

PROBLEMAS ABIERTOS DE CONJETURACIÓN

Carmen Samper, Óscar Molina, Leonor Camargo, Patricia Perry y Tania Plazas

Universidad Pedagógica Nacional

csamper@pedagogica.edu.co, oscarjrmolina@gmail.com, lcamargo@pedagogica.edu.co,
pperryc@yahoo.com.mx, tania.plazas@gmail.com

Hoy se reconoce la importancia de la resolución de problemas y el uso de nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas. En este cursillo, los asistentes resolverán, con geometría dinámica, diferentes tipos de problemas geométricos abiertos, de conjeturación. A partir de las acciones del proceso de solución, determinaremos esquemas de utilización que permiten inferir significados personales. Así, se obtienen elementos que el profesor puede usar en clase para que los alumnos transformen sus significados en matemáticos.

INTRODUCCIÓN

El cursillo propuesto está asociado a una investigación, que adelantamos en la actualidad en un curso de geometría, para determinar cómo las conjeturas propuestas por estudiantes, como solución a problemas abiertos, se convierten en un elemento para el desarrollo del contenido matemático en clase. Hemos diseñado problemas abiertos de conjeturación, que clasificamos según dos asuntos: la estructura de su enunciado y los procedimientos realizados en Cabri para resolverlos. Enseguida se expone qué entendemos por problema abierto de conjeturación, la tipología diseñada y a qué refiere esquema de utilización, herramienta conceptual de la Aproximación Instrumental para identificar significados personales. Después, proponemos un problema típico de un texto de geometría y su transformación en problema abierto.

REFERENTES TEÓRICOS

Un *problema abierto* plantea una tarea con una pregunta que no revela o sugiere la respuesta esperada (Arsac et al., 1999; Silver, 1995, en Baccaglioni-Frank y Mariotti, 2010). En geometría, usualmente los problemas abiertos incluyen la descripción de una situación y una pregunta que pide establecer una conjetura, como proposición condicional, que expresa relaciones entre propie-

dades de las figuras involucradas en ésta. Por eso se llaman *problemas abiertos de conjeturación* (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010).

La problemática relacionada con la comprensión y el uso que los estudiantes dan a las proposiciones condicionales durante procesos de producción de conjeturas y justificaciones nos llevó a pensar en usar problemas geométricos abiertos, en los que subyacen uno o más posibles teoremas del sistema teórico que se está conformando en clase, como un medio para solventar las dificultades de comprensión y uso de condicionales, que enfrentan los estudiantes (Samper, Perry, Camargo, Molina y Echeverry, 2010). Estos problemas están diseñados para trabajar con el artefacto geometría dinámica, el cual favorece en el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa una exploración dinámica en la que la función de arrastre es clave. Específicamente, el uso de un programa como Cabri permite identificar la relación de dependencia entre propiedades geométricas al hacer ostensiva la ocurrencia simultánea de éstas, relación necesaria para decidir cuáles serán el antecedente y consecuente de la conjetura que se formula.

Respecto a la solución de problemas abiertos de conjeturación nos interesa estudiar el uso que dan los estudiantes al programa de geometría dinámica para explorar, poner en juego sus intuiciones, formular conjeturas y verificarlas hasta tener la versión que proponen. El respectivo análisis nos permite identificar significados personales¹ de los estudiantes, que se pueden constituir en la base sobre la cual planear acciones específicas de mediación por parte del profesor con el propósito de hacerlos evolucionar hacia significados matemáticos (i.e. propios de la comunidad matemática de referencia) y además propiciar la construcción del significado matemático de la condicional.

Adoptamos la Aproximación Instrumental propuesta por Rabardel (1995, citado en Bartolini Bussi y Mariotti, 2008), como lente para identificar el uso mencionado antes pues nos provee la herramienta conceptual *esquema de utilización*. Esto es un esquema mental del sujeto que infiere un observador a través de los signos que se comunican en la interacción social que se lleva a cabo o a través de las acciones “relativas a la gestión de las características y propiedades particulares del artefacto” y que son el “medio de realización” de

¹ Éstos tienen que ver con, entre otras cosas, la interpretación que los estudiantes dan a los objetos o relaciones de índole matemática, su conocimiento declarativo acerca de tales objetos o relaciones, del estatus y del uso que tienen éstos en el marco de una teoría.

una tarea (Rabardel, 1995/2011, p. 171). Mariotti (comunicación personal) precisa que los esquemas inferidos pueden ayudar a identificar posibles significados personales que emergen de la actividad con el artefacto. Basados en esta idea, hemos identificado esquemas relativos a los tipos de problemas de conjeturación propuestos a nuestros estudiantes.

TIPOS DE PROBLEMAS

Dado que los problemas abiertos de conjeturación exigen formular una conjetura expresada como condicional, la parte de ésta que se debe buscar (antecedente o consecuente) depende de la información que aporta el problema y la pregunta que se propone. Por esta razón, clasificamos los problemas según el foco de la búsqueda: consecuente, antecedente o determinación de dependencia. En un marco de actividad instrumentada, el enunciado de cada tipo de problema favorece diferentes procedimientos de solución dando lugar a la siguiente clasificación.

El formato del enunciado de los *problemas de búsqueda del consecuente* se describe así: dadas las condiciones suficientes, hallar las consecuencias necesarias de éstas. En estos problemas, la representación gráfica de la situación descrita en el enunciado se basa sólo en la construcción de objetos que cumplan las condiciones con las que se cuenta, y la búsqueda de invariantes (reportados en el consecuente) se hace mediante la exploración directa de los objetos construidos; los denominamos *problemas de construcción sugerida*.

El formato del enunciado de los *problemas de búsqueda del antecedente* es: hallar las condiciones suficientes para las cuales las propiedades mencionadas en el enunciado son la consecuencia necesaria. Resolver estos problemas exige no sólo representar gráficamente los objetos mencionados en el enunciado, sino también realizar construcciones auxiliares que provean las condiciones geométricas suficientes para determinar, mediante la exploración, las propiedades de un objeto existente o las que aseguren la existencia de un objeto (que se debe reportar en el antecedente). Por ello, los denominamos *problemas de construcción creativa*.

El enunciado de los *problemas de determinación de dependencia* tiene el siguiente formato: dado un conjunto referencial de figuras geométricas y unas propiedades, establecer dependencias entre “tipos de figuras del conjunto referencial” y las “propiedades dadas”. Aquí hay libertad de decidir si el conjunto

referencial o las propiedades son el antecedente de la conjetura, y usar la geometría dinámica de acuerdo a ello.

UNA MUESTRA DE LA ACTIVIDAD DEL CURSILLO

En relación con los siguientes dos problemas abiertos obtenidos al transformar un problema típico de un texto de geometría, el cursillo proporcionará elementos conceptuales para responder las preguntas:

- 1) ¿Cuál es el tipo de cada problema abierto según la propuesta anterior?
- 2) La estructura de un esquema de utilización consiste en: determinar un invariante; formular una relación condicional que informa sobre el invariante descubierto como antecedente para las condiciones impuestas en la construcción; corroborar la conjetura. ¿Cuáles son las acciones instrumentadas particulares?

Problema original	Primer problema de conjeturación	Segundo problema de conjeturación
Demuestre que las bisectrices de ángulos par lineal forman un ángulo recto.	Sean \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BE} rayos opuestos y \overrightarrow{BK} otro rayo. Sean \overrightarrow{BG} y \overrightarrow{BD} las bisectrices de $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del \overrightarrow{BK} para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima? Justifique su respuesta.	Sean \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BE} rayos opuestos y \overrightarrow{BK} otro rayo. ¿Qué condiciones deben tener los puntos G y D en el interior de $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente, para que el $\angle GBD$ sea recto? Justifique su respuesta.

REFERENCIAS

- Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M.A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15, 225-253.
- Bartolini Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-805). Mahwah, EUA: LEA.
- Rabardel, P. (2011/1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Martín Acosta Gempeler, Tr.). Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2010). Geometría dinámica: su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si-entonces. *Educación Matemática*, 22(3), 119-142.