

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften ZHAW

School of Management and Law
Abteilung Banking, Finance, Insurance

Bachelor of Science in Business Administration

Studienrichtung Banking and Finance

2013 bis 2017

Bachelorarbeit

**Problematiken der klassischen Markowitz-Portfolio-
Optimierung und ihre robusten Alternativen**

.....

Vorgelegt von:

Stöcker, Jonas

Klasse TZBFb

S13555487

eingereicht bei:

Dr. Thomas Gramespacher,

Dozent Abteilung Banking, Finance & Insurance

21. Mai 2017

Management Summary

Für die Evaluation eines optimalen Portfolios stützt man sich auch in der modernen Portfoliotheorie auf das Mittelwert-Varianz-Modell von Markowitz aus dem Jahr 1952 ab. Allerdings findet das Modell trotz seiner theoretischen Fundierung in der Praxis nur selten Verwendung. Nebst teilweise unvernünftigen Resultaten liegt ein wesentlicher Grund dafür in der Schätzfehlerproblematik bei der Bestimmung der benötigten Inputparameter. Diese stellen zumeist nur eine Approximation der tatsächlichen Werte dar, wodurch Schätzfehler die logische Konsequenz sind. Dadurch wird die Optimalität des Modells in der praktischen Anwendung vermindert.

Das Ziel dieser Studie ist es, die praktischen Umsetzungsprobleme der Mittelwert-Varianz-Optimierung unter Berücksichtigung der Schätzfehlerproblematik anhand einer Sensitivitätsanalyse zu untersuchen. Ergänzend folgt eine Evaluation alternativer Methoden aus dem Bereich der robusten Optimierung, welche zur Reduzierung des Einflusses dieser Problematik herangezogen werden. Zusätzlich zu den theoretischen Ausführungen erfolgt eine beispielhafte Darstellung des Einflusses ausgewählter robuster Methoden auf die Struktur und die Sensitivität optimaler Portfolios.

Dabei zeigen die Resultate der Sensitivitätsanalyse, dass die Optimalität des MV-Ansatzes wesentlich durch die Güte der Schätzung der erwarteten Rendite beeinflusst wird. Ein Schätzfehler bei der Bestimmung der erwarteten Rendite führt zu einer durchschnittlich viermal grösseren Veränderung der Gewichte, verglichen mit einem Schätzfehler in der Standardabweichung. Ein Schätzfehler bei der Bestimmung der Korrelation hat eine vergleichsweise geringe Auswirkung. Dies gilt vor allem für Investoren mit einer geringen Risikoaversion, welche vergleichsweise stärker von den Schätzfehlern in der erwarteten Rendite betroffen sind. Gleichzeitig vermindert sich die Optimalität des Modells durch die Verwendung hochkorrelierender Anlagen bei gleichzeitig geringen Marktschwankungen. Dabei führt die Anwendung robuster Optimierungsmethoden zumindest teilweise zu ausgewogeneren Portfoliostrukturen und zu einer Reduzierung der Sensitivität der Portfoliogewichte. Dies allerdings unter Berücksichtigung eines allfällig negativen Einflusses auf die Effizienz des Modells durch zu restriktive Modifikationen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Schätzfehlerproblematik die praktische Anwendbarkeit des klassischen MV-Modells negativ beeinträchtigt. Durch die Anwendung robuster Optimierungsmethoden kann die Optimalität des MV-Modells zumindest teilweise verbessert werden. Trotzdem bieten auch diese keinen abschliessenden Lösungsansatz zur Bestimmung eines optimalen Portfolios. Daraus folgt die Empfehlung, sich in künftigen Studien auf die Evaluation weiterer Optimierungsmethoden zu fokussieren, um die praktische Anwendbarkeit des MV-Ansatzes zu legitimieren.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ausgangslage und Problemstellung	1
1.2	Zielsetzung	2
1.3	Hypothese	2
1.4	Methodik und Vorgehensweise	2
1.4.1	Literatur-Review	2
1.4.2	Sensitivitätsanalyse.....	3
1.4.3	Optimierungsmethoden	3
1.5	Abgrenzung.....	3
1.6	Aufbau der Arbeit.....	4
2	Grundlagen der Mittelwert-Varianz-Optimierung	4
3	Problematiken der Mittelwert-Varianz-Optimierung.....	8
3.1	Allgemeines.....	8
3.2	Robustheit des Modells.....	9
3.3	Sensitivitätsanalyse	9
4	Robuste Alternativen.....	15
4.1	Einführung von Restriktionen	17
4.2	Optimierung der Input-Parameter	18
4.3	Modellmodifikationen	24
4.3.1	Black-Litterman-Modell	24
4.3.2	Portfolio Resampling	26
5	Praktischer Vergleich der robusten Alternativen.....	27
5.1	Daten.....	27
5.2	Ausgangslage.....	29
5.3	Struktur der Portfolios.....	32
5.3.1	Beschränkung der Portfoliogewichte.....	32
5.3.2	Geschrumpfte Schätzer.....	36
5.4	Sensitivität der Portfolios.....	42
6	Konklusion	46
	Literaturverzeichnis	
	Anhang	

Abkürzungsverzeichnis

MV	Mittelwert-Varianz
JS	James-Stein
BS	Bayes-Stein
ML	Maximum-Likelihood
BL	Black-Litterman
CAPM	Capital-Asset-Pricing-Model
RE	Resampling Efficiency

Symbolverzeichnis

μ	Wahrer Renditevektor des Portfolios
$\hat{\mu}$	Geschätzter Renditevektor des Portfolios
μ_p	Erwartete Rendite des Portfolios
σ_p	Standardabweichung des Portfolios
σ_p^2	Varianz des Portfolios
Σ	Varianz-Kovarianz-Matrix
$\rho_{i,j}$	Korrelation der Anlagen i und j
$\sigma_{i,j}$	Kovarianz der Anlagen i und j
μ_i	Erwartete Rendite der Anlage i
σ_i	Standardabweichung der Anlage i
σ_i^2	Varianz der Anlage i
w	Gewichtungsvektor
w_i	Gewicht der Anlage i
x'	Vektor transponiert
λ	Arrow-Pratt-Mass für Risikoaversion
τ	Tau (Vektor aus Einsen; $[1, 1, \dots, 1]'$)
\hat{w}	Schrumpfungsfaktor
T	Anzahl Perioden
N	Anzahl Assets

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Resultat Analyse Sensitivität der Portfoliogewichte ($\lambda = 1$)	11
Abbildung 2: Resultat Analyse Sensitivität der Portfoliogewichte ($\lambda = 2$)	12
Abbildung 3: Resultat Sensitivitätsanalyse Variation Standardabweichung ($\lambda = 2$)	14
Abbildung 4: Resultat Sensitivitätsanalyse Variation Korrelationen ($\sigma = 20\%$; $\lambda = 2$) ..	15
Abbildung 5: Ansätze der robusten Optimierung	16
Abbildung 6: Prozess Black-Litterman-Model	25
Abbildung 7: Prozess Portfolio-Resampling	26
Abbildung 8: Portfoliostrukturen empirische Schätzer	31
Abbildung 9: Effizienzkurve empirische Schätzer	31
Abbildung 10: Portfoliostrukturen Einschränkung $w_i \leq 0.5$	33
Abbildung 11: Portfoliostrukturen Einschränkung $0.1 \leq w_i \leq 0.5$	34
Abbildung 12: Vergleich Effizienzkurven Einführung von Restriktionen	35
Abbildung 13: Vergleich der Schätzwerte für die erwartete Rendite	37
Abbildung 14: Portfoliostrukturen James-Stein-Schätzer	38
Abbildung 15: Portfoliostrukturen BS-Schätzer	39
Abbildung 16: Vergleich Effizienzkurven Optimierung Inputparameter	41

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Empirische Inputparameter des Ausgangsportfolios	29
Tabelle 2: Korrelationsstruktur	29
Tabelle 3: Vergleich geschrumpfte und empirische erwartete Renditen	37
Tabelle 4: Sensitivität der Gewichte (Empirische Rendite)	43
Tabelle 5: Sensitivität der Gewichte (Einschränkung $w_i \leq 0.5$)	44
Tabelle 6: Sensitivität der Gewichte (Einschränkung $0.1 \leq w_i \leq 0.5$)	44
Tabelle 7: Sensitivität der Gewichte (JS-Schätzer)	45
Tabelle 8: Sensitivität der Gewichte (BS-Schätzer)	46

Formelverzeichnis

Formel 1: Maximum-Likelihood-Funktion.....	19
Formel 2: Berechnung M-Schätzer	20
Formel 3: Berechnung James-Stein-Schätzer	22
Formel 4: Schrumpfungsfaktor James-Stein-Schätzer.....	22
Formel 5: Berechnung Bayes-Stein-Schätzer	23
Formel 6: Schrumpfungsfaktor Bayes-Stein-Schätzer.....	24
Formel 7: Anpassung Varianz-Kovarianz-Matrix	24
Formel 8: Berechnung Ln-Rendite	28
Formel 9: Berechnung Sharpe-Ratio	42

1 Einleitung

1.1 Ausgangslage und Problemstellung

Die theoretische Grundlage der modernen Portfoliotheorie basiert im Wesentlichen auf den Erkenntnissen von Markowitz aus dem Jahr 1952. Aus seiner Studie folgt, dass Anleger ihre Anlageentscheide hauptsächlich durch die simultane Gegenüberstellung von Rendite und Risiko und somit basierend auf den ersten zwei Momenten einer Renditeverteilung tätigen sollten (Becker, Gürtler & Hibbeln, 2015, S. 269). Demnach empfiehlt es sich, dass Anleger stets Mittelwert-Varianz-effiziente Portfolios halten, um entweder bei gegebener Zielrendite das Risiko zu minimieren, respektive bei erwünschter Zielvolatilität eine maximale Rendite zu erzielen (Jobson & Korkie, 1980, S. 544 ff.). Trotz der theoretischen Anerkennung des Ansatzes von Markowitz wurde die praktische Relevanz hinsichtlich verschiedener Anwendungsprobleme im weiteren Zeitverlauf immer wieder kritisiert (Michaud, 1989; Jorion, 1992). Dies zum einen bezüglich der Tatsache, dass unter der Annahme der wahren Inputparameter die resultierenden Gewichte aus dem Optimierungsverfahren nach Markowitz häufig zu einer unausgeglichene Vermögensallokation führen (Michaud, 1989, S. 43 ff.; Broadie, 1993, S. 23 f.). Die eruierten Portfolios erweisen sich dabei als praktisch nicht intuitiv und aufgrund von anlagestrategischen Restriktionen teilweise auch nicht umsetzbar. Zum anderen besteht ein wesentliches Kernproblem bei der Bestimmung aller relevanten Inputfaktoren und der damit verbundenen Sensitivität der in der praktischen Anwendung resultierenden Portfolios, da diese stark von den Annahmen bezüglich den verwendeten Inputparametern μ und Σ abhängen (Frankfurter, Phillips & Seagle, 1971; Chopra & Ziemba, 1993). Bereits minimale Schätzfehler führen zu teilweise stark abweichenden Gewichten innerhalb des Portfolios, was einen entsprechend grossen Einfluss auf das Rendite-Risiko-Profil des zu kreierenen Portfolios hat. Infolgedessen wird der ursprüngliche Mittelwert-Varianz-Optimierungsansatz nach Markowitz trotz seiner theoretischen Fundierung in der Praxis nur begrenzt angewandt. Stattdessen wird vor allem im Rahmen der robusten Statistik versucht, die Praxistauglichkeit und die Aussagekraft des Ansatzes zu optimieren (Frost & Savarino, 1986; Jorion 1986; Black & Litterman, 1992).

1.2 Zielsetzung

Das Ziel dieser Studie ist es, die in der Praxis bestehenden Nachteile der Mittelwert-Varianz-Optimierung von Markowitz anhand der bestehenden Literatur zu erläutern und diese in der Form eines praktischen Berechnungsbeispiels zu belegen. Der Fokus dieser Untersuchung liegt dabei in der Analyse der Sensitivität des Modells in Bezug auf Schätzfehler bei der Bestimmung der Inputparameter. Darauf aufbauend werden in der Folge verschiedene robuste Optimierungsmethoden zur Verbesserung der Stabilität und Plausibilität des MV-Ansatzes theoretisch erläutert sowie deren mathematische Grundlagen ausgeführt. Im Anschluss werden ausgewählte Optimierungsansätze am Beispiel eines Aktienportfolios angewandt, um deren Auswirkungen im Vergleich zum klassischen MV-Modell ohne Anpassungen analysieren zu können. Daraus werden in der Folge mögliche Implikationen für die praktische Anwendung des MV-Ansatzes evaluiert, welche auch als Grundlage für weitere Studien dient.

1.3 Hypothese

Aufgrund dieser Ausgangslage gilt es in dieser Studie die folgenden Fragestellungen zu beantworten: Worin bestehen die wesentlichen Umsetzungsprobleme bei der praktischen Anwendung des MV-Ansatz nach Markowitz? Wie hoch ist die Sensitivität der aus einer Mittelwert-Varianz-Optimierung resultierenden Portfoliogewichte hinsichtlich einer fehlerhaften Annahme in den verwendeten Inputparametern? Daraus folgt: Wie und mit welchen Methoden kann die Robustheit eines MV-Portfolios optimiert werden, um die praktisch ungünstige Vermögensallokation adäquat zu verbessern sowie die Sensitivität des Modells zu reduzieren?

1.4 Methodik und Vorgehensweise

1.4.1 Literatur-Review

Um die Grundlagen aus der Theorie sowie die bisherigen Erkenntnisse in diesem Bereich aufzuzeigen werden die zentralen Aussagen in Form einer qualitativen Inhaltsanalyse der bestehenden Literatur dargelegt. Dabei werden auch die Probleme des MV-Ansatzes in der Praxis aufgezeigt. Zudem werden ebenfalls die in der bisherigen Forschung verwendeten Ansätze zur Optimierung der Robustheit des Modells analysiert sowie ihre Funktionsweise aufgezeigt.

1.4.2 Sensitivitätsanalyse

Bezogen auf die angestrebte Zielsetzung dieser Studie zur Untersuchung, Darstellung und Verbesserung der Robustheit von MV-Portfolios wird die Empfindlichkeit der Portfolio-gewichte mittels einer Sensitivitätsanalyse untersucht. Diese wird anhand eines fiktiven Portfolios, bestehend aus fünf Wertpapieren mit identischen Ausgangsparametern, durchgeführt. Die Analyse und Optimierung werden auf der Basis der nutzenmaximierenden Zielformulierung des Optimierungsansatzes und unter Verwendung unterschiedlicher Risikoaversionsparameter durchgeführt. Dabei werden die Veränderungen der Gewichte der einzelnen Titel, durch den Einbezug unterschiedlicher Schätzfehler, analysiert.

1.4.3 Optimierungsmethoden

In der Folge werden anhand eines Aktienportfolios, unter Verwendung empirischer Renditezeitreihen, verschiedene Optimierungsverfahren zur Verbesserung der Robustheit von MV-Portfolios analysiert. Dabei gilt es vor allem die unterschiedlichen Verfahren der robusten Optimierung miteinzubeziehen. Darunter werden in dieser Studie Optimierungen durch die Einführung von Restriktionen, die Modifikation der Inputparameter sowie durch die Modifikation des Optimierungsmodells subsumiert.

1.5 Abgrenzung

Die folgende Arbeit wird sich in ihren Ausführungen vornehmlich auf das Problem der Sensitivität des Modells hinsichtlich Schätzfehler in den Inputparametern fokussieren. Weitere bekannte Probleme bei der klassischen Markowitz-Portfolio-Optimierung, wie beispielsweise den Ausschluss höherer Momente einer Verteilung, den Ausschluss von Transaktionskosten oder die Eigenschaft eines Ein-Perioden-Modells werden in dieser Studie nicht berücksichtigt. Diese bleiben somit folgenden Untersuchungen vorbehalten. In Bezug auf die Verfahren der robusten Optimierung werden nur ausgewählte Ansätze anhand des Praxisbeispiels analysiert. Die weiteren erwähnten Optimierungsmöglichkeiten zur Verbesserung der Robustheit werden wohl theoretisch erläutert, eine praktische Anwendung wird jedoch nicht angestrebt. Die verwendeten Optimierungsverfahren konzentrieren sich dabei hauptsächlich auf die Einführung intuitiver Restriktionen sowie auf die verbesserte Schätzung der erwarteten Renditen.

1.6 Aufbau der Arbeit

Zur Beantwortung der Fragestellung wird diese Studie im ersten Teil die theoretischen Grundlagen der Markowitz-Portfolio-Optimierung erläutern. Im zweiten Abschnitt werden die Mängel des Optimierungsverfahrens nach Markowitz, vor allem hinsichtlich der Schätzfehlerproblematik, theoretisch und praktisch dargelegt. Daraus folgend erläutert diese Studie im Anschluss diverse Optimierungsmöglichkeiten zur Reduzierung der Sensitivität sowie zur allgemeinen Verbesserung der Plausibilität der Portfoliostrukturierung. Im vierten Teil werden ausgewählte Optimierungsmöglichkeiten am Beispiel eines Aktienportfolios angewendet und analysiert. Abschliessend werden die gewonnen Erkenntnisse zusammengefasst dargelegt, um Implikationen für die praktische Anwendung des MV-Ansatzes sowie für weitere Studien aufzuzeigen.

2 Grundlagen der Mittelwert-Varianz-Optimierung

Die erwähnten Grundgedanken von Markowitz aus dem Jahre 1952 bezüglich der Vorgehensweise zur Bestimmung eines optimalen Portfolios bilden noch heute die theoretische Grundlage für die moderne Portfoliotheorie. In seiner Studie implizierte er dabei erstmalig die Axiome zur simultanen Betrachtung von Rendite und Risiko bei der Zusammenstellung eines Portfolios. Dies eröffnete eine neue Betrachtungsweise im Rahmen der Portfoliotheorie, verglichen mit der bisher vornehmlichen Herangehensweise der singulären Beachtung des Ertrages eines Wertpapiers (Markowitz, 1991, S. 470). Markowitz (1952) berücksichtigte zusätzlich die Opportunität einer ganzheitlichen Betrachtung mehrerer Wertpapiere zur Erzielung eines Diversifikationseffektes durch den Einbezug der Kovarianz. Dieses Vorgehen stand ebenfalls im Gegensatz zum bisherigen Ansatz der Auswahl einzelner Wertpapiere, welche unabhängig voneinander betrachtet wurden (Amenc & Le Sourd, 2005, S. 80).

Dem daraus resultierenden theoretischen Modell, dem sogenannten Mittelwert-Varianz-Ansatz, liegen dabei zentrale theoretische Prämissen zugrunde, welche für die Anwendung des Modells unabdingbar sind. Im Wesentlichen unterstellt Markowitz (1952) einem Investor die Eigenschaften eines rationalen und risikoaversen Kapitalanlegers. Das heisst, mögliche Investoren präferieren Ertrag über Risiko und versuchen durch ihr Vor-

gehen ihren Nutzen zu maximieren. Dem Modell liegt zusätzlich eine Ein-Perioden-Betrachtung zu Grunde, wobei der Entscheid zur Portfolioallokation zum Beginn einer Periode fällt und dieser bis zum Ende der Periode unverändert bleibt. Eine Reallokation findet erst zum Ende der Investitionsperiode statt. Zudem bleibt die Verrechnung von Transaktionskosten innerhalb des Modells unberücksichtigt (Amenc & Le Sourd, 2005, S. 83).

Zur Bestimmung eines optimalen Portfolios bedarf es primär der Auswahl eines spezifischen Anlageuniversums, bestehend aus N Anlagen. Daraus folgt im Anschluss die Definition der benötigten Inputparameter. Der Entscheid zur optimalen Portfolioallokation wird beim Mittelwert-Varianz-Ansatz im Wesentlichen durch die evaluierten Werte für die erwarteten Renditen μ_i :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \text{ respektive } \mu' = [(\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N)]$$

und die Varianz-Kovarianz-Matrix Σ bestimmt (Markowitz, 1952, S. 91).

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

Für die Schätzung der entsprechenden zukünftigen Werte werden zumeist Daten aus vergangenen Perioden verwendet (Markowitz, 1952, S. 91). Diese werden aus Gründen der Effizienz durch Stichproben evaluiert, unter der Annahme, dass diese Schätzungen den wahren Werten dieser Parameter entsprechen (Chopra & Ziemba, 1993, S. 8).

Zur Erstellung eines entsprechenden Portfolios müssen den einzelnen Wertpapieren in Abhängigkeit ihrer evaluierten Parameter entsprechende Gewichte zugewiesen werden, welche in einem $N \times 1$ Spaltenvektor festgehalten werden:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}; \text{ respektive } w' = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

Dabei werden die Gewichte in der Praxis häufig unter Berücksichtigung einer Non-Negativ-Einschränkung definiert, da negative Portfoliogewichte in vielen Fällen nicht ohne weiteres implementiert werden können (Jagannathan & Ma, 2003, S. 1651):

$$w_i \geq 0$$

Zusätzlich wird davon ausgegangen, dass das maximal mögliche Anlagevolumen des Investors durch eine Budgetrestriktion beschränkt ist (Steinbach, 2001, S. 35):

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

Aufgrund der oben definierten Bestimmungen und der Aufteilung des Vermögens auf N Anlagen ergibt sich die erwartete Rendite des Portfolios sowie deren Varianz aus folgenden Berechnungen. Die Darstellung der mathematischen Konzeptionen erfolgt in dieser Studie durchgehend in der Matrizen Schreibweise für den N -Anlagen-Fall, in Anlehnung an Ernst & Schurer (2014, S. 216 ff.).

$$\begin{aligned} \mu_p &= w' \mu \\ \sigma_p^2 &= w' \Sigma w \end{aligned}$$

Da der Mittelwert-Varianz-Ansatz von einem rationalen und risikoaversen Anleger ausgeht, wird die Auswahl eines optimalen Portfolios durch zwei gegensätzliche Zielformulierungen bestimmt. Demnach ist der Anleger bestrebt, entweder bei gegebenem Risiko seine Rendite zu maximieren, dargelegt durch die untenstehende Formulierung:

$$\begin{aligned} \max w' \mu \\ w' \Sigma w = \sigma_p^2 \max \end{aligned}$$

Gegenteilig kann dem Anleger die Intention unterstellt werden, bei einer angestrebten Zielrendite das Portfoliorisiko minimieren zu wollen, was durch die entsprechende Konzipierung erreicht wird:

$$\begin{aligned} \min w' \Sigma w \\ w' \mu = \mu_p \min \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Zielformulierungen ergibt sich ein Konflikt zwischen der Maximierung der erwarteten Rendite und der Minimierung des Risikos. Aufgrund dessen kann die Auswahl eines optimalen Portfolios im MV-Modell zusätzlich in Abhängigkeit der individuellen Risikoaversion bestimmt werden. Folglich wird die Portfolioallokation durch die Präferenzen des Anlegers bestimmt, wodurch sich das optimale Portfolio mit dem höchsten Nutzen durch die Maximierung der folgenden Funktion eruieren lässt:

$$\max w' \mu - \frac{1}{2} \lambda w' \Sigma w$$

Aus diesen Zielformulierungen ergeben sich letztlich die Gewichte des optimalen Portfolios, welche im zuvor definierten Gewichtungsvektor zusammengefasst werden. Anhand dieser werden folglich auch die erwartete Rendite sowie die Varianz des optimalen Portfolios bestimmt.

3 Problematiken der Mittelwert-Varianz-Optimierung

3.1 Allgemeines

Der Widerspruch zwischen der theoretischen Fundierung und der mangelnden praktischen Akzeptanz des MV-Ansatzes wird in der bisherigen Literatur durch Michaud (1989) auch als „Markowitz Optimization Enigma“ bezeichnet. Als Begründung für dieses Paradoxon wird dabei aufgeführt, dass die aus der Markowitz-Optimierung resultierenden Portfolios nicht intuitiv und von geringem Investitionswert sind, dies trotz der theoretischen Fundierung des Modells (Michaud, 1989, S. 45). So stellten beispielsweise Frankfurter et al. (1971, S. 1256 ff.) fest, dass ein nach dem MV-Ansatz bestimmtes Portfolio kaum effizienter sei als ein zufällig ausgewähltes Portfolio. In einer Studie von Demiguel, Garlappi & Uppal (2009) wurde die Performance eines MV-Portfolios, sowie verschiedener Erweiterungen davon, mit der Wertentwicklung eines 1/N-Portfolios untersucht. Dabei konnte festgestellt werden, dass das 1/N-Portfolio ein durchgehend besseres out-of-sample Sharpe-Ratio generierte, verglichen mit dem klassischen MV-Ansatz, wobei das gleiche Resultat für die diversen Modellerweiterungen festgestellt wurde.

Einer der wesentlichen Gründe für die mangelnde praktische Akzeptanz des Optimierungsmodells nach Markowitz liegt dabei im ersten Schritt des Optimierungsprozesses, genauer in der Bestimmung der notwendigen Inputparameter für μ und Σ . Obwohl im klassischen MV-Ansatz als Grundlage empirische Daten als valable Option angesehen werden, so war sich Markowitz (1952, S. 91) bewusst, dass die Wahl der Inputparameter eine wesentliche Rolle für die Optimalität seines Ansatzes einnimmt. Demnach sollten für das Vorgehen zur Bestimmung dieser Parameter bessere Möglichkeiten evaluiert werden. Eine Studie von Jorion (1992) befasste sich in der Folge mit der Problematik der Verwendung von empirischen Daten als Schätzer für den Optimierungsprozess und zeigte dabei, dass das Modell stark durch entsprechende Schätzfehler beeinflusst wird. Michaud (1989, S. 46) verwies ebenfalls auf diese Tatsache und definierte folglich das MV-Modell als „Schätzfehlermaximierer“. Dies wird damit begründet, dass durch die Optimierung nach Markowitz diejenigen Anlagen Übergewichtet werden, welche eine hohe Rendite, ein geringes Risiko sowie eine geringe Korrelation zu anderen Anlagen aufweisen. Im

Gegenzug werden Anlagen mit einer geringen Rendite, einem hohen Risiko und einer erhöhten Korrelation untergewichtet. Nun sind es allerdings genau diese Anlagen, welche übergewichtet werden, welche die grössten Schätzfehler beinhalten und dadurch die Effizienz des Modells entscheidend beeinträchtigen.

3.2 Robustheit des Modells

Die Tatsache, dass die Effizienz des MV-Modells nach Markowitz stark von der Annahme bezüglich der Inputparameter abhängt und bereits auf kleinste Veränderungen der Schätzwerte reagiert, wurde durch verschiedenste Studien belegt. Darauf aufbauend wurden in der Folge verschiedene Untersuchungen durchgeführt, um die effektiven Auswirkungen von Schätzfehlern auf die Portfolioallokation zu analysieren. So zeigten beispielsweise Chopra & Ziemba (1993) die Auswirkungen von Schätzfehlern bei der erwarteten Rendite, der Varianz sowie der Kovarianz auf die Portfolioallokation und evaluierten den daraus resultierenden monetären Verlust des Anlegers. Es wurde dabei festgestellt, dass die Auswirkungen von Schätzfehlern der erwarteten Renditen bei der Bestimmung optimierter Portfolios die Auswirkungen von Fehlannahmen bezüglich der Varianz und der Kovarianz um ein Vielfaches übersteigen. Weitere Untersuchungen von Best & Grauer (1991) und Broadie (1993) kamen zu ähnlichen Ergebnissen bezüglich des erhöhten Einflusses von Schätzfehlern in der erwarteten Rendite. Zugleich wies man darauf hin, dass der Schätzung der Risikogrößen eine untergeordnete Bedeutung zukommt (Broadie, 1993, S. 15).

3.3 Sensitivitätsanalyse

Auf der Grundlage der bisher gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Schätzfehlerproblematik des MV-Modells wird im folgenden Abschnitt eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Die Berechnungen sowie sämtliche Abbildungen basieren auf der Anwendung von Excel. Dadurch soll vor allem die Instabilität eines MV-optimierten Portfolios infolge von Schätzfehlern bei der Bestimmung der Inputparameter veranschaulicht werden. Dafür werden als Grundlage für die Optimierung fünf fiktive Wertpapiere A - E herangezogen, welche durch die folgenden Parameter definiert sind:

$$\mu = \begin{bmatrix} 5\% \\ 5\% \\ 5\% \\ 5\% \\ 5\% \end{bmatrix}; \quad \sigma_{A-E} = 15\%; \quad \rho_{A-E} = 0.4; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0225 & \dots & 0.009 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.009 & \dots & 0.0225 \end{bmatrix}$$

Die Verwendung identischer Parameter als Ausgangslage für die Analyse ergibt sich zum einen aufgrund der bewährten Verwendung in bestehenden Studien (Kempf & Memmel, 2002 zitiert in Ernst & Schurer, 2014, S. 428 ff.). Zum anderen ergab sich in Folge einer Analyse innerhalb dieser Arbeit, dass sich der Trend der Ergebnisse im Vergleich zur Verwendung unterschiedlicher Parameter nicht unterscheidet. Sind die Parameter allerdings nicht identisch, hängt das Ergebnis teilweise stark von der Auswahl der Werte für μ und Σ ab, wohingegen bei identischen Parametern nur die Höhe der Einflussgrößen eine Auswirkung auf die Ergebnisse hat. Diese Tatsache wird im Verlauf dieser Studie durch die Verwendung der Parameter auf unterschiedlichen Niveaus berücksichtigt. Dadurch, dass allen Wertpapieren in der Ausgangslage identische Parameter zugewiesen werden, ergibt sich durch die Optimierung nach dem maximalen Nutzen (siehe Abschnitt 2) ein gleichgewichtetes Portfolio mit einem Gewichtungsvektor von:

$$w = \begin{bmatrix} 20\% \\ 20\% \\ 20\% \\ 20\% \\ 20\% \end{bmatrix}; \text{ respektive } w' = [20\% \ 20\% \ 20\% \ 20\% \ 20\%]$$

Mittels dieser Analyse wird nun die Sensitivität der Portfoliogewichte dargestellt, wenn die oben definierten wahren Parameter μ , σ und ρ des Wertpapiers A durch Schätzfehler verfälscht werden. Die Veränderung der Gewichtung ergibt sich somit aus dem jeweiligen partiellen Differential erster Ordnung der Funktion $w_a = f(\mu, \sigma, \rho, \lambda)$ bezüglich μ , σ und ρ . Die Veränderungen der Parameter werden in der Spannweite von -20% - +20% und in Abständen von +/-5% relativ zum Ausgangswert vorgenommen. Die Analyse wird dabei auf verschiedenen Ebenen der Risikoaversion durchgeführt, um ebenfalls den Einfluss dieser Größe auf die Stabilität der MV-Portfolios analysieren zu können. Um die Möglichkeit einer ganzheitlichen Analyse der Auswirkungen der Schätzfehler zu

gewährleisten wird in diesem Teil auf die Anwendung einer Non-Negativ-Einschränkung verzichtet.

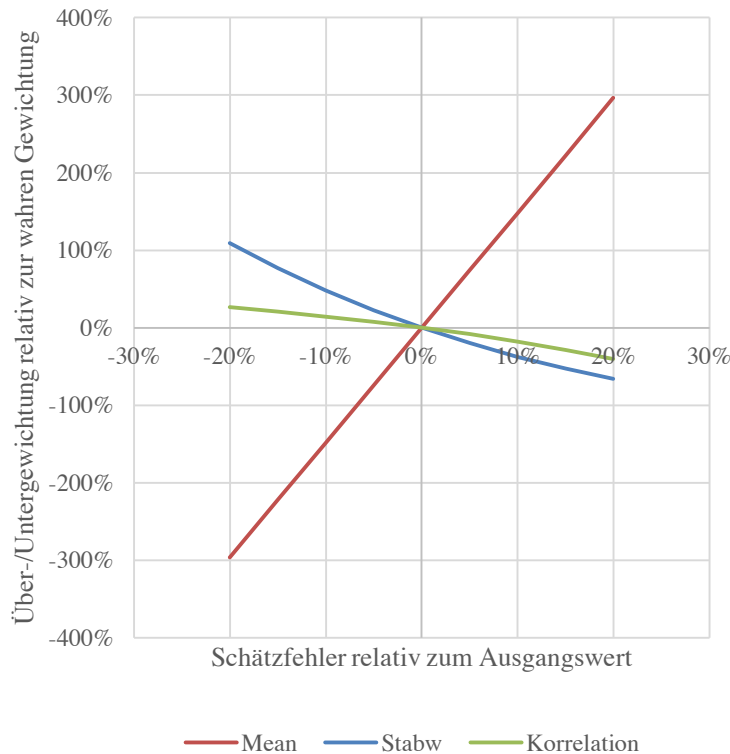


Abbildung 1: Resultat Analyse Sensitivität der Portfoliogewichte ($\lambda = 1$)
 Quelle: Eigene Darstellung (in Anlehnung an Chopra & Ziemba, 1993, S. 9)

In Abbildung 1 ist die unterschiedlich hohe Sensitivität der Portfoliogewichtung des Wertpapiers A aufgrund der veränderten Inputparameter bei $\lambda=1$ dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass eine fehlerhafte Schätzung der erwarteten Rendite mit Abstand die grösste Auswirkung auf die Portfoliogewichte hat. Bereits bei einer Überschätzung der erwarteten Rendite der Anlage A um 10% wird diese im Vergleich zur Ausgangslage um beinahe 150% übergewichtet. Wohingegen eine fehlerhafte Schätzung der Standardabweichung und der Korrelation um denselben Schätzfehler eine Untergewichtung um lediglich 37.5%, respektive 17.9%, zur Folge hat. Zudem kann beobachtet werden, dass der Veränderung der Gewichtung infolge eines Schätzfehlers der erwarteten Rendite eine lineare Entwicklung zu Grunde liegt. Dies im Gegenteil zur Gewichtungsveränderung bei Schätzfehlern in der Standardabweichung, welcher ein konvexer Zusammenhang nachgewiesen wird. Bei der Korrelation ist hingegen ein konkaver Verlauf zu erkennen.

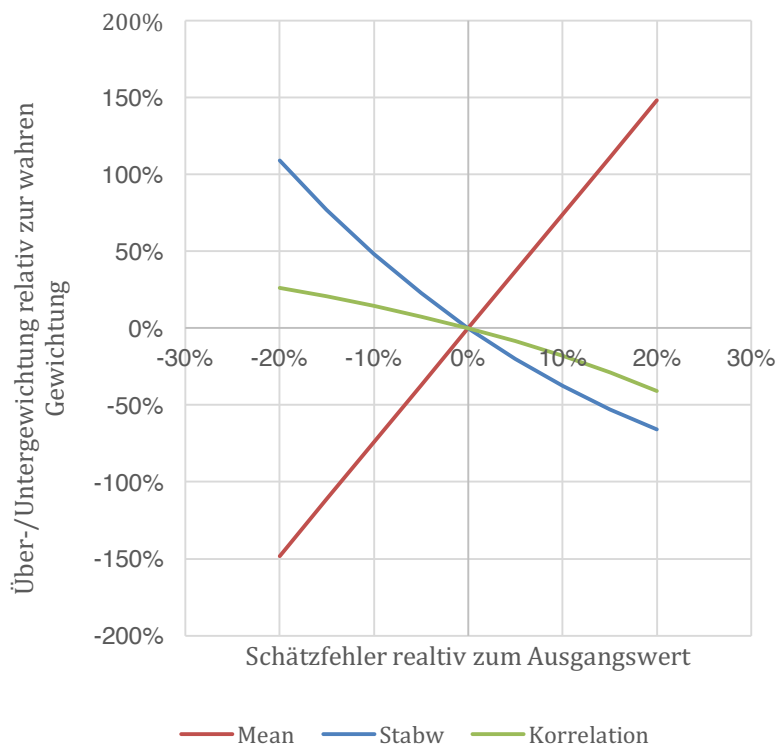


Abbildung 2: Resultat Analyse Sensitivität der Portfoliogewichte ($\lambda = 2$)
 Quelle: Eigene Darstellung (in Anlehnung an Chopra & Ziemba, 1993, S. 9)

Dieselbe Analyse wird zusätzlich für einen potenziellen Anleger mit einer erhöhten Risikoaversion von 2 durchgeführt. Die Abbildung 2 visualisiert die entsprechenden Resultate. Daraus kann abgeleitet werden, dass durch die erhöhte Risikoaversion die Sensitivität der Gewichtung der Anlage A, infolge einer verfälschten erwarteten Rendite, minimiert werden kann. Ein Schätzfehler von +10% relativ zur Ausgangsrendite von 5% führte nur noch zu einer Übergewichtung von 74%, verglichen mit der korrekten Allokation. Hingegen kann die Sensitivität der Gewichte infolge einer Fehlannahme bezüglich der Standardabweichung und der Korrelation durch die Veränderung der Risikoaversion nicht beeinflusst werden. Damit kann festgehalten werden, dass sich die Ergebnisse aus der durchgeführten Sensitivitätsanalyse mit den Erkenntnissen von Chopra & Ziemba (1993) und Best & Grauer (1991) hinsichtlich der Tatsache decken, dass vor allem den Schätzfehlern in der erwarteten Rendite eine grosse Bedeutung zukommt. Die Schätzung der Standardabweichung zur Bestimmung der Varianz sowie der Korrelation zur Bestimmung der Kovarianz ist somit geringfügiger zu priorisieren. Zusätzlich beeinflusst die Höhe der Risikoaversion die Sensitivität der Gewichte massgeblich, wobei dies nur auf

Schätzfehler bei der Bestimmung der erwarteten Rendite zutrifft. Je risikoscheuer ein Anleger demnach ist, desto kleiner ist die Veränderung in der Gewichtung der einzelnen Anlagen. Dies begründet sich nicht zuletzt dadurch, dass Anleger mit einer hohen Risikoaversion ein Portfolio wählen, das näher am Minimum-Varianz-Portfolio (MVP) liegt, und dieses generell eine geringere Anfälligkeit gegenüber Schätzfehlern aufweist (DeMiguel, Garlappi, Nogales & Uppal, 2009, S. 798 f.).

Infolge der im vorangegangenen Abschnitt erwähnten Tatsache, dass die Sensitivität der Gewichte auch durch die Höhe der Parameter selbst beeinflusst wird, folgt nun eine zusätzliche Analyse, welche diese Tatsache untersucht. Der Fokus liegt dabei auf der Untersuchung des Einflusses der Höhe der Standardabweichung und der Korrelation auf die Veränderung der Portfoliogewichte infolge einer fehlerhaften Schätzung der erwarteten Rendite. Dafür wird vorab ein neuer Renditevektor mit veränderten Parametern, verglichen zur Ausgangslage mit den wahren Werten für μ , definiert:

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} 7.5\% \\ 5\% \\ 5\% \\ 5\% \\ 5\% \end{bmatrix}$$

Da der Einfluss der Risikoaversion auf die Sensitivität der Gewichte bereits evaluiert werden konnte, erfolgen die nachfolgenden Berechnungen nach der nutzenmaximierenden Formulierung des MV-Ansatzes stets mit einer konstanten Risikoaversion von zwei. Zusätzlich wird in diesem Teil die zuvor ausgenommene Non-Negativ-Einschränkung wieder miteinbezogen. Der Vergleich der veränderten Portfolioallokationen erfolgt stets in Relation zum Ausgangsportfolio mit der identischen Gewichtung aller Anlagen.

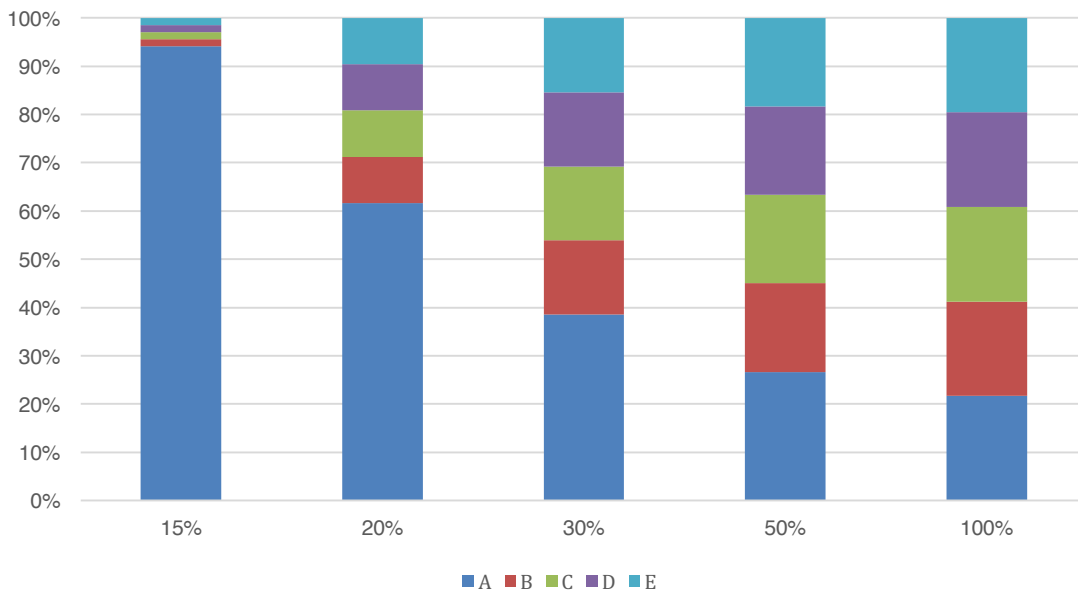


Abbildung 3: Resultat Sensitivitätsanalyse Variation Standardabweichung ($\lambda = 2$)
 Quelle: Eigene Darstellung

In Abbildung 3 ist die veränderte Portfoliostrukturierung infolge des neuen Renditeschätzers mit 7.5% für Asset A auf unterschiedlichen Volatilitätsniveaus zu sehen. Ausgehend von einer relativ hohen Sensitivität bei einer Standardabweichung von 15% kann durch die kontinuierliche Erhöhung des Risikoterms aller Anlagen eine geringere Empfindlichkeit gegenüber dem Schätzfehler beobachtet werden. Bereits eine Erhöhung der Volatilität von 15% auf 20% hat eine signifikante Verbesserung der Stabilität zur Folge, was sich in einer veränderten Gewichtung von ursprünglich 94% auf noch 62% des Assets A äußert. Eine theoretische Volatilität von 100% würde die Portfolioallokation beinahe unverändert lassen. Daraus lässt sich ableiten, dass höhere Marktschwankungen die Anfälligkeit gegenüber Schätzfehlern in der erwarteten Rendite reduzieren und folglich die Robustheit der Portfolios unterstützen.

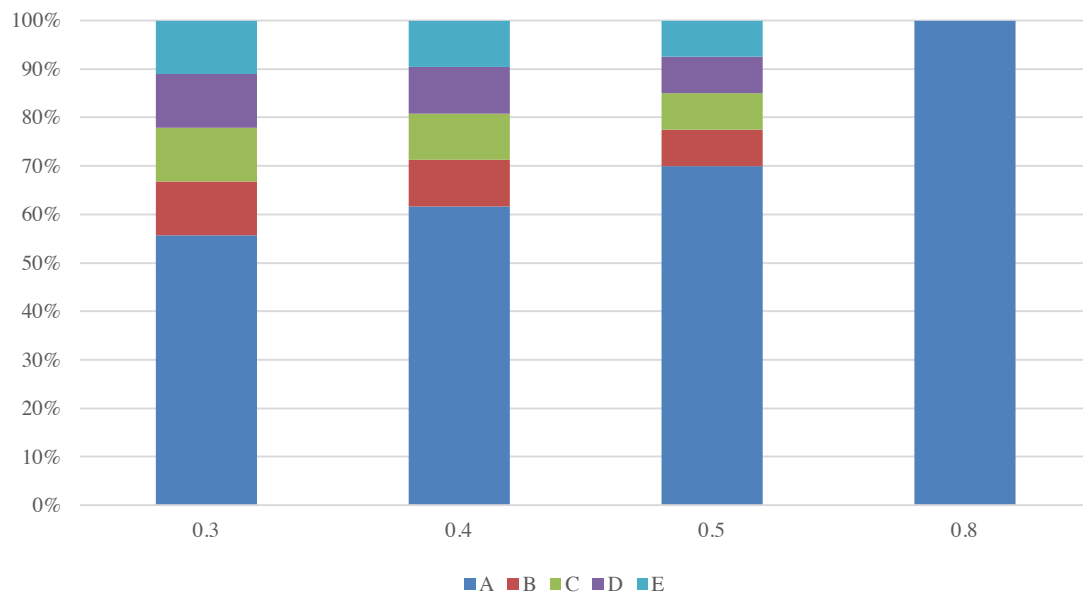


Abbildung 4: Resultat Sensitivitätsanalyse Variation Korrelationen ($\sigma = 20\%$; $\lambda = 2$)
 Quelle: Eigene Darstellung

Eine identische Untersuchung wird bei einer veränderten Stärke des statistischen Zusammenhangs durchgeführt, wobei Abbildung 4 die entsprechenden Resultate dieser Analyse visualisiert. Als Ausgangslage werden die Werte für die Standardabweichung aller Anlagen auf 20% festgesetzt, da sich die Analyse mit dem ursprünglichen Wert von 15% als weniger aussagekräftig zeigte, wobei der zu beobachtende Effekt derselbe ist. Es kann dabei festgestellt werden, dass sich die Stabilität des Modells bei zunehmender Korrelation der Anlagen verschlechtert und sich in einer höheren Fehlallokation äußert. Bei einer Korrelation von 0.8 wird die Anlage A sogar mit 100% gewichtet, dies unter Berücksichtigung der Non-Negativ-Einschränkung, da ansonsten Short-Sales bei den restlichen Anlagen zu beobachten sind.

4 Robuste Alternativen

Aufgrund der Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts wird die Ursache für die geringe praktische Akzeptanz des MV-Modells zumindest teilweise erkennbar. Die Tatsache, dass das Modell als Inputparameter grundsätzlich empirische Daten verwendet und diese als wahre Werte annimmt, führt zu einer hohen Sensitivität des Modells bei fehlerhaften Schätzungen dieser Variablen (Chopra & Ziemba, 1993, S. 6 ff.). Daraus folgt,

dass sich die Annahme von Markowitz (1952, S. 91) bezüglich der Wichtigkeit einer akkuraten Schätzung der Inputparameter bestätigt. Somit gilt es, die Unsicherheit in der Bestimmung dieser Parameter, das sogenannte „Estimation risk“, in den Optimierungsprozess miteinzubeziehen, um eine verbesserte Aussagekraft des MV-Ansatzes zu erreichen (Jorion, 1992, S. 68).

Als Folge dieser Erkenntnis haben sich vor allem Ansätze aus dem Bereich der robusten Optimierung, basierend auf der Theorie der robusten Statistik, als mögliche Herangehensweisen für den Einbezug der Schätzfehlerproblematik bewährt. Diesen Methoden liegt im Wesentlichen die Prämisse zu Grunde, eine bestmögliche Lösung für diverse Optimierungsprobleme mit unbekanntem Inputparametern zu finden (Tütüncü & König, 2004, S. 158). Innerhalb der robusten Optimierung im Bereich des Portfolio Managements werden dabei unterschiedliche Herangehensweisen subsumiert. Diese reichen von einer intuitiven Einführung von Restriktionen, wie beispielsweise minimalen oder maximalen Portfoliogewichten oder die Einschränkung von Short-Sales, bis hin zu Optimierungsansätzen zur verbesserten Schätzung der Inputparameter oder Modellmodifikationen. Die Abbildung 5 gibt einen Überblick über die im Folgenden behandelten Verfahren:

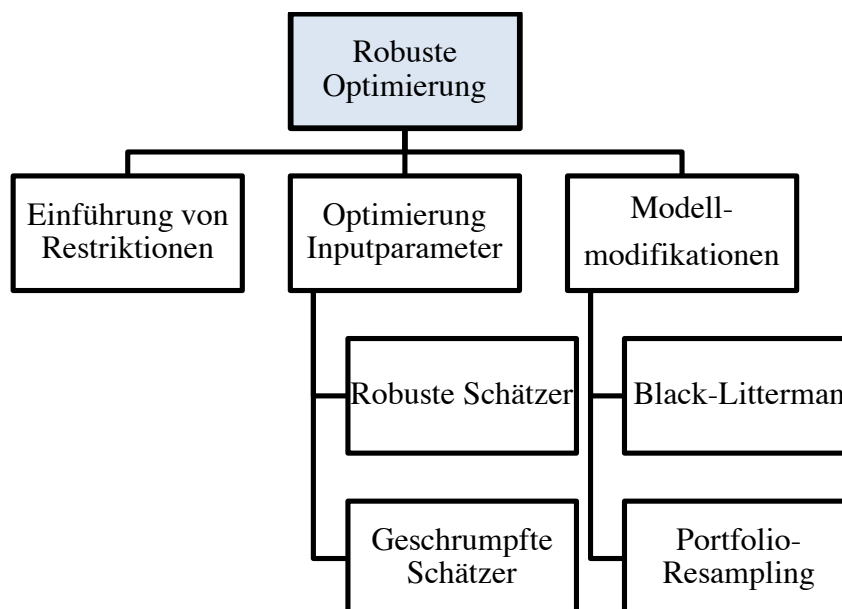


Abbildung 5: Ansätze der robusten Optimierung
 Quelle: Eigene Darstellung (in Anlehnung an Ernst & Schurer, 2014, S. 434)

4.1 Einführung von Restriktionen

Um die Robustheit und Plausibilität von MV-optimierten Portfolios zu verbessern kann als erste Massnahme die Einführung intuitiver Anpassungen herangezogen werden. Darunter wird nebst der Einführung von Restriktionen in Form von minimalen und maximalen Portfoliogewichten auch die Einschränkung bezüglich Short-Sales subsumiert.

$$w_i \geq 0$$
$$w_{min} \leq w_i \leq w_{max}$$

Jagannathan & Man (2003, S. 1652 f.) weisen dabei darauf hin, dass im Falle des MVPs die Einführung einer Non-Negativ-Bedingung die Effizienz des Ansatzes im gleichen Ausmass beeinflusst wie die Reduzierung der Kovarianz des entsprechenden Assets mit anderen Anlagen. Dies wird dadurch begründet, dass Assets mit einer vergleichsweise hohen Kovarianz innerhalb des Optimierungsprozesses dazu tendieren, mit einem negativen Portfoliogewicht aufgenommen zu werden, was durch das Verbot von Short-Sales ausgeschlossen wird. Gleichzeitig wirkt die Einführung einer oberen Begrenzung der Portfoliogewichte wie die Erhöhung der Kovarianz der entsprechenden Anlage, da diese basierend auf einer geringen Kovarianz im Portfolio anfänglich übergewichtet und folglich durch die Eingrenzung relativ geringfügiger berücksichtigt werden. Dies kann auch anhand des Beispiels der Sensitivitätsanalyse aus Abschnitt 3.3 nachvollzogen werden, bei welcher im ersten Teil keine derartigen Einschränkungen eingeführt wurden. Bereits durch die Einführung einer Non-Negativ-Einschränkung im zweiten Teil konnten die Auswirkungen der in Abbildung 1 nachgewiesenen Fehlallokationen infolge einer Unterschätzung der jeweiligen Inputparameter reduziert werden.

Gleichermassen wie die Vorteile dieser Restriktionen gilt es auch die möglichen Problematiken dieser Herangehensweise zu berücksichtigen. Denn durch die Einführung der entsprechenden Restriktionen wird die Effizienzkurve für mögliche Portfolios beeinflusst, was bei zu engen Einschränkungen zu einem Effizienzverlust führen kann. In diesen Fällen werden die Resultate des MV-Modells nur noch durch die eingeführten Restriktionen, anstatt durch den eigentlichen Optimierungsprozess, bestimmt.

4.2 Optimierung der Input-Parameter

Eine weitere Herangehensweise in der robusten Optimierung befasst sich mit dem in der ursprünglichen Studie von Markowitz unberücksichtigten Schritt der Bestimmung von verbesserten Schätzern für die Inputparameter von μ und Σ . Dabei befasst man sich mit der grundlegenden Problematik, dass es sich bei den Annahmen über die zukünftigen Werte dieser Parameter stets um Schätzungen handelt und diese folglich mit Unsicherheit behaftet sind (Brosius, 1998, S. 375). Das Ziel bei der Entwicklung dieser optimierten Verfahren ist es folglich, die Auswirkungen der Schätzfehlerproblematiken durch eine verbesserte Schätzung der Parameter zu reduzieren. In Bezug auf die evaluierte Tatsache, dass vor allem der Schätzung der erwarteten Renditen der herangezogenen Anlagen eine grosse Bedeutung zukommt, werden sich die folgenden Abschnitte auf die verbesserte Schätzung dieses Inputparameters konzentrieren. Einzelne Konzepte, welche im weiteren Verlauf erläutert werden, können jedoch auch für die Schätzung weiterer Parameter verwendet werden. Diese Studie unterscheidet im Wesentlichen zwischen robusten und geschrumpften Schätzern.

4.2.1.1 Robuste Schätzer

Als eine von diversen Kategorien der robusten Schätzer repräsentieren die M-Schätzer nach Huber (1964) eine Gruppe von Schätzfunktionen, welche sich aus der Verallgemeinerung der Maximum-Likelihood-Methode ergibt (Ernst & Schurer, 2014, S. 437). Die ML-Methode stellt dabei ein häufig verwendetes Verfahren zur Schätzung unbekannter Parameter dar. Entsprechend gilt es vorab die Grundlagen dieser Methode darzustellen.

Die Maximum-Likelihood-Methode ist im Wesentlichen bestrebt, denjenigen Wert für einen Schätzer $\hat{\theta}$ des unbekanntes Parameters θ heranzuziehen, welcher die Wahrscheinlichkeit der Realisation einer vorhandenen Stichprobe maximiert (Gautschi, 2010, S. 207 ff.). Sprich, es wird ausgehend von einer vorhandenen Stichprobe auf den gesuchten Parameter θ geschlossen. Die ML-Funktion L wird durch das Produkt der Wahrscheinlichkeits-, respektive Dichtefunktionen, der einzelnen unabhängig und identisch verteilten Beobachtungen $f(y|\theta)$ der Stichprobe definiert. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit der Realisation der konkreten Stichprobe in Abhängigkeit des Parameters θ eruiert (Stocker, 2016, S. 2 ff.):

$$L(\theta/Y) = \prod_{i=1}^n l(\theta/y_i)$$

Formel 1: Maximum-Likelihood-Funktion

Durch das Maximieren der entsprechenden Funktion erhält man folglich den ML-Schätzer $\hat{\theta}$ (Stocker, 2016, S. 3 f.). Dies erfolgt anhand der Gleichsetzung des Differentials erster Ordnung nach θ mit 0, mit der Bedingung dass die zweite Ableitung nach θ kleiner 0 sein muss (Stocker, 2016, S. 3 f.):

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$$

Aufgrund numerischer als auch statistischer Gründe bietet sich alternativ die Verwendung der logarithmierten Likelihood-Funktion an (Gautschi, S. 210 f.). Der Vorgang zur Bestimmung des Maximums verändert sich dabei nicht, wobei die Funktion wie folgt definiert wird:

$$\ln L(\theta/Y) = \prod_{i=1}^n \ln (l(\theta/y_i))$$

Evaluiert man nun den Mittelwert anhand der Log-ML-Funktion:

$$\ln L = -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln (2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (y_i - \mu)^2$$

durch die Differenzierung der entsprechenden Funktion nach μ :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}$$

so resultiert im Falle normalverteilter Zufallsvariablen die gewöhnliche Funktion zur Bestimmung des arithmetischen Mittelwerts (Dormann, 2013, S. 48 ff.). Dadurch wird ersichtlich, dass mittels der ML-Methode, im Vergleich zum arithmetischen Mittel, nur bedingt robustere Resultate evaluiert werden können (Stocker, 2016, S. 5 f.). Durch diese Schwachstelle wird die Robustheit der ML-Methode im Vergleich zu den nachfolgenden Methoden relativiert. An diesem Punkt setzt in der Folge die Methodik der M-Schätzer an.

Dementsprechend liegt nach Brosius (1998) der wesentliche Unterschied bei der Bestimmung des Mittelwerts beim M-Schätzer, verglichen mit der ML-Methode, in der ungleichen Gewichtung der einzelnen Stichprobenwerte. Das Ausmass der Gewichtung wird dabei durch die positive oder negative Entfernung eines Stichprobenwertes von den anderen Werten bestimmt. Je grösser diese Entfernung ist, desto geringer ist der Einfluss des Wertes auf den Schätzer. Die unterschiedlichen M-Schätzer unterscheiden sich entsprechend durch die unterschiedlich starke Gewichtung in Abhängigkeit des Abstandes zu den anderen Stichprobenwerten.

Der M-Schätzer wird im Allgemeinen wie folgt bestimmt (Ernst & Schurer, 2014, S. 440):

$$\hat{\theta}_M = \min_{\theta} \sum_{i=1}^n p(x_i|\theta)$$

Formel 2: Berechnung M-Schätzer

Dabei ist $p(x_i|\theta)$ eine beliebige Funktion, welche die verwendete Wahrscheinlichkeits-, respektive Dichtefunktion, in der ML-Methode ersetzt. Diese ist verhältnismässig weniger sensitiv gegenüber Extremwerten und führt somit zu einer Verbesserung der Robustheit der resultierenden Schätzwerte. Auf eine vertiefte Ausführung der mathematischen Grundlagen dieser Methoden wird an dieser Stelle verzichtet, mit Verweis auf die einschlägige Literatur für eine ausführliche Erläuterung.

Auf der Grundlage dieser verallgemeinerten Darstellung des M-Schätzers wurde in einer Studie von De Miguel & Nogales (2009) die Vorteilhaftigkeit von robusten Schätzern untersucht. Es konnte dabei festgestellt werden, dass die Stabilität des Portfolios in Bezug auf Veränderungen in der Renditeverteilung verbessert werden konnte. In einer weiteren Untersuchung von Perret-Gentil & Victoria-Feser (2003) wurde ebenfalls auf die verbesserte Robustheit der Portfolios bei der Verwendung von robusten Schätzern hingewiesen, in diesem Fall dem S-Schätzer. Dabei wurde vor allem auch die Optimalität dieses Schätzers im Vergleich zur Anwendung des ML-Schätzers illustriert. Aufgrund dieser Erkenntnisse wird die Herangehensweise der robusten Schätzer als akzeptable Alternative zur Reduzierung der Sensitivität der Portfoliogewichte angesehen (De Miguel & Nogales, 2009, S. 575).

4.2.1.2 Geschrumpfte Schätzer

Im Vergleich zu den oben aufgeführten robusten Schätzern, welche sich durch eine adaptierte Gewichtung der Ausgangsparameter auszeichnen, werden im Bereich der geschrumpften Schätzer die ursprünglich mit Unsicherheit behafteten Schätzwerte an einen vordefinierten Prior angepasst (Fabozzi, Huang & Zhou, 2010, S. 212 f.). Bei der Bestimmung des Mittelwerts nach der Methode von James & Stein (1961) wird dabei als Prior der durchschnittliche Mittelwert aller Stichprobenmittelwerte¹ herangezogen. Die einzelnen Werte werden im Ausmass des eruierten Schrumpfungsfaktor \hat{w} in die Richtung dieses Grand-Mean angepasst, respektive geschrumpft. Je weiter die individuellen Stichprobenmittelwerte vom durchschnittlichen Mittelwert entfernt sind, desto grösser ist das Ausmass der Schrumpfung. Durch diesen Prozess kann der Einfluss von Extremwerten in der Stichprobe reduziert werden, wodurch die Robustheit des Schätzers optimiert und folglich auch die Sensitivität des Portfolios reduziert werden kann. Die Darstellung der mathematischen Konzeption der geschrumpften Schätzer erfolgt im Wesentlichen anhand von Jorion (1986, S. 283 ff.) sowie Ernst & Schurer (2014, S. 447 ff.).

¹ im Englischen auch als „Grand-Mean“ bezeichnet (Jorion, 1986, S. 285)

Die Formel für den James-Stein-Schätzer definiert sich wie folgt:

$$\hat{\mu}_{JS} = (1 - \hat{w})Y + \hat{w}Y_0\tau$$

Formel 3: Berechnung James-Stein-Schätzer

Diese setzt sich aus τ als ein Vektor bestehend aus lauter Einsen und $Y = [\bar{r}_1 \dots \bar{r}_n]$ als dem Vektor von N historischen Mittelwerten der individuellen Wertpapiere zusammen, wobei \bar{r}_i wiederum die Mittelwerte der Renditen der einzelnen Anlagen darstellen:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{k} \sum_{r=t-k}^{t-1} r_{i,r}$$

Der als Prior festgelegte Wert in der Form des Grand-Mean ergibt sich aus:

$$Y_0 = \frac{1}{n} \sum_i^N \bar{r}_i$$

Aus Teilen dieser soeben beschriebenen Formulierungen setzt sich auch der eigentliche Schrumpfungsfaktor \hat{w} zusammen:

$$\hat{w} = \min \left(1, \frac{N - 2}{T(Y - Y_0\tau)' \Sigma^{-1} (Y - Y_0\tau)} \right)$$

Formel 4: Schrumpfungsfaktor James-Stein-Schätzer

In einer Studie von Chopra, Hensel & Turner (1993) wurde darauf aufbauend die Optimalität der Verwendung von entsprechenden Stein-Schätzern, verglichen mit der herkömmlichen Anwendung des MV-Ansatzes, evaluiert. Es konnte dabei festgestellt werden, dass sämtliche getesteten Varianten des Stein-Ansatzes eine unangepasste Version der MV-Optimierung in jeglicher Hinsicht dominieren. Sie weisen sowohl einen höheren Return, eine geringere Volatilität als auch ein grösseres Endvermögen aus.

Als eine weitere Methode im Bereich der geschrumpften Schätzer bestimmte Jorion (1986) den Bayes-Stein-Schätzer, welcher ebenfalls die Schrumpfung der einzelnen Stichprobenmittelwerte in Richtung eines globalen Mittelwerts anstrebt. Im Unterschied zum James-Stein-Schätzer wird hier allerdings die erwartete Rendite des MVPs als globaler Mittelwert angenommen, wohingegen der Prozess der Schrumpfung mit demjenigen des James-Stein-Schätzers kongruent ist. Begründet wird dies dadurch, dass bei der Bestimmung der Gewichte des MVP keine Annahmen bezüglich der erwarteten Rendite in die Berechnung einfließen und diese somit nur von den Werten der Varianz-Kovarianz-Matrix abhängig sind. Zusätzlich wird für die Bestimmung der Gewichte des MVP erneut der Vektor $\tau = [1, 1, \dots, 1]'$ miteinbezogen.

$$w_{MVP} = \frac{\tau' \Sigma^{-1}}{\tau' \Sigma^{-1} \tau}$$

Unter Berücksichtigung der in den vorhergehenden Abschnitten evaluierten Tatsache, dass Schätzfehler in Bezug auf die Risikoterme vernachlässigt werden können, wird das MVP somit weniger stark von Schätzfehlern beeinflusst.

Der Bayes-Stein-Schätzer ergibt sich dabei aus:

$$\hat{\mu}_{BS} = (1 - \hat{w})Y + \hat{w}\hat{\mu}_{MVP}\tau$$

Formel 5: Berechnung Bayes-Stein-Schätzer

Die Bestimmung der erwarteten Rendite des MVP als Prior wird wie folgt bestimmt:

$$\hat{\mu}_{MVP} = \frac{\tau' \Sigma^{-1} Y}{\tau' \Sigma^{-1} \tau}$$

Der Faktor, mit welchem die einzelnen empirischen Renditen in Richtung der Rendite des MVP angepasst werden ist definiert durch:

$$\hat{w} = \frac{N + 2}{(N + 2) + (Y - \hat{\mu}_{MVP}\tau)'T\Sigma^{-1}(Y - \hat{\mu}_{MVP}\tau)}$$

Formel 6: Schrumpfungsfaktor Bayes-Stein-Schätzer

mit N als die Anzahl der im Portfolio enthaltenen Assets sowie T als die Anzahl Perioden. Zusätzlich zur Anpassung der erwarteten Renditen wird aufgrund der Unbekanntheit von Σ eine Anpassung der Varianz-Kovarianz-Matrix nach Zellner & Chetty (1965) vorgeschlagen, mit S als die empirisch geschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix (Jorion, 1986, S. 286).

$$\hat{\Sigma} = \frac{T - 1}{T - N - 2} S$$

Formel 7: Anpassung Varianz-Kovarianz-Matrix

Mit der Absicht, die Auswirkungen der Schätzfehlerproblematik im Rahmen der Portfolioauswahl zu reduzieren, stellte Jorion (1985) in einer vorgängigen Studie bereits fest, dass die geschrumpften Schätzer die konventionellen empirischen Mittelwerte in Bezug auf die out-of-sample Performance dominieren. In der Folge konnte Jorion (1986) zusätzlich die Überlegenheit des Bayes-Stein-Schätzers, verglichen mit dem klassischen Ansatz, belegen.

4.3 Modellmodifikationen

In Ergänzung zu den bisher aufgeführten Herangehensweisen zur Optimierung des klassischen MV-Ansatzes werden im Folgenden Möglichkeiten zur Modifikation des Modells aufgeführt. Darunter werden in diesem Kontext das Modell von Black & Litterman (1992) sowie der Portfolio-Resampling-Ansatz nach Michaud (2008) subsumiert. Es werden dabei nur die allgemeinen Funktionsweisen der jeweiligen Methoden erläutert, mit Verweis auf die erwähnten Studien für eine vertiefte Analyse.

4.3.1 Black-Litterman-Modell

Der erste Ansatz im Bereich der Modellmodifikationen stellt das Gleichgewichtsmodell von Black & Litterman (1992) dar. Die Grundidee des BL-Modells besteht ebenfalls darin, eine Lösung für die in Abschnitt 3 definierten Problematiken des klassischen MV-Modells zu finden. Dies erfolgt durch die Bestimmung eines neuen Renditevektors μ_{BL} durch die Zusammenführung von gleichgewichteten erwarteten Renditen, abgeleitet vom

Marktportfolio², und den individuellen Erwartungen eines Investors (Becker & Gürtler, 2010, S. 3). Der Prozess, welcher dem Black-Litterman-Modell zu Grunde liegt, kann in drei Teilschritte gegliedert werden:



Abbildung 6: Prozess Black-Litterman-Modell
Quelle: Eigene Darstellung

Als Grundlage für die Anwendung des BL-Modells bedarf es dabei in einem ersten Schritt der Definition eines adäquaten Ausgangspunktes in Form der angesprochenen Gleichgewichtsrenditen. Dafür ziehen Black & Litterman (1992) die erwarteten Renditen des Marktportfolios heran, welche durch eine Rückwärtsoptimierung des MV-Ansatzes bestimmt werden. In einem zweiten Schritt werden als Ergänzung zu den bestimmten Gleichgewichtsrenditen die individuellen Annahmen der jeweiligen Anleger über die relative Performance einer Anlage quantifiziert und in den Prozess miteinbezogen. Je nach Zuversicht des Investors über die Eintretenswahrscheinlichkeit seiner getroffenen Annahmen werden die zum Schluss resultierenden BL-Renditen mehr oder weniger stark von den zuvor definierten Gleichgewichtsrenditen abweichen (He & Litterman, 1999, S. 1 f.). Letztlich werden die eruierten Referenzrenditen aus Schritt 1 mit den investorenabhängigen Annahmen aus Schritt 2 kombiniert, was letztlich zu den gesuchten BL-Renditen führt. Unter Einbezug dieser Renditen wird folglich der Optimierungsprozess nach dem MV-Ansatz durchgeführt. Dieser Vorgehensweise liegt die Prämisse zu Grunde, dass die tatsächlichen erwarteten Renditen nur kurzfristig vom Marktgleichgewicht abweichen (Black & Litterman, 1992, S. 29). Somit bietet das BL-Modell durch die Verwendung der

² Genauer handelt es sich um eine Ableitung des Marktportfolios, da eine vollständige Replikation des Marktportfolios nicht möglich ist (vgl. Roll (1977) zitiert in Becker & Gürtler (2010))

Gleichgewichtsrenditen eine stabile Grundlage mit der zusätzlichen Opportunität, kurzfristig durch Investorenannahmen die Performance des Marktes zu übertreffen (Cheung, 2009, S. 231 ff.).

4.3.2 Portfolio Resampling

Die zweite erwähnte Methode im Bereich der Modellmodifikationen bezieht sich auf den Portfolio-Resampling-Ansatz von Michaud (2008). Die Motivation dieses Ansatzes liegt ebenfalls, wie bereits beim BL-Modell, in der Minimierung der in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Problematiken des MV-Ansatzes. Die Vorgehensweise zur Verbesserung der Stabilität der Portfolios nach der RE-Methode von Michaud (2008) erfolgt dabei nach folgendem Schema:

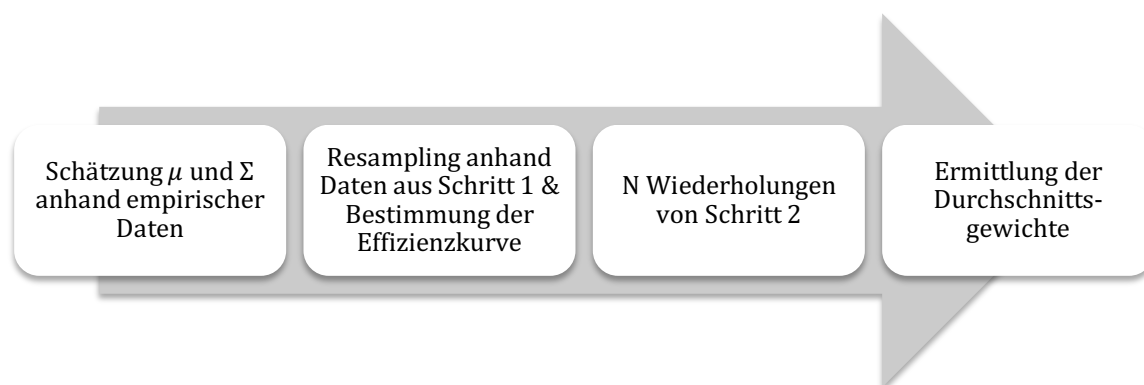


Abbildung 7: Prozess Portfolio-Resampling
Quelle: Eigene Darstellung

Nach Michaud (2008) bedarf es dabei in einem ersten Schritt der Bestimmung von Schätzwerten für μ und Σ , welche auf der Grundlage von empirischen Daten definiert werden. Im Anschluss werden diese Parameter als Ausgangspunkt für die Anwendung des Bootstrapping-Verfahrens³ herangezogen. Dabei werden aus einem entsprechenden Simulationsdurchlauf für jede ausgewählte Anlage T Renditeziehungen vorgenommen. Die daraus gewonnenen Werte für alle Anlagen werden im Anschluss für die Bestimmung eines neuen Renditevektors und der neuen Varianz-Kovarianz-Matrix verwendet. Darauf aufbauend wird anhand des standardmässigen MV-Optimierungsprozesses die dazugehörige Effizienzkurve als Spannweite zwischen MVP und MEP bestimmt. In der Folge wird

³ Stellt eine Methode des Resamplings zur Bestimmung neuer Stichproben dar (Michaud, 2008, S. 24)

Schritt zwei N-mal wiederholt, um zum Schluss den Durchschnitt der ranggleichen Portfoliogewichte bestimmen zu können, woraus letztlich die Resampled-Effizienzkurve resultiert.

5 Praktischer Vergleich der robusten Alternativen

Auf der Grundlage der in den vorangegangenen Abschnitten erläuterten Methoden zur Optimierung der Robustheit und Plausibilität von MV-Portfolios gilt es nun deren praktische Auswirkungen anhand eines Berechnungsbeispiels zu untersuchen. Dabei werden zum einen die Auswirkungen der robusten Methoden auf die Struktur eines Portfolios analysiert, um eine allfällige Verbesserung der Plausibilität der Portfoliostrukturen feststellen zu können. Zusätzlich soll dabei eruiert werden, inwiefern sich daraus abgeleitet eine Verbesserung der Diversifikation innerhalb des Portfolios beobachten lässt. Zum anderen werden die Implikationen der verschiedenen Ansätze auf die Sensitivität der resultierenden Portfolios in Bezug auf die Schätzfehlerproblematik untersucht. Die Berechnungen sowie sämtliche Abbildungen basieren auch in diesem Abschnitt auf der Anwendung von Excel.

5.1 Daten

Um die für die Analyse benötigten Portfolios erstellen zu können wird als Grundlage ein empirischer Datensatz herangezogen. Genauer handelt es sich dabei um die Monatsrenditen von fünf verschiedenen Aktien aus dem amerikanischen Markt während des Zeitraumes vom 01. Januar 2011 – 01. Januar 2016. Die Bestimmung genau dieses Zeitraumes sowie dieser Periodizität ergibt sich hauptsächlich aus den Ausführungen von Broadie (1993, S. 20 ff.) hinsichtlich der Problematik von Stationarität und Schätzfehlern. Stationarität beschreibt dabei die Güte, mit welcher die empirischen Daten als Schätzer für die zukünftige Entwicklung herangezogen werden können. Auf der anderen Seite bezieht sich die Problematik der Schätzfehler darauf, dass allfällige Ausreisser bei einem zu kleinen Stichprobenumfang einen grossen Einfluss auf die Schätzwerte haben können. Daraus resultiert ein unausweichlicher Zielkonflikt. Das bedeutet, dass auf die Verwendung eines zu langen Stichprobenzeitraumes verzichtet werden soll, um die Wahrscheinlichkeit von Nicht-Stationarität der Daten zu reduzieren. Gleichzeitig sollte jedoch der Stichprobenumfang über eine akzeptable Grösse verfügen, um die Wahrscheinlichkeit

und den Einfluss von Schätzfehlern zu reduzieren. Die Bestimmung der Datengrundlage folgt somit aus dieser Argumentation sowie der zusätzlichen Befürwortung für die Verwendung von Monatsrenditen durch Jobson & Korkie (1980, S. 544 f.). Die Bestimmung der genauen Periodenlänge von 60 Monaten ergibt sich aus den Ausführungen von Chopra et al. (1993, S. 846 f.).

Folglich ergibt sich ein Beobachtungszeitraum von fünf Jahren, bestehend auf 60 Datenpunkten pro Aktie in der Form von stetigen Renditen. Die Berechnung der Renditen erfolgt dabei nach:

$$R_{mt} = \ln(P_t / P_{t-1}) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

Formel 8: Berechnung Ln-Rendite

- R_{mt} = Rendite der Anlage in Periode t
- P_t = Kurs des Anlage in Periode t
- P_{t-1} = Kurs des Anlage in Periode t-1
- \ln = Natürlicher Logarithmus

Um die Darstellung der verwendeten Daten zu vereinheitlichen werden diese mit dem entsprechenden Skalierungsfaktor annualisiert. Dies wird durch die Multiplikation der evaluierten monatlichen Werte für μ_i , σ_i^2 und σ_{ij} mit dem Faktor 12 erreicht. Die spezifische Auswahl der entsprechenden Aktien ergibt sich im Wesentlichen aufgrund der unterschiedlichen Branchenzugehörigkeit und der dadurch erwartet geringeren Korrelation. Dadurch fiel die Auswahl auf Blackrock (Finanz-, Beteiligungs- & andere diversif. Ges.), Johnson & Johnson (Pharmazeutik, Kosmetik & med. Produkte), P&G (Konsumgüter), Boeing (Flugzeug- & Raumfahrtindustrie) sowie General Electric (Elektrische Geräte & Komponenten).

Die Inputparameter zur Bestimmung des Ausgangsportfolios setzen sich somit wie folgt zusammen:

Aktie	Kürzel	Erwartete Rendite	Standardabweichung
Blackrock	BLK	11.21%	23.30%
Johnson & Johnson	JNJ	9.39%	14.17%
P&G	PG	3.81	12.98%
Boeing	BA	14.99%	21.12%
General Electrics	GE	10.38%	20.72%

Tabelle 1: Empirische Inputparameter des Ausgangsportfolios
Quelle: Eigene Darstellung

Zur Darstellung des statistischen Zusammenhangs der einzelnen Anlagen dient die evaluierte Korrelationsstruktur, welche in der folgenden Tabelle dargestellt wird:

	BLK	JNJ	PG	BA	GE
BLK	1.000	0.610	0.566	0.659	0.677
JNJ	0.610	1.000	0.603	0.556	0.542
PG	0.566	0.603	1.000	0.258	0.432
BA	0.659	0.556	0.258	1.000	0.588
GE	0.677	0.542	0.432	0.588	1.000

Tabelle 2: Korrelationsstruktur
Quelle: Eigene Darstellung

5.2 Ausgangslage

Um die effektiven Auswirkungen der verwendeten Optimierungsmethoden analysieren zu können, bedarf es zu Beginn der Bestimmung von Vergleichsportfolios. Dafür werden zehn unterschiedliche Portfolios definiert, welche anhand unterschiedlicher Zielrenditen bestimmt werden. Als obere und untere Grenze der Spannweite werden das MVP sowie das ertragsmaximale Portfolio (MEP) herangezogen, dies unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion sowie der Non-Negativ-Einschränkung.

$$MVP = \min w' \Sigma w$$

$$MEP = \max w' \mu$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Für die Bestimmung der weiteren Portfolios wird auf die Risikominimierungsformulierung (siehe Abschnitt 2) zurückgegriffen, unter Berücksichtigung der folgenden Nebenbedingung:

$$w' \mu = r^*$$

mit r^* als Zielrendite, bestimmt durch die lineare Abstufung der Zielrendite vom MEP zum MVP durch:

$$\frac{r_{MEP} - r_{MVP}}{\text{Anzahl Portfolios} - 1}$$

Nach der Bestimmung des MVP, des MEP sowie der weiteren effizienten Portfolios kann daraus das entsprechende Set an Ausgangsportfolios visualisiert werden, dargestellt in Abbildung 8:

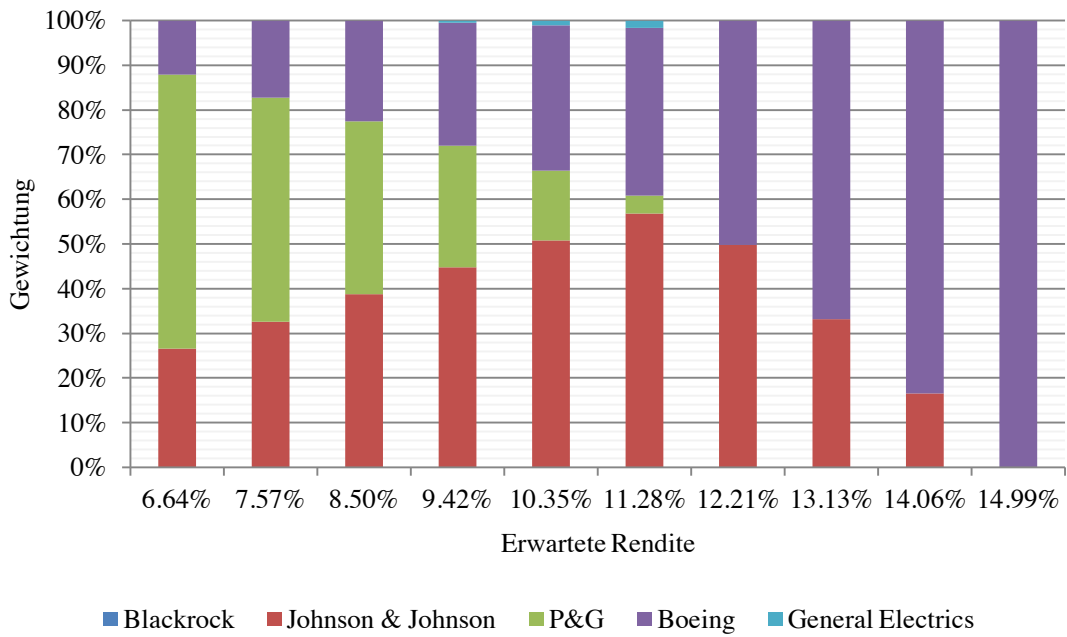


Abbildung 8: Portfoliostrukturen empirische Schätzer
 Quelle: Eigene Darstellung

Daraus kann die Menge aller effizienten Portfolios in Form einer Effizienzkurve abgeleitet werden:

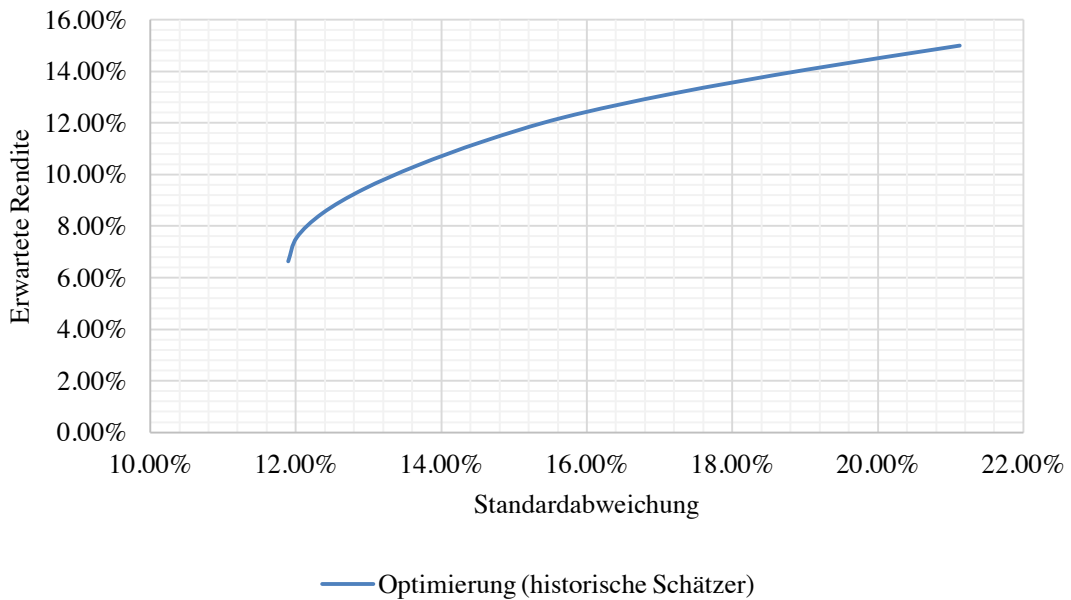


Abbildung 9: Effizienzkurve empirische Schätzer
 Quelle: Eigene Darstellung

5.3 Struktur der Portfolios

In einem ersten Vergleich soll nun die veränderte Portfoliostruktur analysiert werden, welche sich infolge der Anwendung der Methoden aus der robusten Optimierung ergibt. Aufgrund der Tatsache, dass Short-Sales in der Praxis oft unerwünscht, respektive aufgrund von diversen Einschränkungen nicht realisierbar sind, wird die Non-Negativ-Einschränkung in allen folgenden Ausführungen als Grundvoraussetzung eingeführt.

5.3.1 Beschränkung der Portfoliogewichte

Zu Beginn wird die Gewichtung und somit die Struktur des Ausgangsportfolios mit derjenigen Zusammensetzung verglichen, welche sich bei einer minimalen oder maximalen Einschränkung von w_i ergibt. Dadurch soll erreicht werden, dass die in Abbildung 8 erkennbaren Extrempositionen reduziert werden und sich folglich besser diversifizierte Portfolios ergeben. Um die starke Übergewichtung in den Positionen JNJ, PE und BE zu verringern, wird zuerst das maximale Gewicht der einzelnen Anlagen auf 50% des gesamten Anlagevolumens beschränkt. Die Beschränkung wird dabei für sämtliche Anlagen eingeführt.

$$w_i \leq 0.5$$

Nach der erneuten Durchführung des Optimierungsvorgangs mittels der Risikominimierungsformulierung und der Bestimmung der unterschiedlichen Portfolios kann wiederum das Set an Portfolios in einem Diagramm dargestellt werden. Dieses wird in Abbildung 10 abgebildet:

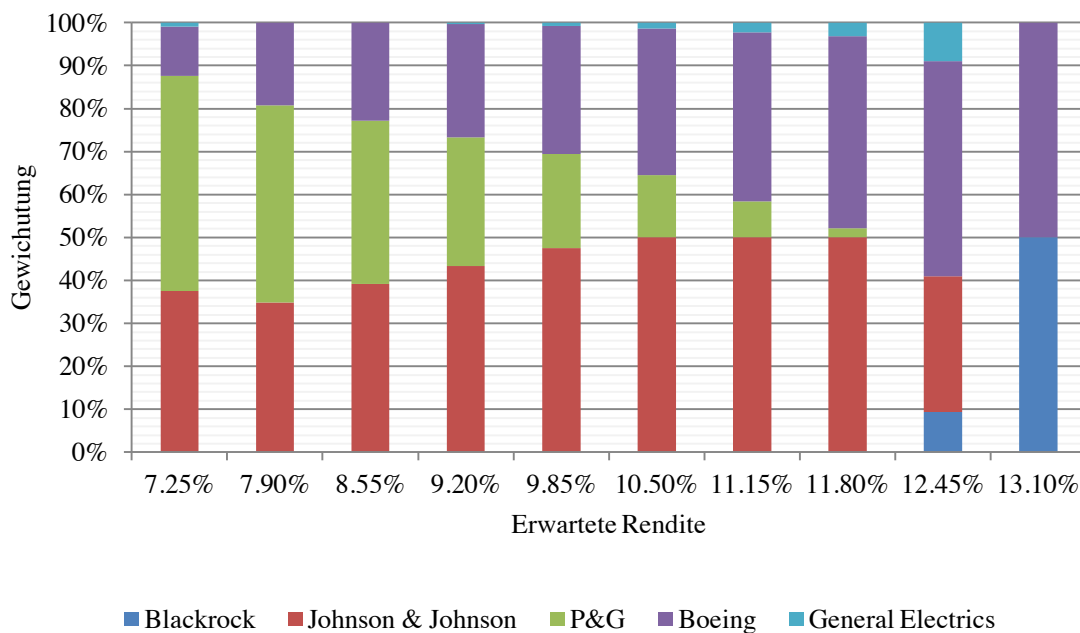


Abbildung 10: Portfoliostrukturen Einschränkung $w_i \leq 0.5$
 Quelle: Eigene Darstellung

Durch die Einführung der Beschränkung von w_i lässt sich eine breitere Diversifikation innerhalb des Portfoliosets erkennen, auch wenn die Veränderungen teilweise nur marginal sind. Dies erfolgt hauptsächlich durch die Umverteilung von denjenigen Anlagen, welche zuvor mit einer Gewichtung von über 50% aufgenommen wurden, zu den stark untergewichteten Anlagen. Ebenfalls von Interesse ist nebst der Veränderung der Portfoliostruktur auch die Auswirkung auf die zu Grunde liegende Effizienzkurve. Die Tendenz der Veränderung lässt sich bereits teilweise aus den abweichenden Zielrenditen auf der horizontalen Achse in Abbildung 10 erkennen. Die Spannweite der realisierbaren Renditen hat sich dabei reduziert, was folglich auch zu einer Begrenzung der Effizienzkurve führen wird.

Zunächst wird jedoch eine erneute Durchführung des Optimierungsverfahrens angestrebt, ebenfalls mit einer Einschränkung von w_i . In diesem Fall wird zusätzlich zur maximalen Gewichtung von 50% eine minimale Gewichtung von 10% eingeführt, damit sämtliche Titel zumindest teilweise in die Portfolios aufgenommen werden.

$$0.1 \leq w_i \leq 0.5$$

Im Anschluss an die durchgeführte Optimierung lassen sich die Portfoliostrukturen wiederum in einem Diagramm veranschaulichen, um die Veränderungen analysieren zu können.

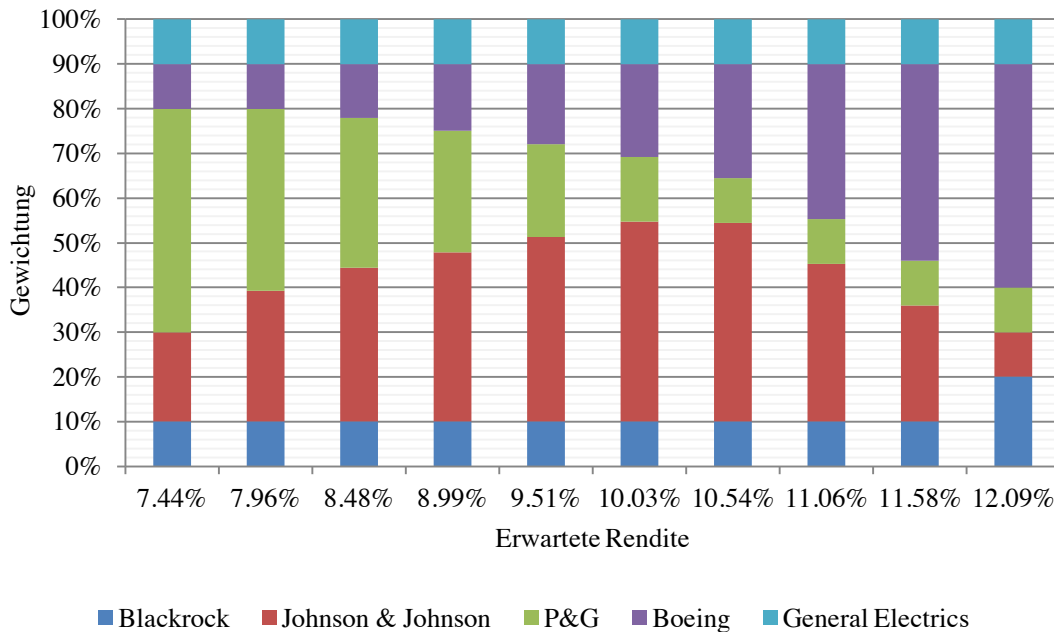


Abbildung 11: Portfoliostrukturen Einschränkung $0.1 \leq w_i \leq 0.5$
 Quelle: Eigene Darstellung

Die zusätzliche Einschränkung führt zu einer Verbesserung des Diversifikationsgrades innerhalb der Portfoliostrukturen. Durch die Mindestgewichtung von 10% werden auch die Titel GE und BLK erstmals durchgehend in einem erkennbaren Ausmass miteinbezogen. Trotz dieses positiven Aspektes muss allerdings auch hier festgestellt werden, dass sich die Spannweite der realisierbaren Zielrenditen auf der horizontalen Achse erneut reduziert hat, was auf einen zusätzlichen Effizienzverlust hindeutet. Wie bereits zuvor erwähnt sollte darüber die Darstellung der Effizienzkurven Auskunft geben. Infolge dessen werden die Effizienzkurven der uneingeschränkten Optimierung sowie der eingeschränkten Versionen von w_i für einen Vergleich in Abbildung 12 dargestellt.

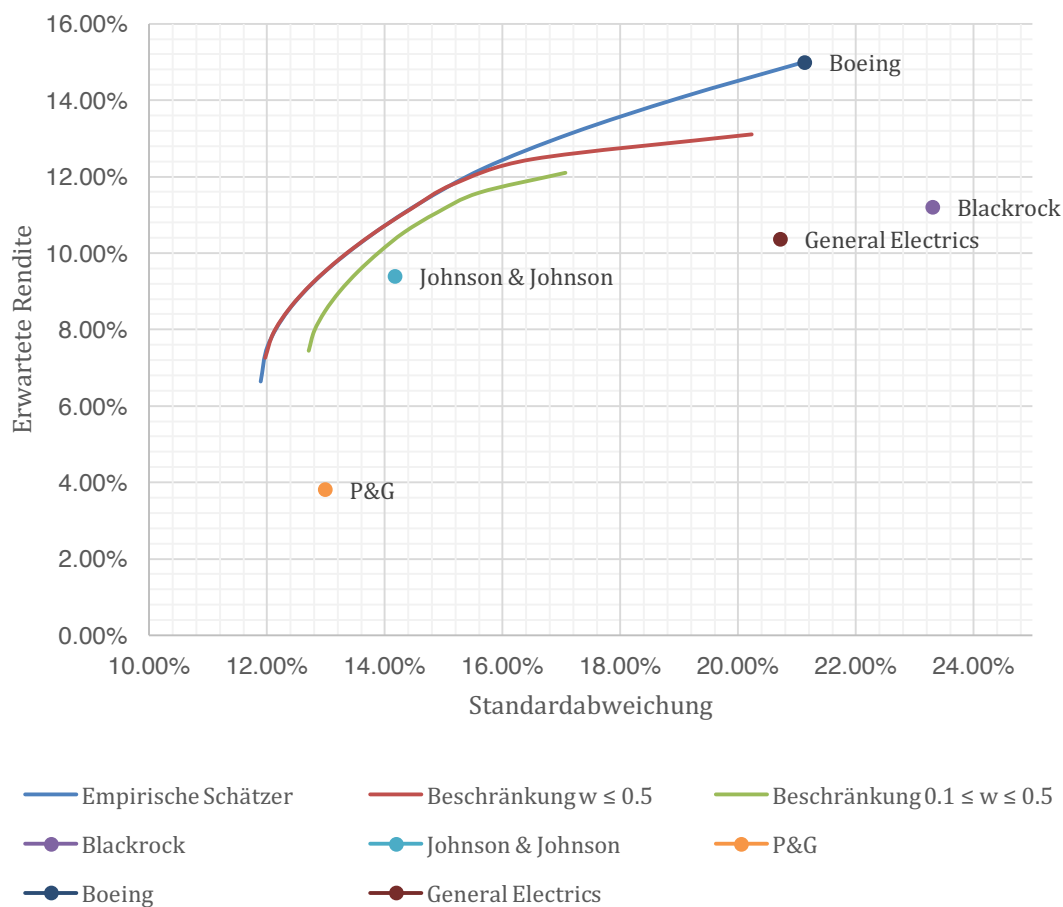


Abbildung 12: Vergleich Effizienzkurven Einführung von Restriktionen
 Quelle: Eigene Darstellung

Die zuvor bereits angesprochenen Effizienzverluste infolge der Einschränkung von w_i , evaluiert durch die veränderten Zielrenditen, lassen sich nun auch anhand der dargestellten Effizienzkurven erkennen. Zum einen kommen die Kurven der jeweils eingeschränkten Optimierung unterhalb derjenigen des uneingeschränkten Verfahrens zu liegen. Zum anderen ist eine deutliche Verkürzung der Effizienzkurven der eingeschränkten Versionen erkennbar. Vor allem die Einführung sowohl einer minimalen als auch einer maximalen Beschränkung hat einen grossen Einfluss auf die Realisierungsmöglichkeiten der Portfolios.

Somit lässt sich feststellen, dass die Einschränkung der Portfoliogewichte einen positiven Einfluss auf den Diversifikationsgrad der resultierenden Portfolios hat. Die Portfoliostrukturen werden ausgeglichener und Extrempositionen können reduziert werden. Auf der anderen Seite müssen durch die Einschränkungen von w_i bei der Realisierung der

Portfolios Effizienzverluste hingenommen werden. Vor allem eine zu starke Einschränkung kann letztlich dazu führen, dass die Portfolios nur noch durch die Einschränkungen selbst bestimmt werden. Folglich sollte eine zu starke allgemeine Beschränkung vermieden werden. Alternativ bietet sich die Begrenzung individueller Gewichte an, um der Schätzfehlerproblematik bei einzelnen Anlagen entgegen zu wirken. Dies würde sich vor allem bei denjenigen Anlagen anbieten, welche mit einer grösseren Wahrscheinlichkeit anfällig gegenüber Schätzfehlern sind. Nach Michaud (1989) wären dies folglich Anlagen mit einer vergleichsweise hohen erwarteten Rendite, einer geringen Standardabweichung sowie einer geringen Korrelation. Zur Bestimmung der einzuschränkenden Anlagen sollte jedoch zusätzlich eine Sensitivitätsanalyse für die einzelnen Titel durchgeführt werden, um deren effektive Sensitivität auf Schätzfehler festzustellen.

5.3.2 Geschrumpfte Schätzer

In den folgenden Abschnitten sollen nun die Auswirkungen von modifizierten Schätzern, genauer den geschrumpften Schätzern, auf die Portfoliostrukturen analysiert werden. Dazu werden vorab basierend auf den Daten aus Tabelle 2 die optimierten Werte für die erwarteten Renditen in Form des James-Stein- und des Bayes-Stein-Schätzers evaluiert. Dies erfolgt unter Verwendung der Ausführungen aus Abschnitt 4.2.1.3, in Anlehnung an Ernst & Schurer (2014, S. 462 ff.). Im Anschluss wird erneut die MV-Optimierung durch die Minimierung von σ_p^2 durchgeführt, wobei die empirischen Schätzwerte für die erwarteten Renditen durch die geschrumpften Werte ersetzt werden. Um die Auswirkungen einer divergierenden Renditeschätzung auch isoliert betrachten zu können, werden die BS-Schätzer mit und ohne die zusätzliche Anpassung von Σ nach Zellner & Chetty (1965) bestimmt.

Als Resultat für die optimierten Werte haben sich die folgenden erwarteten Renditen ergeben:

	BLK	JNJ	PG	BA	GE
Empirische Rendite	11.21%	9.39%	3.81	14.99%	10.38%
JS-Schätzer	11.06%	9.46%	4.55%	14.38%	10.33%
BS-Schätzer	9.88%	8.56%	4.50%	12.63%	9.27%
BS-Schätzer (mit Anpassung Σ)	9.86%	8.54%	4.50%	12.60%	9.26%

Tabelle 3: Vergleich geschrumpfte und empirische erwartete Renditen
Quelle: Eigene Darstellung

Um die absoluten Unterschiede zwischen den verschiedenen erwarteten Renditen besser einschätzen zu können werden diese zusätzlich in einem Diagramm visualisiert:

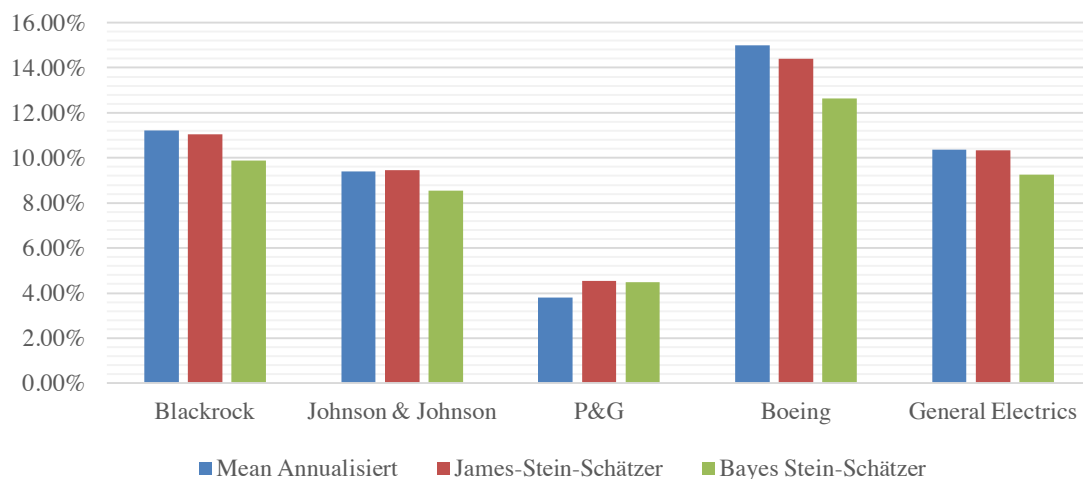


Abbildung 13: Vergleich der Schätzwerte für die erwartete Rendite
Quelle: Eigene Darstellung

Bei der Bestimmung des JS-Schätzers hat sich als Annäherungswert ein Grand-Mean von 9.96% ergeben. Folglich wurden die darüber liegenden Renditen für BLK, BA und GE reduziert und die darunterliegenden von JNJ und PG erhöht. Im Falle des BS-Schätzers wurde als Prior die erwartete Rendite des MVP von 6.32% herangezogen. Infolge der BS-Schätzung wurde somit lediglich die Rendite von PG erhöht, die restlichen Werte wurden nach unten angepasst. Wie aus Tabelle 3 ersichtlich wird, hat die zusätzliche Anpassung von Σ die BS-Schätzwerte nur minimal verändert, wodurch sich spezifische Erläuterun-

gen zu diesen Werten erübrigen. Es lässt sich im Allgemeinen feststellen, dass die Veränderungen bei den geschrumpften Schätzern im Vergleich zu den Renditen aus der Empirie nur minimal sind. Dies jedoch unter Berücksichtigung der evaluierten Tatsache, dass die MV-Optimierung bereits bei geringen Schätzfehlern in der erwarteten Rendite eine hohe Sensitivität aufweist.

In der Folge wird nun die MV-Optimierung mit den geschrumpften Schätzern und unter Berücksichtigung der entsprechenden Nebenbedingungen aus Abschnitt 5.2 durchgeführt. Daraus resultiert für die JS-Schätzer das in Abbildung 14 dargestellte Set an Portfolios:

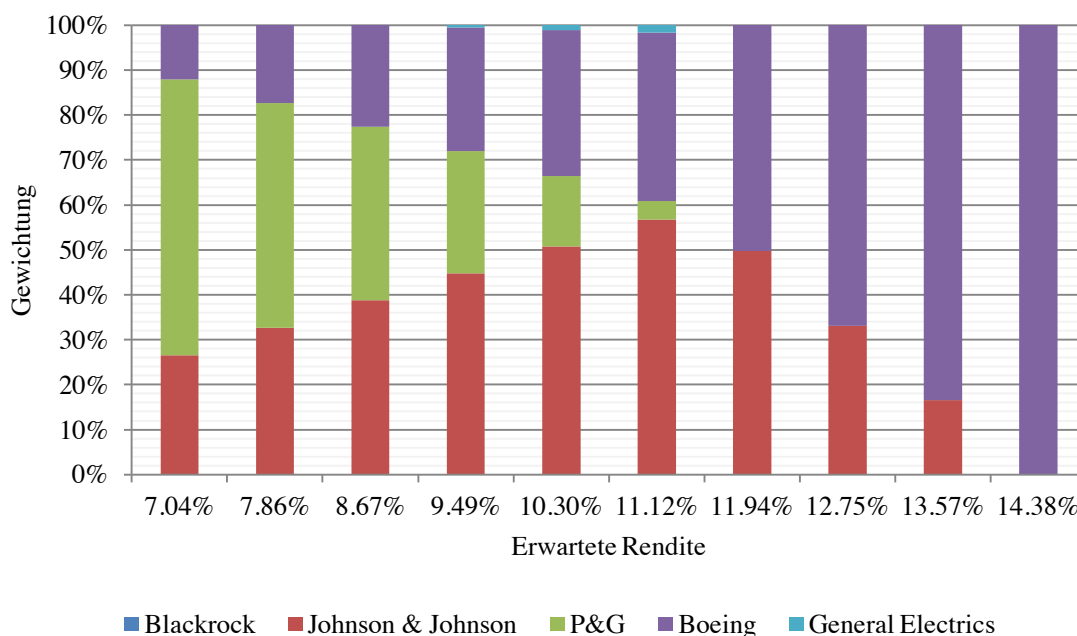


Abbildung 14: Portfoliostrukturen James-Stein-Schätzer
Quelle: Eigene Darstellung

Die Verwendung des geschrumpften Schätzers scheint dabei keinen Einfluss auf die Portfoliostrukturen zu haben. Dabei gilt es zu beachten, dass die erwarteten Renditen der Anlagen bei der Bestimmung der Portfoliogewichte durch die Minimierung von σ_p^2 keine direkte Rolle spielen. Folglich ist die unveränderte Portfoliostruktur intuitiv erklärbar. Hingegen hat sich wie bereits bei der Einschränkung von w_i eine Veränderung in der Spannweite der Zielrenditen auf der horizontalen Achse ergeben. Dabei kommt die ma-

ximal erreichbare Rendite mit 14.38% leicht unter derjenigen für die empirischen Schätzer zu liegen. Die erwartete Rendite des MVP liegt hingegen leicht darüber. Dies wird dadurch begründet, dass bei der Bestimmung des MVP mehrheitlich diejenigen Assets aufgenommen werden, welche infolge der Schrumpfung eine höhere erwartete Rendite erhielten. Durch die unveränderte Portfoliostruktur wird die erwartete Rendite des MVP entsprechend erhöht.

In Gegenwart der zusätzlich bestimmten Werte für den BS-Schätzer kann derselbe Prozess der Optimierung erneut durchgeführt werden. Dabei resultiert die in Abbildung 15 dargestellten Portfoliostrukturen:

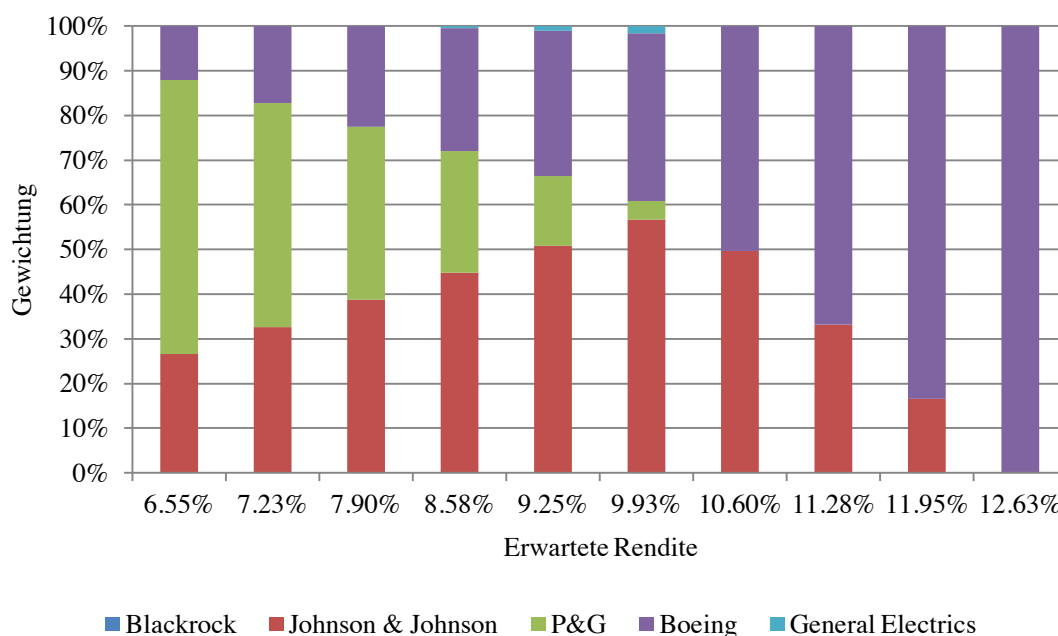


Abbildung 15: Portfoliostrukturen BS-Schätzer
Quelle: Eigene Darstellung

Auch in diesem Fall lässt sich keine Veränderung in den Portfoliostrukturen feststellen. Die Begründung dieses Resultats lässt sich aus der vorherigen Argumentation zu den Ergebnissen des JS-Schätzers ableiten. Jedoch lässt sich identisch zu den vorherigen Optimierungen beobachten, dass es zu einer Veränderung in der Spannweite der Zielrenditen zwischen dem MVP und dem MEP gekommen ist. Im Vergleich zum JS-Schätzer liegt in diesem Fall nebst der Rendite des MEP auch die Rendite des MVP für den BS-Schätzer unter derjenigen für die empirischen Schätzer. In Ergänzung zu den Auswirkungen der

alleinigen Veränderung der erwarteten Rendite wird in einem zusätzlichen Optimierungsverfahren die Optimierung von Σ nach Zellner & Chetty (1965) miteinbezogen. Dabei kann festgestellt werden, dass sich die Aufteilung auf die einzelnen Werte gar nicht und die Spannweite der horizontalen Achse nur geringfügig verändert, verglichen mit dem BS-Schätzer ohne Anpassung von Σ . Obwohl Σ bei der Bestimmung der Portfolios eine wesentliche Rolle spielt, scheint die Adaption in diesem konkreten Fall keine entscheidende Veränderung zu bewirken. Dies ist im Wesentlichen auf die Eigenheiten der Werte aus der Datengrundlage zurückzuführen, welche zu nur minimalen Anpassungen innerhalb von Σ führen. Auf eine separate Darstellung der Portfoliostrukturen wird folglich verzichtet. Wie bereits bei den Einschränkungen von w_i gilt es auch bei den geschrumpften Schätzern zusätzlich die Auswirkungen auf die Effizienzkurven zu analysieren. Dabei wird sowohl auf die Verkürzung als auch auf die Verschiebung der Kurven geachtet. Für diesen Vergleich werden die Effizienzkurven der Portfoliostrukturen der empirischen Schätzer, der JS-Schätzer und der BS-Schätzer in Abbildung 16 miteinander verglichen:

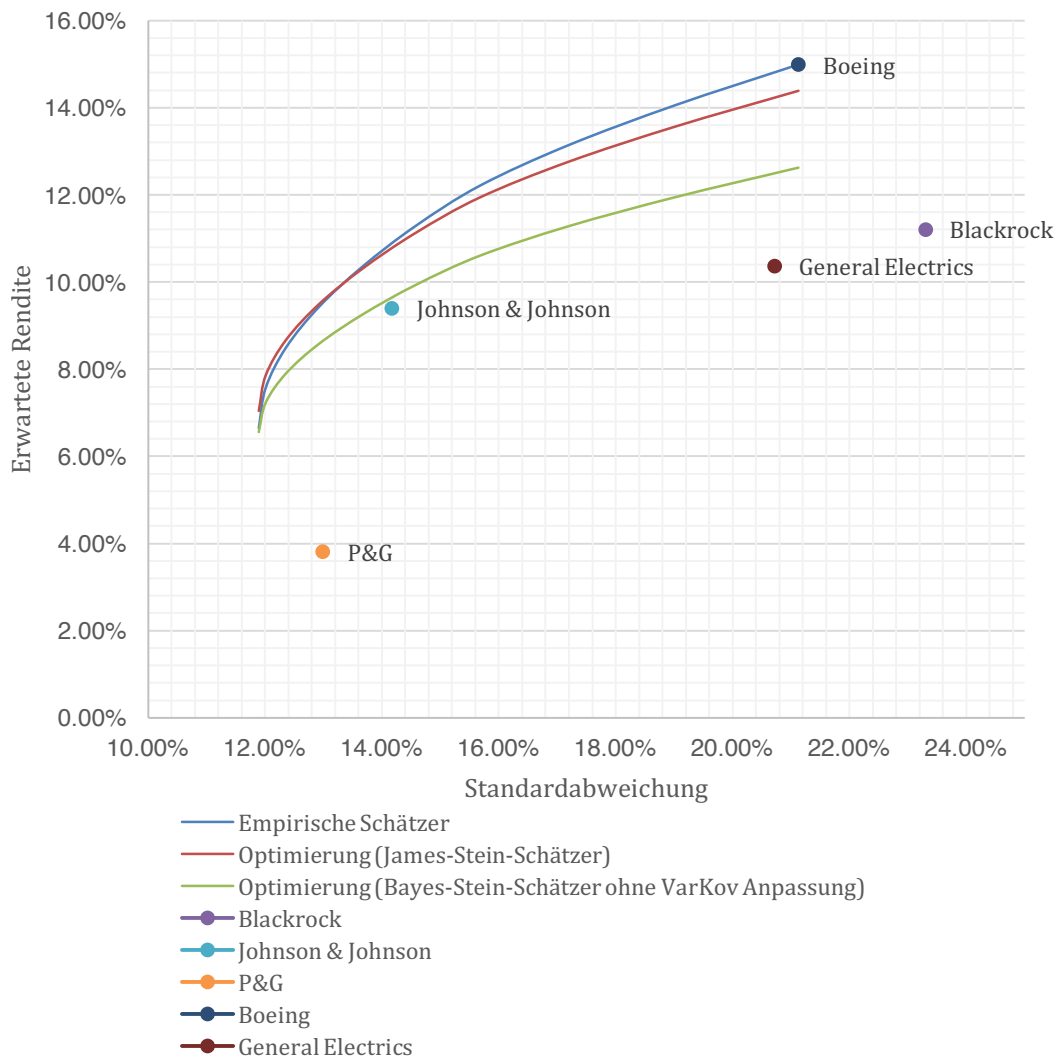


Abbildung 16: Vergleich Effizienzkurven Optimierung Inputparameter
 Quelle: Eigene Darstellung

Wie bereits bei den Einschränkungen der Gewichte zu erkennen war, findet auch bei der Anwendung der geschrumpften Schätzer eine Verschiebung der Effizienzkurven nach unten statt. Somit wird die maximal erreichbare Rendite reduziert, was sich bereits bei der Betrachtung der Portfoliostrukturen erkennen lässt. Im Gegensatz zur Beschränkung von w_i lässt sich jedoch keine erkennbare Verkürzung der Effizienzkurven feststellen, was für die Optimalität der neuen Schätzwerte spricht. Vergleicht man nur die Effizienzkurven der beiden geschrumpften Schätzer, so lässt sich erkennen, dass diejenige Kurve des BS-Schätzers weitaus stärker in Richtung der horizontalen Achse verschoben wird. Der Grund dafür liegt hauptsächlich in der Verwendung eines unterschiedlichen Priors

bei der Bestimmung der Schätzwerte. Die Effizienzkurve des BS-Schätzer mit einer zusätzlichen Anpassung von Σ kommt beinahe kongruent zur Kurve für der BS-Schätzer ohne Anpassung von Σ zu liegen. In der Folge erübrigt sich die zusätzliche Darstellung dieser Effizienzkurve in Abbildung 16.

5.4 Sensitivität der Portfolios

In Ergänzung zu den zuvor dargestellten Auswirkungen der robusten Methoden auf die Portfoliostrukturen wird nun die Sensitivität der resultierenden Portfolios, respektive deren Gewichte, analysiert. Dabei wird untersucht, ob durch die Anwendung ausgewählter robuster Methoden die Sensitivität der Gewichte reduziert werden kann.

Als Ausgangsportfolio für die Analyse wird dasjenige Portfolio herangezogen, welches infolge des Optimierungsprozesses das höchstmögliche Sharpe-Ratio ausweist. Die Verwendung des MVP für die Untersuchung ist insofern nicht sinnvoll, als dass, wie bereits zuvor erwähnt, die Gewichte im Optimierungsprozess unabhängig von der erwarteten Rendite der jeweiligen Anlagen bestimmt wird. Wie die vorherigen Resultate gezeigt haben, würden die Gewichte bei einer Veränderung der erwarteten Rendite unverändert bleiben. Die Berechnung der Sharpe-Ratio der einzelnen Portfolios wird anhand der nachfolgenden Formel bestimmt:

$$\text{Sharpe - Ratio} = \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}; \text{ mit } r_f = 0$$

Formel 9: Berechnung Sharpe-Ratio

Aufgrund der momentanen Marktsituation wird in diesem Kontext die zusätzliche Annahme getroffen, dass der risikofreie Zinssatz bei 0% liegt. Daraus ergibt sich die Grundlage für den dieser Analyse zugrundeliegenden Optimierungsprozess, welcher durch die folgenden Bedingungen bestimmt wird:

$$\begin{aligned} \max & \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i} \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \geq 0 \end{aligned}$$

Um die Sensitivität der Portfolios bestimmen zu können, werden wie in der zu Beginn durchgeführten Sensitivitätsanalyse die als wahr angenommenen Parameter durch Schätzfehler verändert. Der Fokus liegt dabei auf der Analyse von Schätzfehlern bei der Bestimmung der erwarteten Rendite. Die daraus resultierenden Werte werden im Anschluss in den Optimierungsprozess implementiert, um deren Auswirkungen auf die Portfoliostrukturierung bestimmen zu können. Dabei soll die ursprüngliche Gewichtung einer Anlage im Ausgangsportfolio mit der veränderten durchschnittlichen Gewichtung derselben Anlage verglichen werden. Dieser ergibt sich als Mittelwert der Gewichte dieser Anlage, welche aus einer Veränderung des wahren Parameters μ derjenigen oder einer anderen Anlage um +10% resultiert. Die Parameter zur Bestimmung des Ausgangsportfolios sind dabei identisch zu den Werten aus Abschnitt 5.2.

Die aus den Optimierungsprozessen resultierenden Portfoliogewichte bei der Verwendung von empirischen Schätzern sind in Tabelle 4 ersichtlich:

	BLK	JNJ	PG	BA	GE
Empirische Rendite	0.00%	53.97%	0.00%	46.00%	0.03%
$\bar{\Delta}$ Empirische Rendite Δ_i	0.00%	53.02%	0.00%	45.36%	1.62%
Δ Absolut	0.00%	-0.95%	0.00%	-0.64%	1.59%
Δ in %	0.00%	-1.76%	0.00%	-1.39%	5585%

Tabelle 4: Sensitivität der Gewichte (Empirische Rendite)
Quelle: Eigene Darstellung

Die dargestellten Resultate zeigen sowohl die absolute als auch die prozentuale Veränderung der Gewichte der Anlagen infolge einer fehlerhaften Schätzung der erwarteten Renditen. Dabei lässt sich erkennen, dass die Sensitivität der Gewichte bei den im Portfolio vorhandenen Wertpapieren JNJ und BA gering ist. Einzig die Abweichung der Gewichtung von GE im Vergleich zum Ausgangsgewicht zeigt die hohe Sensitivität dieses Inputparameters auf. Die beiden anderen Anlagen BLK und PG werden zu keinem Zeitpunkt Bestandteil des Portfolios, wodurch keine Aussagen zur Sensitivität derer Gewichte gemacht werden können.

Vergleicht man nun die oben aufgeführten Resultate mit der Sensitivität der Gewichte bei einer Einschränkung von $w_i \leq 0.5$ in Tabelle 5, so lässt sich erkennen, dass zumindest eine teilweise Verbesserung der Robustheit erzielt werden kann.

	BLK	JNJ	PG	BA	GE
$w \leq 0.5$	0.00%	50.00%	0.00%	48.31%	1.69%
$\emptyset w \leq 0.5 \Delta_i$	0.00%	49.95%	0.00%	47.22%	2.83%
Δ Absolut	0.00%	-0.05%	0.00%	-1.09%	1.14%
Δ in %	n. a.	-0.11%	n. a.	-2.25%	67.72%

Tabelle 5: Sensitivität der Gewichte (Einschränkung $w_i \leq 0.5$)

Quelle: Eigene Darstellung

Die Stärke der Veränderung der Gewichte der Anlagen JNJ und vor allem diejenige von GE werden durch die Einschränkung positiv beeinflusst. Die Sensitivität von BA kann hingegen nicht minimiert werden, respektive es lässt sich durch die Beschränkung von w_i eine erhöhte Sensitivität feststellen. Die in Tabelle 6 dargestellten Werte zeigen die veränderten Gewichte bei einer zusätzlichen Nebenbedingung von $0.1 \leq w_i$. Wie bereits in Tabelle 5 zu erkennen war, kann durch die Einschränkung von w_i die Anfälligkeit gegenüber Schätzfehlern reduziert werden.

	BLK	JNJ	PG	BA	GE
$0.1 \leq w \leq 0.5$	10.00%	31.79%	10.00%	38.21%	10.00%
$\emptyset 0.1 \leq w \leq 0.5 \Delta_i$	10.00%	31.68%	10.00%	38.32%	10.00%
Δ Absolut	0.00%	-0.11%	0.00%	0.11%	0.00%
Δ in %	0.00%	-0.34%	0.00%	0.28%	0.00%

Tabelle 6: Sensitivität der Gewichte (Einschränkung $0.1 \leq w_i \leq 0.5$)

Quelle: Eigene Darstellung

Die Einführung dieser zusätzlichen Nebenbedingung führt bei den Titeln BLK, PG und GE zu einer unveränderten Gewichtung. Zusätzlich werden die beiden anderen Anlagen JNJ und BA durch die fehlerhaften Schätzungen nur noch geringfügig beeinflusst. Allerdings wird die hier festgestellte Optimalität dieser intuitiven Einschränkungen von w_i durch die Erkenntnisse aus 5.3.1 relativiert. Obwohl eine verbesserte Diversifikation

und nun auch eine geringere Sensitivität nachgewiesen werden kann, deuten die Veränderungen bei den Effizienzkurven darauf hin, dass durch die Einschränkung von w_i nur eine bedingte Optimalität erreicht werden kann.

Nebst des Einflusses einer Einschränkung von w_i wird auch die veränderte Sensitivität der Gewichte bei der Verwendung von robusten Schätzern analysiert. Repräsentativ dafür stehen die eruierten Werte in Tabelle 7, welche die Veränderungen in der Portfoliostrukturierung bei der Verwendung des JS-Schätzer aufzeigen.

	BLK	JNJ	PG	BA	GE
JS-Schätzer	0.00%	57.49%	0.00%	41.19%	1.31%
\emptyset JS-Schätzer Δ_i	0.00%	56.27%	0.58%	41.03%	2.11%
Δ Absolut	0.00%	-1.22%	0.58%	-0.16%	0.80%
Δ in %	n. a.	-2.13%	n. a.	-0.39%	60.65%

Tabelle 7: Sensitivität der Gewichte (JS-Schätzer)
Quelle: Eigene Darstellung

Im Vergleich zur Sensitivität der empirischen Schätzer lässt sich erkennen, dass die Anfälligkeit gegenüber Schätzfehlern durch robuste Schätzer zumindest teilweise reduziert werden kann. Dies zeigt sich in den verringerten Veränderungen der Gewichte von BA und GE. Die Auswirkung des Schätzfehlers bei JNJ konnte hingegen nicht positiv beeinflusst werden. Durch die Verwendung der robusten Schätzer wurde teilweise zusätzlich der Titel PG ins Portfolio aufgenommen, was auf eine verbesserte Diversifikation schließen lässt. Infolge dessen hat sich bei dieser Anlage eine zusätzliche Veränderung in der Gewichtung ergeben, welche bei den empirischen Schätzwerten nicht vorhanden war. Zuletzt wird dieselbe Analyse bei der Verwendung des BS-Schätzers durchgeführt. Die entsprechenden Resultate werden in Tabelle 8 ausgewiesen.

	BLK	JNJ	PG	BA	GE
BS-Schätzer	0.00%	57.61%	2.47%	38.23%	1.70%
\emptyset BS-Schätzer Δ_i	0.00%	56.70%	2.80%	38.29%	2.21%
Δ Absolut	0.00%	-0.91%	0.34%	0.06%	0.51%
Δ in %	n. a.	-1.58%	13.71%	0.15%	30.04%

Tabelle 8: Sensitivität der Gewichte (BS-Schätzer)

Quelle: Eigene Darstellung

Dabei wird im Vergleich zur vorangegangenen Analyse ersichtlich, dass die Sensitivität der Portfoliogewichte noch weiter verringert werden kann. Eine Gegenüberstellung mit den eruierten Veränderungen von w_i bei den empirischen Schätzern zeigt zudem, dass bei den Anlagen JNJ, BA und GE eine durchgehende Verringerung der Sensitivität der Gewichte resultiert. Einzig der zusätzliche Einbezug von PG führt wie bereits beim JS-Schätzers zu einer zusätzlichen Sensitivität dieses Gewichts, welche im Vergleich zur Anwendung der JS-Schätzer jedoch geringer ist. Der Titel BLK bleibt wie bei allen anderen Analysen durchgehend unverändert. Damit zeigt sich, dass die Verwendung von robusten Schätzern, als Alternative zu der empirischen Werten, der Robustheit der Portfolios zuträglich ist. Zudem zeigt sich eine Überlegenheit des BS-Schätzers im Vergleich zum JS-Schätzer, was bei der Verwendung derselben Varianz-Kovarianz-Matrix auf den unterschiedlichen Prior zurückzuführen ist. Diese deutet wiederum darauf hin, dass dem MVP, hier zumindest als Annäherungswert, eine gewisse Optimalität hinsichtlich der Robustheit zu Grunde liegt. Damit kann erneut belegt werden, dass die Anfälligkeit auf Schätzfehler der Risikoterme, welche die Grundlage bei der Bestimmung des MVP darstellen, im Vergleich zur erwarteten Rendite geringer ausfällt.

6 Konklusion

Die Markowitz-Portfolio-Optimierung findet trotz ihrer theoretischen Fundierung in der praktischen Anwendung nur eine geringe Akzeptanz. Nebst einer resultierenden Asset Allokation, welche zumeist nicht intuitiv und durch Extremgewichte gekennzeichnet ist, liegt ein wesentliches Problem in der Schätzung der für die Bestimmung eines optimalen Portfolios benötigten Inputparameter μ und Σ . Die Annahmen über die zukünftigen Werte dieser Parameter beruhen dabei in der Regel auf Daten aus der Vergangenheit, welche unsichere Indikatoren für die zukünftige Entwicklung sind. Folglich besteht die

Möglichkeit, dass die effektiven von den geschätzten Werten abweichen, was zu entsprechenden Fehlallokationen führt und somit die Optimalität des Modells beeinträchtigt.

Diese Studie verfolgte dabei die Absicht, die Problematiken der klassischen Markowitz-Portfolio-Optimierung, in der praktischen Anwendung, zu analysieren. Es zeigte sich dabei, dass vor allem Schätzfehler bei der Bestimmung der erwarteten Rendite eine grosse Auswirkung auf die Portfoliostrukturierung haben. Die Veränderung in der Gewichtung der entsprechenden Anlage ist dabei durchschnittlich rund viermal so gross wie diejenige infolge eines Schätzfehlers in der Standardabweichung. Die Implikationen eines Schätzfehlers bei der Bestimmung der Korrelation sind vergleichsweise gering. Zusätzlich kann festgehalten werden, dass durch eine erhöhte Risikoaversion die Sensitivität der Gewichte bei einem Schätzfehler in der erwarteten Rendite reduziert werden kann. Die gleiche Erkenntnis konnte in einer Situation mit einer erhöhten Volatilität aller Anlagen festgehalten werden. Hingegen hat sich gezeigt, dass bei einer zunehmenden Korrelation die Sensitivität der Gewichte, bei einer abweichenden erwarteten Rendite, zunimmt.

Als mögliche Lösungsansätze für diese evaluierten Problematiken werden primär Ansätze aus dem Bereich der robusten Optimierung herangezogen. Es kann festgestellt werden, dass eine minimale und maximale Einschränkung von w_i eingehender Assets einen positiven Einfluss auf die Ausgeglichenheit der Portfoliostrukturen haben. Gleichzeitig wird die Optimalität dieses Ansatzes durch eine Verkürzung der Effizienzkurven relativiert. Vor allem die Einführung einer minimalen Gewichtung führte zu einer starken Reduzierung der Effizienz des MV-Optimierungsansatzes. Die Verwendung von geschrumpften Schätzern vermochte es dabei nicht, den Diversifikationsgrad innerhalb der Portfolios direkt zu verändern. Stattdessen resultierte eine Verschiebung der Effizienzkurven in Richtung der horizontalen Achse. Eine Verkürzung der Kurven wie bei der Einschränkung von w_i war hingegen nicht erkennbar, was für deren Verwendung spricht. Um die Sensitivität der Portfolios zu reduzieren, kann sowohl auf die Einschränkung von w_i als auch auf die Verwendung von geschrumpften Schätzern zurückgegriffen werden. Die Anwendung beider Methoden resultierte zumindest teilweise in einer geringeren Sensitivität der Portfoliogewichte, dies jedoch unter Berücksichtigung des Einflusses der beiden Methoden auf die Effizienz des Modelles.

Folglich empfiehlt es sich, weitere Methoden zur Optimierung des MV-Ansatzes zu evaluieren und deren Wirksamkeit zu untersuchen. Erste Ansätze dafür bieten beispielsweise das BL-Modell oder der Ansatz des Portfolio-Resamplings. Gleichzeitig gilt es in zukünftigen Untersuchungen Herangehensweisen für die in Abschnitt 1.5 weiteren erwähnten Problematiken in Bezug auf die Annahmen dieses Modell zu berücksichtigen. Darunter lassen sich diverse Erweiterungen des klassischen MV-Ansatzes subsumieren. Einen ganzheitlichen Überblick über etablierte sowie auch neuartige Methoden als Grundlage für folgende Studien bietet dabei Kolm, Tütüncü & Fabozzi (2014).

Abschliessend kann festgehalten werden, dass die Kritik an der praktischen Verwendbarkeit des klassischen MV-Ansatzes durchaus berechtigt ist. Die vereinfachten theoretischen Annahmen innerhalb des Modells ermöglichen zwar eine einfache Anwendung, gleichzeitig sind sie aber auch die Grundlage für diverse Problematiken. Somit bleibt es ungewiss, ob sich ein optimales Portfolio überhaupt anhand eines Modelles bestimmen lässt, sodass dieses auch in der Praxis zu verwertbaren Resultaten führt.

Literaturverzeichnis

- Amenc, N., & Le Sourd, V. (2005). *Portfolio theory and performance analysis*. West Sussex: John Wiley & Sons.
- Becker, F., & Gürtler, M. (2010). *Quantitative forecast model for the application of the Black-Litterman approach*. IF Working Paper Series IF27V2. Braunschweig: University of Braunschweig – Institute of Technology Department of Finance.
- Becker, F., Gürtler, M., & Hibbeln, M. (2015). *Markowitz versus Michaud: portfolio optimization strategies reconsidered*. Working paper No. IF30V3. Braunschweig: University of Braunschweig – Institute of Technology Department of Finance.
- Best, M. J., & Grauer, R. R. (1991). On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results. *Review of Financial Studies*, 4(2), S. 315-342.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal*, 48(5), S. 28-43.
- Broadie, M. (1993). Computing efficient frontiers using estimated parameters. *Annals of Operations Research*, 45(1), S. 21-58.
- Brosius, F. (1998). *SPSS 8.0: Professionelle Statistik unter Windows*. MITP-Verlag.
- Cheung, W. (2010). The Black–Litterman model explained. *Journal of Asset Management*, 11(4), S. 229-243.
- Chopra, V. K., Hensel, C. R., & Turner, A. L. (1993). Massaging mean-variance inputs: returns from alternative global investment strategies in the 1980s. *Management Science*, 39(7), S. 845-855.
- Chopra, V. K. & Ziemba W. T. (1993). The Effects of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2), S. 6-11.
- DeMiguel, V., & Nogales, F. J. (2009). Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research*, 57(3), S. 560-577.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?. *Review of Financial Studies*, 22(5), S. 1915-1953.

- DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J., & Uppal, R. (2009). A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science*, 55(5), S. 798-812.
- Dormann, C. F. (2013). *Parametrische Statistik: Verteilungen, maximum likelihood und GLM in R*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Ernst, D., & Schurer, M. (2014). *Portfolio Management: Theorie und Praxis mit Excel und Matlab*. Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft mbH.
- Fabozzi, F. J., Huang, D., & Zhou, G. (2010). Robust portfolios: contributions from operations research and finance. *Ann Oper Res*, 176, S. 191-220.
- Frankfurter, G. M., Phillips, H. E., & Seagle, J. P. (1971). Portfolio selection: the effects of uncertain means, variances, and covariances. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, S. 1251-1262.
- Frost, P. A., & Savarino, J. E. (1986). An empirical Bayes approach to efficient portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(03), S. 293-305.
- Gautschi, Th. (2010). Maximum-Likelihood Schätztheorie. In: Wolf, Ch., & Best H. (Hrsg.): *Handbuch der sozialwissenschaftlichen Datenanalyse*. S. 205-235. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- He, G., & Litterman, R. (1999). *The intuition behind Black-Litterman model portfolios*. Working Paper Series. Investment Management Research, Goldman, Sachs & Company.
- Huber, P. J. (1964). Robust Estimation of a Location Parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35(1), S. 73-101.
- Jagannathan, R., & Ma, T. (2003). Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps. *The Journal of Finance*, 58(4), S. 1651-1683.
- James, W., & Stein, C. (1961, June). *Estimation with quadratic loss*. In Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability.
- Jobson, J. D., & Korkie, B. (1980). Estimation for Markowitz efficient portfolios. *Journal of the American Statistical Association*, 75(371), S. 544-554.
- Jorion, P. (1985). International portfolio diversification with estimation risk. *Journal of Business*, S. 259-278.
- Jorion, P. (1986). Bayes-Stein estimation for portfolio analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21(03), S. 279-292.

- Jorion, P. (1992). Portfolio optimization in practice. *Financial Analysts Journal*, S. 68-74.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), S. 356-371.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), S. 77-91.
- Markowitz, H. (1991). Foundations of portfolio theory. *The journal of finance*, 46(2), S. 469-477.
- Michaud, R. O. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is optimized optimal?. *ICFA Continuing Education Series*, 1989(4), S. 43-54.
- Perret-Gentil, C., & Victoria-Feser, M. P. (2003). *Robust Mean-Variance Portfolio Selection*. No. 2003.02. Genève: Institut d'Economie et Econométrie, Université de Genève.
- Steinbach, M. C. (2001). Markowitz revisited: Mean-variance models in financial portfolio analysis. *SIAM review*, 43(1), S. 31-85.
- Stocker, Herbert (2016). *Die Maximum-Likelihood Methode*. Wintersemester 2016/17. Innsbruck. Universität Innsbruck, Fakultät für Volkswirtschaft und Statistik.
- Tütüncü, R. H., & Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1), S. 157-187.
- Zellner, A., & Chetty, V. K. (1965). Prediction and decision problems in regression models from the Bayesian point of view. *Journal of the American Statistical Association*, 60(310), S. 608-616.

Anhang

Anhang 1: Excel; Sensitivitätsanalyse mit identischen Ausgangsparameter

Anhang 2: Excel; Sensitivitätsanalyse mit unterschiedlichen Ausgangsparameter

Anhang 3: Excel; Daten & Berechnungen Optimierung Portfoliostrukturen

Anhang 4: Excel; Daten & Berechnungen Optimierung Sensitivität