GYŰRŰK RADIKÁLJAIRÓL II.*

SZÁSZ FERENC

IV. JACOBSON-FÉLE RADIKÁL

18. §. *Irreducibilis modulusok, jobbprimitív ideálok, moduláris és kvázimoduláris jobbideálok*

Az alábbiakban definiáljuk a Jacobson-féle radikált. E radikálnak hatékonyság szempontjából gyakorlati vizsgálatokban más konkrét radikálok közt olyan a szerepe, mint a vezérnek a szerepe a sakktábla többi figurája közt.

Legyen A tetszőleges gyűrű és M tetszőleges A-jobbmodulus. A továbbiakban A-moduluson, ha csak nem hangsúlyozunk mást, mindig A-jobbmodulust fogunk érteni. Azt mondjuk, hogy M irreducibilis A-modulus, ha $MA \neq 0$ és ha nincs M-ben más A-részmodulus, csak 0 és maga M. Ebből a definícióból tüstént folyik, hogy bármely irreducibilis A-modulus még inkább A-prímmodulus is lesz a II. fejezetben levő értelmezést felhasználva, ugyanis, ha M egy irreducibilis A-modulus, továbbá ha $x \in M$ olyan nemzérus elem és B olyan ideál az A gyűrűben, hogy $xB = 0$ teljesül, akkor szükségképpen fennáll $B \subseteq (0:M)_A$ is, ahol $(0:M)_A$ jelöli az M annihilátorideálját az A gyűrűben. Továbbá jelölje a §-ban Σ_A az összes irreducibilis A-modulus osztályát, és legyen $\Sigma = \bigcup \Sigma_A$.

Bebizonyítható eléggé könnyen az, hogy Σ prímmodulusoknak ún. speciális osztálya (a II. fejezetben vett értelemben; pl. az is teljesül, hogy ha B tetszőleges ideál az A gyűrűben és ha $M \in \Sigma_B$, akkor $MB \in \Sigma_A$, stb. stb.). Minden gyűrűre nézve legyen $J(A) = \bigcap_{M \in \Sigma_A} (0:M)_A$, ahol Σ_A, miként előbb is, az összes irreducibilis A-modulus osztálya. A II. fejezet eredményeiből következik, de közvetlenül sem nehéz belátni, hogy $J(A)$ ideál az A gyűrűben, továbbá az A bármely J ideáljára $J(I) = I \cap J(A)$.

Ezt a $J(A)$ ideált az A gyűrű Jacobson-féle radikáljának nevezzük. Ezt a radikált moduluselméletileg korábban Chevally és Goldman is így definiálta.

Ha Σ_A üres, akkor A radikálgyűrű lesz, ha pedig $J(A) = 0$, akkor A féligegyszerű lesz Jacobson-féle értelemben. Ha A radikálgyűrű, akkor $A = J(A)$, ha pedig A féligegyszerű, akkor A minden nemzérus a eleméhez létezik olyan $M_a \in \Sigma_A$ irreducibilis A-modulus, amelyben a

$$\varphi_a : m \to ma$$

leképezés szintén nemzérus, tehát van olyan $m \in M_a$, amelyre $ma \neq 0$.

A II. fejezet Andrunakievics-től származó ama eredményeiből, amelyek a speciális radikálok és operátormodulusok kapcsolatát tárgyalják, nyilvánvalóan következik (és persze közvetlenül is belátható), hogy $J(A)$ radikál lesz Amitsur—Kuros-féle értelemben, méghozzá speciális radikál is lesz Andrunakievics-féle értelemben.

Tehát a $J(A)$ Jacobson-féle radikál szupernilpotens radikál is.

Még azokat a majdnem nyilvánvaló tényeket is megemlítjük, hogy $J(A)$ tehát

* Az irodalmi hivatkozásokat az utolsó közlemény végén fogjuk közölni.

Σ-radikálideál, ahol $\Sigma=\bigcup\Sigma_A$, Σ_A az irreducibilis A-modulusok osztálya és $J(A)=R(\Sigma, A)$ tartalmazza A minden más Σ-ideálját (azaz Σ-radikál ideálját), miközben A minden B ideáljára $(0:M)_{A/B}=((0:M)_A)/B$ is teljesül.

Utóbbi tényből triviálisan adódik az is, hogy az $A/J(A)$ faktorgyűrű féligegyszerű, ami az Amitsur—Kuros-féle radikáloknak egyik fontos tulajdonsága.

Ha az A gyűrű P ideálja olyan, hogy hozzá létezik legalább egy olyan $M\in\Sigma_A$ irreducibilis A-modulus, amelyre teljesül $P=(0:M)_A$, akkor a P ideált jobbprimitívnek, röviden primitívnek nevezzük.

Továbbá az A gyűrűt jobbprimitívnek, röviden primitívnek nevezzük akkor, ha benne a (0) ideál primitív ideál.

Ferdetestek vagy a ferdetestek felett vett $n\times n$ típusú teljes matrixgyűrűk igen fontos példák primitív gyűrűkre. Ezek speciálisan olyan primitív gyűrűk is, amelyekben van nemzérus minimális jobbideál. Ugyanis a konkrét vizsgálatokban többnyire olyan primitív gyűrűk lépnek fel, és éppen ezek a fontosabbak, amelyekben létezik nemzérus minimális jobbideál. Az ilyen primitív gyűrűknek már elég jól kiépített elmélete van, és Dieudonné, Kaplansky, Mackey, és Litoff, de főképpen Jacobson munkássága nyomán viszonylag eléggé explicit struktúra-tétel írja le a nemzérus minimális jobbideálokat is tartalmazó primitív gyűrűk szerkezetét.

Megjegyzendő, hogy Wiegandt Richárd [359] igazolta azt, hogy olyan topologikus gyűrűkben, amelyek primitívek és lokálisan lineárisan kompaktok, létezik mindig minimális jobbideál.

Az is bebizonyítható, hogy kommutatív primitív gyűrű mindig test, tehát ekkor is létezik a gyűrűben minimális jobbideál, ti. maga a gyűrű.

Nem nehéz igazolni azt, hogy bármely P primitív ideál prímideál is, vagyis ha az A gyűrű B és C tetszőleges ideáljaira fennáll $BC\subseteq P$, akkor $B\subseteq P$ vagy $C\subseteq P$ is teljesül.

Másfelől nem minden prímideál lesz primitív, ugyanis legyen A mindazon racionális számok halmaza, amelyeknek a számlálója páros, a nevezője páratlan egész szám. A közönséges egyenlőségi, összeadási és szorzási definíciókkal A olyan kommutatív gyűrű, amely zérusosztómentes. Ezért (0) prímideál lesz az A gyűrűben, de megmutatható, hogy (0) nem primitív ideál A-ban, sőt, azt sem nagyon nehéz bebizonyítani, hogy ebben az A gyűrűben egyik valódi ideál sem lehet primitív.

Viszont bármely Artin-féle gyűrű, sőt általában bármely, a főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrű a szerző [309] dolgozata alapján olyan, hogy benne bármely prímideál egyszersmind primitív is.

Ha pedig egy Jacobson-féle értelemben erősen féligegyszerű gyűrű olyan, hogy bármely ideálja idempotens (ilyen pl. bármely féligegyszerű, és főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrű is), akkor a gyűrű bármely ideálja egyenlő az őt tartalmazó összes primitív ideál metszetével.

A primitív ideálok legfőbb jelentősége abban rejlik, hogy a Jacobson-féle $J(A)$ radikál bármely A gyűrűben egybeesik az összes primitív ideál metszetével.

Ezért bármely Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrű primitív gyűrűknek lesz egy szubdirekt összege.

Továbbá az is bebizonyítható, hogy az összes primitív gyűrű osztálya ún.-speciális gyűrűosztály (a II. fejezetben ismertetett definíció szerint), és hogy a Jacobson-féle radikál egybeesik azzal a speciális radikállal, amely éppen ezzel a speciális osztállyal meghatározott felső radikál.

Bár a Jacobson-féle radikál ezek szerint öröklődő, azaz bármely A gyűrű bármely B ideáljára nézve

$$J(B)=B\cap J(A)$$

teljesül, nem lesz minden Jacobson-féle féligegyszerű gyűrű erősen féligegyszerű (azaz féligegyszerű gyűrűnek minden homomorf képe újra féligegyszerű), mert pl. a racionális egész számok I gyűrűje féligegyszerű, de az $I/4I$ faktorgyűrű nem féligegyszerű. Ehhez csak azt kell látnunk, hogy ebben az I kommutatív gyűrűben az összes (p) primitív ideál prímszámmal generált főideál, és ezen ideálok metszete nyilván (0), továbbá $2I/4I$ ideál nilpotens az $I/4I$ faktorgyűrűben.

Továbbá egy Jacobson-féle féligegyszerű gyűrűnek egy tetszőleges jobbideálja vagy balideálja általában szintén nem lesz féligegyszerű, mert pl. a racionális számtest felett vett összes 2×2 típusú négyzetes matrix gyűrűjéről eléggé könnyen igazolható, hogy Jacobson-radikálmentes, azaz féligegyszerű ebben az értelemben, de ennek a gyűrűnek az az A részgyűrűje, amelyet az összes

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

alakú matrix generál, olyan jobbideál a féligegyszerű gyűrűben, amelynek a Jacobson-féle radikálja az összes

$$\begin{pmatrix} 0, & b \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

matrixból álló $J(A)$ halmaz, és A-nak a $J(A)$ ideálja nem zérus. Ez a $J(A)$ egyébként csak A-nak ideálja, a teljes matrixgyűrűnek nem ideálja, sőt nem is jobbideálja, hanem annak csak ún. kváziideálja lesz Steinfeld-féle értelemben [292]. (Az A gyűrű Q részgyűrűjét kváziideálnak nevezzük akkor, ha $AQ\cap QA\subseteq Q$ teljesül. Minden jobbideál vagy balideál nyilvánvalóan még inkább kváziideál a gyűrűben.)

Minthogy a primitív gyűrűknek és primitív ideáloknak struktúratételek szempontjából az előzők szerint a fontosságuk igen nagy, és minthogy eddig a primitív ideáloknak csak egy ún. külső definícióját adtuk meg, ti. az összes irreducibilis A-jobbmodulus Σ_A speciális osztályával megfogalmazott definíciót, hogy P akkor primitív ideál, ha $P=(0:M)_A$, ahol $M\in\Sigma_A$ ezért célszerű lesz belső definíciót is megadni a primitív ideálra és primitív gyűrűre. Ennél nem fogunk a Σ_A osztályra hivatkozni, hanem csak a gyűrű belső tulajdonságait, elemeket, jobbideálokat stb. fogunk felhasználni. Természetesen az megengedett, hogy a külső és belső definiálás közt legyen valami átvezető híd, és ilyen lesz az ún. erősen ciklikus A-modulusnak a fogalma.

Azt mondjuk, hogy az M A-modulus erősen ciklikus, ha létezik az M modulusnak olyan m eleme, amelyre $M=mA$. Ezt az m elemet M erős értelemben vett generátorának nevezzük.

Nyilvánvaló az, hogy a racionális egész számok I gyűrűje olyan, hogy I-nek, mint önmaga felett tekintett I-jobbmodulusnak bármely részmodulusa erősen ciklikus és persze főjobbideál is. Megjegyzendő, hogy a szerző [319], [320] meghatározta explicit módon az összes olyan A gyűrűt, amelyben bármely valódi részgyűrű, illetve bármely végesen generált valódi részgyűrű olyan jobbideál, amely mint A-jobbmodulus erősen ciklikus. (Ismertek egyébként teljes leírással azok a gyűrűk is, ezeket szerző határozta meg, amelyekben bármely végesen generált valódi részgyűrű főjobbideál.)

Továbbá az A gyűrű egy R jobbideálját modulárisnak nevezzük akkor, ha létezik olyan $a\in A$ elem, amelyre minden $x\in A$ elemmel $x-ax\in R$ teljesül. A moduláris jobbideálokat Segal definiálta először, és látni fogjuk, hogy ezeknek nagy szerepe van a $J(A)$ Jacobson-féle radikál vizsgálatában. Megjegyzendő, hogy $R\neq A$ esetén szükségképpen $a\notin R$ áll fenn a modularitás fenti definíciójában szereplő a elemre.

Szerzőtől [323] származik a kvázimoduláris jobbideál fogalma. Korábban Kertész Andor [185] vezette be bizonyos speciális jobbideálnak a fogalmát, amelyről igazolható, hogy egybeesik a kvázimoduláris jobbideállal.

Azt mondjuk, hogy az A gyűrűnek egy R jobbideálja kvázimoduláris jobbideál, ha az $A^{-1}R = \{x;\ x \in A,\ Ax \subseteq R\}$ jobboldali ideálhányadosra $A^{-1}R \subseteq R$ tartalmazás áll fenn. Megjegyzendő, hogy itt $A^{-1}R$ szükségképpen kétoldali ideál az A gyűrűben.

Nem nehéz megmutatni azt, hogy bármely moduláris jobbideál még inkább kvázimoduláris.

Kertész Andor [185] könyvének 3. problémája kérdezte azt (más terminológiával és más megfogalmazásban), hogy vajon létezik-e olyan A gyűrű, amelynek egy kvázimoduláris és maximális jobbideálja nem moduláris. Ez a kérdés azért fontos, mert szorosan összefügg a Jacobson-féle radikál egyik jellemzésével, pontosabban azzal, hogy egy bizonyos jellemzés vajon csak formailag új vagy pedig tartalmilag is.

Szerző [323] megoldotta ezt a Kertész-féle fenti problémát, és explicit módon megadott olyan A gyűrűt, amelynek legalább egy R maximális jobbideálja kvázimoduláris, de nem moduláris jobbideál A-ban. Szerző az ilyen tulajdonságú gyűrűket Ω-gyűrűknek nevezte, és az Ω-gyűrűk létezésének bebizonyítása mellett vizsgált még bizonyos ideálelméleti kérdéseket, pl. ideálhányadosok egymáshoz való viszonyát az Ω-gyűrűkben, továbbá explicite meghatározta speciálisabb Ω-gyűrüknek az additív csoportját, leírta ezeknek a gyűrűknek a centrumát is, és vizsgált még ún. jobbról egy elemmel generált Ω-gyűrűket, amelyek $A = xA$ alakuak.

Később Jan Erik Björk [61] megmutatta (sajtó alatt levő dolgozatában megoldva a szerző [323] egyik felvetett nyitott problémáját), hogy milyen kapcsolat lehetséges egy gyűrű moduláris maximális jobbideáljai halmazának $\aleph_\alpha$ számossága és a kvázi moduláris és maximális, de nem-moduláris jobbideálok halmazának $\aleph_\beta$ számossága közt, és Björk ehhez olyan primitív gyűrűket vett alapul, amelyek egybeesnek a saját minimális balideáljaik összegével.

A szerző példája [323], amellyel megmutatta az Ω-gyűrűk létezését, a következő:

Legyen $p = 0$ vagy prímszám, K_p egy p-karakterisztikájú prímtest, m tetszőleges végtelen számosság, Γ egy m-számosságú indexhalmaz, és $\delta_{\alpha\beta}$ a jól ismert Kronecker-féle szimbólum (azaz $\delta_{\alpha\alpha} = 1$ és $\alpha \neq \beta$ esetén pedig $\delta_{\alpha\beta} = 0$). Legyen továbbá A az összes a_α, $r_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta\gamma}$ bázis elemmel ($\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$) a K_p prímtest felett generált algebra, és legyen R az összes $r_{\beta\gamma}$ és $s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ ($\beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta \in \Gamma$) elemmel K_p felett generált részalgebra. Értelmezzük a báziselemek szorzását az alábbi szorzótáblával:

	a_ε	$r_{\varepsilon\eta}$	$s_{\varepsilon\eta\vartheta}$
a_α	a_ε	$\delta_{\alpha\varepsilon} \cdot a_\eta$	$\delta_{\alpha\varepsilon} \cdot a_\vartheta$
$r_{\alpha\beta}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\beta e} \cdot r_{\alpha\eta}$	$\delta_{\beta\varepsilon} \cdot s_{\alpha\eta\vartheta}$
$s_{\alpha\beta\gamma}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\gamma\delta} \cdot s_{\alpha\beta\eta}$	$\delta_{\gamma\varepsilon} \cdot s_{\alpha\beta\vartheta}$

Ekkor megmutatható, hogy ez a szorzás asszociatív, továbbá ez az algebra monomiális lesz, azaz bármely két báziselemnek a szorzata egy alkalmas báziselemnek egy skalárissal való szorzatával esik egybe. Megállapítható eme algebra egy tetszőleges elemének az ún. kanonikus alakja, és ennek alapján annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy adott elem benne feküdjék az R részalagebrában.

Be lehet látni azt, hogy az R részalgebra az A algebrának jobbideálja, továbbá konkrét számolással azt is be lehet bizonyítani, hogy R olyan maximális jobbideál az A gyűrűben, amely kvázimoduláris, de nem moduláris. Ezért A nyilván Ω-gyűrű.

Ezeknek a fogalmaknak a fontosságát a következő eredmények mutatják.

Egy M A-jobbmodulus akkor és csak akkor irreducibilis, ha $MA \neq 0$ és ha M erősen ciklikus A-jobbmodulus minden $m \in M$ nemzérus elemmel, mint erős értelemben vett generátorral.

Továbbá, egy M A-jobbmodulus akkor és csak akkor erősen ciklikus, ha létezik olyan R moduláris (nem feltétlenül maximális) jobbideál, hogy fennáll az $M \cong A/R$ operátorizomorfia a két A-jobbmodulusra.

Az szinte triviális, hogy az A/R modulus, ahol R jobbideál az A gyűrűben, akkor és csak akkor irreducibilis, ha $A^2 \nsubseteq R$ és ha R maximális jobbideál az A gyűrűben.

Azt is megemlítjük, hogy az A gyűrű egy R jobbideálja akkor és csak akkor moduláris az A gyűrűben, ha létezik olyan erősen ciklikus M A-jobbmodulus, az m erős értelemben vett generőtorral, hogy fennáll $R=(0:m)_A$, tehát R az m elem (jobb) annihilátora.

Egyébként az R moduláris (nem feltétlenül maximális) jobbideálokra a kvázimodularitás teljesülése csaknem triviális módon igazolható.

Be lehet látni azt is, a Zorn-féle lemma felhasználásával, hogy bármely moduláris jobbideál beágyazható a gyűrűnek egy moduláris maximális jobbideáljába. Fontos észrevétel az is, hogy a maximális moduláris jobbideál egyszersmind moduláris maximális jobbideál is (ugyanis pl. egy a kommutatív részgyűrűk közt maximális részgyűrű, bár kommutatív lesz, de nem lesz feltétlen maximális az összes részgyűrű közt stb.).

Továbbá egy M A-jobbmodulus akkor és csak akkor irreducibilis, ha létezik az A gyűrűnek olyan moduláris maximális R jobbideálja, hogy az M modulusokra teljesül az $M \cong A/R$ operátorizomorfia.

Fontos tény az, hogy az A gyűrűnek egy P ideálja akkor és csak akkor primitív, ha létezik a gyűrűnek olyan R moduláris maximális jobbideálja, amelyre fennáll $P=A^{-1}R=\{x;\ x \in A,\ Ax \subseteq R\}$.

Ezek szerint egy A gyűrű akkor és csak akkor primitív, ha létezik a gyűrűnek olyan moduláris maximális R jobbideálja, amelyre $A^{-1}R=0$, tehát $\{x;\ x \in A,\ Ax \subseteq R\}=0$.

Megjegyezzük, hogy ez a két legutóbbi kritérium már olyan, hogy ezek a primitív ideál, illetve a primitív gyűrű *belső* jellemzéseként is tekinthetők.

Szerző [326] egyik eredménye szerint igaz az, hogy ha R tetszőleges kvázimoduláris maximális jobbideál az A gyűrűben, akkor minden olyan $x \in A$ elemmel, amelyre $x \notin R$, az

$$R_x=\{x\}^{-1}A=\{z;\ z \in A,\ xz \in R\}$$

jobboldali ideálhányados olyan jobbideál lesz, amely egyidejűleg maximális és moduláris jobbideál az A gyűrűben. Ezzel a módszerrel bármely R kvázimoduláris maximális jobbideálból lehet tehát szerkeszteni R_x moduláris maximális jobbideálokat minden $x \notin R$ elemre, amelyre $x \in A$, és ez az R_x persze kvázimoduláris is.

Jacobson [159] igen fontos eredménye az, hogy bármely A gyűrűben a $J(A)$ Jacobson-féle radikál egybeesik a gyűrű összes moduláris maximális jobbideáljának a metszetével.

Továbbá, ha a gyűrű radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben, akkor a gyűrűnek nincs sem valódi moduláris jobbideálja, sem valódi primitív ideálja.

Kertész Andor [185] meglepő eredménye az, hogy a Jacobson-féle radikál egybeesik a gyűrű összes kvázimoduláris maximális jobbideáljának a metszetével, bár Kertész Andor nem használja a kvázimoduláris elnevezést, hanem azt körülírja. Kertész Andor ezt az eredményét egyébként úgy bizonyította be, hogy lépésről lépésre megmutatta húsz feltételnek (ti. tíz feltételnek és ezek másik tíz bal-jobb duálisának) az ekvivalenciáját, és megjegyzendő, hogy e húsz feltétel zöme és ezek ekvivalenciája nagyrészt már korábban is ismert volt.

A szerzőt önmagát is meglepte a szerző [323] konstruktív példája az Ω-gyűrűk létezésének a bizonyításáról, amelyből az is folyik, hogy Kertész Andor előbb említett jellemzése a Jacobson-féle radikálról nemcsak formálisan, hanem tartalmilag is új (lásd ehhez Kertész [185] könyve 3. problémáját). Ugyanis bármely A Ω-gyűrűben van kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál, és másfelől minden gyűrűben az összes kvázimoduláris maximális jobbideál metszete nem szűkebb az összes moduláris maximális jobbideál metszeténél, hanem ez a kétféle metszet egymással egybeesik. A nem Ω-gyűrűk az Artin-féle és a kommutatív gyűrűknek olyan közös általánosításai, mint amilyen közös általánosításai a véges osztályú csoportok a véges csoportoknak és a kommutatív csoportoknak.

A primitív ideál és primitív gyűrű analógiájára definiálható az ún. kváziprimitív ideál és kváziprimitív gyűrű is.

Azt mondjuk, hogy az A gyűrűnek a Q kétoldali ideálja kváziprimitív, ha létezik a gyűrűben olyan kvázimoduláris maximális R jobbideálja, amelyre fennáll $Q=A^{-1}R$, és ekkor persze $Q\subseteq R$ is.

Továbbá azt mondjuk, hogy az A gyűrű kváziprimitív, ha benne (0) kváziprimitív ideál.

Rögtön látható az, hogy bármely primitív ideál méginkább kváziprimitív ideál, továbbá bármely kváziprimitív ideál egyszersmind prímideál is.

Ezenkívül belátható eléggé könnyen, hogy egyrészt bármely kommutatív kváziprimitív gyűrű szükségképpen test, másrészt jobbideálokra nézve minimumfeltételű bármely kváziprimitív gyűrű izomorf egy ferdetest felett vett teljes matrixgyűrűvel.

Szerző [326] megoldotta Steinfeld Ottónak az egyik problémáját azzal, hogy szerző bebizonyította azt, hogy a Jacobson-féle radikál minden gyűrűben egybeesik az összes kváziprimitív ideál metszetével.

Erre a tényre a szerző kétféle bizonyítást is adott. Az egyik, igen rövid bizonyítás felhasználja a gyűrű elemeit és erősebb fogalmakat, a másik, hosszasabb bizonyítás négy metszet egybeesését mutatja meg, és közben lényegében csak hálóelméleti fogalmakat és módszereket használ fel, de a gyűrű elemeit lényegében nem használja fel.

Steinfeld Ottó [293], még kéziratban olvasva a szerző fenti bizonyításait, megmutatta azt, hogy bármely kváziprimitív ideál primitív és ezért egyszersmind bármely kváziprimitív gyűrű primitív is.

Szerző [327] élesítette Steinfeld Ottó előbbi eredményét. Az élesítés szerint, ha R tetszőleges kvázimoduláris maximális jobbideál az A gyűrűben, akkor *minden* $x\notin R$, $x\in A$ elemre $A^{-1}R=(xA)^{-1}R$ teljesül és ekkor $(xA)^{-1}R$ primitív ideál, tehát a kváziprimitív $A^{-1}R$ ideál is primitív ideál lesz.

Steinfeld Ottó a szerzővel szóbelileg közölte azt a megállapítását, hogy bármely A gyűrűben bármely kvázimoduláris maximális R jobbideálnak megvan az alábbi T tulajdonsága: Minden $a\notin R$ $(a\in A)$ elemhez és minden $\lambda\in A$ elemhez létezik olyan $b=b_{\alpha,c}\in A$ elem, hogy fennáll $\lambda^2-abc\in R$.

Steinfeld Ottó azt is kérdezte a szerzőtől, hogy megfordítva a T tulajdonság a nemnilpotens gyűrűkben vajon jellemzi-e a maximális jobbideálok közt a kvázimodulárisokat.

Nyilvánvalóan azért kell e kérdésben a nemnilpotens gyűrűkre szorítkoznunk, mert egyrészt nilpotens gyűrűkben nincs valódi kvázimoduláris maximális jobbideál, másrészt pedig a T tulajdonság nilpotens gyűrűben minden maximális jobbideálra teljesül.

Szerző [321] megoldotta Steinfeld Ottónak a fenti problémáját, és megmutatta, hogy a T tulajdonság olyan enyhe, hogy nem jellemzi a kvázimoduláris maximális jobbideálokat, hanem minden nemnilpotens gyűrűben minden maximális jobbideál szükségképpen T tulajdonságú.

Ezért egy tetszőleges A gyűrűben az összes T-tulajdonságú maximális jobbideál metszete a Φ Frattini-féle jobbrészmodulus, amely általában nem esik egybe a Jacobson-féle radikállal.

Megemlítjük még Kertész Andornak [188] azt az eredményét, amely kissé más megfogalmazásban úgy szól, hogy a Jacobson-féle $J(A)$ radikál a legbővebb olyan K ideál az A gyűrűben, amelyre $AK \subseteq \Phi$ teljesül, ahol Φ az A összes maximális jobbideáljának a metszte, vagy pedig $A = \Phi$ akkor, ha nincs az A gyűrűben valódi, maximális jobbideál. Ezért $J(A) = A^{-1}\Phi$. Megint másféle megfogalmazásban $J(A)$ pontosan mindazon $x \in A$ elemek halmaza, amelyekkel az yx szorzat minden $y \in A$ elemmel elhagyható a gyűrűnek, mint önmaga felett vett jobbmodulusának bármely generátorrendszeréből. Ennélfogva a Jacobson-féle $J(A)$ radikál bizonyos értelemben Frattini-féle részmodulusként is felfogható. Tehát Kertész ezen kritériuma általánosítja Fuchs fontos, de majdnem triviális észrevételét. Kertész kritériumának egyik felét Hille (Functional Analysis and Semigroups, New York, 1948) korábban bebizonyította. Kertésznek ebből a tételéből $J(A)$ jellemzéséről öt korollárium is levezethető:

1. Ha egy gyűrűben az összes maximális jobbideál metszete nulla, akkor a gyűrű Jacobson-féle radikálja egybeesik a gyűrű jobbannihilátor ideáljával.
2. Bármely A gyűrűben az összes maximális jobbideál Φ metszete kétoldali ideál.
3. Ha egy A gyűrűnek az A/Φ faktorgyűrűje jobbannihilátormentes, akkor az A Jacobson-féle radikálja éppen Φ.
4. Ha az A gyűrű egyszerű (de nem zérógyűrű) és ha A Jacobson-féle értelemben radikálgyűrű, akkor nincs az A gyűrűben valódi maximális jobbideál, tehát $\Phi = A$. Ilyen tulajdonságú gyűrű létezését Sąsiada példával mutatta meg. Ilyen példa létezése még nyílt kérdés, ha A (erősebben) nilgyűrű is.
5. Minden n kitevőre $J(A) = (A^n)^{-1}\Phi$ és hasonlóan $J(A) = \Phi_l(A^n)^{-1}$ teljesül, amelyek a Jacobson-féle radikál újabb jellemzéseként is tekinthetőek (lásd ezekhez szerző [323] dolgozatát).

Megemlítjük, hogy egy A gyűrűben a $J(A)$ Jacobson-féle radikálnak bizonyos értelemben duálisa a gyűrű mindazon R maximális jobbideáljának a D metszete, amelyre $R \supseteq A^{-1}0$, teljesül, ahol $A^{-1}0$ jelenti az A gyűrű jobbannihilátor (kétoldali) ideálját. Azt nem nehéz belátni, hogy ez a D jobbideál szükségképpen ideál is az A gyűrűben. Másfelől az $A = \{a\}$ gyűrű, ahol $a^3 = pa = 0$, $a^2 \neq 0$, p prímszám, azt mutatja, hogy ez az $A \to D(A)$ hozzárendelés nem szolgáltat Amitsur-, és Kuros-féle értelemben vett radikált, ugyanis $D(\{a\}) = \{a^2\}$ ahol az $\{a^2\}$ részgyűrű tényleg ideál is, továbbá

$$D(\{a\}/\{a^2\}) = \{a\}/\{a^2\}.$$

Megjegyezzük, hogy szerző [325] a zéruselemes félcsoportokban definiált hat olyan ideált, amelyek hasonló szerepet játszanak félcsoportokban, mint a Jacobson-féle radikál a gyűrűkben. Szerző vizsgálta e hat ideál viszonyát a halmazelméleti tartalmazás szempontjából, és speciális esetekben kimutatta ezek egybeesését. Korábban Hoehnke [144] definiált és vizsgált félcsoportokban kongruenciák segítségével egy radikált. Szerző [225] azt a sejtést fogalmazta meg, hogy az általa vizsgált hat ideál egymással és a Hoehnke-féle radikállal is egybeesik, és Seidel [283] meg tudta a hat ideál közül négyről mutatni azt, hogy ezek tényleg egybeesnek mindig egymással és a Hoehnke-féle radikállal is, de a másik két ideálról a kérdés általánosságban még nincs elintézve. Érdekes volna vizsgálni, hogy e hat radikál tartalmazza-e a Clifford-féle radikált, azaz az összes nilideál egyesítését.

Továbbá Kertész Andor [190] operátormodulusokban definiált egy olyan radikált, amelyről bizonyos speciális gyűrűk esetében megmutatható, hogy a gyűrűnek, mint önmaga felett vett modulusnak, ez a moduluselméleti radikálja egybeesik a gyűrű Jacobson-féle radikáljával. A Kertész-féle $K(M)$ radikál tudvalevőleg az M A-jobbmodulus mindazon x elemeinek a halmaza, amelyekre az xA részmudulus benne van M minden maximális A-részmodulusában, és $K(M)=M$ akkor, ha nincs az M modulusnak maximális A-részmodulusa. Ha A kommutatív, vagy ha A egységelemes, akkor az A gyűrűkre, mint A-jobbmodulusra, $K(A)=J(A)$ teljesül, ahol $J(A)$ a Jacobson-féle radikált jelenti.

Kertész Andor [190] kérdezte azt, hogy $K(A)$ vajon minden A gyűrűben megegyezik-e a $K(A)$ a $J(A)$ Jacobson-féle radikállal.

Szerző [316] megoldotta, negatív irányban, példák konstruálásával Kertész Andornak ezt a problémáját, mégpedig szerző a következő élesebb eredményt kapta:

Egy $\mathfrak{m}$ tetszőleges (véges vagy végtelen) számossághoz mindig létezik olyan A gyűrű, amelynek $\mathfrak{m}$ számú eleme és olyan $K(A)$ radikálja van, amely a $J(A)$ Jacobson-féle radikálnál valódi módon szűkebb, tehát $K(A)\neq J(A)$, $K(A)\subseteq J(A)$, kivéve akkor, ha $\mathfrak{m}$ véges és négyzetmentes szám. Ha ugyanis $\mathfrak{m}$ véges és négyzetmentes szám, továbbá ha az A gyűrűnek $\mathfrak{m}$ eleme van, akkor mindig teljesül $K(A)=J(A)$, mert ekkor A kommutatív.

A szerző által kapott fenti példák olyan A gyűrűk, amelyekben létezik olyan ún. homoperfekt maximális jobbideál, amely nem moduláris. Megjegyzendő ehhez az, hogy homoperfektnek nevezzük az M A-jobbmodulusnak egy N A-részmodulusát akkor, ha $MA\nsubseteq N$ továbbá az R jobbideál az A gyűrűben akkor tekintendő homoperfektnek, ha R az A-nak, mint A-jobbmodulusnak homoperfekt A-részmodulusa, tehát $A^2\nsubseteq R$ teljesül.

Meg lehet említeni még Kertész Andornak [190] azt a megállapítását, hogy a $K(M)$ moduluselméleti radikál egybeesik az MA-jobbmodulus összes homoperfekt maximális részmodulusának a metszetével.

Szerző [311] bebizonyította az alábbi eredményt, amely a Jacobson-féle értelemben féligegyszerű és ugyanakkor az összes jobbideálra nézve minimum-feltételű gyűrűknek adja meg egy moduluselméleti jellemzését, a $K(M)$ Kertész-féle radikál felhasználásával:

Egy gyűrű A akkor és csak akkor jobbideálokra nézve minimum-feltételű és Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrű, ha az A gyűrűre egyidejűleg teljesül az alábbi két feltétel:

1. A egységelemes és teljesül a főjobbideálok minimumfeltétele;
2. minden M A-részmodulus $K(M)$ moduluselméleti radikáljára teljesül a $K(M)A=0$ feltétel.

Még nyitott kérdés az, hogy önmagában a 2. feltétel, az 1. feltétel nélkül, a gyűrűknek milyen osztályát jellemzi. Kertész Andor a szerző részére szóbelileg olyan sejtést közölt, amely szerint már önmagában a 2. feltétel is valószínűleg az Artin-féle féligegyszerű gyűrűk osztályát jellemzi.

19. §. *Példa jobbról primitív gyűrűre, amely balról nem pimitív és a Jacobson-féle radikál jellemzése kvázireguláris elemekkel*

Először Bergman [59] fontos példáját tárgyaljuk olyan gyűrűről, amelyik jobbról primitív, de balról nem primitív. Ha létezik ilyen A gyűrű, akkor létezik olyan A irreducibilis jobbmodulus, amelyre $(0:M)_A=0$, viszont minden N irreducibilis A-balmodulusra $(0:N)_A\neq 0$ teljesül. Ilyen A gyűrű létezik, tehát a jobbprimitívség és balprimitívség gyűrűknek két különböző osztályát határozza meg. Ennek ellenére be fogjuk látni az ún. kvázireguláris elemek segítségével azt, hogy az összes jobbprimitív ideálnak a metszete egybeesik az összes balprimitív ideál metszetével, és ez a metszet éppen a Jacobson-féle radikál. Tehát a Jacobson-féle jobbradikál és balradikál egyenlő egymással.

A Bergman-féle példa a következő. Legyen Q a racionális számtest, $Q(x)$ pedig az x-változós összes racionális törtfüggvény teste, továbbá legyen α ennek a testnek az a meromorfizmusa (önmagába való izomorfizmusa), amelyre

$$\alpha: r(x)\to r(x^2).$$

Legyen $A=Q(x)[y]$ az y változós „polinomgyűrű", amelyben ugyan közönséges módon értelmeztük az egyenlőséget és összeadást, kivonást az elemek közt, de a szorzás a közönségestől eltérő, ugyanis legyen

$$yr(x)=r(x^2)y=(\alpha(r(x)))y.$$

Ekkor A egységelemes, nullosztómentes, nemkommutatív olyan gyűrű, amely balról főideálgyűrű, tehát főbalideálgyűrű, ugyanis benne baloldali, euklideszi osztási algoritmus korlátlanul elvégezhető. Meg lehet mutatni azt, hogy a Q test felett vett A algebrának bármely olyan B részalgebrája, amelyre $x\in B$ és $y\in B$, jobbról primitív gyűrű. Ebből a célból, megmutatható, hogy megadható minden ilyen B részalgebrához egy hű és irreducibilis B-jobbmodulus.

Ha $r(x)\in Q(x)$, legyen $r^*(x)\in Q(x)$ olyan elem, amelyre $r^*(x^2)=\dfrac{r(x)+r(-x)}{2}$.

Legyen most M az a B-jobbmodulus, amelynek elemei éppen $Q(x)$ elemei, az összeadás $Q(x)$ összeadása, de az operátorszorzás legyen $r(x)\cdot q(x)=r(x)\cdot q(x)$ gyűrűszorzás, és ezenkívül $r(x)y=r^*(x)$ definíció szerint.

Nem nehéz belátni, hogy teljesül

$$x^n y^m=\begin{cases} x^{2^{-m}\cdot n}, & \text{ha } 2^m/n\\ 0 & \text{ha } 2^m\nmid n\end{cases}$$

Legyen most M_0 az x által az M B-modulusban generált B-részmodulus. Megmutatható, hogy M_0 irreducibilis B-jobbmodulus, és valamivel körülményesebben az is bebizonyítható (miközben egyenlőtlenségi becsléseket és elemi számelméleti meggondolásokat kell végezni), hogy M_0 hű B-jobbmodulus, azaz $(0:M_0)_B=0$. Ezért az algebrának minden olyan B részalgebrája, amelyre $x\in B$ és $y\in B$ teljesül, jobbról primitív.

Annak a bizonyítása, hogy A tartalmaz olyan B részalgebrát, amely balról nem primitív, bár $x, y\in B$ teljesül, úgy történik, hogy bizonyos v_n értékelést (valuation) definiálunk minden n természetes számra.

Legyen ugyanis $p_n(x)$ a Q racionális számtest felett vett n-edik körosztási polinom, vagyis

$$p_n(x)=\prod_{d/n}(x^d-1)^{\mu(nd^{-1})}$$

ahol $\mu(m)$ jelenti a jólismert Moebius-féle számelméleti függvényt, és a szorzás az n szám összes d osztójára terjesztendő ki. Legyen továbbá v_n az a kitevő értékelése a $Q(x)$ testnek, amelynek az alapeleme a $p_n(x)$ polinom. Tehát $v_n(p_n(x))=1$, $v_n((p_n(x))^m)=m$ és $v_n(q(x))=0$, ha $(q(x), p_n(x))=1$, továbbá $v_n(\alpha\beta)=v_n(\alpha)+v_n(\beta)$, ahol $\alpha, \beta \in Q(x)$.

Minden páratlan n számra és minden $r(x)\in Q(x)$ elemre teljesül $v_n(r(x))= = v_n(r(x^2))$, ugyanis ekkor a $p_n(x^2)=0$ egyenlet gyökei éppen az összes olyan $\sqrt{\vartheta}$ és $-\sqrt{\vartheta}$ szám, amelyre $p_n(\vartheta)=0$ teljesül, továbbá, ha $p(x)$-nek és $p_n(x)$-nek van közös gyöke, akkor $p_n(x)|p(x)$ és $p_n(x^2) = p_n(x)(p_n|-x)$ miatt belátható $v_n(f(x))= = v_n(f(x^2))$ páratlan n-re és polinom $f(x)$-re. De ebből folyik az említett egyenlőség törtfüggvény $r(x)$ értékelésére is. Mármost definiáljuk a w_n értékelést v_n segítségével az A algebrán a következőképpen:

$$\omega_n\left(\sum_{i=1}^{k} r_i(x)y^i\right) = \underset{1\leqq i\leqq n}{\text{minimum}}\, v_n(r_i(x))$$

Nem nehéz bebizonyítani azt, hogy ez a w_n függvény tényleg értékelés az A algebrán.

Legyen továbbá $B_0=\{z;\ z\in A,\ w_n(z)\geqq 0$ minden páratlan n számra$\}$.

Igazolható, hogy ez a B_0 halmaz részalgebra A-ban, és $x\in B_0$, $y\in B_0$, tehát B_0 jobbról primitív gyűrű az előzők szerint. Most vázoljuk annak a bizonyítását, hogy ez a B_0 részalgebra balról nem primitív gyűrű. B_0 minden L valódi maximális balideáljára $AL=A$ teljesül, mert ha $AL\neq A$ volna, akkor teljesülne $AL=(g)_l$, ahol

$$g = a_0(x)+a_1(x)y+\ldots+a_m(x)y^m,$$

és $m>0$, $a_m(x)\neq 0$, mert $m=0$ esetén $(g)_l=A$ volna. Legyen mármost n olyan páratlan szám, amelyre $w_n(g)=0$, ilyen n biztosan létezik. Ha egy $a=\Sigma b_i y^i$ elemre j olyan index, amelyre $w_n(a)=w_n(b_j)$, legyen $\delta(a)$ az ilyen j számok maximuma egy a mellett. Belátható, hogy mindig teljesül

$$\delta(\lambda d) = \delta(c)+\delta(d),$$

továbbá $\delta(g)=m$, ahol g az AL főbalideál előbbi generátora. Ha u tetszőleges elem AL-ből, akkor belátható $\delta(u)\geqq\delta(g)>0$. Továbbá $AL\neq A$ esetén $B_0 = L+B_0p_n(x)$ volna, és ezért léteznék olyan $b\in B_0$ elem, amelyre

$$1 = l+bp_n(x).$$

De ekkor egyrészt $\delta(1-bp_n(x))\neq 0$, másrészt $\delta(l)=0$ adódnék, ami ellentmondás, tehát tényleg $AL=A$ teljesül B_0 minden L maximális balideáljára. Ezért

$$1 = \sum_{j=1}^{s} a_j l_j, \quad \text{ahol} \quad a_j\in A,\ l_j\in L.$$

Létezik olyan nemzérus $z\in Q(x)$ elem, hogy $w_n(za_j)\geqq 0$ áll fenn minden páratlan n-re, és minden j indexre, amelyre az $1\leqq j\leqq s$ feltétel teljesül. Ekkor $za_j\in B_0$ és $z=z(\Sigma a_j l_j)\in B_0L\subseteqq L$. Minthogy létezik z-nek a z^{-1} inverze A-ban, és minthogy

$$w_n(z^{-1}tz)=w_n(t)$$

ezért $zB_0=B_0z=I$ olyan nemzérus ideál B_0-ban, amely az L tetszőleges maximális balideálban fekszik.

Ezzel az erősen *vázlatos* gondolatmenettel beláttuk azt, hogy B_0 olyan gyűrű, amely jobbról primitív, de balról nem primitív.

Ezek után rátérünk az ún. kvázireguláris elemek tárgyalására.

Minden A gyűrű minden a eleméhez hozzárendelhető az összes $x-ax$ alakú elem halmaza, ahol $x \in A$. Ez a halmaz jobbideál, éspedig moduláris jobbideál, amelyet formálisan $(1-a)A$ szimbólummal fogunk jelölni még akkor is, ha nincs egységelem az A gyűrűben. (Ekkor 1 operátorként fogható fel.)

Az $a \in A$ elemet jobbkváziregulárisnak fogjuk nevezni akkor, ha $(1-a)A = A$ teljesül.

Majdnem triviális az, hogy akkor és csak akkor áll fenn

$$(1-a)A = A, \quad \text{ha} \quad a \in (1-a)A.$$

Minthogy pedig $a \in (1-a)A$ esetén nyilván $-a \in (1-a)A$, ezért ekkor létezik olyan $b \in A$ elem, amelyre $-a = (1-a)b$, tehát

$$a+b-ab = 0$$

áll fenn.

Ezt a b elemet az a elem jobbkváziinverzének nevezzük.

Egy elem akkor és csak akkor jobbkvázireguláris, ha létezik jobbkváziinverze. Ugyanis $a+b-ab = 0$ esetén $(1-a)A = A$ is teljesül.

A jobbkváziinverz elnevezést indikolni fogja az ún. „körművelet" bevezetése, amely egyszersmind könnyebbé is teszi a jobb-kvázireguláris elemek tárgyalását.

A körművelet definíciója ez:

$$a \circ b = a+b-ab.$$

Ha pedig a $\sigma : a \to 1-a$ leképezést vesszük egységelemes gyűrűben vagy nemegységelemes gyűrűnek valamilyen egységelemes gyűrűbővítésében, akkor

$$(a \circ b)\sigma = (a\sigma) \cdot (b\sigma),$$

tehát

$$a \circ b = (a\sigma \cdot b\sigma)\sigma^{-1}.$$

Igazolható ezzel az is, hogy a körművelet asszociatív. A körművelettel bármely gyűrű elemei egységelemes félcsoportot alkotnak, és $a \circ 0 = 0 \circ a = a$ miatt éppen 0 lesz e félcsoportban az egységelem. Mármost a pontosan akkor lesz jobbkvázireguláris, ha ebben a gyűrűt kísérő, egységelemes félcsoportban létezik jobbinverze, vagyis, ha $a \circ b = 0$ teljesül.

Továbbá kváziregulárisnak nevezzük az a elemet, ha ebben az egységelemes, körműveletes félcsoportban létezik kétoldali inverze, vagyis van olyan b elem, amelyre teljesül $a \circ b = b \circ a = 0$. Tehát a kvázireguláris elemek pontosan azok, amelyek egyidejűleg balkváziregulárisok és jobbkváziregulárisok is.

Nem nehéz belátni azt, hogy ha egy R jobbideálnak minden eleme jobbkvázireguláris az A gyűrűben, akkor R minden eleme kvázireguláris is. Az ilyen R jobbideált kváziregulárisnak nevezzük.

Tetszőleges A gyűrű bármely R niljobbideálja kvázireguláris jobbideál. Ugyanis $a^n = 0$, $a^{n-1} \neq 0$ és $b = -a-a^2-\ldots-a^{n-1}$ esetén nyilván $a \circ b = b \circ a = 0$.

Érvényes Jacobson ama fontos feltétele, amely szerint a $J(A)$ radikál minden A gyűrűben olyan kvázireguláris ideál, amely minden kvázireguláris jobbideált és minden kvázoreguláris balideált tartalmaz.

Egyébként $J(A)$ egybeesik egyrészt mindazoknak az x elemeknek a halmazával az A gyűrűben, amelyre az xy szorzat minden y elem mellett jobbkvázireguláris, másrészt $J(A)$ mindazon y elemek halmazával is egybeesik, amelyekre az xyz szorzat minden x és z elem mellett kvázireguláris.

Minthogy $J(A)$ minden kvázireguláris balideált tartalmaz, a jobbról és balról (ti. jobbprimitívséggel és balprimitívséggel) értelmezett Jacobson-féle radikálnak egymással egybe kell esni.

Az előzők alapján az is világos, hogy $J(A)$ minden niljobbideált és minden nilbalideált tartalmaz. Megjegyezzük, hogy korábban Perlis [258] és Baer [49] vizsgáltak radikálokat, amelyeknek minden eleme kvázireguláris.

20. §. *Gyűrűkonstrukciók Jacobson-féle radikálja*

Mindenek előtt az A gyűrű felett vett összes $n\times n$ típusú matrix gyűrűjét, az A_n teljes matrix-gyűrűjét vizsgáljuk a Jacobson-féle radikál szempontjából.

Érvényes $J(A_n)=(J(A))_n$, tehát teljes matrixgyűrűnek a Jacobson-féle radikálja egybeesik az alapgyűrű Jacobson-féle radikálja felett vett teljes matrixgyűrűvel. Erre a fontos tételre többféle bizonyítás ismeretes. Az egyik, amely Jacobsontól származik, a gyűrű kvázireguláris elemeit és a matrixgyűrű kvázireguláris matrixait használja fel. A másik bizonyítás, amely E. C. Posner [262]-től származik, átutalja a tétel igazolását a primitív gyűrű felett vett teljes matrixgyűrűk vizsgálatára, és ezért önmagában is igen tanulságos módszert mutat be.

Legyen ugyanis M olyan A_n-jobbmodulus, amelyre $MA_n=M$ teljesül, ahol A_n az A gyűrű felett vett teljes matrixgyűrű, amelyben nincs *triviális* részmodulus, azaz $mA_n=0$ esetén $m=0$, ahol $m\in M$. Legyen I_i mindazon matrixok halmaza A_n-ből, amelyeknek i-edik oszlopa tetszőleges elemekből, a többi oszlopa pedig csupa nullából áll. Ekkor I_i balideál az A_n gyűrűben és legyen $\overline{M}_i=MI_i$, továbbá érvényes $M=\sum_{i=1}^{n}\oplus\overline{M}_i$.

Létezik olyan $\overline{M}$ A-jobbmodulus, hogy létezik n számú f_i izomorfizmus is, $f_i:\overline{M}\to\overline{M}_i\subset M$, ahol M mint az A_n skalmatrixai felett vett A-jobbmodulus tekintendő. Továbbá $\overline{M}A=\overline{M}$ és M akkor és csak akkor irreducibilis A_n-jobbmodulus, ha $\overline{M}$ irreducibilis.

$\overline{M}$ létezésének bizonyítása Posnernél konstruktív.

Mindezekből levezethető az is, hogy az A_n teljes matrixgyűrű akkor és csak akkor primitív, ha maga A is primitív gyűrű.

Továbbá az A_n teljes matrixgyűrűnek egy ideálja akkor és csak akkor primitív ideál, ha ez P_n alakú teljes matrixgyűrű, ahol P az A gyűrű egy primitív ideálja.

Tudvalevőleg szemiprímnek, féligprímnek akkor nevezünk egy Q ideált az A gyűrűben, ha minden olyan B ideálra, amelyre $B^2\subseteq Q$ áll fenn, már ez erősebb $B\subseteq Q$ feltétel is teljesül. Az ilyen tulajdonságú Q ideálokról a Zorn-féle lemma segítségével nem nehéz bebizonyítani azt, hogy előállíthatók bizonyos prímideálok metszeteként, és tetszőleges prímideálok metszete mindig féligprímideál lesz.

Azt is be lehet bizonyítani, hogy az A_n teljes matrixgyűrűnek bármely féligprím ideálja Q_n alakú, ahol Q féligprím ideál az A gyűrűben, és fordítva, ha Q tetszőleges féligprím ideál az A gyűrűben, akkor Q_n is féligprím ideál lesz az A_n teljes matrixgyűrűben.

Minthogy pedig minden primitív ideál prímideál, és a Jacobson-féle radikál pedig, lévén az összes primitív ideál metszete, féligprím ideál, ezért az utóbbi tételből szintén következik $J(A_n)=(J(A))_n$.

Ha R olyan általános radikáltulajdonság, hogy minden A gyűrűben az $R(A)$ radikál tartalmazza az összes R-jobbideált is (pl. ilyen tulajdonságú a Jacobson-féle, a Levitzki-féle és a Baer-féle alsó nil radikál), és ha A tetszőleges R-félig-egyszerű gyűrű, akkor A bármely K jobbideáljának az R-radikálja éppen a K gyűrű balannihilátora lesz.

Ennek bizonyítása szinte triviális, ugyanis az $R(K)\cdot K$ szorzat egyrészt az A gyűrűnek is jobbideálja, másrészt $R(K)K \subseteq R(K)$ miatt ez a szorzat R-radikálgyűrű, és $R(A)$ miatt fennáll $R(K)\cdot K=0$, amit bizonyítani kellett.

Tehát speciálisan, tetszőleges, Jacobson-féle féligegyszerű gyűrű bármely jobbideáljának a Jacobson-féle radikálja egybeesik a jobbideálnak önmagában vett balannihilátorával.

Ha A olyan tetszőleges gyűrű, amely nem egységelemes, és ha I jelöli a racionális egész számok gyűrűjét, akkor tudvalevőleg létezik A-nak egységelemes A^* gyűrűbővítése, amely $A^* = A+I$ alakú, ahol $A \wedge I=0$, és A-nak bármely jobbideálja, balideálja vagy ideálja ugyanilyen típusú ideál marad a bővebb A^* gyűrűben is.

Belátható, hogy $J(A^*)=J(A)$. Ehhez elegendő arra hivatkozni, hogy egyrészt J öröklődő radikál, tehát bármely A gyűrű bármely B ideáljára

$$J(B)=B\cap J(A)$$

teljesül, másrészt pedig a racionális egész számok I gyűrűjére nyilván $J(I)=0$ teljesül, mert a primitív ideálok éppen a (p) főideálok, ahol p prímszám és az összes (p) metszete pedig (0).

A tetszőleges A gyűrű felett vett $A[\lambda]$ polinomgyűrű Jacobson-féle radikáljáról általánosságban még nincs annyira teljes eredmény, mint pl. az A^* egységelemes gyűrűbővítés radikáljáról, mert $A[\lambda]$ vizsgálata ebből a szempontból összehasonlíthatatlanul nehezebb. Amitsur kapott erre vonatkozóan speciális, de fontos eredményt, amely a következő:

Ha az A gyűrűben nincs nemzérus nilideál, akkor az $A[\lambda]$ polinomgyűrű féligegyszerű Jacobson-féle értelemben.

Amitsur eme tételét alkalmazva arra a szélsőséges esetre, amikor A zérusosztómentes (tehát még inkább nilideálmentes), de *radikálgyűrű* Jacobson-féle értelemben, adódik, hogy ekkor $A[\lambda]$ *féligegyszerű* lesz Jacobson-féle értelemben. Megjegyezzük, hogy pl. az összes páros számlálójú és páratlan nevezőjű tört részgyűrűje (a racionális számtestben) olyan gyűrű, mely zérusosztómentes, és Jacobson-radikálgyűrű, mert a triviális

$$\frac{2k}{2l+1}+\frac{2k}{2(k-l)-1}-\frac{2k}{2l+1}\cdot\frac{2k}{2(k-l)-1}=0$$

azonosság alapján minden $\frac{2k}{2l+1}$ törtnek van $\frac{2k}{2(k-l)-1}$ kváziinverze. Ennélfogva radikálgyűrű felett vett polinomgyűrű lehet féligegyszerű Jacobson-féle értelemben.

Egyébként Amitsur a fenti tételét úgy bizonyította be, hogy feltette azt, hogy $J(A[\lambda])$ radikál nemzérus, és ezzel a feltétellel meg tudta mutatni az A gyűrűben egy nemzérus nilideál létezését, miközben felhasználta az alábbi, önmagában is érdekes lemmáját:

Ha B tetszőleges ideál az $A[\lambda]$ polinomgyűrűben, és ha $p(\lambda) = a_0+a_1\lambda+\ldots+\ldots+a_n\lambda^n$, $a_n\neq 0$, egy legalacsonyabbfokú nemzérus polinom a B ideálban, továbbá ha $r(\lambda)$ olyan polinom $A[\lambda]$-ból, amelyre egy $k\geqq 1$ kitevővel az $a_n^k r(\lambda)=0$ feltétel teljesül, akkor fennáll $a_n^{k-1}p(\lambda)r(\lambda)=0$ is (ahol az esetleges 0-adik hatványon természetesen az 1 operátor értendő, még akkor is, ha nincs egységelem az A gyűrűben).

21. §. *Algebrák Jacobson-féle radikálja*

Már megmutattuk az I. fejezetben azt, hogy bármely A algebrának az R-radikálja egybeesik az operátortartomány nélkül tekintett A gyűrűnek az R radikáljával bármely R általános radikáltulajdonsággal. Ebben a §-ban egy Φ test felett vett algebrának a Jacobson-féle radikálját vizsgáljuk. Ekkor A egy Φ-vektortér, amelyben a $J(A)$ radikál részvektortér.

A Φ test felett vett A algebrának az a elemét Φ felett algebrainak nevezzük, ha az a elemmel generált $\{a\}$ részalgebra Φ felett végesrangú részvektortér. Továbbá az a elemet transzcendensnek fogjuk nevezni akkor, ha az $\{a\}$ részalgebrának a rangja végtelen a Φ test felett. Megjegyzendő, hogy az $\{a\}$ részalgebrának minden eleme bizonyos $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a^i$ alakú polinom, ahol $\alpha_i \in \Phi$.

Érvényes az a fontos tétel, hogy a Φ test felett vett tetszőleges A algebra $J(A)$ Jacobson-féle radikáljának minden eleme vagy nilpotens,, vagy transzcendens.

A Φ test felett vett A algebrát algebrainak nevezzük akkor, ha A-nak minden eleme algebrai Φ felett.

Az előzőkből adódik, hogy algebrai A algebra $J(A)$ Jacobson-féle radikálja nilideál. Tehát bármely algebrai algebrában az összes niljobbideál összege kétoldali nilideál, és minden niljobbideál beágyazható nilideálba.

Utóbbi ténynek az érvényessége tetszőleges gyűrűben még nyitott kérdés.

Most Amitsur bizonyos eredményeit tárgyaljuk, amelyhez bizonyos érdekes előkészületeket teszünk.

Ha a Φ test felett vett A algebrának nincs egységeleme, jelölje A^* az A legszűkebb egységelemes algebra-bővítését felett. Ekkor $A^* = A + \Phi 1$ és $A \cap \Phi 1 = 0$ miatt A^* rangja eggyel nagyobb A rangjánál, ha az utóbbi véges; és A^* rangja egyenlő A rangjával, ha ez a rang végtelen Φ felett. Hasonlóan jelölje $\{a\}^*$ az $\{a\}$ részalgebra legszűkebb egységelemes algebrabővítését, ha nem volna $\{a\}$ egységelemes. Világos, hogy az a elem akkor és csak akkor algebrai Φ felett, ha $\{a\}^*$ véges rangú. Ha $\Phi[\lambda]$ a λ-változós polinomgyűrű Φ felett, akkor a

$$\gamma : 1 \to 1$$

$$\gamma : \lambda \to a$$

megfeleltetések kiterjesztése a $\Phi[\lambda]$ gyűrűnek $\{a\}^*$-ra való olyan homomorfizmusa lesz, amelynek a magja egy $(\mu(\lambda))$ főideál, mert $\Phi[\lambda]$ euklidesi-gyűrű lévén egyszersmind főideálgyűrű is. Az a elem akkor és csak akkor algebrai Φ felett, ha $\mu(\lambda) \neq 0$. Ekkor $\mu(a) = 0$ áll fenn, és ezt a $\mu(\lambda)$ polinomot az a elem minimális polinomjának nevezik. Fel szabad tételezni, hogy $\mu(\lambda)$ legmagasabbfokú tagjának az együtthatója 1. Ha $\nu(a) \in \{a\}^*$, ahol $\nu(\lambda) \in \Phi[\lambda]$, akkor $\mu(\lambda)$ és $\nu(\lambda)$ relatív prímsége, azaz $(\mu(\lambda), \nu(\lambda)) = 1$ ekvivalens azzal a feltétellel, hogy létezik a $\nu(a)$ elemnek $\{a\}^*$-ban multiplikatív inverze. Azt mondjuk, hogy az $\alpha \in \Phi$ elem az a-elem $\sigma(a)$ *spektrum*ához tartozik, ha az $a - \alpha 1$ elemnek nincsen inverze az A algebrában. Továbbá a $\sigma(a)$ spektrum komplementer halmazát az Φ testben *rezolvens halmaz*nak nevezzük, és $\varrho(a)$ szimbólummal jelöljük. Tehát $\varrho(a)$ mindazon $\alpha \in \Phi$ elemnek a halmaza, amelyre létezik az A algebrában az $(a - \alpha 1)^{-1}$ inverz.

Megjegyzendő, hogy $\alpha \in \sigma(a)$ akkor és csak akkor teljesül, ha a $\mu(\lambda)$ minimális polinom osztható a lineáris $\lambda - \alpha$ binommal. Ez pedig pontosan akkor áll fenn, ha $\mu(\alpha) = 0$. Tehát a $\sigma(a)$ spektrum minden eleme gyöke a minimális polinomnak.

Fontos a következő lemma:

Ha A egy Φ test felett vett algebra, és ha

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

különböző elemek egy adott, tetszőleges a elem $\varrho(a)$ rezolvens halmazából, akkor vagy Φ felett lineárisan függetlenek lesznek a megfelelő

$$(a-\alpha_1 1)^{-1}, (a-\alpha_2 1)^{-1}, \ldots, (a-\alpha_r 1)^{-1}$$

inverz elemek, vagy pedig a olyan algebrai elem, mely minimális polinomjának a fokszáma legfeljebb $r-1$.

Ebből a lemmából levezethető Amitsur-nak az a tétele, amely szerint ha A olyan algebra a végtelen Φ test felett, hogy Φ számossága nagyobb az A rangjánál, akkor a $J(A)$ Jacobson-féle radikál szükségképpen nilideál.

Minthogy a végesen generált algebrának a rangja vagy véges vagy megszámlálhatóan végtelen, ezért az előbbi tételből korolláriumként adódik a következő eredmény:

Nem megszámlálhatóan végtelen számosságú Φ test felett vett bármely végesen generált A algebrának a $J(A)$ Jacobson-féle radikálja nilideál.

Ennek pedig további, nem egészen triviális következménye az, hogy ha Φ nem megszámlálhatóan végtelen számosságú test, és ha N nilalgebra Φ felett, akkor az N felett vett $n \times n$ típusú N_n teljes matrix-gyűrű is nilalgebra Φ felett.

Megjegyzendő ezzel kapcsolatban az, hogy bár $J(A_n)=(J(A))_n$, a Jacobson-radikálra, és minden A gyűrű felett vett A_n teljes matrixgyűrűre teljesül, még nyitott kérdés $U(A_n)=(U(A))_n$ érvényessége általában, ahol $U(A)$ jelöli az A gyűrű felső nilradikálját.

22. §. *Példa olyan primitív gyűrűre, amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens, és példa olyan egyszerű gyűrűre, amely nem primitív*

A. G. Kuros [204] vetette fel 1953-ban azt a problémát, hogy vajon a Jacobson-féle radikál egybeesik-e azzal a felső radikállal, amelyet az összes egyszerű és ugyanakkor primitív gyűrűnek az osztálya határoz meg. Ha J a Jacobson-féle radikál, és J^* az utóbbi radikál, akkor a defiiníció alapján szinte triviálisan teljesül a $J \leqq J^*$ egyenlőtlenség.

Ha létezik olyan A gyűrű, amely Jacobson-féle értelemben fééigegyszerű, de amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens, akkor A szükségképpen primitív gyűrű, és akkor $J \neq J^*$.

Fenti tulajdonságú A gyűrű létezését 1962-ben Sasiada és Suliński közös [280] dolgozata bizonyította be. Az ebben a dolgozatban explicit megadott gyűrű már korábban is jól ismert volt (lásd pl. Jacobson [160], de korábban nem tárgyalták e gyűrűpéldának azt a tulajdonságát, hogy olyan primitív gyűrű, amelynek minden valódi homomorf képe nilpotens.

Most bemutatjuk ezt a példát.

Legyen K tetszőleges nullkarakterisztikájú test, továbbá a S testnek végtelenrendű automorfizmusa. Tehát S^n minden $n \geqq 1$ kitevőre olyan testautomorfizmus, amely nem az identitás. Ha pl. K a valós számtestnek végtelen sok, egymás közt algebrailag független, transzcendens x_i elemmel való testbővítése, ahol

$$i=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots$$

és ha $x_i^S = x_{i+1}$, továbbá ha $r^S = r$ minden r valós számra, akkor minden $n \neq 1$ kitevő esetén S^n olyan automorfizmus, amely nem az identitás.

Legyen továbbá R a z határozatlanban az összes jobbegyütthatós

$$a_0 + za_1 + z^2a_2 + \ldots + z^na_n$$

polinomnak a halmaza, ahol $a_i \in K$, továbbá $az = za^S$ minden $a \in K$ elemre, és a polinomok egyenlőségét, összeadását, kivonását közönséges módon értelmezzük. Így R egy asszociatív gyűrű lesz, amelyben $az^m = z^m a^{S^m}$. Ezt az R gyűrűt $K[z, S]$ szimbólummal is jelölhetjük. Ebben a gyűrűben van minden polinomnak foka, és ez a gyűrű zérusosztómentes. Minthogy a baloldali euklidesi osztások e gyűrűben korlátlanul elvégezhetők, minden balideál szükségképpen főideál lesz, és minthogy a jobboldali euklidesi osztások is mindig elvégezhetők lesznek a $K[z, S]$ gyűrűben levő polinomokkal, ezért a gyűrű egyszersmind főjobbideálgyűrű is lesz, tehát minden jobbideál főjobbideál.

Igazolni lehet számolással azt, (és közben kihasználjuk azt, hogy $n \neq 1$ esetén S^n soha nem lesz az identikus automorfizmus,) hogy ha I kétoldali ideál a $K[z, S]$ gyűrűben, és ha $I = f(z)R = Rg(z)$, akkor szükségképpen $f(z)$ és $g(z)$ csak egy K testbeli faktorban térhetnek el egymástól, és kell, hogy $f(z)) = z^k a$ $(a \in K)$ alakú legyen. Ezért

$$I = Rz^k = z^k R.$$

Azt, hogy R primitív gyűrű, úgy lehet megmutatni, hogy számolással igazolható az, hogy $(1 - z)R$ moduláris minimális jobbideál az R gyűrűben, és hogy $R^{-1}(1 - z)R$ ideálhányados szükségképpen nulla.

Az R primitív gyűrűnek a $T = zR$ ideálja szintén primitív. Minthogy T tartalmazza az R gyűrű $z^k R$ ideáljait, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots$, ezért T nem egyszerű gyűrű. Legyen S a T gyűrűnek tetszőleges nemzérus ideálja, és S^* pedig az S által az R gyűrűben generált ideál, tehát

$$S^* = S + RS + SR + RSR, \quad \text{ahol} \quad S \subseteq S^*,$$

és belátható, hogy fennáll az $(S^*)^3 \subseteq S$ tartalmazási reláció is. Minthogy a gyűrűk egyik izomorfia-tétele alapján

$$T/S \cong (zR/z^{3k}R)/(S/z^{3k}R).$$

és $(S^*)^3 = z^{3k}R \subseteq S$ alapján a tetszőleges T/S valódi homomorf kép nilpotens, mert $(z^kR)^3 \subseteq z^{3k}R$, ezért T olyan primitív gyűrű, amelynek minden valódi T/S homomorf képe nilpotens. Ennélfogva $J \neq J^*$.

Felvethető a J^* radikál definíciójával kapcsolatban, de egyébként is felvethető az az érdekes kérdés, hogy létezik-e olyan egyszerű gyűrű, amely nem primitív. Az ilyen tulajdonságú A gyűrűben $A^2 \neq 0$, továbbá csak A maga és 0 kétoldali ideál, és A egybeesik a $J(A)$ Jacobson-féle radikállal.

Egy A egyszerű gyűrű egyébként akkor és csak akkor radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben, ha nincs az A gyűrűnek maximális valódi jobbideálja. Ez annak alapján látható be, hogy A $J(A) \subseteq \Phi$ áll fenn minden A gyűrűben a $J(A)$ Jacobson-féle részmodulusa, tehát az A gyűrű összes maximális valódi jobbideáljának a metszete, és $\Phi = A$, ha nincs az A gyűrűben maximális valódi jobbideál.

Sąsiada adott meg először olyan egyszerű gyűrűt explicit módon, amely radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben. Sąsiada konstrukciójában egy lemmának a bizonyítása igen alapvető szerepet játszik, és később Sąsiada és P. M. Cohn [279] közösen írt dolgozata ennek a lemmának a bizonyítását áttekinthetőbbé, elemibbé és egyszerűbbé tette.

Maga a Sąsiada-féle konstrukció a következő. Legyen K tetszőleges test, x és y egymással nem felcserélhető határozatlanok, R az x és y változó összes formális, végtelen hatványsorának a gyűrűje és I az összes, zérus konstanstagú kétváltozós formális végtelen hatványsorból álló ideál az R gyűrűben. Az említett, elemibb bizonyításúvá tett lemma kimondja azt, hogy x nincs benne az $x-yx^2y$ elemmel R-ben generált $(x-yx^2y)_R$ főideálban. Ezért x nincs benne az illető elemmel az I gyűrűben generált $(x-yx^2y)_I$ főideálban sem. Legyen $\mathfrak{M}$ az I gyűrű mindazon M ideáljának a halmaza, amelyekre $x \notin M$ és $M \supseteq (x-yx^2y)_I$ egyidejűleg áll fenn. Minthogy $(x-yx^2y)_I \in \mathfrak{M}$, ezért $\mathfrak{M}$ nem üres halmaz. Belátható, hogy az $\mathfrak{M}$ halmazra alkalmazható Zorn lemmája, amelynek az alapján létezik az $\mathfrak{M}$ halmazban egy maximális M_0 ideál, amely az I gyűrű ideálja. Az M_0 maximalitása miatt az I/M_0 faktorgyűrű szubdirekt irreducibilis, mert I/M_0 minden nemzérus ideálja tartalmazza az $x+M_0$ elemet, és éppen $(x)_I/M_0$ lesz az I/M_0 szubdirekt irreducibilis gyűrűnek a szíve, vagyis az összes nemzérus ideálnak a nemzérus metszete. Ez a szív idempotens lesz, mert ha $\bar{z} = z+M_0$, akkor $x-xy^2x \in M_0$ miatt nyilván teljesül $\bar{x}=\overline{yx}\cdot\overline{xy}$, tehát $\bar{x}\neq 0$ miatt a szív nem zérógyűrű, s ennélfogva a szív tényleg idempotens. Ebből pedig levezethető az, hogy a szív egyszerű gyűrű lesz. Másfelől a Jacobson-féle radikál öröklődő. Minthogy pedig az I ideál radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben, ti. éppen az R gyűrűnek a radikálja, és minthogy $(x)_I$ ideál I-ben, ezért $(x)_I$ és vele együtt az $(x)_I/M_0$ homomorf kép is radikálgyűrű.

Tehát $(x)_I/M_0$ olyan egyszerű gyűrű, amely radikálgyűrű Jacobson-féle értelemben.

23. §. *Jacobson sűrűségi tétele a primitív gyűrűkről, és az összes primitív gyűrű speciális osztálya*

Az előzőekben láttuk azt, hogy egy A gyűrű akkor és csak akkor primitív gyűrű, ha létezik az A gyűrűben olyan moduláris maximális R jobbideál, amelyre fennáll $A^{-1}R=0$, ahol az $A^{-1}R=\{x;\ x\in A,\ Ax\subseteq R\}$ ideálhányados ideál. Ekkor az A/R A-jobbmodulus olyan G Abel-féle csoport, amelynek az $E(G)$ teljes endomorfizmusgyűrűjébe az A gyűrű $A^{-1}R=0$ miatt izomorf módon beágyazható, amelynek során az $a\in A$ elemet azonosítjuk az a-val indukált jobbszorzással, mint G egyik endomorfizmusával.

I. Schur fontos és majdnem triviális lemmája, más megfogalmazásban, megállapítja azt, hogy az $A/R=G$ Abel-féle csoport $E(G)$ teljes endomorfizmusgyűrűjében az A részgyűrű centralizátora egy S ferdetest, ahol A centralizátora definíció szerint az A összes elemével multiplikatív felcserélhető endomorfizmusnak a részhalmaza $E(G)$-ben. Ekkor G felfogható S-jobbmodulusként, vagy felfogható S'-balmodulusként is, ahol S' jelenti az S egyik antiizomorf képét. Minthogy S ferdetest, ezért S' is ferdetest, továbbá a ferdetest felett vett operátormodulus nyilván vektortér lesz.

Bebizonyítható n szerint végzett teljes indukcióval az a tétel, hogy ha H tetszőleges n-rangú részvektor az $A/R=G$ jobbvektortérben (n természetes szám) és ha $v\in G$ tetszőleges olyan elem, amelyre $v\notin H$, akkor létezik az A részgyűrűben olyan a elem, amelyre, mint G-nek S-endomorfizmusára $va\neq 0$, de minden $h\in H$ elemre $ha=0$ teljesül.

Ezzel a tétellel kapcsolatban megemlítjük a sűrű részgyűrűnek a következő fogalmát. Azt mondjuk, hogy az A gyűrű egy S ferdetest felett vett V vektortér lineáris transzformációinak (azaz S-endomorfizmusainak) sűrű részgyűrűje, ha bármely véges sok, az S felett lineárisan független $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ vektorhoz, és bármely előre megadott $y_1, y_2, \ldots, y_k \in V$ vektorhoz létezik olyan $a \in A$ elem, amelyre teljesül

$$x_1 a = y_1,\ x_2 a = y_2,\ \ldots,\ x_k a = y_k.$$

Az előbbi tétel segítségével bebizonyítható Jacobson sűrűségi tétele: Bármely primitív gyűrű izomorf egy ferdetest felett vett vektortér összes lineáris transzformációja gyűrűjének egy alkalmas sűrű részgyűrűjével, és minden sűrű részgyűrű primitív gyűrű.

Ugyanis, ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges, véges sok és S felett lineárisan független elem a $G = A/R$ vektortérben, ahol A a primitív gyűrű, akkor legyen H_i az összes olyan x_j által generált részvektortér, amelyekre $j \neq i$. Minthogy $x_i \notin H_i$, létezik olyan $t_i \in A$ elem, hogy $x_i t_i = z_i \neq 0$ és $h_i x_i = 0$, ahol z_i bizonyos adott elem a G vektortérben és h_i befutja H_i minden elemét. Minthogy G irreducibilis A-jobbmodulus és A/R operátorizomorf $z_i A$-val, van olyan $u_i \in A$, amelyre $z_i u_i = y_i$, ahol y_i tetszőleges, adott elem ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ha pedig

$$a = \sum_{i=1}^{n} t_i u_i$$

akkor $x_1 a = y_1, x_2 a = y_2, \ldots, x_n a = y_n$.

Megjegyzendő, hogy Jacobson [161] könyvében a fenti, vázlatos, bizonyítástól lényegesen eltérő típusú bizonyítás található.

Ennek a sűrűségi tételnek megfelelően bármely A Jacobson-féle értelemben féligegyszerű gyűrűhöz léteznek olyan S_γ ferdetestek és G_γ S_γ-vektorterek, hogy A izomorf lesz olyan A_γ gyűrűknek ($\gamma \in \Gamma$) egy szubdirekt összegével, amelyek izomorfok a G_γ vektortér lineáris transzformációinak (azaz S_γ-endomorfizmusainak) egy sűrű részgyűrűjével.

Végül megjegyezzük azt, hogy az összes primitív gyűrűnek az osztálya speciális gyűrűosztály, és az a felső radikál, amelyet az összes primitív gyűrű osztálya határoz meg, olyan speciális radikál, amely egybeesik a Jacobson-féle radikállal. Ezzel szemben az összes olyan egyszerű gyűrűnek az osztálya, amelyek primitívek is, olyan gyűrű osztály, hogy az ezzel meghatározott felső radikál — miként láttuk — valódi módon nagyobb a Jacobson-féle radikálnál. Egyébként a 26. §-ban részletesebben fogunk foglalkozni bizonyos egyszerű gyűrűk osztályával meghatározott felső radikállal.

О РАДИКАЛАХ КОЛЕЦ. II.

Ф. САС

ON RADICALS OF RINGS II.

F. SZÁSZ