VIZSGÁLATOK ALGEBRAI STRUKTÚRÁK RADIKÁLELMÉLETÉBEN (I)*

Írta: SZÁSZ FERENC

TARTALOMJEGYZÉK

* Doktori értekezés, Budapest, 1972. Az értekezés itt közölt része az I. és a II. fejezetet, valamint a teljes tartalom- és irodalomjegyzéket tartalmazza. Az értekezés további fejezetei az *MTA III. Osztály Közleményei* 23/1—2 füzetében jelennek meg.

BEVEZETÉS

Doktori értekezésem témája az alapkutatásokhoz, pontosabban az absztrakt algebrához tartozik. Értekezésemben igyekszem áttekintést nyújtani (bár olykor, helykímélés végett, csak vázlatosan) a legutóbbi tizenkét évben végzett olyan kutatásaimról, amelyek bizonyos algebrai struktúrák általános vagy konkrét radikáljainak a vizsgálatát tűzték ki céljukul. Megjegyzem, hogy korábban írtam *Radikale der Ringe* (Gyűrűk radikáljai) címmel az Akadémiai Kiadó részére egy monográfiát, amely nemsokára meg fog jelenni. Disszertációm anyaga azonban lényegesen különbözik a monográfiám anyagától, mert utóbbi főleg kompilatív munka, viszont értekezésemben saját kutatásokról van szó, bár az értkezésem 3., 4. és 5. §-ai WIEGANDT RICHARDdal közösen végzett kutatásaimról, a 10. § egy része pedig részben LAJOS SÁNDORral közösen végzett kutatásaimról számolnak be. Másfelől, míg a monográfiámban csak asszociatív gyűrűk és alternatív gyűrűk radikáljai szerepelnek, addig az értekezésemben megemlítem a gyűrűk radikáljai mellett a kategóriáknak, *Hashimoto*-féle univerzális algebrák (így pl. nem kommutatív csoportok, gyűrűk vagy a *Higgins*-féle multi-operátor csoportok, vagy alulról korlátos, relatív komplementumos, disztributív hálók) automorfizmus-csoportjainak, vagy tetszőleges csoportoknak vagy zéruselemes félcsoportoknak a körében végzett bizonyos radikálelméleti vizsgálataimat is. (Ezekhez lássuk az értekezés irodalomjegyzékében a [24] és [25] dolgozatokat, továbbá a [36], [37], [38] stb. jelzésűektől egészen a [85], [86] és [87] jelzésűekig terjedő, tehát összesen kb. ötvenöt idevágó tartalmú dolgozatot.[1] Megjegyzem, hogy disszertációim jobb megértéséhez az olvasó esetleg tanulmányozza a magyar nyelvű összefoglaló [57], [58] és [59] dolgozataimat, amelyek

[1] Lásd még a 7. §. 3. lábjegyzetét is.

úgy is tekinthetők, mint a már említett német nyelvű monográfiámnak magyar nyelvű vázlata (a monográfiából tartalmazva az összes definíciót és bizonyítás nélkül az összes tételt).

Gyűrűk általános és konkrét radikáljairól, mint jól ismert, N. Divinsky [9] bevezető angol könyve adta az első (teljességre nem törekvő) összefoglalást. Ezt a könyvet az olvasó szintén haszonnal tanulmányozhatja. Megjegyzem azonban, hogy értekezésemben definiálni fogok minden nem közismertnek tekinthető fogalmat, éspedig ezt nem egy külön §-ban teszem, hanem a különböző §-okban mindig ott definiálom őket, ahol először szükség van rájuk. Az értkezésben felhasznált általános és alapvető fogalmak pl. Rédei László [26], Fuchs László [11], Kertész Andor [23] és Szász Gábor [88] könyveiben megtalálhatók. (Újabban érkezett meg — ti. a monográfiám elfogadás óta — Magyarországra Mary Gray, *A Radical Approach to Algebra*, Washington, Addison—Wesley Publ. Comp. (1970) érdekes könyve).

Miként ismeretes, a radikálok történetileg először egy kommutatív test felett vett végesrangú-algebrában úgy jelentek meg, mint a gyűrű szingularitását, a szabályostól, a „jótól" való eltérést bizonyos értelemben lemérő ideálok. Ebben az esetben Wedderburn úgy definiálta a radikált, mint a gyűrű összes nilpotens ideáljának az összegét. A radikálmentes végesrangú algebrákat Wedderburn féligegyszerűeknek nevezte, és ezekről kimutatta, hogy egyszerű algebráknak a direkt összegei, és hogy minden végesrangú egyszerű algebra izomorf egy ferdetest felett vett teljes mátrixgyűrűvel. Hopkins észrevette azt, hogy az így definiált radikál maga is nilpotens lesz minden, a jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűben. Artin pedig azt mutatta meg, hogy a végesrangú féligegyszerű algebrákról szóló *Wedderburn*-féle két struktúra-tétel is általánosítható a jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk szélesebb osztályára. Ebben az esetben a féligegyszerű jobbartin-féle gyűrűk invariánsokkal írhatók le, ahol az invariánsrendszer véges sok ferdetestből és véges sok természetes számból áll (utóbbiak a ferdetest felett vett teljes mátrixgyűrűk típusai).

A jobbartin-féle gyűrűknél azt láttuk tehát, hogy a gyűrű szerkezete szép és jó bizonyos értelemben (ti. a gyűrű invariánsokkal izomorfia erejéig egyértelműen jellemezhető), ha a radikál a lehető legkisebb, ti. éppen (0), másfelől a gyűrű szerkezete kevésbé szép és jó, ha a radikál a lehető legnagyobb, ti. maga a gyűrű. (Ebben az esetben Szele és Wiegandt jól ismert tételei, illetve a szerző jelen disszertációjának 51. és 52. Korolláriumai mondanak ki valamit a gyűrű szerkezetéről, de az olyan nem jobbartin-féle vagy nem balartin-féle gyűrűkről, amelyek egybeesnek nilpotens ideáljaik összegével, strukturális szempontból általánosságban alig ismert valami, hiszen e gyűrűk még annihilátor-mentesek is lehetnek.)

A radikálelmélet fejlődésének következő láncszeme (1943-tól 1953-ig) az a korszak volt, amikor a radikált, mint a gyűrű szingularitását bizonyos módon lemérni igyekvő bizonyos ideált, végességi feltételek nélküli tetszőleges (asszociatív) gyűrűkben nilpotencia, nil, jobbkváziregularitás és más konkrét regularitás-fogalmakkal definiálták. Így jött létre a *Baer*-féle alsó és felső nilradikál, a *Koethe*-féle, a *Levitzki*-féle, a *Jacobson*-féle és a *Brown—McCoy*-féle radikál a gyűrűkben (vö. B. Brown—N. H. McCoy [7], N. Divinsky [9], N. Jacobson [19]).

Később, 1953-ban, egymástól függetlenül, Amitsur és Kuros általánosan, axiómákkal definiálta (lásd. az 1. §-t) a gyűrűk radikáljait. Ezek az általános radikálok már nem feltétlenül mérik le a gyűrű bizonyos szigularitását, hiszen az is előfordulhat, hogy bizonyos, egy radikálra nézve féligegyszerű gyűrűk éppen radikálgyűrűk lesznek egy másik radikálra nézve. Sőt P. N. STEWART [33] (ehhez lásd az értkezés 6. §-át is) olyan nemtriviális gyűrűosztályt is megadott, amely egyrészt gyűrűknek egy teljes radikálosztálya, másrészt pedig ugyanakkor gyűrűknek egy teljes féligegyszerű osztálya is[2]. Egyébként az *Amitsur—Kuros*-féle radikálfogalom gyűrűkre olyan általános már, hogy bármely gyűrűosztály beágyazható egy teljes radikálosztályba, és beágyazható egy másik gyűrűosztályba is, amely viszont egy teljes féligegyszerű osztály lesz egy másik radikálra nézve. Gyűrűk általános radikálelméletének igen nagy irodalma jött létre, ennek legkiválóbb kutatói közül pl. AMITSUR, KUROS ANDRUNAKIEVIČ, RJABUCHIN, DIVINSKY, SULIŃSKI, LEAVITT stb. nevei említhetők!

Az általános radikálelmélet gyűrűk esetében tehát abból a célból jött létre, hogy megvalósítsuk a gyűrűelmélet célját: az összes gyűrű leírását, meghatározását vagy jellemzését.

Ilyen módon a radikálelmélet az algebra igen fontos és modern ágává vált, amit még jobban megerősített az a tény, hogy A. G. KUROS (majd később B. I. PLOTKIN) csoportokban, majd SULGEIFER, DICKSON, LIVSIC, SULIŃSKI, RJABUCHIN stb. pedig, még általánosabban, kategóriákban is vizsgálni kezdtek általános és konkrét radikálokat. Szerző [77], [79] és [80] dolgozatai pedig a zéruselemes félcsoportok általános radikál-elméletét kezdték meg kiépíteni. (Megjegyzendő, hogy korábbi nagyszámú konkrét radikált zéruselemes félcsoportok esetében más szerzők vizsgáltak, ezek [77], [79] és [80] irodalomjegyzékében szerepelnek, de ilyen p. szerző [47] dolgozata is).

Az értekezésben felhasznált kutatási módszerek változóak, mindig a vizsgált témához idomulnak, de általában axiómatikus módszerek. Elég sok az értekezésben az explicit példakonstrukció is, ami az érintett eredmény természetéből adódik. Újra kiemelem, hogy a 3., 4. és 5. §-ok eredményeit csak 50—50%-ban vallom magaménak, a 10. § eredményeit pedig kb. 80%-ban tekintem saját eredményeimnek, mert ezek teljesen vagy részben társszerzővel közösen végzett kutatásokról szólnak. A többi paragrafus anyaga teljesen a saját kutatásaim eredménye.

Az értekezésemben nem minden eredményt bizonyítok be, hanem, több kollégajavaslatára és helykímélés végett, bizonyos eredményeket bizonyítás nélkül ismertetek, de megjelölöm ilyenkor azt a dolgozatomat, ahol a bizonyítás megtalálható. Egyébként minden §-t azon dolgozataim megemlítésével kezdek, amelyekben az illető § anyaga részletesebben szerepel.

Minthogy az olvasó, a disszertáció teljes értékeléséhez úgysem elégedhetik meg pusztán csak a bevezetes elolvasásával, megemlítem, hogy az egyes §-ok eredményeinek mások korábbi eredményeihez való viszonyát, illetve egy-egy megoldott probléma történetét az olvasó az egyes §-ok elején részletesen megtalálhatja. Továbbá igyekeztem az egyes §-oknak a címeit részletesebben megfogalmazni, hogy már abból is viszonylag sok dolog kiderüljön a § tartalmára vonatkozólag. Ezért ebben a bevezetésben csak a következő igen vázlatos tartalmi ismertetést emelem ki:

Az első fejezet általános radikálokat vizsgál gyűrűkben, kategóriákban, így pl. a 4. § a transz-szabad képként előálló radikálobjektumokat, és a 7. § egy rész-

[2] Korábban V. A. ANDRUNAKIEVICS, *Dokladü AN SzSzSzR* **113**:3 (1975) 490. oldalon és a *Mat. Szbor.* **55** (1961) 344. oldalán adott példát ilyen osztályra.

modulus gyűrűben vett általános radikálját is elemzi, mégpedig főképpen a primér részmodulusokat tárgyalva.

A II. fejezet a gyűrűk gyengén szubidempotens radikáljait, a III. fejezet pedig a gyűrűk gyengén nilpotens radikáljait vizsgálja.

A disszertációnak a szerintem talán legmélyebb eredményei a IV. és V. fejezetekben találhatók, tehát ezek a *Jacobson*-radikállal kapcsolatban állanak, és KERTÉSZ, FUCHS, SZELE, RÉDEI, STEINFELD, HAJNAL és WIEGANDT egyesével különkülön, vagy párosával vagy hármasával közösen felvetett bizonyos problémáira adnak választ. Megemlítem, hogy pl. a 17. §-ban egy példakonstrukcióm szimultán megoldást ad Rédei egy félcsoportelméleti és KERTÉSZ egy gyűrűelméleti problémájára.

Végül a VI. fejezetben bizonyos *Hashimoto*-féle univerzális algebrák automorfizmus-csoportjának, valamint a zéruselemes félcsoportoknak a radikáljait tárgyalom. A VI. fejezet tanulmányozásához tehát előnyös dolog ismeretekkel rendelkezni multioperátorcsoportokról és hálókról is.

Természetesen, a bevezetés eme vázlatos tartalmi ismertetésénél már az előbb közölt tartalomjegyzék is többet közöl, amely az egyes §-ok részletesebb címeit is tartalmazza.

Még többet tudhat meg az olvasó az értekezés tartalmáról az összes huszonöt § bevezetésének és az értekezés összes százhárom tételének (illetve korolláriumának) alaposabb megnézéséből. A bizonyítások áttanulmányozása pedig arra is fényt vethet, hogy a használt többféle bizonyítási módszer tényleg eléggé függ a bizonyítandó állítás természetétől.

I. FEJEZET

ASSZOCIATÍV ÉS ALTERNATÍV GYŰRŰK, VALAMINT KATEGÓRIA-OBJEKTUMOK ÁLTALÁNOS RADIKÁLJAIRÓL

1. §. Gyűrűk általános radikáljai Amitsur—Kuros-féle axióma-rendszerének relatív függetlensége és Steinfeld Ottó egy problémájának a megoldása

Ennek a §-nak az anyaga részletesebben megtalálható a szerző [67] dolgozatában. Alternatívnak nevezünk egy A gyűrűt, ha A bármely két eleme asszociatív részgyűrűt generál. Ezért bármely asszociatív gyűrű alternatív. Másfelől a valós számtest felett vett *Cayley* számok nyolcdimenziós algebrája alternatív, de nem asszociatív gyűrű. Mint jól ismert, a *Cayley* számok bázisa $B=[1, e_0, e_1, \ldots, e_6]$ nyolcelemű halmaz, amelyre a szorzás definíciója:

$$1e_i = e_i 1 = e_i$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j$$

$$e_i^2 = -1$$

$$e_i e_{i+1} = e_{i+3}, \quad e_{i+3} e_i = e_{i+1}, \quad e_{i+1} e_{i+3} = e_i.$$

Másfelől egy A gyűrű E részgyűrűjét elérhetőnek nevezzük, ha van olyan véges hosszú részgyűrűlánc

$$E = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n = A,$$

amelynél A_i ideál A_{i+1}-ben $(i=0, 1, \ldots, n-1)$. R. BAER [6] igazolta, hogy egy asszociatív gyűrű bármely nilpotens elérhető részgyűrűje beágyazható egy nilpotens ideálba.

Legyen S tetszőleges gyűrűosztály, amely bármely $A\in S$ gyűrűvel együtt tartalmazza A-nak az $A\varphi$ izomorf képét is. Ha $A\in S$, akkor az A gyűrűt S-gyűrűnek nevezzük. Ha az A gyűrű egy I ideálja S-gyűrű, akkor azt mondjuk, hogy I egy S-ideál A-ban. Ha A tartalmaz olyan, $S(A)$-val jelölt, S-ideált, amely tartalmazza a gyűrű minden más S-ideálját, akkor az $S(A)$ ideált az A gyűrű S-radikáljának nevezzük. Látható, hogy az S-radikál általában nem létezik, ha S éppen az összes véges gyűrű osztálya, ezért nem teljesül automatikusan minden S osztályra, hogy az $S(A)$ radikál minden A gyűrűben létezik. Ha az A gyűrűben (0) az egyetlen S-ideál, akkor A-t S-féligegyszerűnek nevezzük. Nyilván, ha S az összes gyűrű osztálya, és ha $A^2=A$, akkor A-nak az S-féligegyszerűsége éppen A egyszerűségét jelenti.

Az R gyűrűosztály *Amitsur—Kuros*-féle radikál-gyűrűk osztálya, ha az alábbi (I), (II) és (III) axióma teljesül:

(I) Ha $A\in R$, akkor A bármely $A\varphi$ homomorf képe is az R osztályhoz tartozik.

(II) Az $R(A)$ radikál létezik minden A gyűrűben, vagyis minden A gyűrű tartalmaz olyan $R(A)\in R$ ideált, amelyben benne van A összes többi R-ideálja.

(III) Az $A/R(A)$ faktorgyűrű R-féligegyszerű, vagyis

$$R\big(A/R(A)\big) = (0) \text{ érvényes.}$$

Jelölje x mármost az (I), (II) vagy (III) axióma valamelyikét, $\bar{x}$ pedig az x logikai tagadását. Jelöljön u, v, w az x és $\bar{x}$ jelekből álló háromelemű sorozatot, és $(u, v, w)=\uparrow$ jelölje azt, hogy az (u, v, w) axiómarendszer ellentmondástalan, $(u, v, w)=\downarrow$ pedig jelentse azt, hogy az (u, v, w) axiómarendszer ellentmondásos. Az világos, hogy (II) és (III) nem függetlenek, mert (III) felhasználja az (II) axiómában szereplő $R(A)$ ideál fogalmát. Ha egy u, v axiómapárra

$$(u, v) = (\bar{u}, v) = (u, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}) = \uparrow$$

teljesül, akkor u és v teljesen független egymástól.

1. Először megmutatjuk, hogy $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})=\uparrow$, vagyis, hogy létezik legalább egy radikálosztály. Ilyen modell a radikálaxiómák teljesülésére pl. az összes *Jacobson* radikálgyűrű $R=J$ osztálya, tehát $A\in R=J$ akkor és csak akkor, ha $A=J(A)$, ahol $J(A)$ jelenti A *Jacobson*-radikálját. Másik, talán egyszerűbb példa az, hogy $A\in R$ legyen akkor és csak akkor, ha $A^2=A$. Ugyanis (I) nyilván teljesül akkor R-re, továbbá, minthogy idempotens ideálok összege maga is idempotens ideál, nyilván (II) is teljesül. Végül (III) az izomorfia-tételek miatt teljesül.

2. Most azt igazoljuk, hogy $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}})=\uparrow$. Legyen S mindazoknak az A gyűrűknek az osztálya, amelyek egybeesnek nilpotens elérhető részgyűrűik összegével. (I) nyilván teljesül, tovább (II) is érvényes, mert egyrészt „elérhető részgyűrűnek lenni" tranzitív reláció, másrészt, minthogy BAER [6] szerint minden nilpotens elérhető részgyűrű beágyazható egy nilpotens ideálba, az elérhető részgyűrűk $S(A)$ összege éppen az A gyűrű összes nilpotens ideáljának az összege lesz. Legyen most δ_{ij} a *Kronecker*-féle szimbólum, és A az a gyűrű, amelyet az a_0 és a_{ijk} elemek $(1\leqq i\leqq 2;$

$1 \leqq j \leqq 2$; $k=1, 2, 3, 4, \ldots$) generálnak az alábbi definiáló relációkkal:

$$a_0^2 = a_{i'i''k}^2 = a_{iik}^{2k} = a_0 a_{ijk} + \delta_{1i} a_{2jk} =$$
$$= a_{ijk} \cdot a_0 + \delta_{2j} a_{ijk} = a_{i_1 j_1 k_1} \cdot a_{i_2 j_2 k_2} + \delta_{j_1 i_2} \delta_{k_1 k_2} a_{i_1 j_2 k_1}^2 =$$
$$= 2a_0 = 2a_{ijk} = 0,$$

ahol $i' \neq i''$. Közvetlen számolás igazolja, hogy A asszociatív nilgyűrű (azaz minden elem nilpotens), sőt A egy MHR-gyűrű is lesz (vagyis teljesül a főjobbideálok minimum feltétele) és minden $y_i = x_1 \cdot x_2 \ldots x_i$ $(x_i \in A)$ szorzat egy elég nagy indextől kezdve csupa 0.

Minthogy
$$a_{22k}^{2^k - 1} \neq 0 \quad \text{és} \quad a_{2jk} \in (a_0)_r,$$

ezért az $(a_0)_r$ főjobbideál nem nilpotens, és ezért a_0 nincs benne az összes nilpotens ideál összegében. Tehát már asszociatív MHR-gyűrűk esetében is érvényes lehet, hogy
$$S(A/S(A)) \neq 0,$$

ami tényleg $(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$ fennállását mutatja. Ez a példa megoldja STEINFELD OTTÓ egy problémáját, aki azt kérdezte, hogy a nilpotens ideálok összege nilpotens-e minden MHR-gyűrűben.

3. Mutassuk meg azt, hogy $(\overline{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$. Legyen S mindazoknak az A gyűrűknek az osztálya, amelyek egy rögzített p prímre mindazon E_α nilpotens elérhető részgyűrűiknek az összegei, amelyekre $p^2 E_\alpha = 0$, de legalább egy β indexre $pE_\beta \neq 0$, ahol $kE = \{ke;\ e \in E, k$ rögzített egész szám$\}$. Világos, hogy $A \in S$ esetén $A/pA \notin S$, ezért (I) nem teljesül. Legyen $S(A)$ az összes S-ideál összege A-ban. Minthogy $S(A) \in S$, és $S(A)$ az A minden S-ideálját tartalmazza, érvényes (II). Legyen most A olyan gyűrű, amelyre $A^2 = 0$ és amelynek az additív csoportja p^4-rendű ciklikus csoport. Ekkor
$$S(A/S(A)) = A/S(A) \neq (0)$$

miatt $(\overline{\mathrm{III}})$ teljesül, mert $S(A) = p^2 A$, és így $(\overline{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$.

4. Hogy $(\mathrm{I}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}}) = \dagger$ is érvényes, következik abból, ha S vagy az összes nilpotens gyűrű osztálya, vagy az összes véges gyűrű osztálya. Ha pl. S_∞ az összes nilpotens gyűrű osztálya, legyen $A = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus B_n$, ahol $B_n^{n+1} = 0$, de $B_n^n \neq 0$. Ekkor B_n nilpotens ideál, és ezek A direkt összege olyan nilgyűrű, amely nem nilpotens.

5. Igazoljuk azt, hogy $(\overline{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \mathrm{III}) = \dagger$. Ha már pozitív irányban eldöntött volna az a még nyitott probléma, hogy a *Fuchs*-féle Z_0 zeroid pseudoradikálra mindig teljesülne

$$(*) \qquad Z_0(A/Z_0(A)) = (0),$$

akkor S lehetne mindazon A gyűrűk osztálya, amelyre $Z_0(A) = A$, ugyanis ekkor az (I) axióma nem teljesül. Ezt a zeroid pseudoradikált, általánosításait és ezek dualizálásait a 2. §-ban részletesebben vizsgáljuk majd. Minthogy azonban $(*)$ nincs még sem bizonyítva, sem cáfolva, másik példát választunk. Legyen S, további céljaink érdekében, mindazon gyűrűk osztálya, amelyek nem izomorfok a K kételemű testtel. Ekkor (I) nyilván nem teljesül, mert $A=K\oplus K\in S$, hiszen A és K egymással nem izomorfok, viszont $A/K\cong K\notin S$. Továbbá (II) nyilván teljesül. Ekkor K egy S-féligegyszerű gyűrű lesz, és az összes $K+I$ ideál összege, ahol I befutja A ideáljait maga A lesz és $K\neq I\neq 0$ esetén $K+I\in S$ miatt $A\in S$, tehát $S(A/S(A))=(0)$ miatt (III) teljesül. Ezért tényleg $(\overline{\mathrm{I}}, \mathrm{II}, \mathrm{III})=\dagger$.

6. Végül bebizonyítjuk, hogy $(\overline{\mathrm{I}}, \overline{\mathrm{II}}, \overline{\mathrm{III}})=\dagger$ is lehetséges. Legyen ehhez S az összes nullosztómentes gyűrű osztálya. Ha Z a racionális egész számok gyűrűje, akkor

$$Z\in S \quad \text{de} \quad Z/4Z\notin S$$

miatt (I) nem teljesül. Másfelől az $A=Z\oplus Z$ direkt összegben nem létezik az S-radikál, mert ez tartalmazná A-t, de $A\notin S$. Ezért (II) és (III) sem teljesül.

Láttuk tehát, hogy az *Amitsur—Kuros* axiómák relatív függetlenek már az asszociatív gyűrűk és ezért még inkább az alternatív gyűrűk osztálya felett.

2. §. A Fuchs-féle zeroid pseudoradikál általánosításai, mint további fontos példák az Amitsur—Kuros axiómák relatív függetlenségére

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható a szerző [37], [81] dolgozataiban.

FUCHS LÁSZLÓ [10] definiált asszociatív gyűrűben egy zeroid pseudoradikált, amely minden zérus-osztómentes gyűrűben (0). Viszont pseudo-radikálgyűrű lesz minden olyan gyűrű, amelynek minden eleme egyidejűleg balnullosztó és jobbnullosztó. FUCHS [10] igazolta azt is, hogy direkt összeg pseudoradikálja, ha egyik direkt összeadandó sem pseudo-radikálgyűrű, egybeesik a direkt összeadandók pseudoradikáljainak a direkt összegével. Ha pedig legalább egyik direkt összeadandó pseudo-radikálgyűrű, akkor maga a direkt összeg is pseudo-radikálgyűrű.

FUCHS [10] legutóbb említett eredményéből adódik, hogy *bármely* gyűrű előáll úgy, mint bizonyos pseudo-radikálgyűrűnek egy alkalmas homomorf képe, ezért az 1. §-ban említett *Amitsur—Kuros*-féle (I) axióma nem teljesül a *Fuchs*-féle zeroid pseudo-radikálgyűrűk Z_0 osztályára. Tehát a *Fuchs*-féle zeroid pseudo-radikálgyűrűket tartalmazó *Amitsur—Kuros*-féle legszűkebb radikálosztály az *összes* gyűrűt tartalmazza. Másfelől már négyelemű olyan $A=\{a\}$ gyűrű is létezik, ahol $2a=a^3+a^2=0$ $(a^2\neq 0)$, úgy, hogy A pseudo-radikálgyűrű, bár $e=a^2\neq 0$ idempotens elem a gyűrűben.

A *Fuchs*-féle [10] zeroid pseudoradikált itt nem definiáljuk, hanem ennek egy többlépcsős általánosítását fogjuk értelmezni, és majd megmutatjuk, hogy a többféle speciális eset közt melyik lesz éppen a *Fuchs*-féle zeroid pseudoradikál.

Legyen T egy teljes háló, 0 a legkisebb eleme, i a legnagyobb eleme. T-nek egy F részhalmazát felső halmaznak nevezzük, ha $x\in F$ és $x\leqq y$ esetén mindig $y\in F$. Világos, hogy $0\in F$ akkor és csak akkor teljesül, ha $F=T$. Egy F felső halmazt végesjellegűnek nevezünk, ha $\bigvee_{\alpha\in A} x_\alpha\in F$ esetén létezik A-nak olyan véges B részhalmaza, hogy már $\bigcup_{\beta\in B} x_\beta\in F$ is teljesül. Ezeket röviden v-felső halmazoknak hívjuk. Véges sok v-felső halmaznak halmazelméleti metszete és tetszőleges sok v-felső halmaznak a halmazelméleti egyesítése szintén v-felső halmaz.

Legyen $x\in T$ tetszőleges olyan elem, amelyre $x\notin F$, ahol F egy v-felső halmaz. Azt mondjuk, hogy $y\in T$ egy (F, x)-elem, ha $y\cup x\notin F$. Továbbá $z\in T$ erősen (F, x)-

elem, ha $z \cup y \cup x \notin F$ teljesül minden olyan y elemmel, amely (F, x)-elem T-ben. Nyilván maga x erősen (F, x)-elem, és minden erősen (F, x)-elem még inkább (F, x)-elem.

1. TÉTEL. *T összes erősen (F, x)-elemének a $z(F, x)$ egyesítése szintén erősen (F, x)-elem, amely egybeesik az összes maximális (F, x)-elem metszetével.*

Bizonyítás. Minthogy a hálóegyesítés asszociatív művelet, véges sok erősen (F, x)-elem egyesítése erősen (F, x)-elem. A végtelen egyesítés erősen (F, x)-elem pedig a v-felső halmaz definíciója miatt lesz, ugyanis ha

$$\bigvee_{\alpha \in A} z_\alpha \cup y \cup x \in F$$

volna egy bizonyos $y\,(F, x)$-elemmel és ha $w_\alpha = z_\alpha \cup y \cup x$ akkor $\bigvee_{\alpha \in A} w_\alpha \in F$ miatt van olyan véges $B \subseteq A$, hogy $\bigcup_{\beta \in B} w_\beta \in F$ tehát $\left(\bigcup_{\beta \in B} z_\beta\right) \cup y \cup x \in F$, ami lehetetlen. Ezért $\bigvee_{\alpha \in A} z_\alpha$ is erősen (F, x)-elem.

ZORN lemmája szerint minden $y\,(F, x)$-elemhez van olyan $m \geqq y$ elem T-ben, amely maximális (F, x)-elem. Legyen m_0 a maximális (F, x)-elemek metszete, és meg fogjuk mutatni, hogy

$$m_0 = z(F, x)$$

Ha y egy tetszőleges (F, x)-elem, és m olyan maximális (F, x)-elem, amelyre $m \geqq y$, akkor

$$m_0 \cup y \cup x \leqq m \cup m \cup x = m \cup x \notin F$$

miatt m_0 erősen (F, x)-elem, tehát $m_0 \leqq z(F, x)$.

Megfordítva, ha m egy maximális (F, x)-elem, akkor $z(F, x) \cup m$ szintén (F, x)-elem, tehát $z(F, x) \leqq m$, és így $z(F, x) \leqq m_0$. Tehát valóban $m_0 = z(F, x)$.

Legyen most T egy negatívan rendezett teljes hálógrupoid, vagyis egy teljes háló, amely ugyanakkor grupoid is, amelyben teljesülnek az alábbi axiómák:

1. $a \cdot b \leqq a \cap b$
2. $a(b \cup c) = ab \cup ac$
3. $(a \cup b)c = ac \cup bc$

T-nek egy F v-felső részhalmaza v-felső részgrupoid, ha F egyszersmind részgrupoid is T-ben. Az üres halmazt v-felső részgrupoidnak tekintjük. Minthogy

$$f_1 \cdot f_2 \leqq f_1 \cap f_2 \quad \text{és} \quad f_1 \cdot f_2 \in F,$$

ezért az Fv-felső részgrupoid a T háló duális ideálja.

T-ben egy p elemet prímelemnek nevezünk, ha $ab \leqq p$ esetén $a \leqq p$ vagy $b \leqq p$ teljesül.

2. TÉTEL. *Legyen T negatívan rendezett teljes hálógrupoid, amelyben az 1., 2. és 3. axiómák teljesülnek. Ekkor minden maximális (F, x)-elem, ahol $x \notin F$ és F egy v-felső részgrupoid T-ben, prímelem, tehát az 1. Tétel szerint létező $m_0 = z(F, x)$ elem prímelemek metszete.*

Bizonyítás. Legyen m egy maximális (F, x)-elem és $a \not\leqq m$, valamint $b \not\leqq m$. Ekkor

$$(a \cup m) \cup x \in F \quad \text{és} \quad (b \cup m) \cup x \in F,$$

tehát, minthogy F részgrupoid is:

$$f = (a \cup m \cup x) \cdot (b \cup m \cup x) \in F.$$

De 1., 2. és 3. miatt

$$f \leqq ab \cup m \cup x$$

és minthogy $f \in F$, és F felső halmaz, azért $ab \cup m \cup x \in F$. Igy, minthogy m maximális (F, x)-elem, $ab \cup m \geqq m$ és $ab \cup m$ nem (F, x)-elem, ezért $ab \not\leqq m$.
Tehát p prímelem.

Legyen most $\mathfrak{M}$ a T negatívan rendezett hálógrupoidban F v-felső részgrupoidoknak egy tetszőleges halmaza. Ekkor definiálunk egy $z(\mathfrak{M}, x) \in T$ elemet a következőképpen:

$$z(\mathfrak{M}, x) = \bigwedge_{x \notin F \in \mathfrak{M}} z(F, x).$$

Világos, hogy mindig $x \leqq z(\mathfrak{M}, x) \leqq i$ teljesül. Ezt a $z(\mathfrak{M}, x)$ elemet az x elem $\mathfrak{M}$-presudo-radikáljának nevezzük.

Mint alkalmazások említhetők a következő példák:

3. TÉTEL. *Legyen A egy nem feltétlen asszociatív gyűrű, és $I = \bigcap_{\beta \in B} P_\beta$ prímideáloknak egy tetszőleges metszete A-ban. Ekkor I előállítható $\mathfrak{M}$-pseudoradikál alakban.*

Bizonyítás. Legyen T az A összes kétoldali ideáljának a teljes hálója, amelyben A a legnagyobb, (0) a legkisebb elem. Az $I_1 \cdot I_2$ szorzat legyen az összes $i_1 \cdot i_2$ szorzatot tartalmazó ideál metszete, ahol $i_1 \in I_1$ és $i_2 \in I_2$. Ekkor T grupoid is lesz, és teljesülnek az 1., 2. és 3. axiómák, hiszen pl. $I_1 \cdot I_2 \subseteqq I_1 \cap I_2$ miatt T negatívan rendezett lesz. Ha $I = \bigwedge_{\beta \in B} P_\beta$, ahol P_β tetszőleges prímideál A-ban (tehát $CD \subseteqq P_\beta$ esetén $C \subseteqq P_\beta$ vagy $D \subseteqq P_\beta$, ahol C és D ideálok A-ban), legyen $K_\beta = A \setminus P_\beta$. Tehát $x \in K_\beta$ $(x \in A)$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $x \notin P_\beta$. Legyen F_β mindazoknak az $I_{\alpha\beta}$ ideáloknak a halmaza, (tehát $F_\beta \subseteqq T$), amelyekre $K_\beta \cap I_{\alpha\beta}$ *nem üres*. Ekkor F_β nyilván egy v-felső halmaz T-ben, és legyen $\mathfrak{M}$ az összes ilyen F_β halmaza. Belátható, hogy

$$I = \bigwedge_{\beta \in B} P_\beta = z(\mathfrak{M}, 0),$$

amivel a tételt igazoltuk.

4. TÉTEL. *Minden speciális radikál (tehát prímgyűrűk V. A. Andrunakievič-féle speciális osztályával meghatározott felső radikál* (lásd N. DIVINSKY [9], VII. Fejezet), *tehát pl. a Baer-féle alsó és felső nilradikál, a Levitzki-féle, a Jacobson-féle, a Brown—McCoy-féle, Thierrin-féle radikál, vagy az ún. antiegyszerű radikál és Fuchs zeroid pseudradikálja egyaránt $\mathfrak{M}$-pseudoradikál.*

Bizonyítás. A 3. Tétel, N. DIVINSKY [9] és L. FUCHS [10] művei alapján nyilvánvaló.

Most néhány definíciót ismertetünk.

1. DEFINÍCIÓ. Az A (nem feltétlenül asszociatív) gyűrű gyenge blokkján olyan B_1 részhalmazt ($B_1 \subseteq A$) értünk, amelyre az alábbi két feltétel teljesül:

(i) $0 \notin B_1$, ahol 0 az A zéruseleme;

(ii) Ha az I_1 és I_2 ideálokra $I_1 \cap B_1 \neq \emptyset$ és $I_2 \cap B \neq \emptyset$, ahol $\emptyset$ az üres halmaz, akkor

$$I_1 \cdot I_2 \cap B_1 \neq \emptyset.$$

2. DEFINÍCIÓ. Blokkon olyan B_2 gyenge blokkot értünk, amelyre $x \in B_2$ esetén $x^n \in B_2$ teljesül minden n természetes számmal, x^n értékét bármilyen zárójelezéssel is tekintjük.

3. DEFINÍCIÓ. Erős blokk A-nak olyan B_3 multiplikatív részgrupoidja, amelyre $0 \notin B_3$.

Nyilván minden erős blokk egyszersmind blokk és minden blokk egyszersmind gyenge blokk.

Egy P prímideál $K = A \setminus P$ komplementer halmaza gyenge blokk, amely általában nem blokk. Fordítva, egy B_1 gyenge blokk $L = A \setminus B_1$ komplementer halmaza általában nem ideál, de ha L ideál, akkor L prímideál A-ban. Ha A egy ferdetesttől különböző nemzérus jobbtalpú egyszerű gyűrű, akkor $B_1 = A \setminus 0$ biztosan olyan gyenge blokk, amely nem blokk, mert B_1 tartalmaz $\neq 0$ nilpotens elemet. Test felett vett kétváltozós polinom gyűrűben pedig van olyan blokk, amely nem erős blokk.

5. TÉTEL. *Ha B_1 tetszőleges gyenge blokk az A (nem feltétlenül asszociatív) gyűrűben, akkor mindazoknak az I ideáloknak az F halmaza, amelyekre nézve $B_1 \cap I \neq \emptyset$, egy v-felső részgrupoidot alkotnak A ideáljainak a T hálógrupoidjában.*

Bizonyítás. B_1 definíciójából és a T háló kompaktul való generáltságából adódik.

6. TÉTEL. *Legyen T az A gyűrű ideáljainak hálógrupoidja. Bármely I ideálra és T v-felső részhalmazainak bármely $\mathfrak{M}$ halmazára $Z(\mathfrak{M}, I)$ tartalmazza a B Baer-féle alsó nilradikált. Ha pedig $\mathfrak{M}$-ből minden F_β v-felső részhalmaz* (az 5. Tétel szerint) *egy $B_2^{(\beta)}$ blokk által van meghatározva, akkor $Z(\mathfrak{M}, I)$ mindig tartalmazza a K Baer—Koethe-féle felső nilradikált is.*

Bizonyítás. $B \subseteq Z(\mathfrak{M}, I)$ a definícióból adódik. Legyen most adva a $B_2^{(\beta)}$ blokkok $\mathfrak{M}$ halmaza, és F_β mindazon ideáloknak a halmaza, amelyek metszete $B_2^{(\beta)}$-val nem üres. Legyen I tetszőleges ideál. Ha $I \in F_\beta$, akkor legyen definíció szerint (mint üres metszet) $Z(F_\beta, I) = A$. Ha pedig $I \notin F_\beta$, akkor legyen $Z(F_\beta, I)$ az összes erősen (F_β, I)-ideál összege, amely az 1. Tétel szerint egyszersmind az összes maximális (F_β, I)-ideál metszete is, és az $\mathfrak{M}$-pseudoradikál az összes $Z(F_\beta, I)$ metszete.

Megmutatjuk, hogy $K \subseteq Z(\mathfrak{M}, I)$, ahol K a *Baer—Koethe* felső nilradikál. Legyen J tetszőleges (F_β, I)-ideál az A gyűrűben. Elég megmutatni, hogy

$$K + J + I \notin F_\beta$$

érvényes. Ellenkező esetben ugyanis $K + J + I \in F_\beta$, és ha F_β-hoz éppen a $B_2^{(\beta)}$ blokk tartozik (az 5. Tételben leírtak szerint), akkor

$$(K + J + I) \cap B_2^{(\beta)} \neq \emptyset.$$

Van tehát olyan $b \in B_2^\beta$ elem és olyan $k \in K, j \in J$ és $i_1 \in I$ elemek, hogy fennáll

$$b = i_1 + j + k.$$

Minthogy pedig K nilideál, van olyan m kitevő, hogy $k^m = 0$. A nemkommutatív polinomiális tételt alkalmazva, és minthogy I és J ideál,

$$b^m = (i_1 + j + k)^m \in (I + J) \cap B_2^{(\beta)},$$

mert B_2^β blokk. Ezért $J + I \in F_\beta$, ellentétben azzal, hogy J egy (F_β, I)-ideál. Ezért K erősen (F_β, I)-ideál, amivel a 6. Tételt teljesen igazoltuk.

Példák erős blokkokra

1. Az A asszociatív gyűrű összes nem balnullosztójának $B_3^{(l)}$ halmaza nyilván félcsoport és $0 \notin B_3^{(l)}$. Hasonló igaz A összes nem jobbnullosztójának $B_3^{(r)}$ halmazára is. Legyen F_l a $B_3^{(l)}$-hez, F_r pedig a $B_3^{(r)}$-hez tartozó egy-egy v-felső halmaz az A ideáljainak T hálógrupoidjában, és legyen $\mathfrak{M}$ az $[F_l, F_r]$ kételemű halmaz. Ekkor a $Z(\mathfrak{M}, 0)$ pseudoradikál éppen FUCHS zeroid pseudoradikálja lesz.

2. Legyen L_2 az A asszociatív gyűrű összes balegységelemének a halmaza.

3. Legyen L_3 az A asszociatív gyűrű összes olyan elemének a halmaza, amelyek balról minden elemnek osztói.

Világos, hogy L_2 és L_3 egy-egy multiplikatív félcsoport és $0 \notin L_2$, $0 \notin L_3$. Bal-jobb dualitás alapján R_2 és R_3 is definiálható. Ez a négy halmaz tehát erős blokk A-ban.

4. Minden $e \neq 0$ idempotens elemből $(e^2 = e)$ álló, egyelemű halmaz is erős blokk.

5. Legyen A asszociatív gyűrű, M egy A-jobbmodulus, N egy nemzérus A-részmodulus M-ben, továbbá H_1 és H_2 az M olyan részhalmazai, hogy $0 \notin H_2 \supsetneqq H_1$. Ekkor további négy erős blokk definiálható A-ban a következőképpen:

5.1. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre $Nx = N$ teljesül;

5.2. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre minden $n \in N$ elemmel fennáll $nx = n$;

5.3. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre $H_2 x \subseteq H_1$ érvényes;

5.4. Mindazoknak az $x \in A$ elemeknek a halmaza, amelyekre teljesül $H_2 x \supsetneqq H_1$.

Szerző [37] igazolta az alábbi eredményét is:

7. TÉTEL. *Jobbegységelemes és főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűben Fuchs zeroid pseudoradikálja egybeesik a B Baer-féle alsó nilradikállal, a J Jacobson-radikállal és a G Brown—McCoy radikállal.*

A *bizonyítást*, bár nemtriviális, helykímélés végett mellőzzük.

Szerző [37] szintén bebizonyította az alábbi tételt.

8. TÉTEL. *Kétoldali egységelemes Neumann-reguláris gyűrűben Fuchs zeroid pseudoradikálja egybeesik a G Brown—McCoy radikállal.*

Bizonyítás. Legyen M maximális valódi (kétoldali) ideál A-ban, $m \in M$ és $x \in A$ olyan elem, hogy $m = mxm$. Ha e az A kétoldali egységeleme, akkor $m(e - xm) = 0$ és $(e - mx)m = 0$. Továbbá $e - xm \notin M$ és $e - mx \notin M$ miatt M minden nemzérus eleme egyszerre balnullosztó és jobbnullosztó. Így a maximális $(F_r, 0)$-ideálok és maximális $(F_l, 0)$-ideálok metszete egyaránt a maximális ideálok metszete, és ez a metszet $e \in A$ miatt éppen G.

Példa FUCHS egy (általa [10] bizonyítottnak vélt) sejtésének a cáfolatára. FUCHS LÁSZLÓ azt sejtette, hogy zeroid pseudoradikálja (0) minden egységelemes A *Neumann*-reguláris gyűrűben, de ez nem így van. Legyen ugyanis V egy F ferdetest felett vett $\aleph_\nu$-dimenziós vektorétér, és A pedig V összes lineáris transzformációjának a gyűrűje. Ekkor A kétoldali egységelemes *Neumann*-reguláris gyűrű, amelynek egyetlen nemzérus I maximális ideálja van, amely a zeroid pseudoradikál, és ez az összes olyan $a \in A$ elemből áll, amelyekre a Va képtér dimenziója $< \aleph_\nu$. Minthogy I végtelen, biztosan $I \neq 0$, amit bizonyítani akartunk. Ha $\aleph_\nu$ elég nagy, akkor ebben az A gyűrűben igen sok (pl. $\aleph_\mu$-számú) olyan $\mathfrak{M}$-pseudoradikál van, amelyek egymástól és Fuchs zeroid pseudoradikáljától is különböznek. Ennél a ν rendszám számossága legyen legalább $\aleph_\mu$.

E § befejezéseképpen megemlítjük az $\mathfrak{M}$-pseudoradikál egy duálisát (lásd szerző [81]). Legyen T teljes háló és az $A \subseteqq T$ részhalmazt alsó halmaznak nevezzük, ha $x \leqq y$ és $y \in A$ esetén mindig $x \in A$. Az A alsó halmaz v-alsó halmaz, ha $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \in A$ esetén a Γ indexhalmaznak van olyan véges Δ részhalmaza, hogy már $\bigcap_{\delta \in \Delta} x_\delta \in A$ is teljesül. Nyilván akkor és csak akkor $A = T$, ha $i \in A$, ahol i jelenti a T háló maximális elemét. A $\emptyset$ üres halmazt v-alsó halmaznak tekintjük.

Legyen $x \in T$ és $x \notin A$, ahol A egy v-alsó részhalmaz. Ekkor egy $y \in T$ elemet (x, A)-elemnek nevezünk, ha

$$y \cap x \notin A.$$

Továbbá azt mondjuk, hogy $z \in T$ erősen (x, A)-elem, ha

$$z \cap y \cap x \notin A$$

teljesül minden olyan $y \in T$ elemmel, amely (x, A)-elem. Nyilván x maga erősen (x, A)-elem és minden erősen (x, A)-elem egyszersmind (x, A)-elem is.

9. TÉTEL. *Az összes erősen (x, A)-elem metszete szintén erősen (x, A)-elem és ez a metszet egybeesik az összes minimális (x, A)-elem egyesítésével.*

Bizonyítás mellőzhető, mert ez az 1. Tétel bizonyításának a duálisa. Csak azt jegyezzük meg, hogy minden $y (x, A)$-elemhez létezik olyan $m \in T$, hogy $m \leqq y$ és m minimális (x, A)-elem.

Probléma. Legyen T negatívan rendezett (lásd 1. feltételt) hálógrupoid, de a 2. és 3. teltételek általában ne teljesüljenek. Mi annak egy nemtriviális kritériuma, hogy minden erősen (x, A)-elem prímelem legyen?

3. §. A radikál és féligegyszerűség dualitása és ekvivalenciája az asszociatív és alternatív gyűrűk kategóriájában

Ennek a §-nak az eredményei részletesebben megtalálhatók a szerző és WIEGANDT RICHÁRD közös [85] és [86] dolgozatában. E § anyagát csak vázlatosan ismertetem.

Legyen C egy tetszőleges kategória, amelyre azonban később több feltételt kiszabunk. Legyen C^* az a kategória, amelynek ugyanazok az objektumai, mint C objektumai, de $\alpha^*: b \to a$ akkor és csak akkor legyen C^* leképezése, ha $\alpha: a \to b$ leképezés C-ben. C^* lesz C duális kategóriája. Nyilván $(C^*)^* = C$. Legyen $H(a, b)$ az összes olyan leképezés C-ben, amely a-t b-be képezi le. Ha $H(a, 0)$ és $H(0, a)$ egyaránt egyelemű halmazok, akkor 0-t C zérusobjektumának nevezzük.

Feltesszük, hogy teljesül:

(C_1) Van C-ben zérus objektum.

Világos, hogy C^*-ban is van zérus objektum.

Azt mondjuk C zérus leképezésű kategória, ha minden a, b rendezett objektumpárhoz van olyan $\omega_{ab}: a \to b$ leképezés, hogy minden $\alpha: c \to a$ és $\beta: b \to d$ leképezésre $\alpha\omega_{ab} = \omega_{cb}$ és $\omega_{ab}\beta = \omega_{ad}$.

Egy $\alpha: a \to c$ leképezés monomorfizmus, ha $\varrho: b \to a$, $\sigma: b \to a$, $\varrho\alpha = \sigma\alpha$ esetén mindig $\varrho = \sigma$.

Egy $\alpha: c \to a$ leképezés epimorfizmus, ha $\varrho: a \to b$, $\sigma: a \to b$ és $\alpha\varrho = \alpha\sigma$ esetén mindig $\varrho = \sigma$.

α akkor és csak akkor monomorfizmus (epimorfizmus) C-ben, ha α^* epimorfizmus (monomorfizmus) C^*-ban. Ha létezik két monomorfizmus (epimorfizmus) szorzata, akkor ez szintén monomorfizmus (epimorfizmus). Ha $\alpha\beta$ monomorfizmus (epimorfizmus), akkor α monomorfizmus (β epimorfizmus).

Most definiáljuk a részobjektumot, faktorobjektumot és az ilyenek közt levő részbenrendezést.

Legyenek $\beta_1: b_1 \to a$ és $\beta_2: b_2 \to a$ monomorfizmusok. Ha létezik olyan ϱ monomorfizmus, hogy $\varrho\beta_1 = \beta_2$, akkor legyen $(b_1, \beta_1) \geqq (b_2, \beta_2)$. Ha $(b_1, \beta_1) \geqq (b_2, \beta_2)$ és egyidejűleg $(b_2, \beta_2) \geqq (b_1, \beta_1)$ is fennáll, akkor a (b_1, β_1) és (b_2, β_2) párok ekvivalensek. E reláció ekvivalencia-osztályait nevezzük az a objektum részobjektumainak. Ha két pár nem ekvivalens, de $\geqq$, akkor legyen köztük $>$ reláció.

Hasonlóan, legyenek $\beta_1: a \to b_1$ és $\beta_2: a \to b_2$ epimorfizmusok. Ha létezik olyan ϱ epimorfizmus, hogy $\beta_1\varrho = \beta_2$, akkor legyen $(\beta_2, b_2) \leqq (\beta_1, b_1)$. Ha $(\beta_2, b_2) \leqq (\beta_1, b_1)$ és egyidejűleg $(\beta_1, b_1) \leqq (\beta_2, b_2)$ akkor ez a két pár ekvivalens. E reláció ekvivalencia-osztályait nevezzük a faktorobjektumainak. Ha két pár nem ekvivalens, de $\leqq$, akkor legyen köztük $<$ reláció.

A továbbiakban definiáljuk a visszahúzás (pullback), kilökés (pushout), mag és ko-mag fogalmát.

Egy kommutatív

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "\chi_1"] \arrow[d, "\chi_2"'] & d_1 \arrow[d, "\delta_1"] \\ d_2 \arrow[r, "\delta_2"] & a \end{tikzcd}$$

diagram visszahúzás a δ_1 és δ_2 leképezésekre nézve, ha minden $c\in C$ objektumhoz és minden kommutatív

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & d_1 \arrow[d, "\delta_1"] \\ d_2 \arrow[r, "\delta_2"] & a \end{tikzcd}$$

diagramhoz létezik egyetlen olyan $\gamma: c\to k$ leképzés úgy, hogy

$$\begin{tikzcd} c \arrow[rr, "\gamma_1"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\gamma_2"'] & & d_1 \arrow[dd, "\delta_1"] \\ & k \arrow[ur, "\chi_1"] \arrow[dl, "\chi_2"] & \\ d_2 \arrow[rr, "\delta_2"'] & & a \end{tikzcd}$$

szintén kommutatív diagram.

A kilökés δ_1 és δ_2 leképezésekre nézve a homologikus nyilaknak mindenhol való megfordításával definiálható.

Az a objektum (k, χ) részobjektuma az $\alpha: a\to b$ leképezés magva, ha

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d, "\chi"'] & 0 \arrow[d] \\ a \arrow[r, "\alpha"'] & b \end{tikzcd}$$

visszahúzási diagram. Itt a χ leképezés normál monomorfizmus és $\ker \alpha=(k, \chi)$ pedig a ideálja.

Az a objektum (χ, k) faktorobjektuma ko-magva az $\alpha: b\to a$ leképezésnek, ha

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & a \arrow[d, "\chi"] \\ 0 \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

kilökési diagram.

Itt χ normális epimorfizmus és $\operatorname{Coker} \alpha=(\chi, k)$ pedig a normális faktorobjektuma.

A csoportok és gyűrűk kategóriájában minden epimorfizmus normális, de nem minden monomorfizmus lesz normális.

Sőt, két normális monomorfizmus szorzata sem normális.

Ha $\alpha\beta$ normális monomorfizmus és ha β monomorfizmus, akkor α (KUROS szerint) normális monomorfizmus lesz.

A továbbiakban feltesszük:

(C_2) Minden leképezésnek van magva és ko-magva.

(C_3) Minden a objektum részobjektumainak az osztálya és faktorobjektumainak az osztálya halmazok, amelyek az előzőkben definiált $\leqq$ részben rendezésre egy L_a illetve L_a^*, teljes hálót alkotnak.

(C_4) Minden $a \in C$ objektum ideáljai és normális faktorobjektumai L_a-nak, illetve L_a^*-nak teljes részhálóját alkotják.

Bebizonyítható, hogy

Ker Coker Ker α = Ker α és Coker Ker Coker α = Coker α.

Megjegyezzük a (C_4) axiómával kapcsolatban, hogy a (d_1, δ_1) és (d_2, δ_2) ideálok metszete olyan (k, χ) ideál lesz, hogy

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\chi"] & d_1 \arrow[d, "\delta_1"] \\
d_2 \arrow[r, "\delta_2"] & a
\end{tikzcd}$$

visszahúzási diagram. Továbbá a (δ_1, d_1) és (δ_2, d_2) normális faktorobjektumok metszete olyan (χ, k) normális faktorobjektum lesz, hogy

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_2"'] \arrow[dr, "\chi"] & d_1 \arrow[d] \\
d_2 \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

kilökési diagram. A (d_1, δ_1) és (d_2, δ_2) ideálok (l, λ) egyesítése pedig olyan ideál, hogy egyrészt

$$\begin{tikzcd}
l & d_1 \arrow[l] \arrow[d, "\delta_1"] \\
d_2 \arrow[u] \arrow[r, dash, "\delta_2"'] & a \arrow[ul, "\lambda"']
\end{tikzcd}$$

kommutatív diagram, másrészt minden $\gamma : c \to a$ leképezésre és minden

$$\begin{tikzcd}
l & & d_1 \arrow[ll] \arrow[dl] \\
 & c \arrow[dr, "\gamma"] & \\
d_2 \arrow[uu] \arrow[ur] & & a
\end{tikzcd}$$

diagramra nézve létezik olyan $\lambda' : l \to c$ monomorfizmus, hogy $\lambda' \gamma = \lambda$, és a kibővített diagramm is kommutatív.

Két normális faktorobjektum egyesítését duálisan (tehát a nyilak megfordításával) definiáljuk.

Szerző és WIEGANDT RICHÁRD [85] igazolta, hogy L_a^* duálisan izomorf L_a-val, és a Ker $\alpha \leftrightarrow$ Coker Ker α leképzés kölcsönösen egyértelmű.

Legyen $\alpha: a \to b$ egy leképezés. Ha $\mu: a \to m$ epimorfizmus és $\nu: m \to b$ monomorfizmus, továbbá $\alpha = \mu \cdot \nu$, akkor b-nek az (m, ν) részobjektuma α-nak *képe* lesz. Ha μ ráadásul normális epimorfizmus, akkor (m, ν) *normális képe* lesz α-nak. Legyen (k, χ) az a részobjektuma és $\alpha: a \to b$ epimorfizmus. Ha $\chi\alpha$-nak egy képe (m, ν), akkor (m, ν) a (k, a) egy képe lesz az α epimorfizmus által. Duálisan definiálható α-nak a *ko-képe*, *normális ko-képe*, és (χ, k)-nak az α *monomorfizmus által való ko-képe* is.

A kép és ko-kép nincs egyértelműen meghatározva, de a normális kép és normális ko-kép mindig egyértelműen meghatározottak.

A csoportok és gyűrűk kategóriájában $\operatorname{Im} \alpha$ és $\operatorname{Coim} \alpha$ mindig létezik és $\operatorname{Im} \alpha$ mindig normális kép, de $\operatorname{Coim} \alpha$ általában nem lesz normális ko-kép.

Feltesszük, hogy teljesülnek:

(C_5) Minden α leképezéshez létezik $\operatorname{Im} \alpha$ és $\operatorname{Coim} \alpha$ (ezek általában nem normálisak).

(C_6) Minden ideálnak a képe bármely normális epimorfizmus által mindig ideál és minden normális faktorobjektumnak a ko-képe bármely normális monomorfizmus által mindig normális faktorobjektum.

Az első izomorfia-tétellel belátható, hogy $(C_1), (C_2), \ldots, (C_6)$ axiómák mind teljesülnek a csoportok és a gyűrűk kategóriájában.

Ha van α-nak normális képe és ha $\operatorname{Ker} \alpha = (0, \omega)$, akkor α monomorfizmus. (Ez KUROS eredménye).

Azt mondjuk, hogy egy g objektum az a_α $(\alpha \in A)$ objektumok direkt szorzata, ha léteznek olyan $\pi_\alpha: g \to a_\alpha$ leképezések (ezeket g-nek a_α-ra való projekcióinak nevezzük) úgy, hogy minden $h \in C$ objektumra és a $B_\alpha: h \to a_\alpha$ $(\alpha \in A)$ leképezések bármely rendszerére létezik egyetlen *kanonikus leképezés* $\gamma: h \to g$ úgy, hogy $\gamma\pi_\alpha = \beta_\alpha$ minden $\alpha \in A$ indexre. Ekkor ezt így írjuk:

$$g = \prod_{\alpha \in A} a_\alpha(\pi_\alpha).$$

Az f szabad szorzat duálisan definiálható. Feltesszük, hogy érvényes:

(C_7) Objektumok bármely halmazának létezik a direkt szorzata és a szabad szorzata.

Legyen az a objektum (k_α, χ_α) ideáljainak egy halmaza megadva, és legyenek $\beta_\alpha: a \to a_\alpha$ epimorfizmusok a $\operatorname{Ker} \beta_\alpha = (k_\alpha, \chi_\alpha)$ magokkal. Legyen a $g = \prod_{\alpha \in A} a_\alpha(\pi_\alpha)$ direkt szorzathoz tartozó kononikus leképezés $\gamma: a \to g$, ahol $\gamma\pi_\alpha = \beta_\alpha$ $(\alpha \in A)$. Ekkor $\operatorname{Ker} \gamma = \bigwedge_{\alpha \in A} (k_\alpha, \chi_\alpha)$ érvényes. Feltesszük annak érvényességét, hogy

(C_8) Minden epimorfizmus normális.

Az ilyen C kategóriákban bebizonyítható a két izomorfia tétel (ezek sorszámozása a szokásos, tehát eltér [86]-tól).

ELSŐ IZOMORFIA-TÉTEL. *Legyenek* (k, χ), (d_1, δ_1) *és* (d_2, δ_2) *az a objektum ideáliai úgy, hogy*

$$(k, \chi) = (d_1, \delta_1) \cap (d_2, \delta_2) \quad \text{és} \quad (a, \varepsilon_a) = (d_1, \delta_1) \cup (d_2, \delta_2).$$

Ha $0 \to k \to d_1 \to b_1 \to 0$ *és* $0 \to d_2 \to a \to b_2 \to 0$

exakt sorozatok, akkor exakt és kommutatív a következő diagram is (azaz b_1 és b_2 ekvivalensek):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & k & \to & d_1 & \to & b_1 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & d_2 & \to & a & \to & b_2 & \to & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

MÁSODIK IZOMORFIA-TÉTEL. *Legyen (k, χ) ideál az a objektumban és (m, μ) ideál a b objektumban és legyen*

$$0 \to k \xrightarrow{\chi} a \xrightarrow{\alpha} b \to 0$$

exakt sorozat. Legyen (d, δ) az (m, μ) teljes inverz képe az α epimorfizmus mellett. Ekkor léteznek olyan B és γ leképezések, hogy

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & k & \to & d & \to & m & \to & 0 \\ & & & & \downarrow\delta & & \downarrow\mu & & \\ 0 & \to & k & \to & a & \to & b & \to & 0 \\ & & & & \downarrow\gamma & & \downarrow\beta & & \\ & & 0 & \to & c & \to & c & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

exakt és kommutatív diagram.

A C kategória objektumainak egy R osztálya radikál-osztály, ha teljesül a következő három feltétel:

(a) Ha $a \in R$ és ha $\alpha : a \to b$ normális epimorfizmus, akkor $b \in R$.

(b) Minden $a \in C$ objektumra, az olyan (k, χ) ideálok e egyesítése, amelyekre $k \in R$, szintén R-hez tartozik, vagyis $e \in R$. Ekkor $e = R\text{-rad}\, a$, amelyet R-radikáljának nevezünk

(c) Ha $\alpha : a \to b$ olyan normál epimorfizmus, hogy $\ker \alpha = R\text{-rad}\, a$, akkor $R\text{-rad}\, b = (0, \omega)$.

Az R-hez duális S osztályt féligegyszerű osztálynak nevezzük. Tehát S féliegegyszerű osztály, ha teljesülnek:

(a*) Ha $a \in S$ és ha $\alpha : b \to a$ normális monomorfizmus, akkor $b \in S$.

(b*) Minden $a \in C$ objektumra az összes olyan (λ, l) normális faktorobjektumnak az f egyesítése, amelyekre $l \in S$, az S-hez tartozik, vagyis $f \in S$. Ekkor $f = S\text{-ses}\, a$, amelyet az a S-féligegyszerű képének nevezünk.

(c*) Ha $\alpha : b \to a$ normális monomorfizmus, ahol $\text{Coker}\, \alpha = S\text{-ses}\, a$, akkor $S\text{-ses}\, b = (\omega, 0)$ S-normális faktorobjektum olyan (λ, l) normális faktorobjektum, amelyre $l \in S$.

Ha R radikálosztály, legyen R^* mindazon $a \in C$ objektumoknak az osztálya, amelyek R-radikálja zérus objektum. Hasonlóan, ha S félieggyszerű osztály, legyen S^* mindazon $a \in C$ objektumoknak az osztálya, amelyekre $S\text{-ses}\, a$ zérus objektum. Világos, hogy $R \cap R^*$ és $S \cap S^*$ egyaránt csak a zérus objektumból állhat.

Bizonyítás nélkül kimondható a nemtriviális:

9. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a C kategóriában bármely két normális epimorfizmus szorzata normális epimorfizmus. Ha S féligegyszerű osztály C-ben, akkor S^* radikálosztály.*

Megjegyezzük, hogy E. P. ARMENDARIZ—W. G. LEAVITT [3] szerint az összes nemasszociatív gyűrű kategóriájában az R^* osztály nem mindig teljesíti az (a^*) feltételt. Viszont az alternatív gyűrűknek vagy az asszociatív gyűrűknek a kategóriájában (a^*) mindig teljesül az R^* osztályra.

10. TÉTEL. *Legyen minden R radikálosztályra R^* féligegyszerű osztály, és legyen minden S féligegyszerű osztályra S^* radikálosztály a C kategóriában. Ekkor $R^{**}=R$ és $S^{**}=S$.*

4. §. A szubdirekt beágyazás dualizálása kategóriákban és alkalmazások alternatív és asszociatív gyűrűkre, csoportokra és modulusokra

Ennek a §-nak az anyaga részletesen megtalálható a szerző és WIEGANDT RICHARD [85] közös dolgozatában. Feltesszük, hogy a C kategóriára teljesülnek a $(C_1), (C_2), \ldots, (C_7)$ axiómák, amelyeket az előző, 3. §-ban fogalmaztunk meg.

Egy $a \in C$ objektum a $g = \prod_{\alpha \in A} a_\alpha(\pi_\alpha)$ direkt szorzatba *szubdirekt módon van beágyazva*, ha létezik olyan, $\gamma : a \to g$ monomorfizmus úgy, hogy az összes $\beta_\alpha : a \to a_\alpha$ leképezés, ahol $\beta_\alpha = \gamma\pi_\alpha$, normális epimorfizmus.

Dualizálással adódik, hogy egy $a \in C$ objektum az $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(\varrho_\alpha)$ szabad szorzatnak egy *transz-szabad képe*, ha létezik olyan $\sigma : f \to a$ epimorfizmus, hogy minden $\beta_\alpha : a_\alpha \to a$ $(\alpha \in A)$ leképezés, ahol $\beta_\alpha = \varrho_\alpha\sigma$, normális monomorfizmus.

G. BIRKHOFF szubdirekt összegekről szóló ismert tétele kategória-elméleti általánosításának nem triviálisan bizonyítható dualisaként igaz:

11. TÉTEL. *Egy $a \in C$ objektum az $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(\varrho_\alpha)$ szabad szorzatnak akkor és csak akkor egy transz-szabad képe, ha létezik $(\lambda_\alpha, l_\alpha)$ normális faktorobjektumoknak olyan halmaza, hogy mindegyik $(\lambda_\alpha, l_\alpha)$ ko-magva a $\beta_\alpha : a_\alpha \to a$ normális monomorfizmusnak $(\alpha \in A)$ és $\bigwedge_{\alpha \in A} (\lambda_\alpha, l_\alpha) = (\omega, 0)$.*

Egy $a \in C$ objektum transz-szabad módon irreducibilis, ha az összes *nemzérus* normális faktorobjektumának a metszete egy *nemzérus* normális faktorobjektum.

Bizonyítás nélkül említjük az alábbi tételt.

12. TÉTEL. *Legyen az $a \in C$ objektum összes normális faktorobjektumának L_a^* teljes hálója kompaktul generált. Ekkor a az $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha(\varrho_\alpha)$ szabad szorzatnak egy transz-szabad képe a γ epimorfizmus mellett, úgy hogy $\varrho_\alpha\gamma = \beta_\alpha$ és $\beta_\alpha : a_\alpha \to a$ normális monomorfizmus minden $\alpha \in A$ indexre. Ebben a felbontásban egy a_α komponens akkor és csak akkor transz-szabad módon irreducibilis, ha a következő feltétel teljesül:*

(F) *a_α-nak minden $(m, \chi) \neq (a_\alpha, \varepsilon_{a_\alpha})$ ideáljához (amely a-nak nyilván egy (m, χ_1) részobjektuma, létezik a-nak olyan (d, δ) ideálja, hogy $(m, \chi_1) \leqq (d, \delta) \subsetneqq (a_\alpha, \beta_\alpha)$.*

Az (F) feltétel más szóval azt jelenti, hogy az a_α objektumnak pontosan egy (d, δ') valódi maximális ideálja van (itt $\delta=\delta' B_\alpha$ és (d, δ) ideál az a objektumban).

Most interpretálni fogjuk a 12. Tételt. Egy L teljes háló k elemét ko-kompaktnak nevezzük, ha $k \geqq \bigwedge_{\beta \in B} l_\beta$ esetén a B index-halmaznak van olyan véges Γ részhalmaza, hogy már $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} l_\gamma \leqq k$ is teljesül. Minthogy L_a és L_a^* duálisan izomorfok, L_a^* akkor és csak akkor kompaktul generált, ha L_a ko-kompaktul generált, vagyis L_a minden eleme ko-kompakt elemek metszeteként állítható elő.

13. Tétel. *Az L háló minden eleme akkor és csak akkor ko-kompakt, ha L-ben teljesül a minimum-feltétel.*

14. Tétel. *Ha az A gyűrű olyan A_α gyűrűknek a diszkrét direkt összege, hogy mindegyik A_α jobbegységelemes vagy balegységelemes, és A_α kétoldali ideáljaira teljesül a minimum-feltétel, akkor A kétoldali ideáljainak az L teljes hálója ko-kompaktul generált.*

Az (F) feltétel gyűrűkre pl. az alábbi speciális esetekben teljesül:
1. Minden elérhető részgyűrű ideál.
2. Minden részgyűrű ideál.
3. Minden ideál idempotens.

15. Tétel. *Legyen A tetszőleges* 1., 2. *vagy* 3. *típusú olyan gyűrű, amely balegységelemes gyűrűknek és jobbegységelemes gyűrűknek a diszkrét direkt összege úgy, hogy ezekben a direkt komponensekben a minimum-feltétel teljesül a kétoldali ideálokra. Ekkor léteznek A-ban olyan A_β $(\beta \in B)$ ideálok, hogy*

(i) *mindegyik A_β-nak egyetlen valódi ideálja van, amely A-nak is ideálja;*

(ii) *mindegyik A_β olyan típusú, mint A;*

(iii) *A homomorf képe a $\sum B_\beta$ szabad összegnek, ahol $B_\beta \cong A_\beta$ és a $\sum B_\beta$ szabad összeg az összes formális $\sum n_r \varphi_r$ végessok-tagú összeg halmaza, ahol $n_r \in Z$ racionális egész szám, és φ_r pedig bizonyos B_β gyűrűkből vett végessok-tényezős szorzat.*

Kiegészítés. A 2. eset fontos alesete: 2.1. *Minden részgyűrű direkt összeadandó.* A 3. eset fontos alesetei:

3.1. *A Neumann-reguláris;*
3.2. *A erősen reguláris, azaz $a \in a^2 A$ minden $a \in A$ elemre;*
3.3. *A bireguláris, azaz minden főideál egységelemes;*
3.4. *A gyengén reguláris, azaz minden jobbideál idempotens.*

Megjegyzés. A 15. Tétel igaz akkor is, ha az 1., 2. és 3. típusok helyett a 2.1., 3.1., 3.2., 3.3. és 3.4. gyűrű típusokat vesszük.

16. Tétel. *Legyen a G csoport normálosztóinak az L hálója ko-kompaktul generált, és legyen G-ben tranzitív a „normálosztónak lenni" reláció. Ekkor léteznek G-nek olyan G_α normálosztói, hogy teljesül az alábbi két feltétel:*

(i) *Mindegyik G_α-nak egyetlen maximális normálosztója van;*

(ii) *G homomorf képe a $\prod^* F_\alpha$ szabad szorzatnak, ahol $F_\alpha \cong G_\alpha$ $(\alpha \in A)$.*

MEGJEGYZÉS. A 16. TÉTEL megfelelője kimondható volna egy A gyűrű felett vett M A-jobbmodulusra is.

Asszociatív gyűrűk egy R radikálosztálya öröklődő, ha abból, hogy $A\in R$, és hogy I ideál A-ban, következik $I\in R$ is.

17. TÉTEL. *Legyen A egy öröklődő R-radikálgyűrű, amelynek az L ideálhálója ko-kompaktul generált. Ekkor A bizonyos R-radikál I_α ideáljainak egy transz-szabad képe. I_α akkor és csak akkor lesz transz-szabad módon irreducibilis, ha az* (F) *feltétel teljesül az I_α ideálra.*

Példa adható meg arra, hog egy a objektum kétoldali ideáljainak L_a hálója nem ko-kompaktul generált. Legyen ugyanis A zérusosztómentes, egységelemes és kommutatív főideálgyűrű. Ekkor léteznek irreducibilis elemek A-ban, amelyek prímelemek, érvényes A-ban a számelmélet alaptétele, és bármely két elemnek létezik a legnagyobb közös osztója. Ha I tetszőleges nem zérus ideál A-ban, van olyan $a\in A$ elem, hogy $I=(a)$. Létezik olyan $p(\neq 1)$ prímelem A-ban, hogy $(a,p)=1$. Minthogy $\bigwedge_{k=1}^{\infty}(p^k)=0\subset(a)$, de minden k-ra $(p^k)\subsetneqq(a)$, ezért I nem ko-kompakt elem az A gyűrű L ideálhálójában. Minthogy I tetszőlegesen volt választva, L nem ko-kompaktul generált.

5. §. Kritériumok és elegendő feltételek arra, hogy egy felső radikál öröklődő legyen

E §-nak az anyaga a szerző és WIEGANDT RICHARD [87] közös dolgozatában található meg.

Az öröklődő radikálok már az előző §-ban levő 17. Tételben is előfordultak. Ebben a §-ban, többek közt, megmutatjuk azt, hogy az öröklődő radikálok igen gyakran lépnek fel abban az értelemben, hogy minden $\mathfrak{m}$ végtelen számosságához megadható olyan P és Q öröklődő radikál, hogy P és Q közt pontosan $2^{\mathfrak{m}}$ számosságú öröklődő R radikál létezik, tehát: $P\leqq R\leqq Q$. Példát adunk még arra is, hogy a P és Q öröklődő radikálok közt nincs más öröklődő radikál. Azt többen vizsgálták (pl. ARMENDARIZ—LEAVITT [4]) korábban, hogy egy alsó radikál öröklődő legyen, ezért célszerű most a felső radikál öröklődőségét vizsgálni.

Legyen F testeknek egy osztálya, amely nem halmaz a *Zermelo—Fraenkel*-halmazelmélet szerint. Legyen UF az F által meghatározott felső radikál, és legyen $F(\mathfrak{m})$ az F osztálynak egy $\mathfrak{m}$-számosságú részhalmaza.

18. TÉTEL. *Legyen $P(\subseteqq UF)$ tetszőleges radikálosztály és Q pedig $P\cup F(\mathfrak{m})$ osztállyal meghatározott $\mathscr{L}(P\cup F(\mathfrak{m}))$ alsó radikál. Ekkor a $[P, Q]$ intervallumban pontosan $2^{\mathfrak{m}}$ számú radikálosztály van. $[P, Q]$ minden radikálosztálya akkor és csak akkor öröklődő, ha P öröklődő.*

Bizonyítás. Legyen $R\in[P, Q]$, tehát R a $[P, Q]$ intervallumból egy radikálosztály. Legyen $F(\mathfrak{n})$ az $F(\mathfrak{m})$ halmazból mindazon testeknek a halmaza, amelyek R-beli bizonyos gyűrűknek az ideáljai. (Itt $\mathfrak{n}$ jelenti $F(\mathfrak{n})$ számosságát). Ezért $B\in F(\mathfrak{n})$ esetén B direkt összeadandója egy R-beli gyűrűknek, és így $P\cup F(\mathfrak{n})\subseteqq R$ miatt $\mathscr{L}(P\cup F(\mathfrak{n})\subseteqq R.)$)

Ha $A \in R$, de $A \notin P$, akkor $A_1 = A/P(A) \neq 0$ és $R(A_1) = A_1$. Minthogy $Q = \mathcal{L}(P \cup F(\mathfrak{m}))$, ezért $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$, ahol $N_1 = P \cup F(\mathfrak{m})$ és N_k mindazon gyűrűk halmaza, amelyeknek minden nemzérus homomorf képében van nemzérus ideál N_l-ből, ahol $l < k$. Ezért $Q(A_1) = A_1$, és van SULINSKI—ANDERSON—DIVINSKY [35] 1. Lemmája szerint A_1-nek olyan nemzérus elérhető A_n részgyűrűje, amely $N_1 = P \cup F(\mathfrak{m})$ eleme. Ha $A_n \in P$, akkor $P(A_{n-1})$ ideál A_{n-2}-ben, és $0 \neq A_n \subseteq P(A_{n-1})$. Ezért az $A_{n-3}, \ldots, A_2, A_1$ elérhető részgyűrűknek nemzérus P-radikáljaik vannak, ami lehetetlen. Ezért A_1-nek egy A_n nemzérus elérhető részgyűrűje $F(\mathfrak{m})$ eleme. Ezért A_n test. Legyen A_n^* az A_n által A_1-ben generált ideál. Ekkor $A_n = A_n^3 \subseteq (A_n^*)^3 \subseteq A_n$ miatt $A_n \in F(\mathfrak{n})$, tehát $R \subseteq \mathcal{L}((P \cup F(\mathfrak{n}))$ következik. Minthogy pedig $F(\mathfrak{m})$-ben pontosan $2^{\mathfrak{m}}$ számú olyan $F(\mathfrak{n})$ részhalmaz van, amelyekre $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}$, ezért a 18. Tétel első felét bebizonyítottuk. A másik fele ARMENDARIZ—LEAVITT [4] 3. Lemmájából adódik, amely szerint, ha N öröklődő, akkor $\mathcal{L}(N)$ is öröklődő.

19. TÉTEL. *Legyen $P \subseteq UF$, és legyen F-nek a $\mathcal{G}$ részosztálya nem halmaz* (jelölések megegyeznek a 18. Tételével), *legyen továbbá $Q = \mathcal{L}(P \cup \mathcal{G})$. Ekkor a $[P, Q]$ intervallumba eső radikálok osztályt, de nem halmazt alkotnak. Ha P öröklődő, akkor $[P, Q]$-ba eső minden radikál öröklődő.*

Bizonyítás. A bizonyítás módszere ugyanaz, mint a 18. Tételé.

20. TÉTEL. *Minden R radikálhoz tartozik egyetlen maximális öröklődő H szubradikál.*

Bizonyítás. Legyen $\ddot{O}$ mindazon öröklődő radikálosztályok egyesítése, amelyekre $\ddot{O} \leqq R$. Ekkor $\ddot{O}$ szintén öröklődő, és $H = \mathcal{L}(\ddot{O}) \leqq R$ kívánt szubradikál, amely öröklődő.

21. TÉTEL. *A 20. tétel jelöléseit megtartva H mindazon A gyűrűkből áll, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűje sem képezhető le homomorf módon az SR féligegyszerű osztály egy nemzérus gyűrűjére.*

Bizonyítás. Világos, hogy R éppen az USR felső radikál. Legyen C mindazon gyűrűk osztálya, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűjük sem képezhető le homomorf módon az SR osztály egy nemzérus gyűrűjére. Igazolni fogjuk, hogy $C = H$. Minthogy C öröklődő, és homomorf zárt, ezért $\mathcal{L}C$ is öröklődő, és:

$$C \subseteq \mathcal{L}C \subseteq R = USR.$$

Másfelől, ha $A \in H \subseteq R$, akkor $SR \subseteq SH$, és minthogy H öröklődő, A minden elérhető részgyűrűje H eleme, és így homomorf módon nem képezhető le SR egy nemzérus gyűrűjére. Ezért $A \in C$, tehát $H \subseteq C$. Így $H \subseteq \mathcal{L}C$, tehát $H = \mathcal{L}C$.

Példa. Megmutatjuk, hogy az is lehet, hogy P és Q öröklődő radikálok, de a $[P, Q]$ intervallum minden más radikálja nem öröklődő. Legyen $P = \{(0)\}$ és Q a $Z(p)$ prímszámrendű zérógyűrűvel meghatározott alsó radikál. Legyen $(H \neq P)$ öröklődő radikál a $[P, Q]$ intervallumból. Ekkor minden $A \in H$ gyűrűre $A \in Q$, tehát van A-nak egy $Z(p)$-vel izomorf elérhető részgyűrűje. Minthogy H öröklődő, $Z(p) \in H$, és így $Q = \mathcal{L}(Z(p)) \subseteq H$. Másfelől a $Z(p^\infty)$ kváziciklikus additív csoportú zérógyűrűvel meghatározott $\mathcal{L}(Z(p^\infty))$ alsó radikálosztály pontosan azon zérógyűrűkből áll, amelyeknek az additív csoportja $C(p^\infty)$ csoportok diszkrét direkt összege. Minthogy $\mathcal{L}(Z(p^\infty))\neq Q$, ezért $\mathcal{L}(Z(p^\infty))$ nem öröklődő, bár $\mathcal{L}(Z(p^\infty))$ benne van a $[P, Q]$ intervallumban.

Minden $R\in[P, Q]$ radikálhoz legyen $\bar{R}$ a $[P, Q]$ intervallumba eső, R-et tartalmazó öröklődő radikálok metszete. Ez az $\bar{R}$ radikál $[P, Q]$-ban R öröklődő lezártja lesz. Nyilván $\overline{R_1\cup R_2}=\bar{R}_1\cup\bar{R}_2$ tehát $R\to\bar{R}$ topologikus lezárás.

22. TÉTEL. *Ha az R radikál nem öröklődő, léteznek olyan $P\subseteq R$ és $Q\supseteq R$ öröklődő radikálok, hogy sem $[P, R]$ sem $[R, Q]$ nem tartalmaz öröklődő radikált, csak P-t és Q-t.*

Bizonyítás. Legyen $P=H$ és $Q=\bar{R}$, ekkor nyilván teljesülnek a tétel állításai.

23. TÉTEL. *Legyen M tetszőleges öröklődő gyűrű-osztály. Az UM felső radikál akkor és csak akkor öröklődő, ha UM pontosan azokból a gyűrűkből áll, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűjének sincs nemzérus homomorf képe az M gyűrűosztályban.*

Bizonyítás. UM a 21. Tétel szerint akkor és csak akkor öröklődő, ha UM tartalmazza mindazokat a gyűrűket, amelyeknek egyik nemzérus elérhető részgyűrűjének sincs nemzérus homomorf képe az $\bar{M}=SUM$ féligegyszerű gyűrűosztályban. Ezért, ha $A\in UM$, akkor $M\subseteq\bar{M}$ miatt M-ben sincs nemzérus homomorf képe A nemzérus elérhető részgyűrűjének. Ha pedig $A\notin UM$, akkor van olyan $B\neq 0$ elérhető részgyűrű, amelynek egy nemzérus S homomorf képe $\bar{M}$-ben fekszik, és S homomorf leképezhető M egy nemzérus gyűrűjére is.

A továbbiakban elegendő feltételeket adunk meg arra, hogy az UM felső radikál öröklődő legyen. Feltesszük, hogy M öröklődő osztály, és még a további feltételeket szabhatjuk ki M-re:

(i) M homomorf zárt.

(ii) Ha I ideál A-ban, és L olyan ideál I-ben, hogy $I/L\in M$, akkor L ideál A-ban.

(iii) Ha K ideál A-ban, és $K\in M$, akkor létezik olyan N valódi ideál A-ban, hogy $K+N=A$.

(iv) Jelölje I_0 az I ideál kétoldali A-beli annihilátorát. Ha $I\in M$, akkor $A/I_0\in M$.

(v) Ha I és L az A gyűrű ideáljai és $I\supseteq L$, továbbá $I/L\in M$, akkor $(L:I)\cap J=L$.

Megjegyezzük, hogy egységelemes egyszerű gyűrűk bármely osztálya homomorf zárt, és eleget tesz az (i), (ii), ..., (v) feltételeknek. Másfelől az összes (*Jacobson*-féle) primitív gyűrű M osztályával meghatározott felső radikál éppen a J *Jacobson*-radikál, amely nyilván öröklődő radikál, bár ez az M osztály nem homomorfan zárt. Létezik ui. olyan primitív gyűrű, amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens, tehát e homomorf képek *Jacobson*-radikálgyűrűk.

24. TÉTEL. *Legyen M homomorfan zárt és öröklődő olyan gyűrűosztály, amelyre teljesül* (i), (ii) *és* (iii). *Ekkor az UM felső radikál öröklődő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A\in UM$ és A egy I ideáljára $I\notin UM$. Ekkor van I-nek olyan L ideálja, hogy $0\neq I/L\in M$, és (ii) alapján L ideál A-ban is. Ezért I/L az A/L gyűrű M-ideálja, ezért (iii) alapján van olyan N/L ideál A/L-ben, hogy $N/L\neq A/L$, és

$$A/L = I/L+N/L.$$

Ekkor $L \subseteq I \cap N$ és $A = I + N$, továbbá az első izomorfiatétel szerint $A/N \cong I/I \cap N$, és így A/N homomorf képe, $L \subseteq I \cap N$ miatt, $I/L (\in M)$-nek, ezért M homomorf zártsága miatt $A/N \in M$, ami $A \in UM$ miatt lehetetlen. Ezért UM tényleg öröklődő radikál.

25. TÉTEL. *Ha M homomorfan zárt és öröklődő olyan gyűrűosztály, amelyre teljesül* (ii) *és* (iv), *akkor az UM felső radikál öröklődő.*

Bizonyítás. Legyen $A \in UM$ és I az A gyűrű olyan ideálja, hogy $I \notin UM$. Ekkor $UM(I)$ ideálja A-nak is, továbbá $0 \neq I' = I/UM(I) \in SUM = \overline{M}$. Minthogy I'-nek bármely nemzérus ideálja homomorfan leképezhető M egy nemzérus gyűrűjére, van I'-nek olyan L' ideálja, hogy $I'/L' \in M$. A második izomorfia-tétel szerint van olyan L ideál I-ben, hogy $I/L \cong I'/L' \in M$, és az (ii) feltétel miatt L ideál A-ban. Legyen $A'' = A/L$ és $I'' = I/L$, továbbá I_0'' kétoldali annihilátora I''-nek A''-ben. Ekkor az (iv) feltétel alapján $0 \neq A/(I_0 \cong (A/L)/I_0/L) = A''/I_0'' \in M$, ellentétben azzal, hogy $A \in UM$. Ezért UM tényleg öröklődő radikál.

26. TÉTEL. *Legyen M olyan homomorfan zárt és öröklődő gyűrűosztály, amelyre a* (ii), (iv) *és* (v) *feltételek teljesülnek. Ekkor az $\overline{M} = SUM$ féligegyszerű osztályból minden gyűrű M-ből vett gyűrűknek lesz egy szubdirekt összege.*

Bizonyítás. Ha $A \in \overline{M}$, van olyan I ideál A-ban, hogy $0 \neq A/I \in M$. Legyen $\{I_\alpha\}$ mindazon ideáloknak a halmaza, amelyekre $0 \neq A/I_\alpha \in M$. Legyen $K = \cap I_\alpha$. Elég megmutatni azt, hogy $K = 0$. Minthogy $\overline{M}$ is öröklődő osztály, $A \in \overline{M}$ miatt $K \in \overline{M}$. Ezért van K-nak olyan L ideálja, hogy $K/L \in M$, és (ii) alapján L ideál A-ban is. Nyilvánvaló, hogy K/L-nak A/L-beli kétoldali annihilátora $(L: K)/L$. Ezért a (iv) feltétel alapján

$$A/(L:K) \cong (A/L)/(L:K)/L \in M,$$

tehát $L : K \in \{I_\alpha\}$. Ezért $K \subseteq (L:K)$, és (v) alapján

$$K \subseteq (L:K) \cap K = L \subseteq K,$$

ami ellentmond K megválasztásának. Ezért a 26. Tételt indirekt bebizonyítottuk.

Példa. Legyen R az összes *Neumann*-reguláris gyűrű osztálya. R nyilván öröklődő radikálosztály, és $R = USR$, pedig az SR osztályra (ii), (iii) és (iv) egyike sem teljesül. Legyen ugyanis $A = \{a_1, a_2\}$, ahol $2a_i = 0$, és a szorzási tábla

	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_2	0

Világos, hogy $A_2 = \{a_2\}$ nilpotens minimális ideál, ezért $A_2 \in SR$, de (ii) nem teljesül. Minthogy nincs olyan N valódi ideál, hogy $N + A_2 = A$, ezért (iii) sem teljesül. Továbbá A_2 annihilátora maga A_2, és minthogy $A/A_2 \cong \{a_1\}$ test, ezért $A/A_2 \in R$ és $A/A_2 \notin SR$. Tehát (iv) sem teljesül.

6. §. Wiegandt Richárd egy problémájának a megoldása homomorfan zárt nemtriviális féligegyszerű gyűrűosztály létezéséről

Ennek a §-nak az anyag megtalálható a szerző [55], [56] és [73] dolgozataiban. Az öröklődő radikáloknak kategória-elméletileg duálisai azok a féligegyszerű gyűrűosztályok, amelyek homomorfan zártak. Az ilyen féligegyszerű gyűrűk szubdirekt irreducubilis féligegyszerű gyűrűknek lesznek szubdirekt összegei. Ilyen féligegyszerű S gyűrűosztályra van két triviális példa:

1. S az összes gyűrűt tartalmazza;
2. S csak a $\{0\}$ gyűrűt tartalmazza.

WIEGANDT RICHÁRD kérdezte, hogy létezik-e nemtriviális, homomorfan zárt féligegyszerű S osztály. Megmutatjuk, hogy létezik ilyen nemtriviális osztály. Megadjuk továbbá ennek az osztálynak hat ekvivalens feltétellel való jellemzését, és azt is igazoljuk, hogy az $I \to US(I)$ megfeleltetés asszociatív és alternatív gyűrűk esetében a kétoldali ideálok hálójának egyesítés-endomorfizmusa.

Egy R-féligegyszerű gyűrű erősen féligegyszerű, ha a gyűrű minden homomorf képe R-féligegyszerű. E fogalom V. A. ANDRUNAKIEVIČ [2] és A. SULINSKI [34] dolgozataiban más vonatkozásban szerepelt.

27. TÉTEL. *Minden $n \geqq 2$ természetes számhoz létezik olyan R_n radikál, amelyik speciális* (v.ö. DIVINSKY [9], VII fejezet), *és minden R_n-féligegyszerű gyűrű erősen féligegyszerű és kommutatív.*

Bizonyítás. Rögzített $n \geqq 2$ természetes számra legyen K_n mindazon A_n testeknek az osztálya, amelyekre $a^n = a$ teljesül minden $a \in A_n$ esetén. Legyen továbbá L_n mindazon B_n gyűrűknek az osztálya, amelyekre $b^n = b$ teljesül minden $b \in B_n$ esetén. N. JACOBSON ([19] Theorem 10.1.1) szerint minden B_n kommutatív, és minthogy minden B_n *Jacobson*-féligegyszerű, ezért B_n a K_n-ből vett bizonyos testeknek lesz egy szubdirekt összege. Fordítva, K_n-ből vett bizonyos testeknek bármely szubdirekt összege L_n-hez tartozik, mert az $a^n = a$ feltétel öröklődik részgyűrűkre, homomorf képre és komplett direkt összegre is.

Ahhoz, hogy megmutassuk azt, hogy UK_n speciális radikál, igazolni kell (vö. DIVINSKY [9], VII. fejezet), hogy

1. K_n-ből minden gyűrű prímgyűrű;
2. K_n-beli gyűrű minden nemzérus ideálja is K_n-beli;
3. Ha I_0 jelenti az I ideál A-beli kétoldali annihilátorát, és ha $I \in K_n$, akkor $A/I_0 \in K_n$.

A K_n osztályra 1. és 2. triviálisan teljesülnek, mert minden test egyszerű és prímgyűrű. Legyen I ideál A-ban, $I \in K_n$, $i \in I$ és $a \in A$. Ekkor

$$(ai)^n = ai \quad \text{és} \quad (ia)^n = ia,$$

továbbá I kommutativitása miatt k szerinti teljes indukcióval belátható $(ai)^k = a^k i^k$ és $(ia)^k = i^k a^k$. Ezért $i^n = i$ miatt nyilvánvalóan:

$$(a^n - a)i = i(a^n - a) = 0,$$

tehát $a^n - a \in I_0$ minden $a \in A$ elemre. Ennélfogva

$$A/I_0 \in L_n.$$

Minthogy azonban $I \in K_n$, I egységelemes ideál A-ban, tehát $A = I \oplus I_1$ és $I_1 = I_0$, tehát $A/I_0 \cong I \in K_n$. Ezért UK_n speciális radikál, tehát UK_n öröklődő. Belátható, hogy $L_n = SUK_n$, és L_n nyilván homomorfan zárt.

MEGJEGYZÉS. P. N. STEWART [33] megoldotta azt a problémát, hogy létezik nemtriviális olyan féligegyszerű gyűrűosztály, amely ugyanakkor radikálosztály is egy másik radikálra nézve. P. N. STEWART nemcsak adott egy ilyen megoldást, hanem módszeresen meg is határozta az összes ilyen megoldást. Érdekes viszont, hogy P. N. STEWART megoldásai egybeesnek éppen a 27. Tétel bizonyításában szereplő L_n osztályokkal.

28. TÉTEL. *Egy A gyűrűre ekvivalens az alábbi hat feltétel:*
1. *A minden S részgyűrűje idempotens;*
2. *A minden S részgyűrűjének minden homomorf képe balannihilátormentes;*
3. *A minden S részgyűrűje Neumann-reguláris;*
4. *A minden S részgyűrűje erősen reguláris;*
5. *A-nak az* A^+ *additív csoportja torzió-csoport, és minden elem rendje négyzetmentes szám. Továbbá minden* $a \in A$ *elemmel generált részgyűrű véges, és* $\{a\}$ *véges testek direkt összege A kommutatív.*
6. *Minden* $a \in A$ *elemhez létezik olyan* $n = n(a) \geqq 2$ *kitevő, hogy*

$$a^n = a.$$

Bizonyítás. 6.-ból következik 5. Ugyanis

$$2^n a = 2^n a^n = (2a)^n = 2a$$

miatt $(2^n - 2)a = 0$. Továbbá 6. miatt minden részgyűrű idempotens, tehát ha $A = \sum_p \oplus A_p$, akkor $A_p^2 = A_p$ és

$$p^2 A_p = p^2 A_p^2 = (pA_p)^2 = pA_p$$

miatt pA_p^+ osztható. Ha $pA_p^+ \neq 0$, akkor $pA_p^+ \sum C(p^\infty)$, amiből $p^2 A_p^2 = pA_p = 0$ adódik. Ezért $pA_p = 0$, és így minden elem rendje négyzetmentes szám. Továbbá $a^n = a$ miatt $\{a\}$ véges féligegyszerű gyűrű, tehát alkalmazva N. JACOBSON ([19], Theorem 10.1.1) eredményét, 5. adódik.

5.-ből 4. következik. Legyen ugyanis

$$\{a\} = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n,$$

ahol F_i véges test. Legyen $a = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$, ahol $f_i \in F_i$. Ha $f_i = 0$, legyen $g_i = 0$. Ha pedig $f_i \neq 0$, legyen g_i az f_i inverz eleme F_i-ben. Ekkor

$$a = (f_1 + \ldots + f_n)(f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n) =$$

$$= a^2(g_1 + g_2 + \ldots + g_n) \in a^2 \cdot \{a\}.$$

4. triviálisan adódik 3.-ból.

2. is következik 3.-ból, mert *Neumann*-reguláris gyűrű minden homomorf képe is ilyen, és balannihilátormentes.

2.-ből következik 1., mert S/S^2 balannihilátormentes, tehát $S \subseteqq S^2$. De $S^2 \subseteqq S$, és így $S^2 = S$.

1.-ből következik 6. Minthogy $\{a\}^2=\{a\}$, van olyan $a_1\in\{a\}$, hogy $a=aa_1$. Ekkor $a=a\cdot a_1^2$, és legyen $a_1^2=a\cdot a_2$, ahol $a_2\in\{a\}$. Ekkor $a=a^2\cdot a_2$, tehát A nilpotens elem nélküli gyűrű. Minthogy $(a_1^2-a_1)^2=0$, ezért $a_1=a_1^2\neq 0$ idempotens elem. Miként előbb láttuk, A^+ minden elemének a rendje négyzetmentes szám, és $a\in\{a\}^2$ miatt A_p algebrai algebra a K_p véges prímtest felett. Minthogy $\{a\}$ féligegyszerű, és véges, $\{a\}$ véges sok véges test direkt összege, és így van olyan n, hogy $a^n=a$.

Ismeretes, hogy ha I ideál az A gyűrűben, és ha R tetszőleges radikál, akkor $R(I)$ ideál A-ban is. Most ezt a

$$\varphi: I\to R(I)$$

leképezést fogjuk vizsgálni.

29. TÉTEL. (1) *A φ leképzés monoton, vagyis $I_1\subseteq I_2$ esetén $\varphi(I_1)\subseteq\varphi(I_2)$.*

(2) *Ha az SR féligegyszerű osztály homomorfan zárt, akkor bármely asszociatív vagy alternatív gyűrűben bármely két ideálra:*

$$\varphi(I_1+I_2) = \varphi(I_1)+\varphi(I_2)$$

teljesül, vagyis $\varphi: I\to R(I)$ az ideálhálónak egyesítés-endomorfizmusa.

Bizonyítás. (1) Legyen $I_1\subseteq I_2$. Nyilván $\varphi(I_1)\subseteq I_2$. Továbbá az első izomorfia-tétel alapján

$$(*)\qquad \varphi(I_1)+\varphi(I_2)/\varphi(I_2)\cong\varphi(I_1)/\varphi(I_1)\cap\varphi(I_2).$$

Itt $(*)$ baloldalán az R-féligegyszerű $I_2/\varphi(I_2)$ gyűrűnek egy ideálja szerepel, amely tehát R-féligegyszerű. Viszont $(*)$ jobboldalán a $\varphi(I_1)$ R-radikálgyűrűnek egy homomorf képe áll, ez viszont szintén R-radikálgyűrű. Ezért $(*)$ mindkét oldala 0, tehát

$$\varphi(I_1) = \varphi(I_1)\cap\varphi(I_2)\subseteq\varphi(I_2),$$

amivel a tétel (1) részét igazoltuk.

(2) igazolására megjegyezzük, hogy R-féligegyszerű gyűrűnek R-féligegyszerű gyűrűvel vett bármely *Everett*-bővítése mindig R-féligegyszerű. Ez az első izomorfia-tétellel látható be.

Csak mostantól fogva fogjuk kihasználni, hogy az SR gyűrűosztály homomorfan zárt.

Minthogy $I_2\supseteq\varphi(I_2)$ és A ideálhálója moduláris, ezért

$$I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2)) = \varphi(I_2)+(I_2\cap\varphi(I_1)).$$

Tehát $I_2/(I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2)))$ homomorf képe az R-féligegyszerű $I_2/\varphi(I_2)$ gyűrűnek, ezért $I_2/(I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2)))$ is R-féligegyszerű. Ezért az első izomorfia-tétel alapján

$$(\varphi(I_1)+I_2)/(\varphi(I_1)+\varphi(I_2))\cong I_2(I_2\cap(\varphi(I_1)+\varphi(I_2)))$$

is R-féligegyszerű.

Másfelől $I_1\supseteq\varphi(I_1)$, és az ideálháló modularitása miatt

$$I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2) = \varphi(I_1)+(I_1\cap I_2).$$

Tehát $I_1/(I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2))$ homomorf képe az R-féligegyszerű $I_1/\varphi(I_1)$ gyűrűnek, ezért $I_1/(I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2))$ is R-féligegyszerű. Az első izomorfia-tétel alapján:

$$(I_1+I_2)/(\varphi(I_1)+I_2)\cong I_1/(I_1\cap(\varphi(I_1)+I_2))$$

is R-féligegyszerű. Az *Everett*-bővítésekről szóló megjegyzés alapján $(I_1+I_2)/(\varphi(I_1)+$ $+\varphi(I_2))$ is R-féligegyszerű. Ezért az első izomorfia-tétel alapján

$$(**) \qquad \varphi(I_1+I_2) \subseteqq \varphi(I_1)+\varphi(I_2).$$

Minthogy pedig $I_k \subseteqq I_1+I_2$ és a tétel (1) része alapján $\varphi(I_k) \subseteqq \varphi(I_1+I_2)$, ahol $k=1$ vagy 2, nyilván

$$\varphi(I_1)+\varphi(I_2) \subseteqq \varphi(I_1+I_2).$$

Ennek $(**)$-gal való összehasonlításával pedig

$$\varphi(I_1+I_2) = \varphi(I_1)+\varphi(I_2).$$

Tehát $\varphi: I \to R(I)$ az ideálhálónak tényleg egyesítés-endomorfizmusa, amivel a (2) részt is igazoltuk.

Példa. Megmutatjuk, hogy $I \to R(I)$ nem minden R radikálra lesz egyesítés-endomorfizmus. Legyen R az összes idempotens gyűrűből álló radikálosztály. Ekkor a racionális egészek Z gyűrűjére $Z \in R$. Legyen p és q két olyan prímszám, hogy $(p, q)=1$. Ekkor $(p)+(q)=Z$, továbbá (p) és (q) R-féligegyszerű gyűrűk. Tehát

$$Z = R(Z) = R((p)+(q)) \neq R((p))+R((q)) = 0+0 = 0.$$

Nyilván SR nem homomorfan zárt gyűrűosztály.

7. §. Steinfeld Ottó egy eredményének analogonja részmodulusok gyűrűbeli általános radikáljával és modulushányadokkal kapcsolatban

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [83] dolgozatában található meg.

Miként jól ismert, A. KERTÉSZ [23], könyve 141. oldalán az 5.28. Feladatban, egy M A-jobbmodulus radikálját így definiálja:

$$I(M) = [x; x \in A, \ Mx \subseteqq \Phi(M)],$$

ahol $\Phi(M)$ jelenti az M *Frattini*-féle részmodulusát. Tehát $\Phi(M)$ az M összes maximális részmodulusának a metszete, és $M=\Phi(M)$, ha nincs maximális részmodulus M-ben. $I(M)$ ideál az A operátorgyűrűben, és $I(M) \supseteqq J(A)$, ahol $J(A)$ az A *Jacobson*-radikálja.

Másfelől STEINFELD [30] bebizonyította, hogy ha I ideál az A gyűrűben és P prímideál az I gyűrűben, akkor a

$$(*) \qquad P:I = [x; x \in A, \ Ix+xI \subseteqq P]$$

ideál-hányados prímideál lesz A-ban. STEINFELD [31] vizsgálta hálószerűen rendezett félcsoportban az $x \to x:y$ leképezés néhány tulajdonságát. Szerző [84] pedig arra adott elegendő feltételt, hogy hálószerűen rendezett jobbreziduumos grupoidban $(x_1: y_1)$ és $(x_2: y_2)$ egyesítése szintén $(x_3: y_3)$ alakú legyen. (A kapott grupoid kapcsolatban van főideálgyűrűkkel és főnormálosztó-csoportokkal.)

Ebben a §-ban a modulus gyűrűbeli *Kertész*-féle radikálját két lépcsőben általánosíthatjuk úgy, hogy közben általánosítjuk ION D. ION [18] bizonyos eredményeit is, és megadjuk STEINFELD [30] gyűrűelméleti eredményének egy moduluselméleti analogonját.

Egy M A-jobbmodulus L_1 és L_2 A-részmodulusaira legyen

$$L_1 : L_2 = [a;\, a \in A,\; L_2 a \subseteqq L_1].$$

Ezt az $L_1 : L_2$ szimbólumot modulushányadosnak nevezzük. $L_1 : L_2$ ideál A-ban. Legyen most R egy *Amitsur—Kuros*-féle általános gyűrűradikál, és N egy A-részmodulus az M A-jobbmodulusban. Az

$$R(N)/(N : M) = R(A/(N : M))$$

egyenlőséggel definiált (maximális) $R(N)$ részhalmaz N radikálja lesz az A gyűrűben. $R(N)$ ideál A-ban, és nyilván $R(N) \supseteqq (N:M)$[3]. Ha $(N:M) = R(A)$, akkor $R(N) = R(A)$. Ha pedig $R = J$, a *Jacobson*-radikál, és ha $N = \Phi(M)$, akkor $J(N) \supseteqq \supseteqq J(A)$ (vö. KERTÉSZ A. [23] 5.28. Feladattal).

DEFINÍCIÓ. Ha R gyűrűknek egy *Amitsur—Kuros* radikálja, és N A-részmodulus az M A-jobbmudulusban, és ha A minden I ideáljára és minden $m \in M$ elemre

$$mI \subseteqq N$$

esetén $m \in N$ vagy pedig $I \subseteqq R(N)$ teljesül, akkor az N részmodulust R-primérnek nevezzük M-ben.

30. TÉTEL. *N akkor és csak akkor R-primér M-ben, ha minden K A-részmodulusra, és minden $a \in A$ elemre $Ka \subseteqq N$ esetén $K \subseteqq N$ vagy pedig $a \in R(N)$ teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $k \in K$ és $k \notin N$, továbbá (a) az a által A-ban generált főideál. Minthogy

$$k(Aa) = (kA)a \subseteqq Ka \subseteqq N$$

miatt $k(a) \subseteqq N$, ezért $I = (a)$ esetén $(a) \subseteqq R(N)$, tehát $a \in R(N)$.

Fordítva, legyen $m \in M$, $I = (a)$ és $K = mA \nsubseteq N$. Minthogy

$$KI = mAI \subseteqq mI \subseteqq N$$

miatt $Ka \subseteqq N$, adódik $a \in R(N)$, tehát $I \subseteqq R(N)$.

31. TÉTEL. *Legyen $R(A/J)$ nilpotens A minden J ideáljára. Ha N egy R-primér részmodulus M-ben, akkor $R(N) = P$ prímideál az A gyűrűben.*

Bizonyítás. Legyenek I_1 és I_2 olyan ideálok, hogy $I_1 I_2 \subseteqq P$ és $I_1 \nsubseteq P$. Ekkor van olyan e kitevő, hogy

$$M(I_1 I_2)^e \subseteqq N \quad \text{és} \quad M(I_1 I_2)^{e-1} \nsubseteq N.$$

Legyenek $K_1 = M(I_1 I_2)^{e-1}$, $k_1 \in K_1$ és $k_1 \notin N$. Ekkor

$$(k_1 I_1) I_2 \subseteqq K I_1 I_2 \subseteqq N$$

és $I_1 \nsubseteq P$ miatt $k_1 I_1 \nsubseteq N$. Legyen k_2 tetszőleges elem $K_2 = k_1 I_1$-ben, úgy, hogy $k_2 \notin N$. Ekkor $k_2 I_2 \subseteqq N$ és $k_2 \notin N$ miatt $I_2 \subseteqq R(N) = P$, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

[3] $R(N)$ felhasználható a *Jacobson*-radikál egy modulus-elméleti jellemzésére is, F. SZÁSZ, Rings with radical maximal submodules, *Monatshefte, f. Math.* (sajtó alatt).

32. TÉTEL. *Legyen R a Baer—Koethe felső nilradikál és A jobbnoether-féle vagy jobbartin-féle gyűrű. Ha N egy R-primér-részmodulus M-ban, akkor $R(N)=P$ primideál A-ban.*

Bizonyítás. Minthogy $R(A/I)$ mindkét esetben nilpotens, elég a 31. Tételt alkalmazni.

DEFINÍCIÓ. Ha $R(N)=P$ prímideál A-ban, akkor N-et P-primér részmodulusnak nevezzük.

33. TÉTEL. *Legyen $R(A/I)$ nilpotens minden I ideálra. P akkor és csak akkor prímideál A-ban és N akkor és csak P-primér M-ben, ha az alábbi három feltétel teljesül:*

1. *A minden I ideáljára és minden $m\in M$ elemre $mI\subseteq N$ esetén $m\in N$ vagy $I\subseteq P$ érvényes;*
2. *Fennáll az $N: M\subseteq P$ tartalmazás;*
3. *Minden $(x)\subseteq P$ főideálhoz van olyan e kitevő, hogy $M(x)^e\subseteq N$ érvényes.*

Bizonyítás. Ha N egy P-primér részmodulus, akkor 1. és 2. az előző definícióból, 3. pedig abból következik, hogy $R(A/I)$ minden I ideálra nilpotens. — Fordítva, tegyük fel, hogy 1., 2. és 3. teljesülnek. Megmutatjuk, hogy $P=R(N)$ és P prímideál A-ban.

Legyen $x\in K$ tetszőleges elem. Ekkor 3. alapján $M(x)^e\subseteq N$ alkalmas e kitevővel. Ha P_α tetszőleges olyan prímideál, hogy $N: M\subseteq P_\alpha$, akkor $\bigwedge_\alpha P_\alpha=R(N)$, és van olyan e_α kitevő, hogy $(x)^{e_\alpha}\subseteq P_\alpha$. Ezért $x\in R(N)$, tehát $P\subseteq R(N)$. Megmutatjuk, hogy $R(N)\subseteq P$ is teljesül. Legyen ugyanis $y\in R(N)$ tetszőleges elem. Ekkor van olyan e kitevő, hogy teljesül:

$$M(y)^e \subseteq N \quad \text{és} \quad M(y)^{e-1} \not\subseteq N.$$

Ha itt minden y elemre $e=1$, akkor $(y)\subseteq N: M$, ahonnan 2. alapján $(y)\subseteq P$, tehát $R(N)\subseteq P$. Ha viszont van olyan $y\in R(N)$, hogy $e\geq 2$, akkor legyen $K=M(y)^{e-1}$, $k\in K$ és $k\notin N$. Minthogy

$$k(y) \subseteq M(y)^e \subseteq N,$$

ezért 1. alapján $(y)\subseteq P$, tehát $y\in P$ és így $R(N)\subseteq P$.

34. TÉTEL. *Legyen R a Baer—Koethe-féle felső nilradikál és A jobbnoether-féle vagy jobbartin-féle gyűrű. Ekkor a* 33. *Tétel* 1., 2. *és* 3. *feltétele szükséges és elégséges ahhoz, hogy P prímideál legyen A-ban és N P primér legyen M-ben.*

Bizonyítás. $R(A/I)$ nilpotens, és elég a 33. Tételt alkalmazni.

MEGJEGYZÉS. A racionális egészek Z gyűrűje *Noether*-féle, de nem *Artin*-féle. $Z(p^\infty)$ viszont *Artin*-féle, de nem *Noether*-féle gyűrű.

35. TÉTEL. *Legyen $R(A/I)$ nilpotens A minden I ideáliára, és legyen P rögzített, tetszőleges prímideál A-ban és N_j $(f=1,2,\ldots,k)$ véges sok P-primér részmodulus az M A-jobbmodulusban. Ekkor $N=\bigcap_{j=1}^{k} N_j$ szintén P-primér M-ben.*

Bizonyítás, bár nem egészen triviális, elvégezhető a 33. Tétel alkalmazásával, ugyanis igazolni kell, hogy az 1., 2. és 3. feltételek teljesülnek N-re.

36. TÉTEL. *Legyen $R(A/J)$ nilpotens A minden I ideáljára, P prímideál A-ban, N egy P-primér részmodulus M-ben és K olyan ideál A-ban, hogy $K \nsubseteq P = R(N)$. Ha*

$$N^* = [m;\ m \in M,\ mK \subseteq N],$$

akkor N^* A-részmodulus M-ben és N^* K-primér M-ben.

Bizonyítás. Nyilván $N \subseteq N^*$. Legyen $x \in (N^* : M)$ tetszőleges elem. Ekkor $Mx \subseteq N^*$ és $MxK \subseteq N$. Minthogy $K \nsubseteq P$, ezért $Mx \subseteq N$, tehát $x \in N : M$ és így

$$(N^* : M) \subseteq (N : M) \subseteq P$$

miatt a 2. feltétel teljesül N^*-ra. Legyen B olyan ideál A-ban és $m \in M$ olyan elem, hogy

$$mB \subseteq N^*, \quad \text{de } m \notin N^*.$$

Ekkor $mBK \subseteq N$ miatt $mBK \subseteq N^*$, és minthogy $K \nsubseteq P$, ezért 1. alapján $B \subseteq P$. Tehát az 1. feltétel N^*-ra is teljesül. Végül 3. alapján minden $(x) \subseteq P$ főideálhoz van olyan e kitevő, hogy $M(x)^e \subseteq N$, és $N \subseteq N^*$ miatt nyilván $M(x)^e \subseteq N^*$, tehát 3. teljesül N^*-ra is. Ennélfogva N^* tényleg P-primér A-részmodulus M-ben.

MEGJEGYZÉS. A 36. Tétel STEINFELD [30] eredményének egy moduluselméleti analogonja.

II. FEJEZET

GYŰRŰK GYENGÉN SZUBIDEMPOTENS RADIKÁLJAIRÓL

8. §. Egy Kertész-probléma redukciójával kapcsolatban kritériumok arra, hogy a Divinsky-radikálgyűrűk osztályának egy részosztályába eső gyűrűk egységelemesek legyenek

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [46] és [50] dolgozatában szerepel.

Legyen D mindazon A gyűrűk osztálya, amelyekben $a \in aA$ teljesül minden $a \in A$ elemre. D-beli gyűrűket DIVINSKY előtt többen vizsgáltak (pl. JOHN VON NEUMANN vagy REINHOLD BAER), és N. DIVINSKY [8] megmutatta, hogy D radikálosztály, és vizsgálta e radikál több tulajdonságát.

Másfelől KERTÉSZ ANDOR [23] könyve igazolja, hogy A akkor és csak akkor egységelemes gyűrű, ha minden M A-jobbmodulusra $M = M_0 \oplus MA$ érvényes, ahol M_0 az M-nek maximális olyan N részmodulusa, amelyre $NA = 0$ teljesül. Az ilyen N részmodulusokat triviálisnak nevezzük. Ezzel kapcsolatban veti fel KERTÉSZ ANDOR [23] 1. *Problémája* a következő kérdést:

Egységelemes-e minden olyan A gyűrű, amelyre minden M A-jobbmodulusban az M_0 maximális triviális részmodulus direkt összeadandó?

Az ilyen tulajdonságú gyűrűket, követve szerző [46] dolgozatát (ahol E_0-, E_1-, E_2-, E_3-, E_4- és E_5-gyűrűk is szerepelnek) röviden E_2-gyűrűknek fogjuk nevezni. (A *Divinsky*-radikálgyűrűk éppen az E_3-gyűrűk lesznek.)

Szerző [46] dolgozata 2.3.2. Tételének bizonyítási módszerével igazolható:

37. TÉTEL. *Minden E_2-gyűrű Divinsky-radikálgyűrű, vagyis minden A E_2-gyűrűben $a\in aA$ teljesül minden $a\in A$ elemre, tehát nemzérus E_3-gyűrű nem lehet Jacobson radikálgyűrű.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $a\in A$, hogy $a\notin aA$. Legyen R az A maximális olyan jobbideálja, amelyre $a\notin R$ és $R\supseteq aA$. Ilyen R a *Zorn*-lemma alapján létezik. Ekkor az A/R A-jobbmodulus szubdirekt irreducibilis, és legyen M/R a szíve A/R-nek. Nyilván $(a)_r+R=M$, és $MA\subseteq R$. Tehát M/R benne van A/R-nek az A_0/R maximális triviális jobbideáljában. Minthogy A egy E_2-gyűrű, ezért A_0/R direkt összeadandója az A/R A-jobbmodulusnak, minthogy pedig A/R szubdirekt irreducibilis, ezért $A_0/R=A/R$, tehát $A_0=A$. Ezért $A^2\subseteq R$. Ha majd igazoltuk azt (lásd 38. Tételt), hogy minden E_2-gyűrű balannihilátormentes, és hogy minden E_2-gyűrűnek minden homomorf képe is E_2-gyűrű, akkor $A^2=A$, és így az $A\subseteq R\subsetneqq A$ ellentmondás adódik, ugyanis A/A^2 balannihilátort tartalmazó E_2-gyűrű volna $A^2\neq A$ esetén.

Továbbá, ha $a=ab$ és $b+c-bc=0$, akkor $a=a-a(b+c-bc)=a-ab-$ $-(a-ab)c=0$.

38. TÉTEL. (1) *Bármely A E_2-gyűrűnek bármely A homomorf képe szintén E_2-gyűrű és* (2) *bármely A E_2-gyűrű balannihilátormentes.*

Bizonyítás. (1) Legyen M' egy A'-jobbmodulus, és $(M')_0$ az M' maximális triviális részmodulusa. Az $ma=ma'$ előírással M' egy A-jobbmodulus is lesz, ahol $a\varphi=a'$ és $\varphi\colon A\to A'$ az A egy homomorfizmusa A'-re. Ekkor $M_0=(M')_0$ lesz az így kapott $M=M'$ A-jobbmodulus maximális triviális részmodulusa, és minthogy M_0 direkt összeadandó M-ben, $(M')_0$ is direkt összeadandó M'-ben, tehát A' egy E_2-gyűrű.

(2) Legyen A_1 az A *Dorroh*-bővítése, vagyis az összes

$$(a, m) \qquad (a\in A,\ m\in Z)$$

rendezett pár halmaza a megszokott egyenlőségi éss összeadási definícióval. Legyen egy tetszőleges $b\in A$ elemre

$$(a, m)b = (ab+mb, 0).$$

Ekkor A_1 egy A-jobbmodulus, tehát $A_1=A_0\oplus A_2$, ahol A_0 az A_1 maximális triviális A-részmodulusa, mert A egy E_2-gyűrű. Legyen $(0, 1) = (a, m)+(-a, 1-m)$, ahol $(a, m)\in A_0$. Ezért $A_0A=0$ miatt $ab+mb=0$ teljesül minden $b\in A$ elemre. Ezért

$$(b, 0) = (0, 1)b = (-a, 1-m)b\in A_2,$$

tehát $(b, 0)A=(bA, 0)\neq 0$ miatt A tényleg balannihilátor-mentes gyűrű.

DEFINÍCIÓ. Egy nullától különböző $a\in A$ gyűrű elemet balmultiplikátornak nevezünk, ha van olyan $n\in Z$ racionális egész szám, hogy minden $x\in A$ elemre $ax=nx$ teljesül.

39. TÉTEL. (1) *Egy A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha A egy balmultiplikátoros E_2-gyűrű.* (2) *A akkor és csak akkor egységelemes gyűrű, ha A olyan jobbmultiplikátoros E_2-gyűrű, amely jobbannihilátor-mentes.*

Bizonyítás. (1) Ha $e \in A$ az A kétoldali egységeleme, akkor e nyilván balmultiplikátor és

$$Me \supseteq MeA = (MeA)e = MA$$

miatt Me egy A-részmodulus. $M(1-e)$ az M maximális triviális A-részmodulusa, és $M = Me \oplus M(1-e)$. Legyen most, megfordítva, A egy balmultiplikátoros E_2-gyűrű. Ekkor $(b+n)A = 0$ teljesül egy $0 \neq b \in A$ és egy $n \in Z$ elempárra. Ezért $(b, n) \in A_0$, ahol A_0 jelenti az A_1 *Dorroh*-bővítésnek, mint A-jobbmodulusnak, a maximális-triviális részmodulusát. Minthogy A a 38. Tétel (2) szerint balannihilátormentes, minden n-hez legfeljebb egy b elem tartozik, úgy, hogy $(b, n) \in A_0$. Legyen $(a, m) \in A_0$ olyan pár, amelyben $|m|$ minimális pozitív szám. *Euklides*-i osztással belátható, hogy A_0 additív csoportja ciklikus, és (a, m) egy generátorelem. Minthogy $(0, 1) = k(a, m) + (-ka, 1-km)$, ahol $A_1 = A_0 \oplus A_2$; $k(a, m) \in A_0$; $(-ka, 1-km) \in A_2$ és k alkalmas racionális egész szám, továbbá $A_0 \neq 0$ miatt $k \neq 0$. Minthogy

$$(x, 0) = (0, 1)x = (-ka, 1-km)x \in A_2$$

érvényes minden $x \in A$ esetén, ezért $\big(0, (1-km)\big) \in A_2$. Tehát

$$(1-km)(a, m) = \big((1-km)a, 0\big) + m(0, 1-km) \in A_0 \cap A_2 = 0$$

miatt $km = 1$. Ha $m = 1$, akkor $e = -a$ lesz egy balegységelem A-ban, míg $m = -1$ esetén pedig maga $e = a$ lesz egy balegységelem. Ekkor $A(1-e)$ balannihilátor A-ban, tehát a 38. Tétel (2) szerint $A(1-e) = 0$, és így e kétoldali egységelem.

(2) Legyen $a \neq 0$ most egy jobbmultiplikátor az E_2-gyűrűben. Ekkor $xa = nx$ teljesül rögzített $n \in Z$ számmal minden $x \in A$ elemre. Minthogy $(xy)a = nxy$, ezért

$$x(ya) = (xy)a = nxy = (nx)y = (xa)y = x(ay),$$

tehát $A(ya - ay) = 0$ miatt $ya - ay = 0$, mert feltétel szerint jobbannihilátor-mentes. Ezért $ay = ya = ny$ miatt a egyszersmind balmultiplikátor is és így elegendő a 39. Tétel (1) részét erre az esetre alkalmazni.

Láttuk a 37. Tételben, hogy nemzérus E_2-gyűrű nem lehet *Jacobson*-radikálgyűrű. Bizonyítás nélkül mondjuk ki a szerző [50] dolgozatában bebizonyított eredményt:

40. TÉTEL. *Tegyük fel azt, hogy létezik olyan A nemzérus E_2-gyűrű, amely egyszersmind Brown—McCoy radikálgyűrű is. Ekkor:*

1. *A választható jobbprimitív gyűrűnek, tehát prímgyűrűnek is;*
2. *A minden eleme balnullosztó és ha A prímgyűrű, akkor $axa = 0$, ahol $xa \neq 0$, tehát xa nilpotens;*
3. *A minden a elemére $A(1-a)A = A$;*
4. *A minden $a \neq 0$ elemére $aA \subsetneq Aa$, tehát A centruma 0, továbbá $Aa \neq A$ minden elemre;*
5. *Minden $a \in A$ elemre és minden $n \in Z$ racionális egész számra: $a \in (a+n)A + A(a+n)A$;*
6. *A-ban léteznek L maximális balideálok, amelyekre mindig $LA = A$ teljesül;*
7. *Nem teljesül a maximum-feltétel az*

$$L_a = [x;\ x \in A,\ xa = x]$$

alakú balideálokra, tehát A nem balnoether-féle gyűrű.

9. §. Gyűrűkről, amelyeknek minden homomorf képe balannihilátor-mentes

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható a szerző [46] és [68] dolgozataiban. — A 38. Tételben láttuk azt, hogy minden E_2-gyűrű minden homomorf képe balannihilátor-mentes. Ha E_5-gyűrűnek nevezzük e § címében szereplő gyűrűket, akkor *minden* E_2*-gyűrű* E_5*-gyűrű.*

41. TÉTEL. (1) E_5*-gyűrű bármely homomorf képe is* E_5*-gyűrű.* (2) $L \subseteq LA$ *érvényes bármely* E_5*-gyűrű bármely* L *balideáljára.* (3) $a \in aA + AaA$ *akkor és csak akkor érvényes* A *minden* $a \in A$ *elemére, ha* A *egy* E_5*-gyűrű.* (4) *Bármely* A E_5*-gyűrűben a* J *Jacobson-radikál egybeesik* A*-nak, mint* A*-balmodulusnak, a Frattini-féle részmodulusával.*

Bizonyítás. (1) Triviális.

(2) $A/L+LA$ balannihilátor-mentes, ezért $L \subseteq LA$.

(3) Ha A egy E_5-gyűrű és $L=(a)_l=Za+Aa$, akkor $L \subseteq LA$ miatt $a \in aA+AaA$. Ha pedig az utóbbi feltétel minden $a \in A$ elemre teljesül, akkor minden homomorf kép balannihilátor-mentes, tehát A E_5-gyűrű.

(4) E. HILLE ([16], Theorem 22.15.3]) szerint $JA \subseteq \Phi_l \subseteq J$ és minthogy Φ_l kétoldali ideál, és A/Φ_l-ben J/Φ_l balannihilátor, ezért $J=\Phi_l$ valóban.

Most további kritériumokat (vö. 39. Tétel) adunk meg (az E_5-gyűrűk segítségével) arra, hogy A egységelemes gyűrű legyen. E kritériumok típusa is különbözik R. BAERétől [5].

42. TÉTEL. (1) *Egy* A *gyűrű akkor és csak akkor jobbegységelemes, ha* A *olyan* E_5*-gyűrű, amelynek van olyan jobbmultiplikátora, amely nem jobbnullosztó.* (2) *Egy* A *gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha* A *olyan* E_5*-gyűrű, amelynek van olyan balmultiplikátora, amely nem balnullosztó.* (3) *Egy torziómentes* A *gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha* A *egy balmultiplikátoros* E_5*-gyűrű.*

Bizonyítás. (1) Ha a jobbmultiplikátor, amely nem jobbnullosztó, az A E_5-gyűrűben, akkor $xa=nx\neq 0$ teljesül alkalmas $n \in Z$ egész számmal minden elemre. Minthogy a 41. Tétel (3) alapján $a \in aA+AaA$, léteznek olyan $b \in A$ és $c \in A$ elemek, hogy $a=ab+nc$, hiszen most $Aa=nA$. Ezért

$$nx = xa = xab+nxc = nx(b+c) = x(b+c)a.$$

Minthogy pedig a nem jobbnullosztó, ezért

$$x = x(b+c)$$

érvényes minden $x \in A$ elemre, tehát $e=b+c$ jobbegységelem.

(2) Legyen az A E_5-gyűrűben a olyan balmultiplikátor, amely nem balnullosztó. Minthogy ekkor van olyan $n \in Z$ szám, hogy $ax=nx$ minden $x \in A$ elemre fennáll, $aA=nA$ miatt

$$AaA = A(nA) = nA^2 = nA$$

és az $a \in aA+AaA$ miatt $a \in nA$. Tehát van olyan $b \in A$, hogy $a=nb$, amiből $nbx=$ $=nx\neq 0$ miatt $abx=ax$, tehát $bx=x$ adódik minden $x \in A$ elemre, ezért $e=b$ balegységelem. Minthogy pedig $A(1-e)$ balannihilátor az A E_5-gyűrűben, nyilván $A(1-e)=0$, tehát e kétoldali egységelem.

(3) Ha A torziómentes E_5-gyűrű, amelyben a balmultiplikátor, akkor van olyan $n \in Z$, hogy $ax=nx$ érvényes minden $x \in A$ elemre. Ekkor (2)-höz hasonlóan

van olyan $b \in A$, hogy $n(bx-x)=0$, amiből a torziómentesség alapján adódik, hogy b balegységelem, és minthogy a nem balnullosztó, (2) alapján van kétoldali egységelem is A-ban.

43. TÉTEL. (1) *Egy A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha E_5-gyűrű, és ha van olyan a nem-balnullosztója, amelyre $Aa \subseteq aA$ teljesül.* (2) *Minden olyan A E_5-gyűrűnek, amelynek a C centruma nem nulla, van egységelemes A' homomorf képe.*

Bizonyítás. (1) Legyen A egy E_5-gyűrű és a olyan elem, amelyre $Aa \subseteq aA$, és a nem balnullosztó. Minthogy $AaA \subseteq aA$ és $a \in aA+AaA$, ezért van olyan $b \in A$ elem, hogy $a=ab$, amiből $ax=abx$ adódik minden $x \in A$ elemre és ebből pedig $bx=x$. Tehát b balegységelem. Minthogy $A(1-b)$ balannihilátor az E_5-gyűrűben, ezért $A(1-b)=0$ és $e=b$ kétoldali egységelem.

(2) Legyen $0 \neq c \in C$ centrumelem. Ekkor $c \in cA+AcA$ miatt $c=bc=cb$ teljesül bizonyos $b \in A$ elemmel. Legyen $K=(1-b)A+A(1-b)+A(1-b)A$. Ekkor $b+K$ kétoldali egységelem A/K-ban.

44. TÉTEL. (1) *Az A gyűrű akkor és csak akkor egységelemes, ha A olyan E_5-gyűrű, amelynek van olyan nemzérus c centrumeleme, amely nem nullosztó.* (2) *A akkor és csak akkor egységelemes gyűrű, ha olyan E_5-gyűrű, amelynek egy a elemére $aA=A$ és a felcserélhető minden $(1-b)A$ alakú jobbideállal, azaz az $a(1-b)A= =(1-b)Aa$.*

Bizonyítás. (1) Ha $c \neq 0$ centrumelem, akkor $c \in cA+AcA=cA=Ac$ miatt elég a 43. Tétel (1) részét alkalmazni.

(2) Ha $aA=A$, van olyan $c \in A$, hogy $ac=a$, tehát $a(1-c)=0$. Minthogy a felcserélhető az $(1-c)A$ jobbideállal, $(1-c)Aa=0$, és $aA=A$ miatt, valamint $A^2=A$ miatt $(1-c)A=0$. Tehát c balegységelem, és minthogy $A(1-c)$ balannihilátor, ezért $A(1-c)=0$. Ezért c kétoldali egységelem.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy az összes E_5-gyűrű R osztálya radikálosztály, és vizsgálni fogjuk az R-féligegyszerű gyűrűket. Legyen $R(a)=aA+AaA$.

Egy T radikál gyengén szubidempotens, ha minden T-radikálgyűrű idempotens. Az öröklődő gyengén subidempotens radikálokat nevezzük szubidempotensnek.

45. TÉTEL. *Az összes E_5-gyűrű R osztálya gyengén szubidempotens radikálosztályt alkot Maranda—Michler értelemben*. Minden (Maranda—Michler értelemben) R-féligegyszerű A gyűrű olyan szubdirekt irreducibilis és R-féligegyszerű S_α gyűrűknek egy szubdirekt összege, hogy $H_\alpha S_\alpha=0$ teljesül S_α-nak a H_α szívére.***

Bizonyítás. Az $x \in R(x)$ reláció egy *Brown—McCoy*-féle [7] F-regularitást definiál, ahol

$$F(x) = R(x) = xA+AxA.$$

Legyen $R(A)$ mindazon $y \in A$ elemek halmaza, hogy az (y) főideál minden z elemére $z \in R(z)$. Ekkor $R(A)$ kétoldali ideál, amely minden R-reguláris ideált tartalmaz, és

$$R(A/R(A)) = 0.$$

* *Trans. Amer. Math. Soc.* **110** (1964) 98—135. és *Math. Annalen* **167** (1966) 1—48.

** Megjegyezzük a korrektúra olvasásakor (1976. I. 5), hogy a szerző 1973-ban azt is igazolta, hogy R *Amistur—Kuros* értelemben is radikálosztály.

$R(A)$ egybeesik mindazon M_α ideálok metszetével, amelyekre $A/M_\alpha = S_\alpha$ szubdirekt irreducibilis és R-féligegyszerű. Ezért van S_α-nak a H_α szívében olyan $h_\alpha \neq 0$ elem, amelyre $h_\alpha S_\alpha + S_\alpha h_\alpha S_\alpha = 0$, amiből $H_\alpha S_\alpha = 0$ adódik.

46. KOROLLÁRIUM. *A bármely B ideáljára $R(B) \subseteq B \cap R(A)$ teljesül.*

MEGJEGYZÉS. Ha $A = Z$ a racionális egész számok gyűrűje, és B a páros számok ideálja, akkor

$$0 = R(B) \subsetneqq B \cap R(A) = B \cap Z = B \neq 0.$$

47. KOROLLÁRIUM. *$R(A)$ tartalmazza minden A gyűrűben a maximális Neumann-reguláris ideált* (B. BROWN—N. H. MCCOY), *az N. Divinsky-féle D-radikált* [8] *és a B. de la Rosa-féle λ-radikált* (Doktori téziseiben).

48. KOROLLÁRIUM. *Minden nilpotens gyűrű R-féligegyszerű.*

49. KOROLLÁRIUM. *Minden erősen R-féligegyszerű gyűrű antiegyszerű.*

50. KOROLLÁRIUM. (1) *Minden erősen R-féligegyszerű, kétoldali főideálokra minimum-feltételű gyűrű nilgyűrű.* (2) *Minden erősen R-féligegyszerű és az összes kétoldali ideálra minimum-feltételű gyűrű nilpotens.*

51. KOROLLÁRIUM. *Egy A jobbartin-féle gyűrűre ekvivalens az alábbi két feltétel:*

1. *A nilpotens;*
2. *A olyan R-féligegyszerű gyűrű, hogy az összes A^n hatvány A^ω metszetében nincs A-nak nemzérus balannihilátora.*

Bizonyítási vázlat: 1.-ből 2. triviálisan adódik. Feltesszük, hogy 2. teljesül és 1. nem teljesül. Ekkor

$$A = \sum e_i A + N,$$

ahol $e_i^2 = e_i \neq 0$, $e_i A$ direkt felbonthatatlan és N nilpotens jobbideál. Hosszasabb számolással 2. alapján ellentmondás vezethető le.

Legyen R' az R radikálhoz bal-jobb duális radikál. Ekkor érvényes az

52. KOROLLÁRIUM. *Legyen A jobbartin-féle és balartin-féle gyűrű. Ekkor egymással ekvivalens az alábbi két feltétel:*

1. *A nilpotens;*
2. *A R-féligegyszerű és R'-féligegyszerű, és az összes A^n hatvány A^ω metszetében nincs A-nak nemzérus kétoldali annihilátora.*

MEGJEGYZÉS. Legyen A a kételemű test felett az a és b elemekkel generált algebra, ahol a szorzási tábla:

	a	b
a	a	0
b	b	0

Ekkor $A = R(A) \neq R'(A) = 0$ teljesül a négyelemű gyűrűben.

10. §. A Neumann-reguláris és erősen reguláris gyűrűkről

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható a szerző [60], [61], [69] és [71] dolgozataiban, továbbá LAJOS SÁNDOR és a szerző közös [24] és [25] dolgozataiban.

Az olvasót emlékeztetjük arra, hogy az A gyűrű *Neumann*-reguláris akkor, ha $a\in aAa$, és erősen reguláris akkor, ha $a\in a^2A$, minden $a\in A$ elemre. Mind a *Neumann*-reguláris, mind az erősen reguláris gyűrűk egy-egy szubidempotens radikálosztályt alkotnak.

KERTÉSZ ANDOR igazolta, hogy egy M teljesen reducibilis A-jobbmodulus operátor-endomorfizmusainak a gyűrűje *Jacobson*-féligegyszerű. Szerző [60] ezt az eredményt élesítette, miközben JOHNSON és KIOKEMEISTER egy jól ismert [19] tételét általánosította is a következőképpen:

53. TÉTEL. *Legyen M egy teljesen reducibilis A-jobbmodulus. Ekkor M operátorendomorfizmusainak az $E(M)$ gyűrűje Neumann-reguláris.*

Bizonyítás. Legyen először M homogén. Ha $\gamma\in E(M)$, van olyan K A-részmodulus, hogy $M=\gamma M\oplus K$. Legyen

$$L_\gamma=[m,\ m\in M,\ \gamma m=0].$$

Ekkor van olyan N A-részmodulus, hogy $M=L_\gamma\oplus N$. Ha $N=\sum\{n_\alpha\}$, akkor γM-nek az összes γn_α bázisa lesz, ha $\{n_\alpha\}$ minimális A-részmodulus. Ez számolással látható be. Legyen k_β bázisa K-nak, és legyen δ olyan endomorfizmus, hogy

$$\delta(\gamma n_\alpha)=n_\alpha \quad \text{és} \quad \delta k_\beta=0.$$

Ha $\vartheta=\gamma\delta\gamma-\gamma$, akkor $\vartheta M=0$, tehát $\gamma=\gamma\delta\gamma$. Ha pedig M nem homogén, akkor $E(M)$ a homogén komponensek *Neumann*-reguláris endomorfizmus-gyűrűinek komplett direkt összege, tehát $E(M)$ ekkor is *Neumann*-reguláris.

Bizonyítás nélkül mondjuk ki szerző [61] alábbi eredményét, amely JACOBSON—WOLFSON egyik eredményének egy általánosítása:

54. TÉTEL. *Legyen M homogén teljesen reducibilis A-jobbmodulus, és $E(M)$ az M operátorendomorfizmusainak a gyűrűje. Ekkor $E(M)$ minden nemzérus kétoldali I ideáljához van olyan $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, hogy I éppen az összes olyan γ halmaza, amelyekre* rang $\gamma M<\mathfrak{m}$.

Az A gyűrű egy B részgyűrűjét biideálnak nevezzük, ha $BAB\subseteq B$. Az A^+ csoport egy B additív részcsoportja általánosított biideál, ha $BAB\subseteq B$. Gyűrűk biideáljainak általános vizsgálata LAJOS S.—SZÁSZ F. [25] közös dolgozatában, a minimális biideálok és általánosított biideálok vizsgálata szerző [69], [70] és [71]. dolgozatában történt meg. Erősen reguláris gyűrűben minden általánosított biideál kétoldali ideál [71].

55. TÉTEL.[4] *Egy A gyűrűre a következő tizenkét feltétel egymással ekvivalens:*
1. *A Neumann-reguláris;*
2. *$R\cap L=R\cdot L$ minden R jobbideálra és minden L balideálra;*
3. *$(a)_r\cap(b)_l=(a)_r\cdot(b)_l$ minden a, $b\in A$ elemre;*

[4] Az 55. és 56. Tételben szereplő feltételek egy része korábbról ismert.

4. $(a)_r \cap (a)_l = (a)_r (a)_l$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
5. $(a)_q = (a)_r \cdot (a)_l$ *minden* $(a)_q$ *főkváziideálra;*
6. $(\bar{a})_{(1,1)} = (a)_r \cdot (a)_l$ *minden* $(\bar{a})_{(1,1)}$ *főbiideálra;*
7. $(a)_{(1,1)} = (a)_r (a)_l$ *minden* $(a)_{(1,1)}$ *általánosított főbiideálra;*
8. $(\bar{a})_{(1,1)} = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
9. $(a)_{(1,1)} = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
10. $QAQ = Q$ *minden* Q *kváziideálra;*
11. $\bar{B}A\bar{B} = \bar{B}$ *minden* $\bar{B}$ *biideálra;*
12. $BAB = B$ *minden* P *általánosított biideálra.*

A *bizonyítást* itt mellőzzük.

56. TÉTEL. *Egy A gyűrűre az alábbi harmincegy feltétel ekvivalens:*

1. *A erősen reguláris gyűrű;*
2. *A Neumann-reguláris gyűrű, amelyben minden egyoldali ideál kétoldali ideál;*
3. *A szubkommutatív Neumann-reguláris gyűrű (tehát* $aA = Aa$ *minden* $a \in A$ *elemre);*
4. $B^2 = B$ *minden* B *általánosított biideálra;*
5. $\bar{B}^2 = \bar{B}$ *minden* $\bar{B}$ *biideálra;*
6. $Q^2 = Q$ *minden* Q *kváziideálra;*
7. $RL = R \cap L \subseteqq LR$ *minden* L *balideálra és minden* R *jobbideálra;*
8. $L \cap R = L \cdot R$ *minden* L *balideálra és minden* R *jobbideálra;*
9. $L_1 \cap L_2 = L_1 \cdot L_2$ *és* $R_1 \cap R_2 = R_1 R_2$ *minden* L_i *balideálra és minden* R_i *jobbideálra* $(i = 1, 2)$*;*
10. $L \cap T = LT$ *és* $R \cap T = TR$ *minden* L *balideálra, minden* R *jobbideálra és minden* T *kétoldali ideálra;*
11. *A Neumann-reguláris és ferdetesteknek egy szubdirekt összege;*
12. *A nilpotens elemek nélküli Neumann-reguláris gyűrű;*
13. $L_1 \cap L_2 = L_1 \cdot L_2$ *bármely* L_1 *és* L_2 *balideálra;*
14. $R_1 \cap R_2 = R_1 R_2$ *bármely* R_1 *és* R_2 *jobbideálra;*
15. $L \cap T = LT$ *bármely* L *balideálra és* T *ideálra;*
16. $R \cap T = TR$ *bármely* R *jobbideálra és* T *ideálra;*
17. $Q_1 \cap Q_2 = Q_1 \cdot Q_2$ *bármely* Q_1 *és* Q_2 *kváziideálra;*
18. $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 = \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2$ *bármely* $\bar{B}_1$ *és* $\bar{B}_2$ *biideálra;*
19. $B_1 \cap B_2 = B_1 \cdot B_2$ *bármely* B_1 *és* B_2 *általánosított biideálra;*
20. *A multiplikatív félcsoportja csoportok félhálója;*
21. *Minden egyoldali ideál centrális idempotenssel generálható;*
22. $(ab)_r = (a)_r \cap (b)_r$ *minden* $a, b \in A$ *elemre;*
23. $(ab)_l = (a)_l \cap (b)_l$ *minden* $a, b \in A$ *elemre;*
24. $(a)_r = (a^2)_r$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
25. $(a)_l = (a^2)_l$ *minden* $a \in A$ *elemre;*
26. *Minden* R *jobbideálhoz van olyan* $m = m(R) \geqq 2$ *kitevő, és minden* L *balideálhoz van olyan* $n = n(L) \geqq 2$ *kitevő, hogy fennállnak:*

$$R = (R + AR)^m \quad \text{és} \quad L = (L + LA)^n;$$

27. *A nilpotens elem nélküli és az alábbi öt aleset egyike fennáll:*
 (i) $aA = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre,*
 (ii) $Aa = aAa$ *minden* $a \in A$ *elemre,*

(iii) $aA=a^2A$ *minden* $a\in A$ *elemre,*

(iv) $Aa=Aa^2$ *minden* $a\in A$ *elemre,*

(v) *minden* $a\in A$ *elemhez létezik olyan* $n=n(a)\geqq 2$ *kitevő, hogy* $aAa=a^nAa^n$ *érvényes.*

A *bizonyítást* itt mellőzzük.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] V. A. ANDRUNAKIEVICS, Antiegyszerű erősen idempotens gyűrűk (oroszul), *Izveszt. Akad. Nauk SzSzSzR, Szer. Mat.* **21** (1957) 125—144.
[2] V. A. ANDRUNAKIEVICS, Asszociatív gyűrűk radikáljai (oroszul), *Mat. Szbornik N. Sz.* **44** (86) (1958) 179—212.
[3] E. P. ARMENDARIZ—W. G. LEAVITT, Nonhereditary semisimple classes, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967) 1114—1117.
[4] E. P. ARMENDARIZ—W. G. LEAVITT, The hereditary property in the lower radical construction, *Canadian Jour. Math.* **20** (1967) 474—476.
[5] R. BAER, Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen, *Math. Zeitschrift* **56** (1952) 1—17.
[6] R. BAER, Metaideals, *Reports of a conference on linear algebras,* National Acad. Sci., Washington (1957).
[7] B. BROWN—N. H. MCCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. Journ. Math.* **69** (1947) 46—58.
[8] N. DIVINSKY, *D*-regularity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958) 62—71.
[9] N. DIVINSKY, *Rings and Radicals,* London (1965)
[10] L. FUCHS, On a new type of radical, *Acta Sci. Math. Szeged* **16** (1955) 43—53.
[11] L. FUCHS, *Abelian Groups,* Budapest (1958).
[12] L. FUCHS—T. SZELE, On artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 30—40.
[13] J. HASHIMOTO, Ideal theory for lattices, *Math. Japonicae* **2** (1952) 149—186.
[14] J. N. HERSTEIN, On torsion free Artin rings, *Annales Univ. Budapest R. Eötvös, Sectio Math.* 7 (1964) 97—98.
[15] P. J. HIGGINS, Groups with multiple operators, *Proc. London Math. Soc.* **6** (1956) 366—416.
[16] E. HILLE, *Funktional-Analysis and Semigroups,* Providence (1948).
[17] H. J. HOEHNKE, Zur Strukturtheorie der Halbgruppen, *Math. Nachrichten* **26** (1963) 1—13.
[18] ION D. ION, O prezentare simpla a teoriei descompunerilor primare in necomutativ, *Analele Universitatii Bucuresti, Ser. Matemat.* **16** (1967) 109—112.
[19] N. JACOBSON, *Structure of Rings,* Providence (1964)
[20] KERTÉSZ ANDOR, Vizsgálatok az operátormodululsok elméletében, III., *MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **9** (1959) 105—120.
[21] A. KERTÉSZ, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963) 595—597.
[22] A. KERTÉSZ, Zur Frage der Spaltbarkeit von Ringen, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III, **12** (1964) 91—93.
[23] A. KERTÉSZ, *Vorlesungen über Artinsche Ringe,* Budapest, (1968).
[24] S. LAJOS—F. SZÁSZ, Characterizations of strongly regular rings, I., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 38—40; II., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 287—289.
[25] S. LAJOS—F. SZÁSZ, Bi-ideals in associative rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **32** (1971) 185—193.
[26] L. RÉDEI, *Algebra,* I. Leipzig (1959)
[27] H. SEIDEL, Über das Radikal einer Halbgruppe, *Math. Nachr.* **29** (1965) 255—263.
[28] H. SEIDEL, Eine Charakterisierung des 0-Radikals einer Halbgruppe, *Math. Nachr.* **34** (1967) 163—166.
[29] R. SHULKA, Nilpotens elemek, ideálok és radikálok félcsoportokban (oroszul), *Matematicko-Fyzikalny Casopis* SAV **13**:3 (1963) 209—222.
[30] O. STEINFELD, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1953) 289—298.
[31] O. STEINFELD, On residuals in partially ordered semigroups, *Publ. Math. Debrecen,* **12** (1965) 107—116.

[32] O. STEINFELD, Eine Charakterisierung der primitiven Ideale eines Ringes, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **19** (1968) 219—220.
[33] P. N. STEWART, Semisimple radical classes, *Pacific Jour. Math.* **32** (1970) 249—254.
[34] A. SULINSKI, A classification of semisimple rings, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III, **9** (1961) 1—6.
[35] A. SULINSKI—T. ANDERSON—N. DIVINSKY, Lower radical properties for associative and alternative rings, *Journal London Math. Soc.* **41** (1966) 417—424.
[36] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, II., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **12** (1961) 417—439.
[37] F. SZÁSZ, Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchs'schen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe, *Archiv der Math.* **12** (1961) 282—289.
[38] F. SZÁSZ, An observation on the Brown—McCoy radical, *Proc. Japan Acad.* **37** (1961) 413—416.
[39] F. SZÁSZ, Bemerkungen zu assoziativen Hauptidealiringen, *Indagationes Math.* **23** (1961) 577—583.
[40] F. SZÁSZ, Ringe, deren endlich erzeugbare Unterringe Hauptrechtsideale sind, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **13** (1962) 115—132.
[41] F. SZÁSZ, Über Ringe, deren endlich erzeugbare Unterringe streng zyklische Rechsideale sind, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **8**/A (1964) 443—453.
[42] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsidale, III., *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963) 447—461.
[43] F. SZÁSZ, Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatshefte für Math.* **67** (1963) 359—362.
[44] F. SZÁSZ, Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III., **11** (1963) 351—354.
[45] F. SZÁSZ, Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967) 261—272.
[46] F. SZÁSZ, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, *Acta Sci. Math. Szeged* **28** (1967) 31—37.
[47] F. SZÁSZ, Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal änlich sind, *Math. Nachr.* **34** (1967) 157—161.
[48] F. SZÁSZ, Eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Bull. Acad. Polon, Sci. Classe* III, **15** (1967) 53—56.
[49] F. SZÁSZ, The sharpening of a result concerning the primitive ideals of an associative ring, *Proc. Amer. Math. Soc.* **18** (1967) 910—912.
[50] F. SZÁSZ, Reduktion eines Problems bezüglich der Brown—McChoyschen Radikalringe, *Acta Sci. Math. Szeged* **31** (1970) 167—172.
[51] F. SZÁSZ, Die Lösung eines Problems bezüglich des Durchschnittes zweier modularer Rechtsideale in einer Ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969) 211—216.
[52] F. SZÁSZ, Simultane Lösung eines halbgruppentheoretischen und eines ringtheoretischen Problems, *Acta Sci. Math. Szeged* **30** (1969) 289—294.
[53] F. SZÁSZ, Ideals of a ring with modular intersection, *Revue Roumaine Math. Pures Appl.* **16** (1971) 609—616.
[54] F. SZÁSZ, Äquivalenzrelation für eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **22** (1971) 85—86.
[55] F. SZÁSZ, Ein radikaltheoretischer Vereinigungsendomorphismus des Idealverbandes der Ringe, *Annales Univ. Sci. Budapest R. Eötvös* **12** (1969) 73—75.
[56] F. SZÁSZ, Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe, *Publ. Math. Debrecen* **17** (1970) 267—271.
[57] SZÁSZ F., Gyűrűk radikáljairól, I., *Mat. Lapok* **19** (1968) 259—302.
[58] SZÁSZ F., Gyűrűk radikáljairól, II., *Mat Lapok* **20** (1969) 99—116.
[59] SZÁSZ F., Gyűrűk radikáljairól, III., *Mat. Lapok* **20** (1969) 311—346.
[60] F. SZÁSZ, Notes on modules, I., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 349—350.
[61] F. SZÁSZ, Notes on modules, II., *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 351—353.
[62] F. SZÁSZ, Notes on modules, III., *Proc Japan Acad.* **46** (1970) 354—357.
[63] F. SZÁSZ, On Frattini one-sided ideals and subgroups, *Math. Nachr.* **46** (1970) 235—241.
[64] F. SZÁSZ, Almost right quasiregular adjoint semigroups of rings, *Math. Nachr.* **48** (1971) 309—314.
[65] F. SZÁSZ, On some weakly supernilpotent radicals of rings, *Colloquium Math.* **28** (1973) 195—201.
[66] F. SZÁSZ, Further characterizations of strongly regular rings, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe* III. **22** (1974) 243—245.

[67] F. SZÁSZ, Unabhängigkeitsfragen des Kurosch-schen Axiomensystems für die Radikale der Ringe, *Publ. Math. Debrecen* **15** (1964) 287—292.
[68] F. SZÁSZ, The radical property of rings such that every homomorphic image has no nonzero left annihilators, *Math. Nachrichten* **48** (1971) 371—375.
[69] F. SZÁSZ, On minimal biideals of rings, *Acta Sci. Math. Szeged* **32** (1971) 333—336.
[70] F. SZÁSZ, On generalized biideals of rings, I., *Math. Nachr.* **47** (1970) 355—360.
[71] F. SZÁSZ, On generalized biideals of rings, II., *Math. Nachr.* **47** (1970) 361—365.
[72] F. SZÁSZ, On the idalizer of a subring, *Monatshefte für Math.* **75** (1971) 65—68.
[73] F. SZÁSZ, A class of regular rings, *Monatshefte für Math.* **75** (1971) 168—172.
[74] F. SZÁSZ, Rings, which are radical modules, *Math. Japonicae* **16** (1971) 103—104.
[75] F. SZÁSZ, On left magnifying elements and quasimodular right ideals of rings, *Math. Japonicae* **18** (1973) 221—224.
[76] F. SZÁSZ, On some simple Jacobson radical rings, *Proc. Japan Acad.* **18** (1973) 225—228.
[77] F. SZÁSZ, On radicals of semigroups with zero, *Proc. Japan Acad.* **46** (1971) 595—598.
[78] F. SZÁSZ, On the adjoint semigroups of rings, *Proc. Japan Acad.* **46** (1970) 773—775.
[79] F. SZÁSZ, On hereditary radicals with zero, *Proc. Japan Acad.* (sajtó alatt).
[80] F. SZÁSZ, On strong semisimplicities of semigroups with zero, *Periodica Math. Hungar.* **5** (1974) 145—148.
[81] F. SZÁSZ, The join-reprezentation of some intersections in complete lattices, *Proc. Japan Acad.* (sajtó alatt).
[82] F. SZÁSZ, On Hashimotoian universal algebras with some properties of Hopf, *Math. Japonicae* **18** (1973) 229—234.
[83] F. SZÁSZ, Das im Operatorring enthaltene allgemeine Radikal eines Untermoduls, *Acta Sci. Math. Szeged* **34** (1973) 371—376.
[84] F. SZÁSZ, On right residuals in lattice ordered groupoids, *Math. Nachrichten* **48** (1971) 1—7.
[85] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On the dualization of subdirect embedlings, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969) 289—302.
[86] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On the duality of radical and semisimple objects in categories, *Acta Math, Acad. Sci. Hungar.* **21** (1970) 175—182.
[87] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On hereditary radicals, *Periodica Math. Hungar.* **3** (1973) 235—241.
[88] SZÁSZ GÁBOR, *Bevezetés a hálóelméletbe,* Budapest, 1959.
[89] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin stiintific Bucuresti* **1** (1949) 783—789.
[90] J. SZÉP, Über endliche Gruppen, die nur einen echten Normalteiler besitzen, *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 45—48.
[91] SZÉP JENŐ, Véges egyszerű csoportokról, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei,* Budapest, 1950. 451—453.
[92] L. A. SZKORNYAKOV, Komplementumos Dedekind-féle hálók és reguláris gyűrűk (oroszul). Moszkva, 1961.

(Beérkezett: 1973. I. 24.)