Periodica Mathematica Hungarica Vol. 7 (1), (1976), pp. 9–10

EIN KURZER ELEMENTARER BEWEIS EINES SATZES VON O. STEINFELD ÜBER DIE EINSTUFIG NICHTPRIMEN RINGE

von

F. SZÁSZ (Budapest)

Dem fünfzigsten Geburtstag von Professor Dr. OTTO STEINFELD *gewidmet*

"Ring" bedeutet hier durchwegs einen assoziativen Ring. Ein Ring heißt, nach O. STEINFELD [4], einstufig nichtprim, wenn (0) im Ring kein Primideal, aber in jedem echten Unterring schon ein Primideal ist. Diese Ringe nennen wir hierbei P-Ringe.

Das Hauptziel dieser Note ist, einen noch kürzeren und elementareren Beweis des Steinfeldschen Satzes [4] über die Bestimmung aller P-Ringe zu geben. Für die Grundbegriffe verweisen wir auf L. RÉDEI [2], auf N. JACOBSON [1] und Verfasser [6]. Die Kardinalität einer Menge M wird mit $|M|$ bezeichnet. p und q bedeuten Primzahlen.

Für ein ähnliches Resultat siehe noch R. WIEGANDT [7].

SATZ 1 ([4]). *Ein Ring A ist dann und nur dann ein P-Ring, wenn entweder $A^2 = 0$, $|A| = p$ oder $A = B \oplus C$ mit zwei Körpern B und C ist, für welche $|B| = p$, $|C| = q$ mit $p \neq q$ oder $p = q$ besteht.*

BEWEIS. Nehmen wir an, daß A ein P-Ring ist; dann existieren in A Ideale B und C mit $B \neq 0 \neq C$ und $BC = 0$. Offenbar haben wir die Relation $B + C = A$. Ist $CB \neq 0$, so erhält man wegen $(CB)^2 = 0$ auch $CB = A$, folglich $A^2 = 0$ mit $|A| = p$. Im Falle $CB = 0$ sei die Bezeichnung $D = B \cap C$ eingeführt. Ist $D \neq 0$, so ergibt sich wegen $D^2 = 0$ wiederum $D = A$, $A^2 = 0$ und $|A| = p$. Im Falle $D = 0$ kann die ringdirekte Summe $S = B^* \oplus C^*$ für die beliebigen Unterringe $0 \neq B^* \subseteq B$ und $0 \neq C^* \subseteq C$ gebildet werden, woraus sich $S = A$ ergibt, was auch $B^* = B$ und $C^* = C$ mit sich zieht. Mein elementar bewiesenes Lemma 1 aus [5] ergibt nun $|B| = p$, $|C| = q$, und B und C sind freilich Körper.

Diese Ringe sind nun aber tatsächlich P-Ringe.

SATZ 2. *Ein Ring A sei hier Q_1-Ring genannt, wenn er selbst kein Primring, jedes seiner echten Ideale aber ein Primring ist. Dann sind die sämtlichen*

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 16A46; Secondary 16A30, 16A48.

Key words and phrases. Ring, prime ring, order, one step non-prime ring.

Q_1-Ringe: A mit $A^2 = 0$ und $|A| = p$, oder $A = B \oplus C$ mit einfachen Primringen B und C.

SATZ 3. *Ein Ring A werde ein Q_2-Ring genannt, wenn er selbst kein Primring, jedes seiner echten Rechtsideale aber ein Primring ist. Dann sind alle Q_2-Ringe: A mit $A^2 = 0$ und $|A| = p$, oder $A = B \oplus C$, wobei B und C Schiefkörper sind.*

Die *Beweise* der Sätze 2 und 3 sind ganz ähnlich dem Beweis des Satzes 1, weshalb wir dieselben übergehen können.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. JACOBSON, *Structure of rings* (Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, vol. 37), American Mathematical Society, Providence, R. I., 1956, 1964, VII + 263 pp. *MR* **18**—373

[2] L. RÉDEI, *Algebra*, Erster Teil, Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 26, Teil 1, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, K.-G., Leipzig, 1959, XV + 797 pp. *MR* **21**#4885

[3] L. RÉDEI, Die einstufig nichtregulären Ringe, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **20** (1959), 238—244. *MR* **22**#4746

[4] O. STEINFELD, Die einstufig nichtregulären bzw. nichtprimen Ringe, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **22** (1961), 82—84. *MR* **24**#A744

[5] F. A. SZÁSZ, Note on rings in which every proper left ideal is cyclic, *Fund. Math.* **44** (1957), 330—332. *MR* **19**—1155

[6] F. SZÁSZ, Short elementary proof of a ringtheoretical result, *Math. Japon.* **17** (1972), 113—114. *MR* **48**#340

[7] R. WIEGANDT, Bemerkung über die einstufig nichtregulären Ringe, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **21** (1960), 350—352. *MR* **23**#A3156

(Eingegangen am 2. Mai 1974)

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE
H-1053 BUDAPEST
REÁLTANODA U. 13-15.
HUNGARY