Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 18 (3—4), (1967), pp. 261—272.

LÖSUNG EINES PROBLEMS BEZÜGLICH EINER CHARAKTERISIERUNG DES JACOBSONSCHEN RADIKALS

Von

F. SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

§ 1. Einleitung

Der Begriff des Radikals, als eines Ideals, welches das Maß der Singularität eines Ringes in irgendeinem Sinne kennzeichnet, spielt in der Ringtheorie bekanntlich eine wichtige Rolle. Das Radikal wurde zuerst für Algebren endlichen Ranges über dem Grundkörper definiert. Später wurden verschiedene Definitionen für das Radikal eines beliebigen (assoziativen) Ringes ohne Endlichkeitsbedingungen empfohlen, und es wurde auch eine allgemeine Radikaltheorie aufgebaut. Unter den verschiedenen Typen der Radikale zeigte sich das Jacobsonsche Radikal am meisten nutzbar (JACOBSON [6]).

Im Buch [4] (Seite 486, Theorem 22. 15. 3) von E. HILLE ist bewiesen[1] (1948), daß der Frattinische Untermodul[2] Φ_r eines Ringes A, als eines A-Rechtsmoduls A, ein zweiseitiges Ideal von A ist, für das $AJ \subseteqq \Phi_r$ gilt, wobei J das Jacobsonsche Radikal von A bezeichnet. Es gilt freilich auch $JA \subseteqq \Phi_l$. Da offenbar $\Phi_r \subseteqq J$ und $\Phi_l \subseteqq J$ bestehen, ergibt sich im speziellen Fall, wenn A ein Linkseinselement hat (vgl. FUCHS [1]), bzw. $x \in Ax$ für jedes $x \in A$ oder $AJ = J$ gilt, $\Phi_r = J$. Neulich hat A. KERTÉSZ [7] dieses Resultat von Hille's Buch folgendermaßen verschärft: Das Jacobsonsche Radikal J von A ist die Menge derjenigen Elemente x von A, für die yx für jedes $y \in A$ aus jedem Erzeugendensystem von A, als von einem A-Rechtsmodul A, weggelassen werden kann. Mit diesem Resultat von KERTÉSZ [7] ist die folgende Behauptung äquivalent: Das Jacobsonsche Radikal J eines Ringes A ist maximal in der Menge derjenigen Ideale K von A, für die $AK \subseteqq \Phi_r$ gilt.

Ein Rechtsideal R eines Ringes A nennen wir *quasimodular* in A, wenn es zu jedem Element $x \in A$ mit $x \notin R$ ein Element $y (\in A, \notin R)$ mit $yx \notin R$ gibt. Offenbar ist jedes modulare Rechtsideal auch quasimodular in A. Aus der erwähnten Kertészschen Charakterisierung $J = \{x;\ x \in A,\ Ax \subseteqq \Phi_r\}$ folgt unmittelbar auch eine andere Kennzeichnung von KERTÉSZ [8] des Jacobsonschen Radikals J, nach der J mit dem Durchschnitt D aller quasimodularen maximalen Rechtsideale R des Ringes

[1] Mit anderen Bezeichnungen und Benennungen.

[2] Die Frattinische Untergruppe Φ einer Operatorengruppe G mit dem Operatorenbereich Ω ist die Menge derjenigen Elemente $g \in G$, für die $g\alpha$ für jedes $\alpha \in \Omega$ aus jedem Erzeugenden system von G weggelassen werden kann. Damit ist äquivalent (vgl. z. B. M. HALL [3]), daß Φ der Durchschnitt aller maximalen zuläßigen Untergruppen von G bzw. $\Phi = G$ ist, je nachdem, ob G eine maximale zulässige Untergruppe besitzt, oder nicht. Ähnlich werden die (rechtsseitigen bzw. linksseitigen) Frattinischen Untermoduln Φ_r und Φ_l eines als A-Rechtsmodul bzw. A-Linksmodul betrachteten Ringes A, definiert.

A übereinstimmt.[3] Die quasimodularen maximalen Rechtsideale spielen hiernach von dem Gesichtspunkt einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals aus eine wichtige Rolle.

Im Buch [8] von A. KERTÉSZ ist folgendes Problem (in anderer Abfassung) aufgeworfen:

Gibt es einen Ring A, der ein quasimodulares maximales Rechtsideal R besitzt, das in A nicht modular ist?

Einen (assoziativen) Ring A nennen wir *Ω-Ring*, wenn A ein solches quasimodulare maximale Rechstideal R besitzt, das in A nicht modular ist. Die quasimodularen maximalen, aber nicht modularen Rechtsideale eines Ω-Ringes werden *ausgezeichnet* genannt. Ein Ω-Ring A wird bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R *reduziert* genannt, wenn A kein von Null verschiedenes, in R liegendes zweiseitiges Ideal besitzt.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist der Beweis der Existenz von Ω-Ringen, woraus die Lösung des erwähnten Problems von A. KERTÉSZ folgt (vgl. § 2). Aus diesem Existenzbeweis für Ω-Ringe ergibt sich auch die Tatsache, daß die in [8] gegebene Charakterisierung für J, und zwar der Beweis von $D=J$, eine nicht nur formal, sondern auch inhaltlich neue Kennzeichnung für J bedeutet. Weiterhin werden wir auch die wichtigsten Eigenschaften der Ω-Ringe und der reduzierten Ω-Ringe bestätigen (vgl. § 3 und 4) und auch einige offene Fragen bezüglich der Ω-Ringe erwähnen. Zum Abschluß folgen einige weitere Bemerkungen bezüglich des Jacobsonschen Radikals (vgl. § 5).

Hinsichtlich der nötigen Grundbegriffe verweisen wir (außer den Fußnoten) auf die Handbücher [2], [3], [6] und [9].

§ 2. Die Existenz der Ω-Ringe

In diesem § beweisen wir durch eine explizite Konstruktion die Existenz von Ω-Ringen, d. h. wir geben eine Lösung des im § 1 erwähnten Problems von A. KERTÉSZ an. Insbesondere folgt aus der Existenz der Ω-Ringe, daß die in [8] gegebene Charakterisierung für das Jacobsonsche Radikal auch inhaltlich (nicht nur gestaltlich) neu ist.

Es gilt der folgende

SATZ 2. 1. *Für jede unendliche Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ gibt es einen Ω-Ring A mit einem ausgezeichneten Rechtsideal R, derart, daß A eine Algebra mit* Rang $A=$ Rang $R=\mathfrak{m}$ *über einem Primkörper ist.*

[3] Im (bald erscheinenden) Buch [8] von A. KERTÉSZ wird $D=J$ in einem solchen Satz bestätigt, der das Jacobsonsche Radikal durch eine Folge miteinander äquivalenter Bedingungen kennzeichnet, und dessen Beweis zyklisch ist. Es kann aber $D=J$ auch direkt bewiesen werden. Da $D\subseteqq J$ gilt, genügt es zeigen, daß $D\neq J$ unmöglich ist. Gibt es nämlich ein Element $j\in J$ mit $j\notin D$, so existieren ein quasimodulares maximales Rechtsideal R und ein Element $a\in A$ mit $aj\notin R$, $a\notin R$. Wegen der Maximalität von R in A gibt es ein Element $b\in A$ mit $a+R=ajb+R$, woraus durch ein leichtes Rechnen $a\in R$, also ein Widerspruch zu $a\notin R$ folgt, denn jb ist wegen $j\in J$ quasiregular. Gilt nämlich $jb+c-jbc=o$ mit einem $c\in A$, so ergibt sich $a=a-a(jb+c-jbc)=a(1-jb)-a(1-jb)c\in R$. Aus diesem Widerspruch erhält man $D=J$.

BEWEIS. Es seien $p=o$ oder p gleich einer Primzahl, K_p ein Primkörper, $\mathfrak{m}$ eine unendliche Mächtigkeit, Γ eine Index-Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, $\delta_{\alpha\beta}$ das Kroneckersche Delta-Symbol,[4] A eine Algebra über K_p mit den Basiselementen $a_\alpha, r_{\beta\gamma}, s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta \in \Gamma)$ und R die über K_p mit sämtlichen $r_{\beta\gamma}, s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ erzeugte Teilalgebra von A. Definieren wir die Multiplikation der Elemente der Basis durch die folgende Tabelle:

	a_ε	$r_{\varepsilon\eta}$	$s_{\varepsilon\eta\vartheta}$
a_α	a_ε	$\delta_{\alpha\varepsilon}\cdot a_\eta$	$\delta_{\alpha\varepsilon}\cdot a_\vartheta$
$r_{\alpha\beta}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\beta\varepsilon}\cdot r_{\alpha\eta}$	$\delta_{\beta\varepsilon}\cdot s_{\alpha\eta\vartheta}$
$s_{\alpha\beta\gamma}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\gamma\varepsilon}\cdot s_{\alpha\beta\eta}$	$\delta_{\gamma\varepsilon}\cdot s_{\alpha\beta\vartheta}$

Diese Algebra ist offenbar monomial (im Sinne von RÉDEI [9]). Jedes Element von A läßt sich in der Gestalt

$$(*)\qquad a=\sum_i{}^*\pi_i a_{\alpha_i}+\sum_{i,j}{}^*\varrho_{ij}r_{\alpha_i\beta_j}+\sum_{i,j,k}{}^*\sigma_{ijk}s_{\alpha_i\beta_j\gamma_k}$$

darstellen, wobei $\pi_i, \varrho_{ij}, \sigma_{ijk}\in K_p$ und alle drei Summen $\sum^*$ endlich sind. Es gilt ferner $a\in R$ dann und nur dann, wenn in $(*)$ $\pi_i=o$ für jedes i besteht.

Auf Grund der Multiplikationstabelle kann bewiesen werden, daß die Multiplikation in A assoziativ ist.

Es ist leicht einzusehen, daß die Teilalgebra R ein Rechtsideal, und zwar ein maximales Rechtsideal des (ohne den Operatorbereich K_p angesehenen) Ringes A ist.

Aus der Multiplikationstabelle folgt nämlich unmittelbar, daß R ein Rechtsideal in A ist. Gilt nun $a\notin R$ für ein $a\in A$, so existiert in $(*)$ ein $\pi_i\in K_p$ mit $\pi_i\neq 0$, woraus sich $a(\pi_i^{-1}\varrho r_{\alpha_i\beta})=\varrho a_\beta+r'$ $(r'\in R)$ für jedes $\beta\in\Gamma$ und $\varrho\in K_p$, folglich $aR+R=A$ ergibt. Also R ist wirklich ein maximales Rechtsideal in A.

Es wird jetzt gezeigt, daß R in A nicht modular ist.

Es sei nämlich a ein beliebiges Element von A. Ist $a\in R$, so ergibt sich wegen $(1-a)a_\alpha=a_\alpha-aa_\alpha\notin R$ gewiß $(1-a)A\not\subseteq R$. Ist aber $a\notin R$, so gibt es in $(*)$ ein i mit $\pi_i\neq o$, woraus man $(1-a)(-\pi_i^{-1}r_{\alpha_i\beta})=a_\beta+r''\notin R$ $(r''\in R)$, folglich $(1-a)A\not\subseteq R$ erhält. R ist also gewiss nicht modular in A.

Wir beweisen, daß R in A ein quasimodulares Rechtsideal ist.

Es sei nämlich a ein Element von A mit $a\notin R$. Nehmen wir an, daß $a_\alpha a=r^*\in R$ für einen Index $\alpha\in\Gamma$ gilt. Dann hat a offenbar eine Gestalt $a=\sum_i\pi_i a+r$ mit endlicher Summe $\sum$ und $r\in R$. Da $a_\alpha r=-\sum_i\pi_i a_{\alpha_i}+r^*$ ist, hat r die Form

$$r=\sum_i{}^*\sigma_i r_{\alpha\alpha_i}+\sum_{i,j}{}^*\tau_{ij}s_{\alpha\beta_j\alpha_i}+r_\alpha$$

[4] Es gilt also $\delta_{\alpha\beta}=1$ für $\alpha=\beta$ und $\delta_{\alpha\beta}=o$ für $\alpha\neq\beta$.

mit $\sigma_i, \tau_{ij} \in K_p$ und mit endlichen Summen $\sum^*$, weiterhin mit $r_\alpha \in R$ und $a_\alpha r_\alpha \in R$. Folglich gilt für r_α eine Darstellung:

$$(**) \qquad r_\alpha = \sum_{i,j}^* \pi_{ij}(r_{\alpha\gamma_i} - s_{\alpha\beta_j\gamma_i}) + \sum_{i,j}^* \sigma'_{ij} r_{\beta_i\gamma_j} + \sum_{i,j,k}^* \tau'_{ijk} s_{\varepsilon_i\eta_j\vartheta_k},$$

wobei $\pi_{ij}, \sigma'_{ij}, \tau'_{ijk} \in K_p$, $\beta_i \neq \alpha$, $\varepsilon_i \neq \alpha$, und alle drei Summen $\sum^*$ endlich sind. Wegen der Endlichkeit dieser Summen und wegen $|\Gamma| = \mathfrak{m}$ gibt es einen Index $\varepsilon \in \Gamma$ mit $\varepsilon \neq \alpha$ und derart, daß ε von sämtlichen in $(**)$ links stehenden Indizen β_i und ε_i verschieden ist. Dann erhält man wegen $a_\varepsilon r_\alpha = a_\varepsilon r = o$

$$a_\varepsilon \cdot a = \sum_i^* \pi_i a_{\alpha_i} \notin R,$$

woraus folgt, daß R quasimodular in A ist.

Es gilt offenbar $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} R = \mathfrak{m}$ (über K_p).

Somit ist der Satz bewiesen.

§ 3. Untersuchung der Ω-Ringe

In diesem und den folgenden § werden wir die Ω-Ringe (welche die Lösungen des im § 1 erwähnten Problems von A. KERTÉSZ sind), im allgemeinen untersuchen und auch einige weitere offene Fragen bezüglich der Ω-Ringe erwähnen.[5]

SATZ 3. 1. *Ein ausgezeichnetes Rechtsideal R eines Ω-Ringes A ist kein Ideal von A, und daher ist jeder Ω-Ring nichtkommutativ.*

BEWEIS. Ist R ein Ideal im Ω-Ring A, so hat der Faktorring A/R kein nichttriviales Rechtsideal, und somit ist A/R entweder ein Schiefkörper oder ein Zeroring von Primzahlordnung. Ist A/R ein Schiefkörper, so ist R modular in A, und ist A/R ein Zeroring, so ist R gewiß nicht quasimodular in A. Da aber R ein ausgezeichnetes Rechtsideal ist, ist R gewiß kein Ideal in A. Freilich ist dann A kein kommutativer Ring, w.z.b.w.

SATZ 3. 2. *Ein Ω-Ring A ist kein halbpimärer Ring und somit ist A kein Artinscher Ring.*

BEWEIS. Nach dem Satz von KERTÉSZ [8] gilt $J \subseteq R$ für das Radikal J und für jedes ausgezeichnete Rechtsideal R von A, denn J ist der Durchschnitt aller ausgezeichneten Rechtsideale. Dann ist A/J ebenfalls ein Ω-Ring. Ist nun A/J ein Artinscher Ring, so besitzt A/J ein Einselement, woraus der Widerspruch folgt, daß R modular in A ist. Also ist A/J für einen Ω-Ring A kein Artinscher Ring.

SATZ 3. 3. *Jeder Ω-Ring A besitzt ein homomorphes Bild, der ein halbeinfacher und bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R reduzierter Ω-Ring ist.*

[5] Die Klasse der nicht Ω-Ringe ist eine gewissermaßen ähnliche Verallgemeinerung der kommutativen Ringe und der Artinschen Ringe, wie auch die Klasse der FC-Gruppen (d. h. Gruppen mit endlichen Klassen von konjugierten Elementen) eine Verallgemeinerung der kommutativen Gruppen und der endlichen Gruppen ist.

BEWEIS. Es sei K die Summe derjenigen Ideale I von A, die im Rechtsideal R enthalten sind. Dann ist K ein solches Ideal von A, daß A/K ein bezüglich R reduzierter Ω-Ring ist. Da nach KERTÉSZ [8] $J \subseteq R$ besteht und J ein Ideal von A ist, ist A/K halbeinfach.

LEMMA 3. 4. *Läßt sich ein Rechtsideal der Gestalt* $R=(1-x)A=\{a-xa;\ a\in A\}$ *durch ein idempotentes Element* e *erzeugen, d.h. gilt* $R=eA$, *so enthält* A *ein Linkseinselement.*

BEWEIS. Wegen $(1-x)A=eA$ erhält man $(1-e)(1-x)A=o$, folglich $y=(e+x-ex)y$ für jedes $y\in A$, woraus sich ergibt, daß $f=e+x-ex$ ein Linkseinselement von A ist.

SATZ 3. 5. *In einem bezüglich* R *reduzierten* Ω*-Ring* A *ist* $(1-x)A$ *für jedes* $x\in A$ *kein minimales Rechtsideal.*

BEWEIS. Wegen der Reduziertheit ist A halbeinfach (vgl. dem Beweis von Satz 3. 4). Ist nun $(1-x)A$ für ein $x\in A$ ein minimales Rechtsideal, so gibt es ein $e\in A$ mit $e^2=e\neq o$ und $(1-x)A=eA$, woraus sich nach dem Lemma 3. 4 die Existenz eines Linkseinselementes, folglich die Modularität von R in A ergibt. Das ist aber ein Widerspruch, denn R ist in A ausgezeichnet. Also ist $(1-x)A$ kein minimales Rechtsideal.

SATZ 3. 6. *Besitzt ein beliebiger* Ω*-Ring* A *ein idempotentes Element* $e\neq o$, *so gibt es schon in jedem ausgezeichneten Rechtsideal* R_α *ein idempotentes Element* $f_\alpha\neq o$.

BEWEIS. Es gilt $A=R_\alpha+(1-e)A$ für jedes R_α, denn R_α ist maximal und nicht modular in A. Es gibt also Elemente $r_\alpha\in R_\alpha$ und $a_\alpha\in A$ mit $e=r_\alpha+(1-e)a_\alpha$ woraus man $e=er_\alpha$, $e=er_\alpha e$, $(r_\alpha e)^2=r_\alpha e\neq o$ und $f_\alpha=r_\alpha e\in R_\alpha$ erhält, w.z.b.w.

SATZ 3. 7. *In jedem* Ω*-Ring* A *gelten sowohl* $aR_\alpha+R_\alpha=A$ *als auch* $(1-a)R_\alpha+R_\alpha=A$ *für jedes ausgezeichnete Rechtsideal* R_α *und für jedes* $a\in A$ *mit* $a\notin R_\alpha$.

Es gilt $aR_\alpha+(1-a)R_\alpha=A$ *für jeden* Ω*-Ring* A, *für jedes ausgezeichnete Rechtsideal* R_α *und für jedes* $a\in A$ *mit* $a\notin R_\alpha$.

BEWEIS. Die Menge S_α derjenigen Elemente $x\in A$, für die $xA\subseteq R_\alpha$ gilt, bildet ein Rechtsideal von A mit $R_\alpha\subseteq S_\alpha\subseteq A$. Da aber R_α quasimodular in A ist, ist $S_\alpha\neq A$, woraus wegen der Maximalität von R_α in A gewiß $S_\alpha=R_\alpha$ folgt.

Also erhält man $aA+R_\alpha=A$ für jedes $a\in A$ mit $a\notin R_\alpha$. Folglich gibt es Elemente $b_\alpha\in A$ und $r_\alpha\in R_\alpha$ mit $a=ab_\alpha+r_\alpha$, woraus sich $a(1-b_\alpha)A=r_\alpha A\subseteq R_\alpha$ ergibt. Da R_α maximal und nicht modular in A ist, gewinnen wir $A=R_\alpha+(1-b_\alpha)A$, und daher auch $aA\subseteq aR_\alpha+R_\alpha$ und $aR_\alpha+R_\alpha\subseteq aA+R_\alpha\subseteq aR_\alpha+R_\alpha$ d.h. $A=aR_\alpha+R_\alpha$. Ist nun $(1-a)R_\alpha\subseteq R_\alpha$, so erhält man $ar_\alpha\in R_\alpha$ für jedes $r_\alpha\in R_\alpha$, was nach dem obigen nur im Falle $a\in R_\alpha$ möglich ist. Also besteht $(1-a)R_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $a\notin R_\alpha$ $(a\in A)$ w.z.b.w.

Das Rechtsideal $S=aR_\alpha+(1-a)R_\alpha$ enthält sowohl R_α als auch aR_α, und somit gilt nach dem ersten Teil von Satz 3. 7 gewiß $S=A$, w.z.b.w.

DEFINITION 3. 8. Es sei A ein Ω-Ring und R_α ein (festes) ausgezeichnetes Rechtsideal von A. Dann sei $R_\alpha^{(x)}=\{y;\ y\in A,\ xy\in R_\alpha\}$.

Offenbar ist $R_\alpha^{(x)}$ ein „Rechtsidealquotient" in A, und zwar selbst ein Rechtsideal von A.

SATZ 3. 9. *$R_\alpha^{(x)}=A$ gilt dann, und nur dann, wenn $x\in R_\alpha$ ist. Für $x\notin R_\alpha$ bestehen sowohl $R_\alpha^{(x)}\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ als auch $R_\alpha\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha^{(x)}$, und $D_\alpha=\bigcap_{x\in A}R_\alpha^{(x)}$ ist ein solches zweiseitige Ideal von A, für das A/D_α ein halbeinfacher, bezüglich R_α reduzierter Ω-Ring ist.*

BEWEIS. Im Falle $R_\alpha^{(x)}=A$ besteht $xA\subseteqq R_\alpha$, folglich $x\in R_\alpha$, denn im Falle $x\notin R_\alpha$ gilt nach dem Satz 3. 7 schon $xR_\alpha+R_\alpha=A$. Umgekehrt erhält man offenbar $xA\subseteqq R_\alpha$ für jedes $x\in R_\alpha$, folglich ist dann $R_\alpha^{(x)}=A$. Also ergibt sich $R_\alpha^{(x)}\neq A$ für $x\notin R_\alpha$. Wenn wir zeigen, daß für $x\notin R_\alpha$ $R_\alpha^{(x)}\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ ist, so folgt daraus auch $R_\alpha^{(x)}\supseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$. Wie wir bei dem Beweis des Satzes 3. 7 schon gesehen haben, gibt es zu jedem R_α und jedem $a\in A$ mit $a\notin R_\alpha$ ein Element b_α mit $a-ab_\alpha\in R_\alpha$. Da aber R_α nicht modular in A ist, existiert ein $y_\alpha\in A$ mit $y_\alpha-ay_\alpha\notin R_\alpha$. Wegen $a(y_\alpha-b_\alpha y_\alpha)\in R_\alpha$ gilt $y_\alpha-b_\alpha y_\alpha\in R_\alpha^{(a)}$, also auch $R_\alpha^{(a)}\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$. Es sei nun d ein beliebiges Element von $D_\alpha=\bigcap_{x\in A}R_\alpha^{(x)}$. Dann gilt $xd\in R_\alpha$ für jedes $x\in A$, also $Ad\subseteqq R_\alpha$. Da R_α quasimodular in A ist, erhält man $d\in R_\alpha$, folglich $D_\alpha\subseteqq R_\alpha$. Wegen der Definition von D_α folgt aus $Ay\subseteqq R_\alpha$ trivial $y\in D_\alpha$, und wegen $A^2D_\alpha\subseteqq AD_\alpha\subseteqq R_\alpha$ auch $AD_\alpha\subseteqq D_\alpha$. Somit ist D_α ein Ideal von A, das in R_α liegt. Ist nun I ein Ideal von A mit $I\subseteqq\!\!\!\!/\; D_\alpha$, so gibt es ein Element $f\in I$ mit $f\notin D_\alpha$, und somit ein $x\in A$ mit $f\notin R_\alpha^{(x)}$. Dann besteht $xf\notin R_\alpha$, was wegen $xf\in I$ bedeutet, daß $I\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ ist. Also gilt entweder $I\subseteqq D_\alpha$ oder $I\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ für jedes zweiseitige Ideal I von A. Hiernach ist A/D_α wirklich ein bezüglich R_α reduzierter und somit halbeinfacher Ω-Ring, w.z.b.w.

SATZ 3. 10. *Sind A ein Ω-Ring mit einem ausgezeichneten Rechtsideal R_α, $D_\alpha=\bigcap_{x\in A}R_\alpha^{(x)}$ und R_1 ein Rechtsideal von A mit $R_1\subseteqq\!\!\!\!/\; D_\alpha$, so gibt es ein $a\in A$ mit $a\notin R_\alpha$ derart, daß $aR_1+R_\alpha=A$ gilt.*

BEWEIS. Wegen $R_1\subseteqq\!\!\!\!/\; D_\alpha$ existiert ein $r_1\in R_1$ mit $r_1\notin D_\alpha$, folglich ein $a\in A$ mit $r_1\notin R_\alpha^{(a)}$, woraus sich $ar_1\notin R_\alpha$ ergibt. Da $aR_1\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ besteht, erhält man wegen der Maximalität von R_α in A die Gleichung $aR_1+R_\alpha=A$, w.z.b.w.

SATZ 3. 11. *Ist A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring, so ist $(o)_l$ das einzige in R_α liegende Linksideal von A.*

BEWEIS. Ist L ein Linksideal von A mit $L\subseteqq R_\alpha$, so gilt wegen $LA\subseteqq R_\alpha$ und der Reduziertheit von A bezüglich R_α $LA=o$, denn LA ist ein Ideal in R_α. Da aber A wegen der Reduziertheit halbeinfach ist, ergibt sich $L=o$, w.z.b.w.

SATZ 3. 12. *Sowohl der Rechtsannullator A_r als auch der Linksannulator A_l eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α eines bezüglich R_α reduzierten Ω-Ringes A stimmen mit (o) überein.*

BEWEIS. Ist $x\in A_r$, so gilt $R_\alpha x=o$, folglich $Ax=o$, denn man nach Satz 3. 7 $yR_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $y\notin R_\alpha$ $(y\in A)$ erhält. Wegen der Halbeinfachheit von A folgt aus $Ax=o$ trivial $x=o$. Ist nun $z\in A_l$ so gilt $zR_\alpha=o$, folglich $z\in R_\alpha$ nach dem Satz 3. 7, denn im Falle $z\notin R_\alpha$ würde $zR_\alpha\subseteqq\!\!\!\!/\; R_\alpha$ und somit $zR_\alpha\neq o$ bestehen. Also gilt $A_l\subseteqq R_\alpha$, und da A ein Linksideal von A in R_α ist, folgt wegen der Reduziertheit von A bezüglich R_α $A_l=o$, w.z.b.w.

SATZ 3. 13. *Es sei A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring. Dann gilt $R_\alpha e \neq R_\alpha$ für jedes idempotente Element e von A. Weiterhin folgt $x=o$ sowohl aus $R_\alpha^k x=o$ als auch aus $xR_\alpha^k=o$ für jeden Exponenten k.*

BEWEIS. Ist $R_\alpha e=R_\alpha$ für ein idempotentes Element $e\in A$, so ergibt sich wegen $aR_\alpha+R_\alpha=A$ für jedes $a\notin R_\alpha$ $(a\in A)$ gewiß $Ae=A$. Also ist e ein Rechtseinselement von A, und da A halbeinfach ist, ist e ein zweiseitiges Einselement in A. Da aber R_α nicht modular in A ist, hat A kein Linkseinselement. Es gilt also $R_\alpha e\neq R_\alpha$. Ist nun $xR_\alpha^k=o$ $(R_\alpha^k x=o)$, so ergibt sich $xR_\alpha^{k-1}\subseteqq A_l$ $(R_\alpha^{k-1}x\subseteqq A_r)$ und wegen $A_l=o$ $(A_r=o)$ (vgl. Satz 3. 13) $xR_\alpha^{k-1}=o$ $(R_\alpha^{k-1}x=o)$. Nach endlich vielen Schritten erhält man $xR_\alpha=o$ $(R_\alpha x=o)$, folglich $x=o$ nach dem Satz 3. 13, w.z.b.w.

SATZ 3. 14. *Es seien A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring und R_1 ein Rechtsideal von A mit $R_1\nsubseteq R_\alpha$, weiterhin $D'_\alpha=\bigcap_{x\in R_1}R_\alpha^{(x)}=\{y;\ R_1y\subseteqq R_\alpha\}$. Dann gilt $D'_\alpha=o$. Ist nun $I_\alpha^{(x)}=\{y;\ R_\alpha y\subseteqq R_\alpha^{(x)}\}$, so ergibt sich $I_\alpha^{(x)}=o$. Ferner ist (o) das einzige in $R_\alpha^{(x)}$ liegende zweiseitige Ideal von A.*

BEWEIS. Wegen $R_1+R_\alpha=A$ und wegen $R_1D'_\alpha\subseteqq R_\alpha$ erhält man $AD'_\alpha\subseteqq R_\alpha$, folglich $D'_\alpha=o$, weil A, D'_α ein zweiseitiges in R_α liegendes Ideal von A, A reduziert und halbeinfach ist. Wegen $R_\alpha I_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha^{(x)}$ und $R_\alpha^{(x)}+R_\alpha=A$ (vgl. Satz 3. 10) gilt $AI_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha^{(x)}$, folglich $xAI_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha$, und wegen $xR_\alpha+R_\alpha=A$ (für jedes $x\in A$, $x\notin R_\alpha$) ergibt sich $AI_\alpha^{(x)}\subseteqq R_\alpha$. Da aber $AI_\alpha^{(x)}$ ein Ideal des halbeinfachen reduzierten Ω-Ringes A ist, erhält man A, $I_\alpha^{(x)}=o$ und somit $I_\alpha^{(x)}=o$. Es sei I ein Ideal von A in $R_\alpha^{(x)}$. Wegen $AI\subseteqq R_\alpha^{(x)}$ gilt dann $xAI\subseteqq R_\alpha$, folglich wegen $xR_\alpha+R_\alpha=A$ (vgl. Satz 3. 7) auch $AI\subseteqq R_\alpha$, woraus sich $AI=o$ und $I=o$ ergibt.

SATZ 3. 15. *Es seien A ein bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierter Ω-Ring, x ein Element von A mit $x\notin R_\alpha$ und R_1 ein Rechtsideal von A mit $R_1\nsubseteq R_\alpha^{(x)}$. Dann gelten $(xR_1)^k+R_\alpha=xR_1^k+R_\alpha=(1-x)R_\alpha^k+R_\alpha=A$ für jeden Exponenten k. Im Falle $o\neq R_1^k\subseteqq R_\alpha$ besteht auch $(1-x)R_1^k+R_\alpha=A$. Ist $K_\alpha^{(x,k)}=\{y;\ y\in A,\ R_1^k y\subseteqq R_\alpha^{(x)}\}$, so gilt $K_\alpha^{(x,k)}=o$ für jeden Exponenten k.*

BEWEIS. Nehmen wir an, daß $(xR_1)^{k+1}\subseteqq R_\alpha$ und $(xR_1)^k\nsubseteq R_\alpha$ ist. Dann gilt wegen $R_1\nsubseteq R_\alpha^{(x)}$ offenbar $xR_1\nsubseteq R_\alpha$ und somit wegen der Maximalität von R_α in A auch $xR_1+R_\alpha=A$. Daher gilt $k\geqq 1$. Nach der Voraussetzung besteht $(xR_1)^k+R_\alpha=A$, und wegen $(xR_1)^{k+1}\subseteqq R_\alpha$ auch $AxR_1\subseteqq R_\alpha$. Da A reduziert und halbeinfach ist, ergibt sich $AxR_1=o$ und $xR_1=o$, obwohl nach der Voraussetzung $(xR_1)^k\nsubseteq R_\alpha$ und $k\geqq 1$ bestehen. Also gilt $(xR_1)^k+R_\alpha=A$ für jedes $k\geqq 1$. Wegen $(xR_1)^k\subseteqq xR_1^k$ erhält man auch $xR_1^k+R_\alpha=A$ für jedes $k\geqq 1$. — Wegen $R_1\nsubseteq R_\alpha^{(x)}$ besteht $xR_1^k\nsubseteq R_\alpha$. Folglich gibt es ein $r_1\in R_1^k$ mit $xr_1\notin R_\alpha$. Ist nun $(1-x)R_1^k\subseteqq R_\alpha$, so erhält man im Falle der Voraussetzung $R_1^k\subseteqq R_\alpha$ auch $xR_1^k\subseteqq R_\alpha$, was der Bedingung $xr_1\notin R_\alpha$ widerspricht. Also folgt aus $R_1^k\subseteqq R_\alpha$ und $R_1\nsubseteq R_\alpha^{(x)}$ die Gleichung $(1-x)R_1^k+R_\alpha=A$. — Wegen $R_1^kK_\alpha^{(x,k)}\subseteqq R_\alpha^{(x)}$ gilt $xR_1^kK_\alpha^{(x,k)}\subseteqq R_\alpha$, und wegen $xR_1^k+R_\alpha=A$ auch A. $K_\alpha^{(x,k)}\subseteqq R_\alpha$, woraus $K_\alpha^{(x,k)}=o$ folgt, denn A, $K_\alpha^{(x,k)}$ ist ein Ideal von A in R_α, und A ist reduziert und halbeinfach.

BEMERKUNG 3. 16. Die Voraussetzungen des Satzes 3. 16 bezüglich R_1 gelten freilich auch für R_α selbst. Also gelten auch $(xR_\alpha)^k+R_\alpha=xR_\alpha^k+R_\alpha=(1-x)R_\alpha^k+R_\alpha=A$ für jedes $k\geqq 1$. Mit Hilfe einer vollständigen Induktion nach k kann auch $(Ax)^k\nsubseteq R_\alpha$ für jeden bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierten Ω-Ring A und für jedes $k\geqq 1$ bewiesen werden.

§ 4. Fortsetzung der Untersuchung der Ω-Ringe

Wir betrachten hier weitere Eigenschaften der Ω-Ringe. Es gilt der folgende

SATZ 4. 1. *Das Zentrum Z jedes bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierten Ω-Ringes A ist $\{o\}$.*

BEWEIS. Ist z ein Element des Zentrums Z von A, so gilt wegen $zR_\alpha = R_\alpha z \subseteqq R_\alpha$ und nach dem Satz 3. 7 offenbar $z \in R_\alpha$, denn im Falle $z \notin R_\alpha$ würde $zR_\alpha \nsubseteqq R_\alpha$ bestehen. Wegen $Z \subseteqq R_\alpha$ ist dann $I = ZA = AZ$ ein in R_α liegendes Ideal von A, woraus $ZA = o$ und $Z = \{o\}$ folgt, weil A reduziert und halbeinfach ist.

SATZ 4. 2. *Die additive Gruppe A^+ eines bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideales R_α reduzierten Ω-Ringes A ist entweder eine elementare p-Gruppe (d.h. es gilt $pA = o$), oder A^+ ist torsionsfrei mit $A^+ = nA^+ + R_\alpha$ für jede von Null verschiedene ganze rationale Zahl n, weiterhin ist R_α^+ eine reine (servante) Untergruppe der Gruppe A^+.*

BEWEIS. Es sei $A[p]$ für jede Primzahl p die Menge aller Elemente x der Ordnung p, d.h. mit $px = o$. Ist A^+ nicht torsionsfrei, so existiert ein p mit $A[p] \neq o$. Da $A[p]$ ein Ideal von A, A reduziert und R_α maximal in A ist, gilt $A = A[p] + R_\alpha$. Hiernach ist $pA = pR_\alpha \subseteqq R_\alpha$. Da aber A bezüglich R_α reduziert und pA ein Ideal von A in R_α ist, gilt $pA = o$. Ist aber A^+ torsionsfrei, so gilt $nA \neq o$ für jede von Null verschiedene ganze rationale Zahl n, woraus wegen $nA \nsubseteqq R_\alpha$ trivial $A = nA + R_\alpha$ folgt. — Im Falle $pA = o$ ist R_α^+ ein direkter Summand, also auch eine reine Untergruppe von A^+. Im torsionsfreien Falle besteht $a \notin R_\alpha$ aber $na \in R_\alpha$ für eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl n. Dann gilt aber $aR_\alpha + R_\alpha = A$, woraus $nA \subseteqq R_\alpha$ folgt, was der Reduziertheit von A bezüglich R_α widerspricht, denn nA ist ein Ideal von A in R_α. Also ist R_α^+ im beiden Fällen eine reine Untergruppe in A^+.

BEMERKUNG 4. 3. Ist A ein Ω-Ring, der bezüglich eines ausgezeichneten Rechtsideals R_α reduziert ist, so ist A^+ nach dem Satz 4. 2 dann und nur dann teilbar (divisible), wenn R_α^+ teilbar ist.

SATZ 4. 4. *Es seien R_α ein ausgezeichnetes Rechtsideal eines Ω-Ringes A, der bezüglich R_α nicht notwendig reduziert ist, und x ein solches Element von A, für welches $x \notin R_\alpha$ und $xR_\alpha^{(x)} = R_\alpha$ bestehen. Dann ist x ein Linksteiler jedes Elements $a \in A$, aber kein Linkseinselement von A, und es gilt $xR = xA = A$. Weiterhin ist der Unterring $\{x\}$ unendlich, es gilt $f(x)R_\alpha + R_\alpha = A$ für jedes Element $o \neq f(x) \in \{x\}$, und es gibt ein Element y von A mit $y \notin R_\alpha$ und mit $(y - f(x))R_\alpha + R_\alpha = A$ für jedes $f(x) \in \{x\}$.*

BEWEIS. Wegen $R_\alpha^{(x)} \nsubseteqq R_\alpha$ und der Maximalität von R_α in A ist $R_\alpha^{(x)} + R_\alpha = A$, woraus man wegen $xR_\alpha^{(x)} \subseteqq R_\alpha$ offenbar $R_\alpha + xR_\alpha = xA$ erhält. Da aber $R_\alpha + xR_\alpha = A$ für jedes $x \notin R_\alpha$ gilt, ergibt sich $xA = A$. Folglich gibt es eine Lösung a jeder Gleichung $xa = b$ $(a, b \in A)$, wenn $xR_\alpha^{(x)} = R_\alpha$ ist. Es sei c ein Element von A mit $xc = x$. Dann ergibt sich $A = R_\alpha + (1 - c)A$, denn R_α ist maximal und nicht modular in A. Wegen $x(1 - c) = o$ gilt hiernach $xA = xR_\alpha = A$. x ist also ein Linksteiler jedes Elementes a von A, aber kein Linkseinselement von A, denn R_α ist nicht modular in A. Es gilt dann $x^n R_\alpha = A$ für jede natürliche Zahl n. Gibt es nun Exponenten m und n mit $m \neq n$ und $x^m = x^n$, so existiert ein idempotentes Element $e = x^k$ in der Menge aller

Potenzen von x (vgl. z.B. RÉDEI's Buch [9]), und dann ist e ein Linkseinselement von $A = x^k A = eA$, was unmöglich ist, denn R_α ist in A nicht modular. Im Falle $m \neq n$ gilt also $x^m \neq x^n$, und somit ist der Unterring $\{x\}$ unendlich. Nehmen wir jetzt an, daß $f(x) \in R_\alpha$ für ein $f(x) \in \{x\}$ mit $f(x) \neq o$ gilt. So besteht

$$(*) \qquad k_0 x^i + k_1 x^{i+1} + \ldots + k_n x^{i+n} \in R_\alpha$$

wobei $k_j \in I$, und I der Ring der ganzen rationalen Zahlen ist. Im Falle $pA = o$ für eine Primzahl p läßt sich offenbar $k_0 \equiv 1 \pmod p$ annehmen, woraus

$$(1 + g(x))x^i \in R_\alpha \qquad (g(x) \in \{x\})$$

folgt. Dann ist aber R_α wegen $x^i A = A$ und $(1 + g(x))A \subseteq R_\alpha$ modular in A, was unmöglich ist. Im Falle $pA = o$ gilt daher $f(x)R_\alpha + R_\alpha = A$ für jedes $f(x)$ ($\in \{x\}$, $\neq o$). Ist aber A^+ torsionsfrei, so ergibt sich nach dem Satz 4. 2 $A = nA + R_\alpha$ für jede ganze Zahl $n \neq o$. Da sich k_0 in $(*)$ offenbar als von Null verschieden annehmen läßt, gilt auch $A = k_0 A + R_\alpha$ und somit $x^j = k_0 y_j + r_j$ mit $y_j \in A$ und $r_j \in R_\alpha$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, folglich

$$k_0(1 + y)x^i \in R_\alpha \qquad (y \in A).$$

Da aber R_α^+ nach dem Satz 4. 2 eine reine Untergruppe in A^+ ist, ergibt sich wegen $k_0 \neq o$ auch

$$(1 + y)x^i \in R_\alpha,$$

was wegen $x^i A = A$ und $(1 + y)A \subseteq R_\alpha$ genau die Modularität des Rechtsideales R_α in A bedeutet. Letzteres ist aber unmöglich, und dieser Widerspruch beweist $f(x)R_\alpha + R_\alpha = A$ auch im torsionsfreien Falle $(f(x) \in \{x\}, f(x) \neq o, xR_\alpha^{(x)} = R_\alpha)$.
Nehmen wir an, daß es zu jedem $y \in A$ ein Element $f(x) \in \{x\}$ mit $y - f(x) \in R_\alpha$ gibt. Aus dieser Voraussetzung werden wir einen Widerspruch ableiten. Im Falle $y - f(x) \in R_\alpha$ ergibt sich nämlich $y = f(x) + r$ mit $r \in R_\alpha$. Da wegen $xR_\alpha = A$ ein Element $r^* \in R_\alpha$ mit $xr^* = x$ existiert, erhält man nach der Voraussetzung für ein beliebiges $y \in A$ die Beziehung $y(1 - r^*)x = (f(x) + r)(1 - r^*)x = r(1 - r^*)x$, folglich $A(1 - r^*)A = A(1 - r^*)xA \subseteq R_\alpha$. Aus $A(1 - r^*)A \subseteq R_\alpha$ ergibt sich wegen der Quasimodularität von R_α in A gewiß $(1 - r^*)A \subseteq R_\alpha$, denn es gilt $Az \nsubseteq R_\alpha$ für jedes $z \neq R_\alpha$ $(z \in A)$. Da aber R_α nicht modular in A ist, gilt $(1 - r^*)A \nsubseteq R_\alpha$, und somit ist $(1 - r^*)A \subseteq R_\alpha$ ein Widerspruch. Also gibt es ein $y \in A$ mit $(y - f(x))R_\alpha + R_\alpha = A$ für jedes $f(x) \in \{x\}$ w.z.b.w.

Am Ende dieses Paragraphen möchten wir einige Probleme aufwerfen.

PROBLEM 1. Gibt es einen Ω-Ring A, der sich als Ring, durch ein ausgezeichnetes Rechtsideal R und durch endlich viele Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ erzeugen läßt?

PROBLEM 2. Gibt es einem Ω-Ring A mit einem ausgezeichneten Rechtsideal R und einer endlichen Teilmenge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von A, derart, daß für jedes $x \in A$ mit $x \notin R$ eine der Relationen $a_i x \notin R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt? (Dasselbe Problem auch für $n = 2$.)

PROBLEM 3. Gibt es einen Ω-Ring, der ein MHR-Ring ist, d.h. in dem die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale gilt? (vgl. Verfasser [11]).

PROBLEM 4. Man untersuche in einem Ω-Ring den Zusammenhang zwischen der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ der Menge aller modularen maximalen Rechtsideale und der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$ der Menge aller ausgezeichneten Rechtsideale!

§ 5. Weitere Bemerkungen über das Jacobsonsche Radikal

Die Resultate dieses Paragraphen sind Folgerungen des Satzes von KERTÉSZ [7]. Ein Teil der hier erwähnten Sätze ist nicht ganz neu, aber wir betrachten in diesem § auch solche, schon bekannte Ergebnisse, die sich mit der Hilfe des Frattinischen Untermoduls Φ_r eines Ringes (vgl. Fußnote 3) eleganter beweisen lassen. Es gilt der folgende

SATZ 5. 1. *Es sei A ein assoziativer Ring. Gilt $\Phi_r \subseteq R \subseteq J$ für ein Rechtsideal R, für den Frattinischen Untermodul Φ_r des als A-Rechtsmodul aufgefassten Ringes A und für das Jacobsonsche Radikal J, so ist R ein zweiseitiges Ideal von A.*

BEWEIS. Nach HILLE [4] bzw. KERTÉSZ [7] gilt $AJ \subseteq \Phi_r$, folglich auch $AR \subseteq \subseteq \Phi_r \subseteq R$, w.z.b.w.

SATZ 5. 2. *Sind für die natürlichen Zahlen m, n ($\geqq 1$) die Mengen I_m, K_n, $L_{m,n}$ in einem Ring A folgendermaßen definiert:*

$$I_m = \{x;\ x \in A,\ A^m x \subseteq \Phi_r\},$$

$$K_n = \{y;\ y \in A,\ yA^n \subseteq \Phi_l\},$$

$$L_{m,n} = \{z;\ z \in A,\ A^m z A^n \subseteq M\}$$

wobei $M = \Phi_r$ oder Φ_l bzw. $\Phi_r \cap \Phi_l$, so gilt

$$J = I_m = K_n = L_{m,n}$$

für das Jacobsonsche Radikal J von A.

BEWEIS. Wegen der Ähnlichkeit der Beweisteile, werden wir nur $J = L_{m,n}$ beweisen. Nach HILLE [4] bzw. KERTÉSZ [7] gilt offenbar $J \subseteq L_{m,n}$. Ist nun $z \in L_{m,n}$, und ist z.B. $M = \Phi_r \cap \Phi_l$, so bestehen sowohl $A^m z A^n \subseteq \Phi_r$ als auch $A^m z A^n \subseteq \Phi_l$, woraus man nach [7] $A^{m-1} z A^n \subseteq J$ bzw. $A^m z A^{n-1} \subseteq J$ erhält. Da aber A/J halbeinfach ist, hat A/J keinen von Null verschiedenen linksseitigen oder rechtsseitigen Annullator, deshalb ergibt sich $A^{m-1} z A^{n-1} \subseteq J$ und nach endlich vielen ähnlichen Schritten $Az \subseteq J$ bzw. $zA \subseteq J$, woraus $z \in J$ und somit $L_{m,n} \subseteq J$ folgt. Es ist also $J = L_{m,n}$.

SATZ 5. 3. *Ein Ring A ist dann und nur dann ein Radikalring im Sinne von Jacobson, wenn der Faktorring A/Φ_r von A nach dem Frattinischen Untermodul Φ_r des als A-Rechtsmodul betrachteten Ringes A, ein Zeroring[6] ist. Gilt in einem Ring A die Bedingung $\Phi_r = o$, so enthält das Jacobsonsche Radikal J von A nur die Rechts-*

[6] Ein Ring A, in dem das Produkt xy für jedes $x, y \in A$ Null ist, heißt Zeroring.

annullatoren von A. Ist A ein von Null verschiedener einfacher Radikalring[7] *mit* $A^2 = A$, *so besitzt A kein maximales echtes Rechtsideal, also gilt* $\Phi_r = A$.

BEWEIS. Ist $J = A$, so erhält man wegen $AJ \subseteqq \Phi_r$ die Inklusion $A^2 \subseteqq \Phi_r$, und somit ist dann A/Φ_r ein Zeroring. Ist umgekehrt A/Φ_r ein Zeroring, so gilt $A^2 \subseteqq \Phi_r$, woraus sich nach KERTÉSZ [7] gewiß $A = J$ ergibt. — Besteht nun $\Phi_r = o$, so enthält J wegen $AJ \subseteqq \Phi_r$ nur die Rechtsannullatoren von A. — Hat A ein maximales echtes Rechtsideal, so gilt $\Phi_r \neq A$. Ist nun A insbesondere ein einfacher Radikalring, so ergibt sich $\Phi_r = o$, denn Φ_r ist ein Ideal mit $\Phi_r \neq A$. Da $A^2 \subseteqq \Phi_r$ nach dem obigen für jeden Radikalring gilt, erhält man $A^2 = o$, was wegen $A^2 = A$ den Widerspruch $A = o$ bedeutet. Also hat jeder von Null verschiedene einfache Radikalring A mit $A^2 = A$ kein maximales echtes Rechtsideal, w.z.b.w.

SATZ 5. 4. *Gilt* $J^2 \neq o$ *für das Jacobsonsche Radikal J eines beliebigen Ringes A, so besitzen der rechtsseitige Frattinische Untermodul* Φ_r *und der linksseitige Frattinische Untermodul* Φ_l *des A-Rechtsmoduls bzw. A-Linksmoduls A einen von Null verschiedenen Durchschnitt.*

BEWEIS. Nehmen wir an, daß $\Phi_r \cap \Phi_l = o$ ist. Dann erhält man wegen $AJ \subseteqq \Phi_r$ und $JA \subseteqq \Phi_l$ offenbar $J^2 \subseteqq \Phi_r$ und $J^2 \subseteqq \Phi_l$, folglich $J^2 \subseteqq \Phi_r \cap \Phi_l = o$. Es ergibt sich also im Falle $J^2 \neq o$ notwendigerweise $\Phi_r \cap \Phi_l \neq o$.

BEMERKUNGEN 5. 5. In jedem kommutativen Ring A mit $\Phi_r \neq o$ ist trivial $\Phi_r \cap \Phi_l = \Phi_r = \Phi_l \neq o$. Jeder Matrizenring über einem Schiefkörper, der offenbar halbeinfach ist, ist ein Ring, für den $J^2 = J = o$ und $\Phi_r = \Phi_l = \Phi_r \cap \Phi_l = o$ bestehen.

Es gibt aber auch nichthalbeinfache Ringe, und zwar schon solche mit sechszehn Elementen, für die $o \neq \Phi_r \neq \Phi_l \neq o$, $\Phi_r \cap \Phi_l = o$ und $J = \Phi_r + \Phi_l$ mit $J^2 = o$ gelten. Ein solcher Ring ist z.B. die Algebra $A = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ mit $2A = o$ (d.h. $x + x = o$ für jedes $x \in A$) und mit der Multiplikationstabelle

	a_1	a_2	b_1	b_2
a_1	a_1	o	o	o
a_2	o	a_2	o	b_2
b_1	b_1	o	o	o
b_2	o	o	o	o

In diesem Ring A gelten wegen $\Phi_r = \{b_2\}$ und $\Phi_l = \{b_1\}$ die Beziehungen $\Phi_r \cap \Phi_l = o$ und $J^2 = o$ für das Radikal $J = \Phi_r + \Phi_l$.

Es sei B die durch a_1 und b_1 erzeugte Teilalgebra der obigen Algebra $A = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Im Ring $B = \{a_1, b_1\}$ gilt $B^2(= B) \subseteqq\!\!\!\!/\; R$ für jedes maximale Rechtsideal R des Ringes B, denn a_1 ist ein Linkseinselement von B. Da aber $b_1 \notin \{a_1\}$ und $xb_1 = o \in \{a_1\}$ für jedes $x \in B$ bestehen, ist das maximale Rechtsideal $\{a_1\}$ von B nicht quasimodular in B.

[7] Die Existenz der einfachen Radikalringe A mit $A^2 = A \neq o$ wurde in SASIADA [10] gezeigt.

Die Eigenschaft $B^2+R=B$ ist also für ein maximales Rechtsideal R eines Ringes B von der Quasimodularität von R in B verschieden.

Ist A zum Schluß ein einfacher Radikalring, so bestehen wegen $J=\Phi_r=\Phi_l=A$ die Ungleichungen $J^2\neq o$ und $\Phi_r\cap\Phi_l\neq o$ (vgl. SASIADA [10]).

(Eingegangen am 22. April 1966.)

Literaturverzeichnis

[1] L. FUCHS, A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **14** (1952), S. 167—168.
[2] L. FUCHS, *Abelian Groups* (Budapest, 1958, Akadémiai Kiadó).
[3] M. HALL, *The Theory of Groups* (New York, 1959, Macmillan).
[4] E. HILLE, *Functional Analysis and Semi Groups* (Providence, 1948, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 31).
[5] N. JACOBSON, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *Amer. Jour. Math.*, **67** (1945), S. 300—320.
[6] N. JACOBSON, *Structure of Rings* (Providence, 1956, Amer, Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 37).
[7] A. KERTÉSZ, A characterization of the Jacobson radical, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:**4** (1963), S. 595—597.
[8] A. KERTÉSZ, *Über Artinsche Ringe* (Budapest, 1966, Akadémiai Kiadó) (im Erscheinen).
[9] L. RÉDEI, *Algebra, I* (Leipzig, 1959, Akademische Verlagsgesellschaft).
[10] E. SASIADA, Solution of the problem of existence of simple radical rings, *Bull. Acad. Polon. Sci. Classe III*, **9** (1961), S. 257.
[11] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale. I, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), S. 54—64; II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), S. 417—439; III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), S. 447—461.