37

Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal ähnlich sind

Herrn Josef Naas zum 60. Geburtstag am 16. 10. 1966 gewidmet

Von Ferenc A. Szász in Budapest

(Eingegangen am 26. 6. 1966)

Wohlbekannt (siehe z. B. Jacobson [15]) ist, welch eine wichtige Rolle das Jacobsonsche Radikal I eines assoziativen Ringes A hinsichtlich der Ringstruktur spielt. Das Jacobsonsche Radikal I eines Ringes A mißt nämlich in gewissem Sinne die Singularität von A, und jeder Ring, in dem das Jacobsonsche Radikal $I = (0)$ ist, läßt sich als eine subdirekte Summe solcher Ringe darstellen, deren jeder einem dichten Unterringe des Ringes aller linearen Transformationen eines Linksvektorraumes über einem Schiefkörper isomorph ist. Diese dichten Unterringe stammen aus einer Darstellung eines primitiven Ringes B in einem treuen irrduziblen B-Rechtsmodul M, wobei unter einer Darstellung eines Ringes i. a. stets ein Ringhomomorphismus des Ringes in einen Endomorphismenring einer Abelschen Gruppe verstanden wird. Ist dieser Ringhomomorphismus ein Isomorphismus, so heißen die Darstellung und der Modul M treu.

Für Halbgruppen hat kürzlich (1961) E. J. Tully, Jr., [27], den Begriff einer Darstellung eingeführt und diskutiert; dabei wird in Strukturfragen nicht tief eingedrungen. Unabhängig von ihm hat H.-J. Hoehnke, ausgehend (1962/63) von einer interessanten und bedeutenden Arbeit [4], die Darstellungstheorie der Halbgruppen, die Theorie der primitiven Kongruenzen bzw. modularen Rechtskongruenzen, die Theorie des Jacobsonschen Radikales Rad ${}^0H$ für Halbgruppen und die Theorie weiterer mit diesen verknüpften Fragen für Halbgruppen in einer Folge von grundlegenden Arbeiten [5]. [6]. [7]. [8]. [9]. [10]. [11]. [12] ausführlich aufgebaut. Siehe dazu auch noch H. Seidel [21], [22] und H. J. Hoehnke-H. Seidel [14]. Inzwischen wurde nämlich von H. Seidel [22] die links-rechts symmetrische Eigenschaft des Hoehnkeschen Radikales Rad ${}^0H$ der Halbgruppe mit der Hilfe von quasiregulären Halbgruppenelementen gezeigt. Alle die erwähnten Arbeiten benutzen statt der Ideale hauptsächlich Kongruenzen.

Das Ziel dieser Note ist es weitere, im folgenden explizit definierte Radikale I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 und I_6 in einer Halbgruppe H mit Nullelement einzuführen, einige Eigenschaften derselben zu bestätigen und die folgende Vermutung auszusprechen.

Vermutung. In jeder Halbgruppe H mit 0 soll

$$\mathrm{Rad}^0 H = I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6$$

bestehen, wobei die Radikale I_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) später definiert werden und $\mathrm{Rad}^0 H$ das Hoehnkesche Radikal [4] von H bezeichnet.

Bezüglich der halbgruppentheoretischen Begriffe verweisen wir auf Clifford-Preston [1], Ljapin [18], Rédei [19] und Rees [20]. Für die Definitionen von I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 und I_6 benutzen wir auch weitere Begriffe. So bezeichne z. B. Φ_r (und Φ_l) den Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale (bzw. maximalen Linksideale) der Halbgruppe H. Dann ist Φ_r eine Frattinische Unterstruktur in dem Sinne, daß Φ_r die Menge derjenigen Elemente x von H ist, für die aus $(x, S)_r = H$ (bei beliebigem S) stets $S_r = H$ folgt, wobei S_r das durch die Untermenge S in H erzeugte Rechtsideal bezeichnet. Weiterhin bedeuten für beliebige Untermengen X, Y bzw. R, L von H die Symbole $X^{-1}R$ und LY^{-1} die Mengen

$$\{h;\, h \in H,\ Xh \subseteq R\} \quad \text{bzw.} \quad \{g;\, g \in H,\ gY \subseteq L\}.$$

Sind R ein Rechtsideal, L ein Linksideal, X, Y beliebige Untermengen von H, so sind $X^{-1}R$ ein Rechtsideal und LY^{-1} ein Linksideal der Halbgruppe H. Sind R und X Rechtsideale, L und Y Linksideale von H, so sind $X^{-1}R$ und LY^{-1} zweiseitige Ideale der Halbgruppe H. Für ein Rechtsideal R von H ist beispielsweise $H^{-1}R$ ein Ideal von H.

Ausgehend von den Noten [24] und [25] des Verfassers wird ein Rechtsideal R von H *quasimodular* in H genannt, wenn $H^{-1}R \subseteq R$ gilt. Jedes modulare Rechtsideal ist nach Satz 13 von Hoehnke [4] ein quasimodulares Rechtsideal der Halbgruppe H.

Ein beliebiges zweiseitiges Ideal Q der Halbgruppe H nennen wir *quasiprimitiv* in H, wenn ein quasimodulares maximales Rechtsideal R von H mit $Q = H^{-1}R$ existiert. Eine Halbgruppe H mit 0 heißt quasiprimitiv, wenn (0) in ihr ein quasiprimitives Ideal ist. Offenbar ist jedes quasiprimitive Ideal Q von H ein Primideal in dem Sinne, daß aus $AB \subseteq Q$ für Ideale A und B von H stets $A \subseteq Q$ oder $B \subseteq Q$ folgt, und jede kommutative quasiprimitive Halbgruppe H mit 0 ist die Vereinigung einer kommutativen Gruppe G und eines Elementes 0 mit $g \cdot 0 = 0 \cdot g = 0$ für jedes $g \in G$.

Nun können die Radikale I_i in einer Halbgruppe H mit Nullelement folgendermaßen definiert werden:

I_1 sei $H^{-1}\Phi_r$.

I_2 sei $\Phi_l H^{-1}$,

I_3 sei der Durchschnitt aller (rechts) quasiprimitiven (zweiseitigen) Ideale von H,

I_4 sei links-rechts dual zu I_3 definiert,

I_5 sei der Durchschnitt aller quasimodularen maximalen Rechtsideale von H,

I_6 sei links-rechts dual zu I_5 definiert.

Wir definieren eine **-Halbgruppe*, als eine solche Halbgruppe H mit 0, in der die Linkskürzungsregel gilt: aus $h \neq 0$ und $h\,x = h\,y$ folgt also $x = y$. Eine ***-Halbgruppe* sei eine Halbgruppe mit 0 und mit der Rechtskürzungsregel.

Nun gilt bezüglich I_1, I_3 und I_5, als eine Folge von rechtsseitigen Behauptungen in Halbgruppen mit 0 in *-Halbgruppen, der folgende Satz. (Den dazu links-rechts dualen und in Halbgruppen mit 0 bzw. in **-Halbgruppen gültigen Satz bezüglich I_2, I_4 und I_6 werden wir weder formulieren noch beweisen.)

Satz. *I_1 ist ein zweiseitiges Ideal von H, für das $I_1 \subseteqq I_3 \subseteqq I_5$ gilt. In einer *-Halbgruppe H ergibt sich $\Phi_r \subseteqq I_1$, und jedes Rechtsideal R von H, für das $\Phi_r \subseteqq R \subseteqq I_1$ gilt, ist ein zweiseitiges Ideal von H. Ist weiterhin H eine *-Halbgruppe und ist $R_z = \{z\}^{-1} R$ quasimodular in H für jedes quasimodulare maximale Rechtsideal R und für jedes Element $z \in H^2$ mit $z \notin R$, so ist I_5 ein zweiseitiges Ideal von H. Ist schließlich H eine *-Halbgruppe, und ist $R_x = \{x\}^{-1} R$ quasimodular in H für jedes maximale Rechtsideal R und für jedes $x \notin R$, so erhält man $I_1 = I_3 = I_5$.*

Beweis. I_1 ist wegen $H\,I_1 \subseteqq \Phi_r$, $\quad H(H\,I_1) \subseteqq \Phi_r$ und

$$H(I_1\,H) \subseteqq \Phi_r$$

ein zweiseitiges Ideal von H. Im Falle $x \notin I_3$ gibt es ein quasiprimitives Ideal Q mit $x \notin Q$ und somit ein quasimodulares maximales Rechtsideal R von H mit $Q = H^{-1} R$, woraus wegen $x \notin Q$ gewiß $H\,x \notin R$, also $H\,x \notin \Phi_r$ und $x \notin I_1$ folgt. Hiernach ergibt sich im Falle $x \in I_1$ auch $x \in I_3$, was genau die Relation $I_1 \subseteqq I_3$ bedeutet. Wegen der Definitionen der Quasimodularität und Quasiprimitivität erhält man $Q = H^{-1}\,R \subseteqq R$, und somit $I_3 \subseteqq I_5$. – Es sei H im folgenden stets eine *-Halbgruppe. Da man im Falle eines quasimodularen maximalen Rechtsideales R für das Rechtsideal $S = RH^{-1}$ gewiß $R \subseteqq S \neq H$, also $S = R$ erhält, so gibt es zu jedem $x \in H$ mit $x \notin R$ ein $y \in H$ mit $x\,y \notin R$, also mit $y \notin R_x = \{x\}^{-1} R$. Wir werden zeigen, daß R_x ein maximales Rechtsideal von H ist. Ist nämlich $u \in H$ ein beliebiges Element mit $u \notin R_x$, so ergibt sich wegen $x\,u \notin R$, der Maximalität und der Quasimodularität von R in H gewiß $x\,u\,H \cup R = H$. Für jedes

$v \in H$ erhält man hiernach $x v \in x u H \cup R$, folglich nach Definition der $*$-Halbgruppen $v \in u H$ oder $v \in R_x$. Da diese Behauptung mit $H = u H v R$ äquivalent ist, denn $v \in H$ ist beliebig gewählt, ist R_x ein maximales Rechtsideal von H. Wegen $x y \notin R$ und der Quasimodularität von H gibt es ein $z \in H$ mit $z x y \notin R$. Dann bestehen $x y \notin R_z = \{z\}^{-1} R$ und

$$y \notin R_{zx} = \{z x\}^{-1} R.$$

Wegen $z x \in H^2$, $z x \notin R$ und der Voraussetzung bezüglich R und R_{zx} ist R_{zx} quasimodular in H. Wäre nun I_5 kein zweiseitiges Ideal von H, so gäbe es Elemente $x \in H$, $y \in I_5$ mit $x y \notin I_5$, folglich existierte ein quasimodulares maximales Rechtsideal R mit $x y \notin R$ und ein Element $z \in H$ mit $z x y \notin R$ und $y \notin R_{zx}$. Da nach Voraussetzung R_{zx} maximal und quasimodular in H ist, bestände wegen $y \notin R_{zx}$ auch $y \notin I_5$, was einen Widerspruch zu $y \in I_5$ bedeutet. Also ist dann I_5 ein zweiseitiges Ideal von H. – Zum Schluß sei H eine $*$-Halbgruppe, in der $R_x = \{x\}^{-1} R$ quasimodular in H für jedes maximale Rechtsideal R und für jedes $x \in H$ mit $x \notin R$ ist. Angenommen, es sei $I_1 \neq I_5$. Da wir $I_1 \subseteqq I_3 \subseteqq I_5$ schon bewiesen haben, genügt es zu voraussetzen, daß ein Element $x \in I_5$ mit $x \notin I_1$ vorhanden ist. Wegen $x \notin I_1$ besteht $H x \subseteqq \Phi_r$, und somit existieren ein Element $y \in H$ und ein maximales Rechtsideal R von H mit $y x \notin R$, $y \notin R$. Nach der Voraussetzung soll dann $R_y = \{y\}^{-1} R$ quasimodular in H sein, und wegen $x \notin R_y$ ergibt sich $x \notin I_5$, also ein Widerspruch zu $x \in I_5$. Daher muß $I_1 = I_5$ und somit $I_1 = I_3 = I_5$ bestehen, w. z. b. w.

Bemerkungen

1. Die Grundlage der Definitionen der Halbgruppenradikale I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 und I_6 bilden gewisse ringtheoretische Tatsachen. Ist nämlich H ein assoziativer Ring, und verstehen wir in der Definition von I_i unter einem einseitigen Ideal stets ein solches des Ringes H, so stimmen nach Hille [3] (Seite 486, Theorem 22. 13. 3.), Kertész [16], [17] und Verfasser [24], [25], [26], weiterhin Steinfeld [23], alle Radikale I_i mit dem Jacobsonschen Radikal I des Ringes H überein.

2. Im Zusammenhang mit einem Beweis oder einer Widerlegung der Vermutung, die dem Satz vorangestellt wurde, können weitere offene Fragen bezüglich I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 und I_6 aufgeworfen werden. Es wäre interessant zu untersuchen, in welchem Zusammenhang die rechtsquasiprimitiven zweiseitigen Ideale mit den linksquasiprimitiven zweiseitigen Idealen einer Halbgruppe mit 0 stehen. Nicht bekannt ist ferner ein genaues Kriterium dafür, daß in einer Halbgruppe H mit 0 die Bedingungen $I_1, = I_2, I_3 = I_4$ und $I_5 = I_6$ bzw. $I_1 = I_3$ oder $I_1 = I_5$, weiterhin $I_3 = I_5$ bzw. $\Phi_r = \mathrm{Rad}^0 H$

bestehen. Es wäre wünschenswert, auch ein genaueres Kriterium dafür zu haben, daß I_5 und I_6 zweiseitige Ideale der Halbgruppe H mit 0 sind. Die Gültigkeit von $I_5 \subseteqq \mathrm{Rad}\, {}^0H$ ist ebenfalls eine offene Frage.

Literatur

[1] A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups. I. Providence 1961.

[2] L. Fuchs, A remark on the Jacobson radical. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 167–168 (1952).

[3] E. Hille, Functional Analysis and Semigroups. Providence 1948. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 31.

[4] H. J. Hoehnke, Zur Strukturtheorie der Halbgruppe. Diese Nachr. **26**, 1–13 (1963).

[5] —, Eine Charakterisierung des Radikals kommutativer Halbgruppen. Archiv der Math. **15**, 412–413 (1965).

[6] —, Über das untere und obere Radikal einer Halbgruppe. Math. Z. **99**, 300–311 (1965).

[7] —, Eine Charakterisierung des 0-Radikals einer Halbgruppe. Publ. Math. Debrecen **11**, 72–73 (1964).

[8] —, Zur Definition der Begriffe Primkongruenz und Primärkongruenz in kommutativen Halbgruppen. Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **6**, 801–804 (1964).

[9] —, Structure of semigroups. Canadian J. Math. **18**, 449–491 (1966).

[10] —, Einige neue Resultate über abstrakte Halbgruppen. Colloquium Math. Warszawa-Wroclaw **16**, 329–348 (1966).

[11] —, Über das Radikal einer Primärkongruenz in einer kommutativen Halbgruppe. Bull. Inst. Politehn. Iași **10**, 9–14 (1964).

[12] —, Über antiautomarphe und involutorische primitive Halbgruppen. Cechoslovak Math. J. **15 (90)**, 50–62 (1965).

[13] —, Nilpotenzkriterien. Math. Ann. **132**, 404–411 (1957).

[14] H. J.-Hoehnke und H. Seidel, Über das 0-Radikal einer Halbgruppe. Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **5**, 667–670 (1963).

[15] N. Jacobson, Structure of Rings. Providence 1956, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 37.

[16] A. Kertész, A characterization of the Jacobson radical. Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 595–597 (1963).

[17] —, Über Artinsche Ringe, Budapest 1966, Akadémiai Kiadó (im Druck).

[18] E. S. Ljapin, Halbgruppen. Moskau 1960 (Russisch).

[19] L. Rédei, Algebra. I. Leipzig 1959.

[20] D. Rees, On semigroups. Proc. Cambridge Philos. Soc. **36**, 387–400 (1940).

[21] H. Seidel, Nilpotenzkriterien für Halbgruppen. Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **5**, 599–603 (1963).

[22] —, Über das Radikal einer Halbgruppe. Diese Nachr. **29**, 255–263 (1963).

[23] O. Steinfeld, Eine Bemerkung über die primitiven Ideale eines Ringes. Bull. Acad. Polon. Sci. (im Druck).

[24] F. Szász, Die Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikales. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. (im Druck).

[25] —, Eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikales eines Ringes. Bull. Acad. Polon. Sci. **15**: 2, 53–56 (1967).

[26] —, The sharpening of a result concerning the primitive ideals of an associative ring. Proc. Amer. Math. Soc. (im Druck).

[27] E. J. Tully, Jr., Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set. Amer. J. Math. **83**, 553–541 (1961).