側に示す．(b) を見ると，トランスファーなしのときの次数分布と比べて，ベキ分布に近くなっていることが分かる．C の値を変化させてみると，全ての C の値でベキ分布となるわけではないようだが，それでもトランスファーなしの場合と比較すると，大きな規模のハブが形成されていることが確認できた．すなわち，トランスファーつきモデルが生成する NW トポロジは，**パラメータの値によってはスケールフリー性を持つ NW を生成しうる**ことが確認できた．その他の NW 特徴量について見てみると，クラスタリング係数はトランスファーありなしに関わらずかなり小さく，ほぼ 0 である．また平均最短経路長は，トランスファーありなしに関わらず，2000 ノードという NW 規模に対しかなり小さな値となっている．すなわち，本モデルが生成する NW トポロジは，**トランスファーあり・なし共に，スモールワールド性は持たない**ことが確認できた．

4　ダイナミクス解析

本節では，動学的 NW 形成ゲームモデルの動学的特性と，その応用について述べる．

4.1　動学的 NW 形成ゲームモデルのダイナミクスの特徴

動学的 NW 形成ゲームモデルの過程は，離散空間上の離散時間の決定論的な状態遷移である．図 4 に，動学的 NW 形成ゲームモデルの状態遷移の様子を示す．この例では，ノード数は 3，減衰パラメータ $\delta = 0.9$，コストパラメータは $c_{ab} = c_{ba} = 0.3, c_{bc} = c_{cb} = 0.1, c_{ca} = c_{ac} = 0.6$ である．図 4(a) は，動学的 NW 形成ゲームモデルで状態が遷移する状態空間の全体である．3 ノードで構成できるトポロジ (=状態) は全部で $8(= 2^{\binom{3}{2}})$ つあり，各状態 $g_0, \ldots, g_7$ は，その状態とリンクの有無が 1 本だけ異なる状態と隣接関係にあり，破線で結ばれている．状態の内部にはノード a, b, c の接続関係が図示されていて，各ノードの内部にはその利得の値が記されている．例えば，状態 g_6 では，ノード a と b，a と c の間にリンクが存在し，ノード a, b, c の利得はそれぞれ 0.9，1.41，1.11 である．

ある状態は各時刻に，隣接状態のうちの 1 つに遷移する．図 4(b) に状態遷移の例を示す．既に述べたように，動学的 NW 形成ゲームモデルにおける定常状態には，力学系における点アトラクタに対応する対安定解だけではなく，1 よりも大きい周期を持つアトラクタに対応する周期解がある．この例では，太い矢印に沿って状態遷移が行われ，任意の状態は最終的に g_3，g_5，g_6 のいずれかに到達し，周期解は存在しない．

それぞれの解は，最終的にその解へ到達する状態の集合を持ち，それを引き込み領域と呼ぶ．状態空間全体は，各解に対応する引き込み領域に分割される．図 4(c) に，状態空間の引き込み領域による分割の例を示す．この例では，対安定解 g_3 の引き込み領域は $\{g_2, g_3\}$，g_5 の引き込み領域は $\{g_0, g_1, g_4, g_5, g_7\}$，$g_6$ の引き込み領域は $\{g_6\}$ である．

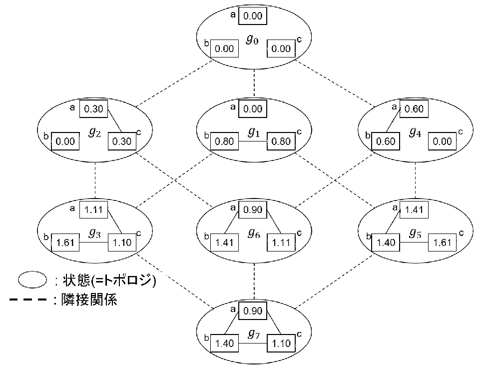
図 5 は，動学的 NW 形成ゲームモデルにおける状態空間分割の様子を，別のノード数 4 の例で示したものである．この図に示すように，動学的 NW 形成ゲームモデルが形作る状態空間は，パラメータによって複雑で多様な分割のされ方を示す．

4.2　ダイナミクス解析の応用：解の非効率性の評価

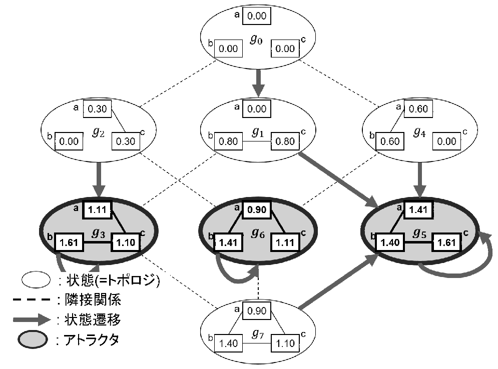
次に，動学的 NW 形成ゲームモデルの動学的特性の応用として，対安定解の非効率性を引き込み領域のサイズで評価した結果を紹介する．まず最初にゲームによる解の非効率性の評価のための既存の方法を紹介し，次にそれを基にした本モデルのための評価指標について述べ，最後に実例によって評価する．

一般に，多数の意思決定主体が利己的・分散的に振る舞うことによってもたらされる状態は，単独のデザイナーが中央集権的に効率を最適化した結果に比べて，非効率なものとなる (河瀬･牧野 2015)[15]．この非効率性を定量的に評価するために，**無秩序の代償 (Price of Anarchy，以下 PoA)**，**安定性の代償 (Price of Statiblity，以下 PoS)** の 2 つの指標が知られている [注 8]．PoA とは，システムがもたらす解の社会的効率性の**最悪値**と，社会的効率性を最大化する効率解の社会的効率性の値を比べたもので，以下の式で与えられる．

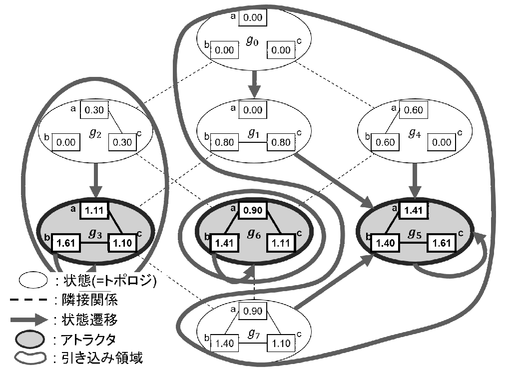
$$(\mathrm{PoA}) = \frac{f(\hat{s})}{\min_i f(s_i)} \tag{7}$$



(a)



(b)



(c)

図 4: 動学的 NW 形成ゲームモデルにおける状態遷移の様子．著者らの一部による文献 (Imai and Tanaka 2013)[6] の Fig.2 を修正して作成．(a) 3 ノードのとき状態空間のサイズは 8．リンクの有無が 1 本だけ異なる隣接状態同士が破線で結ばれている．(b) 各状態は毎時刻に，ノードの利得を最大に増加させる隣接状態へ決定論的に遷移する．(c) 状態空間全体は，各対安定解に対応する引き込み領域に分割される．

ここで，$s_i \in \mathbf{s}$ はシステムがもたらす解を，関数 $f(s)$ は解の社会的効率性 [注 9] を，$\hat{s}$ は効率解を表す．同様に PoS は，システムがもたらす解の社会的効率性の**最良値**と，社会的効率性を最大化する効率解の社会的効率性の値を比べたもので，以下の式で与えられる．

$$(\mathrm{PoS}) = \frac{f(\hat{s})}{\max_i f(s_i)} \qquad (8)$$

定義から明らかなように，PoA も PoS も 1 以上の値を取る．PoA が 1 であることは，システムが必ず効率解をもたらすことを表し，PoS が 1 であることは，システムがもたらす解のいずれかが効率解となることを表す．

PoA も PoS も，システムがもたらす解が最適効率解に対してどれくらい非効率であるかの評価を，多数の解の中の最悪値・最良値を使って評価するものであった．システムとしての非効率性を評価するためには，このやり方はやや極端なものであり，「平均的な」あるいは「典型的な」非効率性を測りたい場合もあるが，これは一般には難しい．なぜなら，非協力ゲームにおける代表的な解概念であるナッシュ均衡解は一般に複数存在し，またそれらの間は無差別的で，解が多数あった場合にそれらの解の間に優劣を付けることができない．そのために「起こりやすい」ナッシュ均衡であるとか，「典型的な」ナッシュ均衡を見いだすことは難しい．ゲームのプレイヤーの分散的・利己的な振る舞いがもたらすシステムの社会的非効率性を評価するための方法として，多数の解の中の最悪値と最良値を用いたものが使われてきたのはそのためであり，これは解概念の本質的な特性に起因するものである．

動学的 NW 形成ゲームモデルにおける解の効率性を評価するに当たっては，基本的にこれらの考え方を踏襲する．ただし既に述べたように，本モデルでは各解はその解に対応する引き込み領域を持っており，そのサイズや形状によって各解の重要性を評価することができる．そこで Imai and Tanaka は，各解の PoA 値を引き込み領域の大きさによって重み付けした重み付き平均値を取ることによっ

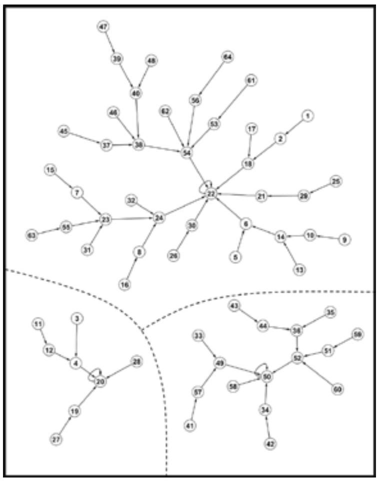


図 5: 動学的 NW 形成ゲームモデルによる状態空間の分割の様子.
ノード数 $n = 4, \delta = 0.9$，$R = 2.0$．全部で 64 状態あり，状態番号 20，22，50 のそれぞれの対安定解に到達する 3 つの引き込み領域に分割される.

て，システムの社会的非効率性の指標とした (Imai and Tanaka 2011, 2013)[5][6]．本モデルは決定論的な状態遷移過程であるから，初期状態が決まれば，最終的な解が定まる．そして解が定まれば，その解に対する PoA の値を算出することができる．また各解の生起確率は，初期トポロジが一様分布にしたがってランダムに与えられた場合には，解の引き込み領域の大きさに比例した値となる．そのため，引き込み領域のサイズによる重み付き PoA は，PoA の期待値として捉えることができ，**期待 PoA** と呼ばれる．形式的には，状態空間全体のサイズを $|S|$，解 s_i の引き込み領域のサイズを $|A_i|$ とすると，

$$(\text{期待 PoA}) = \frac{f(\hat{s})}{\sum_i \frac{|A_i|}{|S|} f(s_i)} \tag{9}$$

となる．この期待 PoA は，最悪/最良のケースの解析であった PoA/PoS に比べて，「平均的な」挙動を評価することになる．また定義より明らかなように，PoS $\leq$ 期待 PoA $\leq$ PoA であり，等号は PoS $=$ 期待 PoA $=$ PoA のときにのみ成立する．

表 1 は，期待 PoA と既存の 2 指標の違いを実例によって示したものである．この例では，8 ノードの小規模 NW について全ての対安定解とその引き込み領域を求め，社会的効率性をノードの利得の総和としたときの PoA，PoS，期待 PoA の値を求めた．各解の引き込み領域の大きさにはかなり大きな差が見られることが分かる．

5　今後に向けて

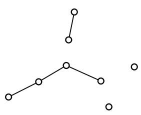
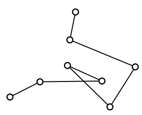
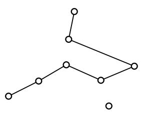
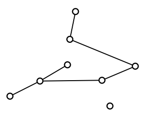
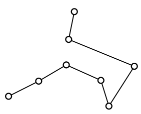
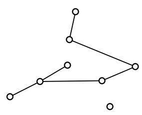
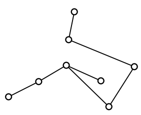
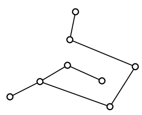
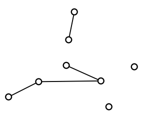
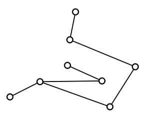
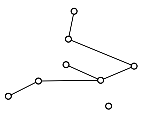
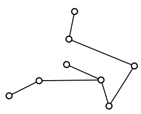
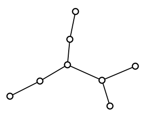
ここまで，ゲーム理論に基づいた複雑 NW 形成のモデル化について，筆者らの研究成果を中心に述べた．本節では，今後取り組むべき課題について述べる．

まず第一に，**様々な条件における創発 NW の調査**が挙げられる．3 節で示したように，動学的 NW 形成ゲームモデルでは，あるパラメータ設定でスケールフリー性を備えた NW トポロジが発生することが示された．しかし，このような性質がどれだけ普遍的であるか，複雑 NW が生じないパラメータ設定ではどのような NW トポロジが生じるのかについては，未だ十分には明らかになっていない．このようなことを明らかにしていくことで，動学的 NW 形成ゲームモデルが持つ特性がより明確になっていくだろう．

第二に，**実際の社会的・技術的 NW の詳細な特性の比較とモデルの精緻化**が挙げられる．既に述べたように，ゲーム理論に基づいたモデル化が有望な技術的・社会的 NW は多く存在する．例えば，インターネットにおける AS(Autonomous-System) 間 NW や，ファイル交換のための非構造型 P2P(Peer to Peer)NW，あるいは Facebook の友人間 NW などである．これらの NW のトポロジと動学的 NW 形成ゲームモデルがもたらす NW トポロジの詳細な特性の比較を行い，モデルがどの程度現象を表現できているのかを明らかにし，必要であればモデルの精緻化を行っていくことも必要であろう．それは単に利得関数を適切に設定するだけかもしれないし，もっとモデルの根幹の部分を変えていく必要があるかもしれない．

モデルの精緻化に関する一つの例として，プレイヤーの限定合理性 (bounded rationality) および非合理性 (irrationality) のモデル化というアプローチが挙げられる．本稿で取り扱ったプレイヤーは，全て完全合理的であることを仮定している．すなわち，現在の状況は全て観測可能であるし，取得した状況の下で自身にとって最適な戦略をいつでも選び

表 1: 動学的 NW 形成ゲームモデルにおける期待 PoA と既存の 2 指標の違いについて示した 8 ノードの実例．著者らの一部による文献 (Imai and Tanaka 2013)[6] の Table.1 を修正して作成．
この例では全部で 12 個の対安定解があり，周期解は存在しない．それぞれの解において，NW トポロジ，利得の総和で与えられる社会的効率性，引き込み領域のサイズが記されている．対安定解のうち，社会的効率性の最悪値と最良値はそれぞれ s_5 のときの 5.81，s_3 のときの 27.11 である．効率解 $\hat{s}$ は対安定解には含まれておらず，表の最後の部分に記載されており，効率解の社会的効率性の値は 30.22．この例では，PoA の値は $30.22/5.81 \approx 5.20$，PoS の値は $30.22/27.11 \approx 1.11$，期待 PoA の値は約 2.03 となる．

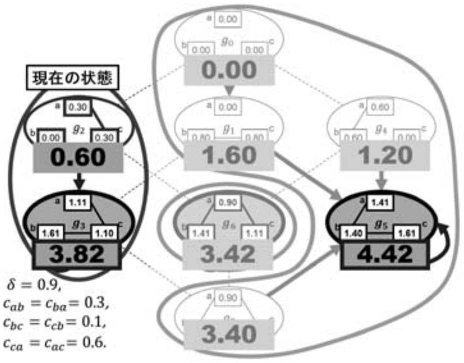
解	NW トポロジ	社会的効率性	引き込み領域のサイズ	解	NW トポロジ	社会的効率性	引き込み領域のサイズ
s_1		7.83	106,966,207	s_8		21.21	177,032
s_2		21.82	69,057,682	s_9		25.41	1,522,866
s_3		27.11	6,745,020	s_{10}		20.01	14,864,197
s_4		24.29	841,521	s_{11}		25.18	8,107,411
s_5		5.81	23,915,112	s_{12}		23.16	735,093
s_6		20.63	31,149,583				
s_7		26.15	4,353,732	$\hat{s}$		30.22	–

取ることができる．この仮定は不自然で，現実に意思決定をするプレイヤーは通常，観測能力にも最適化能力にも限界がある (限定合理性)．2 節で述べたように，動学的モデルにおいてプレイヤーに課される合理性は，静学的モデルのそれに比べ軽減されている．これは限定合理性のモデリングの一つの試みではであるが，これが「適切な」モデリングであるかどうかは，議論の余地があるだろう．現実の NW をモデル化する際には，モデル化の対象の NW の成り立ちなどを踏まえて，より適切な限定合理性のモデル化を選択する方が良い場合があるだろう [注 10]．また，そもそも人間は常に合理的に振舞うとは限らない (すなわち非合理的である) という指摘があり (カーネマン 2012)[2]，プレイヤーの非合理性をモデルに組み入れることが必要かもしれない．実際の NW をモデル化する際には，このような限定合理的・非合理的な意思決定の観点から，モデルを精緻化していくことも必要であろう．またこれらのモデルを現実の NW と比較し検証をする際には，比較対象の NW と同規模の大規模 NW シミュレーションが必須となる．

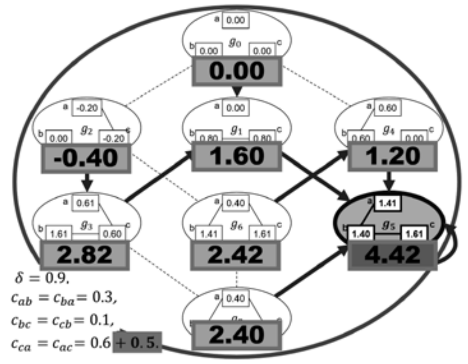
最後に，**メカニズムデザインなどのアプローチからのトポロジ最適化**が挙げられる．現実に見られる NW トポロジが持つ特性，例えばスケールフリー性などは，必ずしも「望ましい」特性とは言えない．例えば通信 NW のトポロジがスケールフリーであったときには，高い通信の効率性を持つ反面，ハブに対する選択的攻撃に対して脆弱であるといった不都合な特性を持つため，必ずしも「望ましい」とは言えないかもしれない．何を持って「望ましい」とするかは，誰にとっての「望ましさ」なのかといった難しい問題を含むが，少なくとも現状をパレート改善 [注 11] する NW トポロジは，現状の NW トポロジよりも「望ましい」として良いであろう．このように，何らかの形で「望ましさ」が定義されたとき，多数の利己的な主体によって構成される NW を「望ましい」ものにしていくには，どうすればいいのだろうか．

ゲーム理論では，メカニズムデザインと呼ばれる研究分野がある．これは，ゲームの結果を社会的に望ましいものに制御するための方法論であり，既にオークションの設計などで成果を挙げている．近年では，計算科学者とゲーム理論学者らの尽力によって，多人数ゲームにおけるプレイヤーの限定合理性や情報の非対称性等を扱った計算論的メカニズムデザインという分野も勃興しつつある．これらの成果を動学的 NW 形成ゲームモデルによる NW 形成の問題に援用することによって，将来的に NW トポロジを最適化するための方法論が確立されることが期待できる．

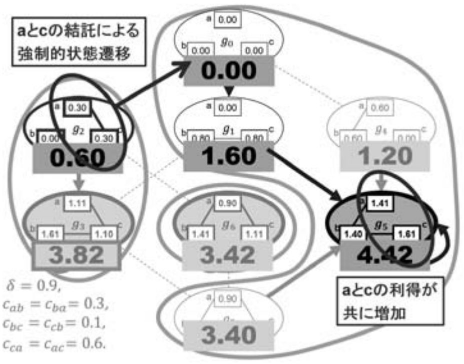
これらを背景として，ここでは図 4 の例を使って「望ましい」NW トポロジ形成を促す 2 つのアプローチを紹介する (図 6)．このケースでは，図 6(a) に示すように，現在の状態は g_2 であり，このまま最終的に到達する状態は g_3(利得の総和は 3.82) となるが，より「望ましい」状態は g_5(同 4.42) である．これを改善するための一つ目の方法は，**インセンティブ設計**のアプローチである．これはいわゆる「アメとムチ」であり，社会的に望ましくない帰結をもたらす行動に対して税金を課し，社会的に望ましい帰結をもたらす行動に対して補助金を与えるといったアプローチである．図 6(b) では，a と c の間のリンクのコスト $c_{ca} = c_{ac}$ のコストを値上げして ac 間のリンクを形成しにくくすることによって，望ましい帰結 g_5 へ到達するようにしている．インセンティブ設計は，ゲームの設計をし直すトップダウン型のアプローチであり，非常に強力であるが，その実行主体は，政府やサービスの運営者といった公共的規制をかけることのできる組織に限られる．また，既に多数のステークホルダーがいる中で，ゲームのルールを途中から変更することはあまり現実的ではないとも言える．一方，図 6(c) に示す二つ目の方法では，a と c が結託して強制的に g_0 へ遷移することによって，最終的に到達する状態を g_5 に変更する．これは，結託者 a と c にとっては一時的に利得を減少させる行動であるが，何もしなかったときの最終的な状態 g_3 と比べて，変更後の g_5 の状態は結託に参加した a と c のどちらにとっても利得を改善させるものとなる．この**結託したプレイヤーの導入**は，プレイヤーの個人合理性を保ちながら社会的効率化を図ることができるボトムアップ型のアプローチであり，状態空間が多数に分割されることを利用したもので，一部のプレイヤーにのみ介入すればいいという意味では，実行可能性が高い．しかし結託する一部のプレイヤーの合理性と社会的効率性が一致する場合にのみ有効であると



(a) 「望ましい」NW トポロジに到達できないケース



(b) インセンティブ設計 (補助金と税金)



(c) 一部のプレイヤーの結託による状態の飛躍的遷移

図 6: 「望ましい」NW トポロジ形成を促す 2 つのアプローチ．
(a) 現在の状態は g_2 であり，このまま最終的に到達する状態は g_3(利得の総和は 3.82) であるが，より「望ましい」状態は g_5(同 4.42)．(b) a と c の間のリンクコストを 0.5 上げると，g_2 から g_5 へ到達するようになる．(c) a と c が結託して強制的に g_0 へ遷移すると，g_5 へ到達できる．これは a と c のどちらにとっても利得を改善させる．

いう意味で，実行可能な場面が多くないという面を持つ．

以上，NW 形成の帰結をより「望ましい」ものにするためのアプローチについて述べたが，これらの議論はまだ非常に素朴で，荒削りである．今後，これらがゲーム理論およびミクロ経済学の知見を生かして整理・洗練され，さらに発展されることが期待される．

6　おわりに

ゲーム論的 NW 形成の研究を進めるには，色々な困難がつきまとう．第一に，ゲーム論的 NW 形成は，学術分野的には複雑 NW 科学・ゲーム理論・計算科学の 3 つの学術分野の交差点に位置し，学際的であるという特徴を持つ．そのため，特に卒業論文に取り組むような学生にとっては，研究を始めるまでに学ぶべきことが多く，研究分野のハードルが高くなってしまっている．第二に，そもそもゲーム論的 NW 形成を研究している研究者は，特に国内にはあまり多くないようである．その貴重な研究者もミクロ経済学・ゲーム理論をバックグラウンドとした研究者が多く，そのため研究対象が比較的小規模のものが多くなりがちで，筆者らが指向する大規模複雑 NW との関係性について取り組んでいる研究者を見つけることは，かなり困難になっている．そのため，分野の研究者が集まって議論をする場が多く取れず，研究発表も他の専門の研究会等へ赴き，他流試合をするしかないのが現状のようである．

このような困難がある一方で，ゲーム論的 NW 形成の研究には大きな魅力がある．本稿で述べてきたように，ゲーム論的 NW 形成の枠組みは，多主体によって構成される NW 形成の仕組みを，NW 構成に参加する主体の個人合理性に基づいて明らかにしようとする取り組みである．このような立場からの研究は，残念ながら未だ大きな注目を集めては

いないものの，特に多主体による NW 形成を望ましい方向へ制御しようとしたときには，このような視点からの研究は本質的で，避けて通れないものとなろう．

また，分野横断的・学際的ということは，各分野の研究者が自身の分野の知見を利用して，研究を発展させることができるということでもある．各分野における知見を異なる分野に適応してみることは知見の一般化を試みるということであり，適用先の分野の発展に貢献するのみならず，元の分野を相対的に捉え直すきっかけともなる．これらのことは，研究の面白みの再発見ともなろう．

現在までのところ，ゲーム論的 NW 形成の枠組みで大規模複雑 NW 形成をモデル化する取り組みは，5 節に挙げたように，まだまだ未踏の部分が多く，明らかになってきている知見についても，まだ雑多なものが多く見られる．言うなれば，荒野の暗闇にいくつかの灯火が点在し始めた段階である．これらを整理し，洗練された知見にまとめ上げていくことは，暗闇に散在する灯火を繋げて明るい街道を作ると言うことであり，大いに意義深い仕事となるだろう．また社会を広く見渡せば，多数の主体によって自己組織的に構成された NW は数多く見られる．背景が大きく異なるこれらの NW を貫く知見を得ることができるとすれば，それは知的好奇心を満たすという意味で研究としての大きな魅力であり，それらの知見はまた，社会的にも発展が期待される重要な技術となっていくだろう．

このように筆者らは，ゲーム論的 NW 形成の研究を重要で，面白く，将来的に大いに発展する余地のある研究分野であると考えている．本稿の読者諸兄姉に，ゲーム論的 NW 形成について興味を持ち，研究分野の発展に尽力していただける方が現れることを期待したい．本稿がそのきっかけとなってくれれば，筆者らにとって大きな喜びである．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 26870856 および 30236567 の助成を受けたものである．また本研究の一部は HPCI システム利用研究課題の成果によるものであり，北海道大学情報基盤センターの計算資源を利用したものである（課題番号:hp140070）．

【注】

[注 1] 次数分布がベキ分布に従うことで特徴づけられる．

[注 2] ノード数に対し小さい平均最短経路長と，大きなクラスタリング係数によって特徴づけられる．

[注 3] NW 形成ゲームには，本稿で取り上げる Jackson と Wolinsky の双方向モデルのほかに，Bala と Goyal が提案した一方向モデル (Bala and Goyal 2000)[1] がある．Jackson と Wolinsky のモデルではリンクの形成に両端のプレイヤーの合意が必要であるのに対し，Bala と Goyal のモデルでは片方のプレイヤーの提案のみでリンクが形成されるという違いがある．後者は解の概念としてナッシュ均衡が使えることから，こちらのモデルの分析も盛んに行われている．

[注 4] この効用関数は distance-based utility と呼ばれ，この効用関数を用いた静学的 NW 形成ゲームは連結モデル (connections model) と呼ばれる．なお，一定以上離れた距離にあるノードからの利得を無視するモデルは切り捨てありの連結モデル (truncated connections model) と呼ばれる．

[注 5] ペアワイズ安定，ペアに関して安定とも呼ばれる．

[注 6] 詳しくは Jackson による著書 (Jackson 2008)[7] の 11.1 節を参照.

[注 7] Jackson による著書 (Jackson 2008)[7] の 6.2 節にも解説がある．

[注 8] PoA は元々，計算機科学の文脈で分散型処理の結果の集中型処理の結果に対する効率性を示すために 1999 年に Koutsoupias and Papadimitriou によって提案された (Koutsoupias and Papadimitriou 1999)[11] ものであるが，現在ではゲームの帰結がもたらす非効率性としても広く知られている．

[注 9] ゲームにおける社会的効率性を測る関数としては，プレイヤーの利得の合計や最大値などが用いられることが多い．

[注 10] しかしながら，一般に「適切な」限定合理性をモデリングする試みは，多くの研究者らによる挑戦にも関わらず，まだ正しい方向を見いだせていないようであり (Rubinstein 2008)[14]，難しい問題である．

[注 11] 誰の利得を低下させることなく，少なくとも 1 人の利得を向上させることができるような状態変更のこと．

【引用文献】

[1] Bala, V. and Goyal, S., “A Noncooperative Model of Network Formation,” Econometrica, 68(5), pp. 1181–1229 (2000).

[2] カーネマン, D.,『ファスト&スロー 上: あなたの意思はどのように決まるか?』, 村井章子訳, 早川書房 (2012).

[3] Dezső, B., Jüttner, A., and Kovács, P., “LEMON – an Open Source C++ Graph Template Library,” Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 264(5), pp. 23 – 45 (2011).

[4] Imai, T. and Tanaka, A., “A Game Theoretic Model for AS Topology Formation with the Scale-Free Property,” IEICE Transactions on Information and Systems, E93.D(11), pp. 3051–3058 (2010).

[5] Imai, T. and Tanaka, A., “Weighted Price of Anarchy for the Multi-Agent based Dynamic Network Formation Game,” in Proceedings of the 2nd International Joint Agent Workshop & Symposium (iJAWS2011), 2011–18 (2011).

[6] Imai, T. and Tanaka, A., “Expected Price of Anarchy for the Dynamic Network Formation Game Model,” Journal of Information Processing, 21(1), pp. 2-8 (2013).

[7] Jackson, M. O., *Social and Economic Networks*, Princeton University Press: Princeton University Press (2008).

[8] Jackson, M. O. and Rogers, B. W., “The economics of small worlds,” Journal of the European Economic Association, 3(2), pp. 617–627 (2005).

[9] Jackson, M. O. and Watts, A., “The Evolution of Social and Economic Networks,” Journal of Economic Theory, 106(2), pp. 265–295 (2002).

[10] Jackson, M. O. and Wolinsky, A., “A Strategic Model of Social and Economic Networks,” Journal of Economic Theory, 71(1), pp. 44–74 (1996).

[11] Koutsoupias, E. and Papadimitriou, C., “Worst-case equilibria,” in Proceedings of the 16th annual conference on Theoretical aspects of computer science, STACS’99, pp. 404–413: Springer-Verlag (1999).

[12] Murase, Y., Uchitane, T., and Ito, N., “A Tool for Parameter-space Explorations,” Physics Procedia, 57, pp. 73 – 76 (2014).

[13] Myerson, R. B., “Graphs and Cooperation in Games,” Discussion Papers 246, Northwestern University, Center for Mathematical Studies in Economics and Management Science (1976).

[14] Rubinstein, A.,『限定合理性のモデリング』, 兼田敏之・徳永健一訳, 共立出版 (2008).

[15] 河瀬康志・牧野和久,「無秩序の代償と安定性の代償 (特集 はじめようゲーム理論)」,『オペレーションズ・リサーチ』, 60(6), pp. 337–342 (2015).

[16] 今井哲郎・田中敦,「スケールフリー性を持つ AS トポロジ形成のためのゲーム理論的モデルの提案とその形成トポロジの調査」,『第 29 回日本シミュレーション学会大会発表論文集』, pp. 451–454 (2010).

[17] 今井哲郎・田中敦,「利己的・分散的な多主体による複雑ネットワーク形成モデルの並列計算技術による大規模化へ向けた評価」,『第 10 回ネットワーク生態学シンポジウム予稿集』, P26 (2013).

[18] 三上和彦,「戦略的ネットワーク形成」, 細江守紀・村田省三・西原宏 (編)『ゲームと情報の経済学』, 勁草書房, 第 13 章, pp. 297–324 (2006).

[19] 増山幸一,「ネットワークゲームと経済ネットワークの社会的効率性」, 産業経済研究所 Discussion Paper, No. 13–04 (2013).