

Novos pesquisas sobre a história da convergência uniforme e dos seus aspetos de didática ¹

Gert Schubring

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Brasil

gert.schubring@uni-bielefeld.de

Resumo²

Há dois fatos que são sempre relatados sobre o surgimento do conceito de convergência uniforme: em 1821, Cauchy estabeleceu um teorema falso – sobre a continuidade de uma sequência convergente de funções contínuas – porque ele não utilizou este conceito; já em 1841 Weierstrass trabalhou com este conceito, baseado em descobertas de seu professor Gudermann. Pesquisas recentes mostram, no entanto, que os relatos devem ser reavaliados e melhor contextualizados.

A palestra analisa o desenvolvimento conceitual nos horizontes das concepções das diferentes comunidades matemáticas, enfatizando em particular o papel dos simbolismos e das notações para explicitar significados e diferenciações de conceitos.

Palavras chave

Convergência uniforme, continuidade, Cauchy, Weierstrass, rigor.

Abstract

There are two facts that are always reported on the emergence of the concept of uniform convergence: in 1821, Cauchy established a false theorem – on the continuity of a convergent sequence of continuous functions – because he did not use this concept; but in 1841 Weierstrass worked with this concept, based on findings from his teacher Gudermann. Recent research shows, however, that the reports should be reviewed and better contextualized. This paper examines the conceptual development in the horizons of the conceptions of different mathematical communities, emphasizing in particular the role of symbolism and notations to explain meanings and differentiations of concepts.

Key words

Uniform convergence, continuity, Cauchy, Weierstrass, rigor.

¹ Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIV CIAEM, celebrada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México el año 2015.

² El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1. O caso de Cauchy

No entanto, estas avaliações historiográficas tem muitas falhas. Quanto ao primeiro relato, fica subentendido que Cauchy poderia ter aplicado o conceito de convergência uniforme.

As avaliações na historiografia da matemática nos remetem no assunto de surgimento do “rigor” na matemática. Já na historiografia da matemática, o século XIX é apresentado, em geral, como a “idade de rigor”. Nessa descrição, o *Cours d'analyse* de Cauchy seria o paradigma do rigor moderno. Por exemplo, Carl Boyer afirma, em seu livro clássico sobre a história do cálculo:

With Cauchy, it may safely be said, the fundamental concepts of the calculus received a rigorous formulation. Cauchy has for this reason commonly been regarded as the founder of the exact differential calculus in the modern sense (Boyer 1949, p. 282).

Cauchy é apresentado tradicionalmente como o fundador e o primeiro a realizar o novo padrão de rigor, rompendo com as práticas da matemática do século XVIII. Em sua introdução à tradução da obra de Cauchy, Umberto Bottazzini procura desconstruir o modo de encarar as transformações da análise. Bottazzini analisa diversas obras de história mostrando a variedade dos pontos de vista sobre o papel de Cauchy, a fim de concluir pela afirmação de que o rigor matemático é em si mesmo um conceito histórico, portanto em processo (Bottazzini, p. xv). A noção de rigor de Lagrange era diferente da noção de Cauchy, que, por sua vez, também será criticado por Weierstrass, com base na concepção aritmética desse último.

Sempre constituiu um problema para a atribuição do rigor ao Cauchy que tem uma “mancha” (Jean Dhombres) nesta nova arquitetura da matemática: o teorema sobre a continuidade da função limite de uma sequência convergente de funções contínuas. Tendo uma série:

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

o teorema diz:

TEOREMA I. – *Quando os diferentes termos da série (1) são funções de uma mesma variável x , contínuas em relação a essa variável na vizinhança de um valor particular para o qual a série é convergente, a soma s da série é também, na vizinhança desse valor particular, função contínua de x .*

O teorema implica dois conceitos chaves: continuidade e convergência. Deve se ser consciente que ambos conceitos foram introduzidos de uma maneira nova, achado ser rigorosa pelo Cauchy mesmo. Dado a importância do conceito de continuidade na obra de Cauchy, Hans Freudenthal afirmou: “Cauchy invented our notion of continuity” (Freudenthal 1971, p. 136). E Cauchy conectou o seu conceito de convergência estritamente com o conceito de continuidade; foi ele que estabeleceu os vários critérios de convergência.

Porém, seria anacrônico pressupor que Cauchy teria concebido no mesmo tempo todas as diferenciações do conceito de convergência conhecidas hoje em dia na análise.

Quanto a Cauchy especificamente, as interpretações históricas sobre o rigor em sua obra seguem duas tendências distintas. Poderíamos denominá-las, respectivamente, continuidade e ruptura. Falamos aqui da continuidade histórica, ou seja, quando a obra de um autor é vista como consequência mais ou menos natural dos trabalhos de seus predecessores. A tese da ruptura destaca o caráter revolucionário de um autor ou de uma obra. Por um lado, estendendo a abordagem de Grabiner, Bottazzini traz a pergunta “Order out of Chaos?”. Por essa pergunta, busca-se desconstruir a demarcação estrita entre a alegada ingenuidade dos matemáticos do século XVIII quanto aos fundamentos da análise e a exaltação de rigor atribuído ao século XIX, em particular a Cauchy. Além de analisar a continuidade entre investigações de matemáticos do século XVIII, em particular Euler e Lagrange, e as de Cauchy, Bottazzini também relativiza o grau de novidade dos conceitos de Cauchy. Dessa maneira, ele exhibe abordagens usadas por Lagrange, quanto ao conceito de continuidade, que são pouco conhecidas (Bottazzini 1992, pp. xvii a xliv). Para termos uma ideia do argumento, tomaremos o exemplo paradigmático de uma função não-analítica $e^{x^{-1/2}}$ apresentado frequentemente como definitivo para derrubar o programa algébrico de Lagrange para a análise. Bottazzini explica, seguindo uma publicação também pouco conhecida de Alfred Pringsheim, de 1900, que esta função não teria preocupado tanto Lagrange como contra-exemplo (Bottazzini 1992, p. LXX). Por fim, Bottazzini aponta que a frase programática sempre citada para caracterizar a abordagem matemática de Cauchy:

Quant aux méthodes, j’ai cherché à leur donner toute la rigueur qu’on exige en géométrie, de manière à jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l’algèbre” (Cauchy 1821, p. ij)

deve ser entendida como de cunho “metafísico”, pois expressão de sua visão epistemológica da matemática, confrontando a epistemologia subjacente à matemática de Lagrange e não tão a matemática de Cauchy (Bottazzini 1992, p. LXXII).

Uma abordagem contrária a de Bottazzini foi estabelecida por Jean Dhombres, defendendo a tese da ruptura. O título de sua introdução à tradução para o espanhol já mostra o teor da diferença: “O rigor ou como constrói-se uma idealidade”. E o sub-título esclarece ainda mais seu ponto de vista: “Cauchy como exemplo de modernidade”. Para Dhombres, as contribuições de Cauchy nas ciências não estão ligadas a suas atuações político-religiosas: Cauchy, apesar de conservador, “participa de um movimento amplo de modernidade no século XIX” (Dhombres 1994, p. 16). Dhombres não hesita sequer em afirmar que a obra de Cauchy é revolucionária:

Puesto que la construcción de Cauchy es original de súbito y no retoma ningún resultado previo, no se apoya sobre ninguna referencia y pretende ser al mismo tiempo normativo: “no recurrir jamás a las razones extraídas de la generalidad del álgebra” nos indica en su introducción [p. ij], enumerando explícitamente las proposiciones “radicales en su principio” [p. iv] que introduce y que rompen radicalmente con una práctica? No debemos llamar a esto una revolución? (Dhombres 1994, p. 23).

Em um sentido diferente das abordagens mais tradicionais em história da matemática, como as citadas anteriormente, o aspecto revolucionário de Cauchy – segundo

Dhombres – se manifesta em um rigor que ele chama “rigor arquitetônico” (ibid.). Para Dhombres, não se trata de uma simples reforma ou correção dos rumos da análise como praticada até aquele momento, mas de uma reestruturação completa e profunda. Por isto, ele avalia a obra de Cauchy como revolucionária. A finalidade dessa nova arquitetura seria a demonstração de uma fórmula: a fórmula do teorema do binômio geral (Dhombres 1994, p. 25) – um teorema que serve para Cauchy para segurar os desenvolvimentos de funções em séries. De fato, no livro de Cauchy de 1821 este teorema do binômio apresenta a aplicação chave do teorema sobre a continuidade da função limite. Pode-se dizer que a demonstração do teorema do binômio constitui o andaime da nova arquitetura nova. Cauchy formulou este assunto como problema:

« Développer, lorsque cela se peut, la fonction

$$(1 + x)^\mu$$

en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de la variable x » (Cauchy 1821, p. 164),

então não mais para um μ inteiro ou racional, mas para μ real.

Evidentemente, Dhombres fica aqui confrontado com o obstáculo para sua avaliação do caráter revolucionário que o pilar principal desta demonstração para um μ geral é providenciado pelo teorema que assegura a permanência de continuidade no processo de limite quando cada termo de uma série convergente de funções é contínuo. De fato, esse teorema – o teorema I do capítulo VI do *Cours d'analyse* de Cauchy, que trata da convergência – constitui o foco dos debates recentes sobre essa obra. A avaliação tradicional desse teorema foi expressa por Bourbaki, mencionando “quelques erreurs” e “quelques lacunes”: “Cauchy [...] avait cru un moment qu'une série convergente, à termes fonctions continues d'une variable, a pour somme une fonction continue” – um erro que já foi corrigido pelo Abel (Bourbaki 1969, p. 193). Para ser válido, o teorema deve requerer não somente a convergência da série, mas também a convergência uniforme. Desde que a Análise Non-Standard (NSA) apareceu, iniciou-se um debate sobre se esse teorema da soma pode ser ‘salvo’, quer dizer, interpretado como correto. Em sua busca por precursores, a NSA identificou Cauchy como um precursor, interpretando as quantidades infinitamente pequenas de Cauchy como números hiper-reais no sentido da NSA, ou seja, de um ponto de vista de matemática atual e sem prestar atenção nem ao seu significado no horizonte conceitual da época, nem aos conceitos como colocados explicitamente por Cauchy. Abraham Robinson, fundador da NSA, ainda se exprime cuidadosamente, mencionando que seria apenas uma interpretação:

Whatever the precise picture of an infinitely small quantity may have been in Cauchy's mind, we may examine its subsequent definitions [como continuidade e convergência] and see what they amount to if we interpret the infinitely small and infinitely large quantities mentioned in them in the sense of Non-standard Analysis (Robinson 1974, p. 270).

Mas em 1978, revisando uma primeira avaliação em 1976 do teorema de Cauchy, Lakatos reclamou que Cauchy tinha entendido convergência como convergência uniforme (Lakatos 1978, p. 152 ff.). No entanto, Lakatos estava mal informado historicamente

(Viertel 2014, cap. 4.5.) Dois alemães, Detlef Laugwitz e Detlef Spalt, se destacaram tentando mostrar que não havia nenhum erro de Cauchy em sua obra de 1821 e que ele teria utilizado a convergência uniforme naquele teorema da soma (ver em particular Laugwitz & Spalt 1988). Porém, eles não conseguiram integrar coerentemente nas suas análises que Cauchy mesmo teve publicado em 1853 uma correção, colocando que o teorema da soma de 1821 não foi geral e se aplicaria somente para séries de potências, reformulando as condições do teorema (Cauchy 1853).

Contrariamente a essas abordagens, afirmando que Cauchy teria trabalhado com conceitos da matemática atual, historiadores da matemática tem investigado os significados dos conceitos de Cauchy sem modernizá-los. Já mencionamos a obra de Bottazzini. Recusando a certeza de Freudenthal de que a noção de continuidade de Cauchy já era moderna, Bottazzini propõe uma visão mais cuidadosa, dando à ela o nome de “C-continuity” e deixando assim aberto o significado exato com Cauchy (Bottazzini 1994, p. LXXXIV). Diferente das tentativas de matemáticos de derivar da expressão “infinitamente pequenos” o mesmo sentido que os infinitesimais possuem na NSA, eu mostrei que essas quantidades, para Cauchy, eram “seqüências nulas”, quer dizer variáveis com limite zero, e isto em concordância com uma tradição já bem estabelecida na matemática da época, por exemplo por Garção Stockler e Lazare Carnot (Schubring 2005, p. 453 ff.).

Muitos historiadores da matemática têm enfatizado o papel das simbolizações para revelar significados conceituais. Dugac nota a falta de uma notação adaptada e de precisão nas definições:

La démonstration de ce théorème, outre la difficulté inhérente au sujet pour l'époque et la subtilité des notions, telles que celle de convergence uniforme et que l'énoncé de ce théorème aidera à dégager, montre, à mon avis, que les obstacles proviennent aussi du manque de précision dans les définitions et notations. De même, tant que les définitions de la convergence de la série et de la continuité de la fonction n'étaient pas exprimées à l'aide des inégalités, la netteté des preuves en souffrait à cause d'un abus inévitable de mots plus ou moins bien définis, tels qu'on le trouve ici «voisinage», «infiniment petit», «accroissement insensible» et «valeur très considérable (Dugac 2003, p. 99).

Analisando o problema mais de perto, deve-se observar que a notação usada por Cauchy no teorema da soma eram sinais para seqüências numéricas e não para séries de funções. Os ímbolos ficando a sua disposição foram:

- s , para indicar a soma de todos os membros da seqüência,
- s_n , para indicar a soma dos primeiros n membros, e
- r_n , significando o resto $s - s_n$.

Ele operou com séries de funções com os meios conceituais de tais seqüências. Ele não teve disponível meios de notação e de simbolização para, por exemplo, operar com limites múltiplos.

Diferentemente de Abel que, em 1826, mencionou somente que o teorema possui exceções, mas sem indicar a razão do problema, o matemático alemão Enno H. Dirksen (1788-1850) apontou, em 1829, na sua resenha da tradução alemã do *Cours* de Cauchy,

essa falta nas notações, mostrando que, assim, não havia ferramentas conceituais para distinguir os dois processos para se aproximar um limite que estavam implicados no teorema, quanto a continuidade e a convergência. Graças à sua nova notação, Dirksen foi capaz mostrar que no teorema de Cauchy deve-se exigir que os dois processos de limites possam ser intercambiados (Schubring 2005, p. 475). Foi Dirksen que estabeleceu o símbolo para somas e o já providenciou com a indicação do índice variável:

$$\sum_{x_0-h}^{x_0+nh} f(x) \text{ (Schubring 2005, p. 556)}$$

Também foi o primeiro para conceitualizar limites duplos e múltiplos e indicar notações adaptados, utilizadas até hoje. E para distinguir vários processos de passagem ao limite, acontecendo no mesmo tempo, ele introduz indicar a variável no sinal do limite (Dirksen utilizou – no contexto anti-francês depois do fim da era de Napoleão – “Gr”, como abreviação do termo alemão ‘Grenze’, em vez de “lim”, derivado do francês ‘limite’):

$$Gr \left[Gr \underset{\rho, m}{\overset{\rho=\infty}{b}} \right]$$

Ainda com foco no papel das notações, estudos mais recentes têm analisado se os conceitos utilizados por Cauchy permitem acreditar-lo um uso ou uma familiaridade com o conceito de convergência uniforme. As conclusões até agora apontam que na obra de 1821 não existe uma tal noção (Arsac 2013, p. 61, 65; Viertel 2014, cap. 2). Embora se fale usualmente na literatura histórica que Cauchy já possuía a noção de convergência uniforme em seu artigo de 1853, corrigindo o teorema da soma de 1821, Viertel mostrou que o artigo fornece, de fato, contribuições para estabelecer tal conceito de convergência uniforme, mas não permite afirmar isto (Viertel 2014, cap. 2).

Para Dhombres, os erros no *Cours* de Cauchy devem ser avaliados fazendo-se uma analogia com os *Elementos* de Euclides. Os erros chamam atenção, “como las manchas que ensucian una tela que se creía impecable” (Dhombres 1994, p. 14). Como no caso de Euclides, os erros levaram outras pessoas a tentarem limpar as manchas, como exprime a famosa obra de Saccheri (1733): *ab omni naevo vindicatus*. As manchas, portanto, não afetam a importância da obra e sua modernidade revolucionária.

2. O caso de Weierstrass

Pesquisas recentes, quanto ao segundo relato, têm mostrado que Christoph Gudermann (1798–1852), professor de matemática em uma pequena instituição de ensino superior em Münster (Prússia), não introduziu a convergência uniforme em 1838, como sempre relatado na literatura. O termo que ele utilizou “konvergent im gleichen Grade” significa simplesmente uma comparação da rapidez de convergência (Viertel 2014, p. 112). E Karl Weierstrass que assistia quatro cursos de Gudermann de 1839 a 1840, não já publicou em 1841 um artigo utilizando o conceito de convergência uniforme. O artigo em questão foi publicado somente em 1894, no primeiro volume das obras completas dele – sim, com a datação de 1841, mas fica evidente que Weierstrass fez uma revisão posterior de uma versão original desconhecida: nesta versão revisada, ele *utiliza* o conceito de convergência uniforme –mas sem a introduzir como seria o caso com um conceito

novo. Weierstrass conseguiu estabelecer este conceito em um processo duradouro, a partir de 1861, em conexão com o seu programa de pesquisa, a teoria das funções analíticas – constituindo então uma área de aplicação bem mais ampla do que no caso de Cauchy. Foi neste processo que foi adotado o simbolismo para indicar o valor absoluto, facilitando assim o cálculo algébrico com desigualdades e que se estabeleceu a notação de ε e δ que se revelou como meio efetivo para facilitar operar com conceitos como limite, continuidade e convergência.

Referências

- Bottazzini, Umberto (1992), "Editor's Introduction," A.-L. Cauchy: *Cours d'analyse de l'École Royale polytechnique. Première partie: analyse algébrique*[reimpressao] Paris, 1821. Bologna: Ed. CLUEB (Instrumenta rationis, 7), I-CLXVII.
- Bourbaki, Nicolas (1969). *Éléments d'histoire des Mathématiques*. Paris: Hermann.
- Boyer, Carl B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development (the concepts of the calculus)*. New York: Dover Publ.
- Cauchy, Augustin-Louis (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Première Partie. Analyse algébrique*. Paris. Imprimerie Royale.
- Cauchy, Augustin-Louis (1823). *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Em: *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy* série 2, tome 4, pp. 9–261.
- Cauchy, Augustin-Louis (1828). C. L. B. Huzler (org.) *Lehrbuch der algebraischen Analysis*. Aus dem Französischen übersetzt von C. L. B. Huzler. Königsberg: Bornträger.
- Cauchy, Augustin-Louis (1853). Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. em: *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*(1), 12, 1900, S. 30–36.
- Cauchy, Augustin-Louis (1992). Umberto Bottazzini (org.), *Cours d'analyse de l'École Royale polytechnique. Première partie: analyse algébrique*[reimpressao] Paris, 1821. Bologna: Ed. CLUEB (Instrumenta rationis, 7).
- Cauchy, Augustin-Louis (1994). Carlos Alvarez Jiménez (org.): *Curso de análisis*. Selección, traducción directa del francés y notas de Carlos Alvarez Jiménez, introducción Jean Dhombres. México D.F.: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.
- Cauchy, Augustin-Louis (2009). Robert E. Bradley, Charles Edward Sandifer, (org. e trad.): *Cauchy's Cours d'analyse. An annotated translation*. New York: Springer.
- Dhombres, Jean (1994). "El rigor o como se construye una idealidad", em: Carlos Alvarez Jiménez (org.): *Curso de análisis*. Selección, traducción directa del francés y notas de Carlos Alvarez Jiménez, introducción Jean Dhombres. México D.F.: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, pp. 10–69.
- Dirksen, Enno H. (1829). "A. L. Cauchy's Lehrbuch der algebraischen Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von C.L.B. Huzler, Königsberg 1828" (Resenha). Em: *Jahrbücher für wissenschaftliche Kritik* vol. 2, S. 211–222.
- Dugac, Pierre (2003). *Histoire de l'analyse moderne. Autour de la notion de limite et de ses voisines*. Paris: Vuibert.

- Freudenthal, Hans (1971). "Cauchy, Augustin-Louis," ed. C.C. Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography*, vol. III. New York: Scribner's, pp. 131–148.
- Grabiner, Judith V. (1981). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, Mass: MIT Press.
- Lakatos, Imre (1978). Cauchy and the continuum: The Significance of Non-standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics. Em: *The Mathematical Intelligencer* 1 (3), pp. 151–161.
- Robinson, Abraham (1974). *Non-standard analysis*. Revised edition. Amsterdam: North-Holland.
- Laugwitz, Detlef & Detlef Spalt (1978). *Another View of Cauchy's Theorem on convergent series of functions - An essay on the methodology of historiography*: Technische Hochschule, Darmstadt.
- Schubring, Gert (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th–19th century France and Germany*. New York: Springer.
- Schubring, Gert & Tatiana Roque (em prelo). *O Curso de Análise de Cauchy: uma edição traduzida e comentada*. Rio de Janeiro: SBM.
- Viertel, Klaus (2014). *Geschichte der gleichmäßigen Konvergenz - Ursprünge und Entwicklungen des Begriffs in der Analysis des 19. Jahrhunderts*. Wiesbaden: Springer-Spektrum.