ÜBER RINGE MIT MINIMALBEDINGUNG FÜR HAUPTRECHTSIDEALE. III

Von

F. SZÁSZ (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. RÉDEI)

Professor G. HAJÓS *zu seinem 50. Geburtstag gewidmet*

Einleitung

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit immer einen assoziativen Ring. Bezüglich der nötigen allgemeinen Begriffe wird es auf [2], [10], [13] und [18] verwiesen. Die im Titel dieser Arbeit erwähnten Ringe werden kurz MHR-Ringe genannt. Diese Ringe wurden in der Dissertation und in der Arbeit [21] des Verfassers ausführlich betrachtet, und es werde hinsichtlich der MHR-Ringe noch auf die in [21] angegebene Literatur verwiesen. Ein MH_1R-Ring bedeutet einen Ring mit Minimalbedingung für diejenigen Rechtsideale, die in Hauptrechtsidealen liegen. In der vorliegenden Arbeit werden weitere Ergebnisse bezüglich der MHR-Ringe betrachtet, und auch einige offene Fragen erwähnt.

Im § 1 untersuchen wir gewisse Mächtigkeitsbeziehungen zwischen dem Rechtsidealverband V_A und dem Linksidealverband ${}_AV$ eines Artinschen Ringes A (d. h. eines Ringes A mit Minimalbedingung für Rechtsideale). Bedeute $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \uparrow$ für beliebige Kardinalzahlen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Existenz eines Artinschen Ringes A mit den Bedingungen $|V_A| = \mathfrak{m}$ und $|{}_AV| = \mathfrak{n}$, wobei $|X|$ die Mächtigkeit einer Menge X bezeichnet. In § 1 werden wir sowohl $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$, als auch $A(\aleph_\nu, \aleph_\mu) = \uparrow$ beweisen, wobei $n \geqq 3$ eine beliebige natürliche Zahl, $\aleph_\nu$, $\aleph_\mu$ beliebige unendliche Mächtigkeiten sind. (Vgl. Satz 1. 2, 1. 3, 1. 4.) Die dafür angegebenen Artinschen Ringe haben Einselement, und lassen sich mit Hilfe eines interessanten Stellenringes $A(F, \varphi)$ aufbauen (der kein Artinscher Ring ist). Es wird auch ein Ring A mit $|A| = \aleph_\nu$, $|V_A| = n$, $|{}_AV| = 2^{\aleph_\nu}$ konstruiert, und zwar derart, daß $\aleph_\nu$ solche Linksideale von A existieren, die eine absteigende (aufsteigende) Kette bilden (n beliebige natürliche Zahl $\geqq 3$, und $\aleph_\nu$ beliebige unendliche Mächtigkeit).

Im § 2 betrachten wir die Ringe mit endlich vielen Rechtsidealen. Jeder Radikalring A mit $|V_A| < \aleph_0$ ist endlich. Es werden auch die halbeinfachen Ringe A mit $|V_A| < \aleph_0$ beschrieben. Ferner bestimmen wir bis auf Faktorsysteme und Endomorphismensysteme sämtliche Ringe A mit $|V_A| = 3$. Es werden auch die Ringe A mit $|V_A| = 3$ und $|{}_AV| \geqq \aleph_0$ charakterisiert. Insbesondere hat jeder Ring A mit $|V_A| = 3$ und $|{}_AV| \geqq \aleph_0$ zweiseitiges Einselement. Aus $|V_A| = 3$ folgt die Minimalbedingung für Hauptlinksideale. Jeder Ring A mit $|V_A| = 3$ und ohne von Null verschiedene Linksannullatoren (Rechtsannullatoren) enthält Einselement (ein Linkseinselement). Ferner ist $A(3, 4) = \downarrow$, denn aus $A(3, \mathfrak{m}) = \uparrow$ erhält man $\mathfrak{m} = 3$, oder $\mathfrak{m} = 5$ bzw. $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Die Untersuchung von $A(m, n) = \uparrow$ für beliebige natürliche Zahlen m und n scheint mit additiven zahlentheoretischen Fragen in engem Zusammenhang zu sein. Als eine leichte Folgerung der Sätze von § 2 ergibt sich: Jeder Ring nur mit endlich vielen Unterringen ist selbst endlich.

Im § 3 wird bewiesen, daß eine transfinite Potenz des Jacobsonschen Radikales jedes MHR-Ringes das Nullidal ist. Ferner ist jeder Unterring eines MH_1R-Radikalringes ebenfalls ein MH_1R-Ring, und es gilt in jedem MH_1R-Radikalring A auch die Minimalbedingung für diejenigen additiven Untergruppen von A^+, die in Hauptrechtsidealen von A liegen. Bekanntlich wurden allgemeine Radikale für beliebige assoziative Ringe von AMITSUR [1] und KUROSCH [16] betrachtet. Nun werden wir im § 3 die allgemeinen Radikale im Sinne von KUROSCH [16] für die Klasse der MHR-Ringe untersuchen. Es wird ein Kriterium dafür bestätigt, daß ein allgemeines Radikal im Sinne von KUROSCH für MHR-Ringe mit dem Jacobsonschen Radikal übereinstimmt. Dabei erwähnen wir weitere Behauptungen und Probleme. Für diese Untersuchungen werden im § 3 außer dem Divinskyschen Radikal D noch weitere spezielle Radikale M und T betrachtet. Im halbgeordneten System aller allgemeinen Radikaleigenschaften blieben aber zwei Ordnungsfragen bezüglich des Radikales M offen.

Zum Schluß machen wir im § 4 einige Bemerkungen bezüglich der rechtsseitig vollständig reduziblen Ringe, die freilich auch MHR-Ringe sind. Dabei wird zuerst eine unbewiesene Bemerkung aus [21] berichtigt. Ferner wird im § 5 die Klasse der Artinschen halbeinfachen Ringe in der größeren Klasse der MHR-Ringe mit Einselement modultheoretisch, und zwar mit Hilfe des Kertészschen Radikales der beliebigen Operatormoduln charakterisiert: Ein MHR-Ring A mit Einselement ist genau dann ein halbeinfacher Artinscher Ring, wenn für das Kertészsche Radikal $R(M)$ von jedem A-Rechtsmodul M die Bedingung $R(M)A=0$ gilt.

Für die Hilfe in der Abfassung meiner Resultate danke ich Prof. L. FUCHS.

§ 1. Über Mächtigkeitsbeziehungen zwischen den Rechts- und Linksidealverbände eines Artinschen Ringes

Für einen Ring A bezeichne V_A und ${}_AV$ den Rechtsidealverband bzw. Linksidealverband von A. Bekanntlich sollen sowohl V_A als auch ${}_AV$ gewisse verbandstheoretische Bedingungen (z. B. Modularität, Vollständigkeit, kompakt Erzeugbarkeit usw.) erfüllen. Meines Wissens ist das folgende schwere Problem bisher noch ungelöst: Zu welchen Verbandspaaren (V_1, V_2) existiert ein Ring A mit $V_A \cong V_1$ und ${}_AV \cong V_2$? In diesem § werden wir ein anderes aber ähnliches Problem betrachten. Es wird nämlich untersucht, in welchem Masse die Mächtigkeiten $|V_A|$ und $|{}_AV|$ voneinander abhängen. Dieses Problem wird für die Paare $(\aleph_\nu, n)$ und $(\aleph_\mu, \aleph_\nu)$ vollständig gelöst $(n<\aleph_0)$. Die als Lösungen vorkommenden Ringe lassen sich auch aus der Klasse von Artinschen Ringen wählen.

DEFINITION 1. 1. Für ein Paar $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ von Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ bezeichne $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})=\uparrow$ (bzw. $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})=\downarrow$) die Existenz (Nichtexistenz) eines Artinschen Ringes A mit $|V_A|=\mathfrak{m}$ und $|{}_AV|=\mathfrak{n}$.

Offensichtlich ist $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})=\uparrow$ mit $A(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})=\uparrow$ äquivalent. Wie wir sehen werden, gilt auch $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})=\uparrow$ für jede Mächtigkeit $\mathfrak{m}$.

Der Ring $A(F, \varphi)$. Es sei F ein Schiefkörper, φ ein Isomorphismus von F in sich, und z ein transzcendentes Element über F. Die Menge aller formalen Rechtspotenzreihen

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k \qquad (f_k \in F,\ z^0 = 1 \in F).$$

wird zu einer (F, F)-Doppelalgebra $A(F, \varphi)$, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k g_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (f_k + g_k)$$

bzw.

$$fz = zf^{\varphi}, \quad fz^k = z^k f^{\varphi^k}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l g_l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(\sum_{m=k+l} f_k^{\varphi^l} g_l\right)$$

erklärt wird. (Hierbei bedeutet „Rechtspotenzreihe", daß die Elemente f_k Rechtsoperatoren für z^k sind. Wegen der Definition $fz = zf^{\varphi}$ ist aber F zugleich ein Linksoperatorbereich für $A(F, \varphi)$.) Es sei nun R ein beliebiges Rechtsideal von $A(F, \varphi)$ und $r_k = \sum_{j \geqq k}^{\infty} z^j f_j$ ein solches Element von R, für das $f_k \neq 0$ und k minimal ist. Dann hat jedes Element von R die Gestalt $r = \sum_{j \geqq k}^{\infty} z^j g_j$ $(g_j \in F)$. Da sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_k h_0 &= g_k \\ f_k^{\varphi} h_1 + f_{k+1} h_0 &= g_{k+1} \\ f_k^{\varphi^2} h_2 + f_{k+1}^{\varphi} h_1 + f_{k+2} h_0 &= g_{k+2} \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \end{aligned}$$

bezüglich der Unbekannten $h_0, h_1, h_2, \ldots$ lösen lassen, erhält man $r_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} z^l h_l = r$ und somit $(r_k)_r \supseteqq R$. Da offenbar $R \supseteqq (r_k)_r$ gilt, ergibt sich $R = (r_k)_r$. Also ist in $A(F, \varphi)$ jedes Rechtsideal ein Hauptrechtsideal $z^k \cdot A(F, \varphi)$, das ein zweiseitiges Ideal ist. Diese Ideale bilden eine abzählbare absteigende Kette. Der Linksidealverband von $A(F, \varphi)$ hängt stark vom Isomorphismus φ des Schiefkörpers F $(\cong A(F, \varphi)/z \cdot A(F, \varphi))$ ab. $A(F, \varphi)$ ist offensichtlich ein Stellenring (d. h. lokaler Ring).

Bemerkungen 1. 1.

I. Es sei φ ein vom identischen verschiedener Automorphismus von F. Dann ist $A(F, \varphi)$ nichtkommutativ, obwohl jedes Rechtsideal und jedes Linksideal ein Ideal ist.

II. Nehmen wir $|F| \geqq \aleph_0$ und $F^{\varphi} \neq F$ an. Dann existieren in F zwei linear unabhängige Elemente f' und f'' über F^{φ}. Es sei $L_f = A(F, \varphi) \cdot z \cdot (f' + f^{\varphi} f'')$. Die Hauptlinksideale L_{f_1} und L_{f_2} sind für $f_1 \neq f_2$ gewiß verschieden, denn aus $L_{f_1} \subseteqq L_{f_2}$ erhält man $f_1 = f_2$. Somit folgt aus $|F| \geqq \aleph_0$ auch $|_A V| \geqq \aleph_0$ für $A = A(F, \varphi)$.

III. Der Fall $|F| = \aleph_\nu$ und $2 \leqq [F : F^{\varphi}] < \aleph_0$ zeigt $A(\aleph_0, \aleph_\nu) = \dagger$, und $A = A(F, \varphi)$ besitzt dabei folgende Eigenschaften:

a) $|A| = \aleph_\nu^{\aleph_0}$ und A hat Einselement;

b) jedes Rechtsideal von A ist ein Hauptrechtsideal und ein Ideal; diese Ideale bilden eine abzählbare absteigende Kette;

c) $|_A V| = \aleph_\nu$ und die Länge von $_A V$ ist $\aleph_0$;

d) A hat $\aleph_\nu$ Linksideale, und jede Hauptlinksidealkette ist abzählbar.

Wir zeigen jetzt, daß $|F| = \aleph_\nu$ und $[F:F^\varphi] = n$ für jedes feste n mit $2 \leqq n < \aleph_0$ möglich sind. Es sei nämlich K ein Primkörper, F eine rein transzendente Körpererweiterung von K vom Transzendenzgrad $\aleph_\nu$. Ist nun $T = \{..., t_\gamma, ...\}$ $(\gamma \in \Gamma)$ eine Transzendenzbasis von F über K, so gilt $|T| = \aleph_\nu$ und jede Abbildung Φ von T in F, für die

$$\Phi t_\delta = \begin{cases} t_\delta^n, & \text{wenn} \quad \delta = \gamma \\ t_\delta, & \text{wenn} \quad \delta \neq \gamma \ (\gamma \text{ fest}) \end{cases}$$

läßt sich zu einem Körperisomorphismus φ_γ von F in sich fortsetzen, so daß $[F:F^{\varphi_\gamma}] = n$ und $|F| = \aleph_\nu$.

IV. Es sei jetzt $|F| = [F:F^\varphi] = \aleph_\nu$, dann erhält man für $A = A(F, \varphi)$:

a) $|A| = \aleph_\nu^{\aleph_0}$ und A hat Einselement;

b) jedes Rechtsideal von A ist sowohl ein Hauptrechtsideal, als auch ein Ideal, diese Ideale bilden eine abzählbare absteigende Kette;

c) $|_A V| = 2^{\aleph_\nu}$ und $_A V$ hat die Länge $\aleph_\nu$;

d) in A existieren $\aleph_\nu$ solche Linksideale, die eine absteigende (aufsteigende) Kette bilden;

e) in A gibt es $\aleph_\nu$ Hauptlinksideale, und in A existiert eine abzählbare absteigende Hauptlinksidealkette.

Es wird jetzt die Erfüllbarkeit von $|F| = [F:F^\varphi] = \aleph_\nu$ gezeigt. Eine Abbildung Φ der in III betrachteten Transzendenzbazis T von F in F sei durch

$$\Phi t_\gamma = t_\gamma^2 \quad \text{für jedes} \quad \gamma \in \Gamma$$

definiert. Φ kann offensichtlich zu einem Körperisomorphismus φ von F in sich mit $[F:F^\varphi] = |F| = \aleph_\nu$ fortgesetzt werden.

SATZ 1. 2. *Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ und für jede unendliche Mächtigkeit $\aleph_\nu$ gilt $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$. Es gibt nämlich einen Artinschen Ring A mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *$|A| = \aleph_\nu$ und A hat Einselement;*

b) *$|V_A| = n$, V_A ist eine Kette, und jedes Rechtsideal ist ein zweiseitiges Hauptideal;*

c) *$|_A V| = \aleph_\nu$ und $_A V$ ist von endlicher Länge;*

d) *A hat $\aleph_\nu$ Hauptlinksideale.*

Zum Beweis genügt es $A = A(F, \varphi)/z^{n-1} \cdot A(F, \varphi)$, $|F| = \aleph_\nu$ und $2 \leqq [F, F^\varphi] < \aleph_0$ zu wählen $\big(F \cong A(F, \varphi)/z \cdot A(F, \varphi)\big)$.

Jetzt zeigen wir, daß für einen Ring A mit $|A| = \aleph_\nu$ und $|V_A| < \aleph_0$ die Mächtigkeit $|_A V|$ ihr mengentheoretisches Maximum $2^{\aleph_\nu}$ aufnehmen kann, und daß aus $|V_A| < \aleph_0$ nicht die Minimalbedingung für Linksideale folgt.

SATZ 1. 3. *Zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 3$ und jeder unendlichen Mächtigkeit $\aleph_\nu$ gibt es einen Ring A mit den folgenden Eigenschaften:*

a) *$|A| = \aleph_\nu$, $|V_A| = n$, $|_A V| = 2^{\aleph_\nu}$, und A hat Einselement;*

b) *die Länge von $_A V$ ist $\aleph_\nu$;*

c) *in A existiert eine absteigende (aufsteigende) Kette von $\aleph_\nu$ Linksidealen;*

d) *A hat $\aleph_\nu$ Hauptlinksideale, und die Längen aller Hauptlinksidealketten sind endlich, sogar beschränkt.*

Zum Beweis genügt es den Faktorring $A=A(F,\varphi)/z^{n-1}\cdot A(F,\varphi)$ mit $|F|=[F:F^\varphi]=\aleph_\nu$ zu betrachten.

SATZ 1. 4. *Für jedes Paar $\aleph_\mu$, $\aleph_\nu$ von unendlichen Mächtigkeiten gilt $A(\aleph_\mu,\aleph_\nu)=\dagger$.*

BEWEIS. Es seien $A_{\mu,m}=A(F,\varphi)/z^{m-1}A(F,\varphi)$ für $|F|=\aleph_\mu$ und $2\leqq[F:F^\varphi]<\aleph_0$, ferner $A_{\nu,n}=A(F_1,\varphi_1)/z^{n-1}A(F_1,\varphi_1)$ für $|F_1|=\aleph_\nu$ und $2\leqq[F_1:F_1^{\varphi_1}]<\aleph_\nu$. Da $A_{\mu,m}$ und jedes antiisomorphe Bild $B_{\nu,n}$ von $A_{\nu,n}$ Einselement haben, besitzt die direkte Summe $A=A_{\mu,m}\oplus B_{\nu,n}$ die Eigenschaften $|A|=\aleph_\varrho$, $|V_A|=\aleph_\nu$ und $|{}_AV|=\aleph_\mu$, wobei $\aleph_\varrho=\max(\aleph_\mu,\aleph_\nu)$ ist. A ist offensichtlich ein links-rechtsseitiger Artinscher Ring, w. z. b. w.

Es wäre interessant die Ringe A zu untersuchen, für die sowohl V_A als auch ${}_AV$ Ketten sind.

PROBLEM 1. 5. Gibt es zu jeder überabzählbaren Mächtigkeit $\aleph_\nu$ einen nichtkommutativen Ring A mit Einselement darart, daß sowohl jedes Rechtsideal, als auch jedes Linksideal ein zweiseitiges Hauptideal ist, und daß diese Ideale eine absteigende Kette von der Länge $\aleph_\nu$ bilden?

PROBLEM 1. 6. Gibt es zu jedem Paar $\aleph_\mu$, $\aleph_\nu$ von überabzählbaren Mächtigkeiten einen direkt unzerlegbaren Ring A mit Einselement, für den $|V_A|=\aleph_\mu$ und $|{}_AV|=\aleph_\nu$ gilt?

§ 2. Über Ringe mit endlich vielen Rechtsidealen

Offensichtlich ist jeder Ring mit endlich vielen Rechtsidealen ein rechts Artinscher Ring, also auch ein *MHR*-Ring, aber wegen des Satzes 1. 3 i. a. kein linksseitiger Artinscher Ring. Ferner haben sowohl die endlichen Ringe, als auch die direkten Summen von endlich vielen Schiefkörpern nur endlich viele Rechtsideale, und dabei nur endlich viele Linksideale. Bekanntlich ist jeder Ring mit genau zwei Rechtsidealen (d. h. ohne nichttriviale Rechtsideale) entweder ein Schiefkörper, oder ein Zeroring von Primzahlordnung. Hat also ein Ring A wenigstens drei Rechtsideale, so hat A auch wenigstens drei Linksideale.[1] Insbesondere gilt hiernach, daß jeder Ring mit unendlich vielen Linksidealen wenigstens drei Rechtsideale besitzen soll. Für beliebige natürliche Zahl $n\geqq 3$ und für beliebige unendliche Mächtigkeit $\aleph_\nu$ wurde $A(n,\aleph_\nu)=\dagger$ im Satz 1. 2 gezeigt.[2]

[1] Sowohl diese Behauptung, als auch die äquivalente vorige Behauptung folgt leicht aus dem Wedderburn-Artinschen Struktursatz. SZELE [25] hat für diese Behauptung einen elementaren Beweis gegeben. Bezüglich eines elementaren, wesentlich kürzeren Beweis wird noch auf Lemma 1 der Note [20] verwiesen. Ferner hat STEINFELD [19] gezeigt, wie in einem Ring mit wenigstens drei Rechtsidealen ein nichttriviales Linksideal explizit gefunden werden kann.

[2] T. SZELE hat gefragt (1949), ob ein Ring mit endlich vielen Rechtsidealen nur endlich viele Linksideale haben soll. (Vgl. auch RÉDEI [18], S. 211, bzw. „Problem 3" von [21].) In der Note [24] habe ich die Lösung, und zwar $A(3,\aleph_\nu)=\dagger$ für jedes $\aleph_\nu$ veröffentlicht, und dann wußte ich noch nicht, ob aus $|V_A|<\aleph_0$ die Minimalbedingung für Linksideale nicht folgt, wie ich diese Frage in

SATZ 2. 1. *Jeder Radikalring A mit $|V_A| < \aleph_0$ ist endlich.*

FOLGERUNG 2. 2. Es gilt für jeden Radikalring A mit $|V_A| \geqq \aleph_0$ auch $|V_A| \geqq \aleph_0$.

BEWEIS des Satzes 2. 1. Wegen $|V_A| < \aleph_0$ ist der Radikalring A ein nilpotenter Artinscher Ring, und somit ist A nach einem Satz von SZELE [26] periodisch und von endlichem Rang.[3] Da jedes $Z(p^\infty)$ nach FUCHS und SZELE [12] im zweiseitigen Annullator von A liegt, folgt aus $|V_A| < \aleph_0$, wirklich $|A| < \aleph_0$.

Der Beweis der Folgerung 2. 2 ist nach dem Satz 2. 1 klar.

SATZ 2. 3. *Es sei A ein halbeinfacher Ring mit $|V_A| < \aleph_0$. Es gilt eine direkte Zerlegung $A = A_1 \oplus A_2$, wobei A_1 ein endlicher halbeinfacher Ring und A_2 die direkte Summe von endlich vielen unendlichen Schiefkörpern ist. Umgekehrt hat jede solche direkte Summe $A_1 \oplus A_2$ nur endlich viele einseitige Ideale.*

BEWEIS. Nach der Voraussetzung gilt $|V_A| < \aleph_0$ für A. Nach dem Wedderburn-Artinschen Struktursatz ist A die direkte Summe von endlich vielen vollen Matrizenringen $(F^{(i)})_{n_i}$ des Typs $n_i \times n_i$ über Schiefkörpern $F^{(i)}$. Bekanntlich hat $(F^{(i)})_{n_i}$ für $|F^{(i)}| \geqq \aleph_0$ und $n_i \geqq 2$ unendlich viele einseitige Ideale, und hiernach gilt $n_i = 1$ für $|F^{(i)}| \geqq \aleph_0$. Somit ist der Satz bewiesen, denn die weiteren Behauptungen sind klar.

LEMMA 2. 4. *Jeder Ring A mit $|V_A| = 3$ ist rechtsseitig direkt unzerlegbar. Jeder nichtnilpotente Ring A mit $|V_A| = 3$ hat ein Linkseinselement.*

BEWEIS. Gilt $A = R_1 + R_2$ mit $0 \neq R_i \in V_A$, so ergibt sich wegen $0, R_1, R_2, A \in V_A$ gewiß $|V_A| \geqq 4$. Also ist A im Falle $|V_A| = 3$ rechtsseitig direkt unzerlegbar. Gilt nun $N \neq A$ für das Radikal N von A, so ist A/N wegen $|V_A| = 3$ ein Schiefkörper. Es gibt also ein idempotentes Element $e \neq 0$ in A. Da $A = eA + (1-e)A$ gilt, ergibt sich $A = eA$, w. z. b. w.

Nun gilt der folgende

SATZ 2. 5. *Jeder Ring A mit drei Rechtsidealen ist einem der folgenden Ringe isomorph:*

I. *ein Ring $\{a\}$ mit den definierenden Relationen $p^2 a = a^2 - pda = 0$ für $d|p$, oder $pa = a^3 = 0$ wobei p eine Primzahl und $\{\ \}$ Ringerzeugung ist,*

II. *ein Ring A mit dem Radikal N, für den A/N ein Schiefkörper, $N^2 = 0$ und N ein $(A/N, A/N)$-Bimodul ist. Ferner soll der A/N-Rechtsmodul N in Falle $N \cdot (A/N) \neq 0$ einfach sein, d. h. es gilt $N = n \cdot (A/N)$ für jedes $n (\in N, \neq 0)$. Im Falle $N \cdot (A/N) = 0$*

---

der Fußnote (*) von [24], S. 47 erwähnt habe. Später habe ich ein interessantes Problem von A. HAJNAL gelöst: Für jede unendliche Mächtigkeit $\aleph_\nu$ gibt es einen Ring A mit $\aleph_\nu$ Elementen. $2^{\aleph_\nu}$ Linksidealen, der nur drei Rechtsideale besitzt. (In diesem Ring A gilt nicht die Minimalbedingung für Linksideale.) Ende November 1962 hat mich L. FUCHS darauf aufmerksam gemacht, daß BOURBAKI [4], S. 27 ein Beispiel A mit $|V_A| = 3$ und ohne Minimalbedingung für Linksideale angibt. (Nach diesem Bourbaki's Beispiel wird aber $A(3, \aleph_0) = \uparrow$, $A(3, \aleph_\omega) = \uparrow$ $A(3, \aleph_{\omega+\omega}) = \uparrow$ usw. und $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$ für $4 \leqq n < \aleph_0$ nicht bewiesen.) In dieser Arbeit wird eine gemeinsame Verallgemeinerung Bourbaki's Beispiels und meiner ursprünglichen Lösung [24] betrachtet. Übrigens lassen sich in [24] bei Bemerkung 6 statt $\varepsilon_0 \vartheta_\nu = \vartheta_\nu \varepsilon_\nu$ und $\delta_0 \eta_\nu = \eta_\nu \delta_\nu$ auch die mildere Bedingungen $\varepsilon_0 \delta_0 \vartheta_\nu \delta_\nu = \delta_0 \vartheta_\nu \delta_\nu \varepsilon_\nu$ und $\delta_0 \varepsilon_0 \eta_\nu \varepsilon_\nu = \varepsilon_0 \eta_\nu \varepsilon_\nu \delta_\nu$ fordern. — Ich danke Prof. G. HAJÓS für eine interessante Bemerkung bezüglich meiner Ringkonstruktion.

[3] Nach [26] gilt nämlich in A^+ die Minimalbedingung für Untergruppen.

ergibt sich aber $A=\{a,b\}$ *mit* $pa=pb=a^2=b^2-b=ab=ba-a=0$ *für eine Primzahl* p.

BEWEIS. Es sei A ein Ring mit $|V_A|=3$ und N sein Radikal. Nach dem Lemma 2. 4 gilt $N\neq 0$, denn im Falle $N=0$ gilt für den halbeinfachen Ring A entweder $|V_A|=2$ oder $|V_A|\geqq 4$, weil A dann rechtsseitig vollständig reduzibel ist. Also ist gewiß $N\neq 0$.

Es sei zuerst $N=A$. Dann ist A nach dem Satz 2. 1 und Lemma 2. 4 ein endlicher nilpotenter p-Ring mit $p^2A=0$. Ferner besteht der Rechtssockel von A aus einem einzigen nilpotenten minimalen Rechtsideal M mit $M^2=0$ und $|M|=p$ bzw. $|A/M|=p$. Also ist $|A|=p^2$. Im Falle $pA\neq 0$ erhält man $A=\{a\}$ mit $p^2a = = a^2-dpa$, $d|p$ für ein passendes $a\in A$. Daher wird $a^2=0$ für $d=p$ und $a^2=pa$ für $d=1$ gewonnen, und in letzterem Fall ergibt sich $\{a\}\cong p(I/(p^3))$. Ist aber $pA=0$, dann erhält man wegen $|A|=p^2$, $|V_A|=3$ und nach dem Lemma 2. 4 gewiß $A^2\neq 0$, und $A^3=0$. Also ist $A=\{a\}$, $pa=a^3=0$ für jedes $a\in A$ mit $a\notin A^2$.

Es sei jetzt $N\neq A$. Dann ist $A/N=F$ ein Schiefkörper, und A hat nach dem Lemma 2. 4 ein Linkseinselement. Wegen $|V_A|=3$ erhält man $N^2=0$, und daher ist das Radikal N ein (F,F)-Bimodul, denn im Falle $a_1-a_2\in N$ ergibt sich $na_1 = = na_2$ und $a_1n=a_2n$ für jedes $n\in N$. Ebenfalls wegen $|V_A|=3$ gilt $|N|=p$ für $NF=0$, und $N=nF$ für $NF\neq 0$ mit beliebigem $n(\neq 0, \in N)$. Es sei jetzt $NF=0$. Dann gilt auch $NA=0$, $|N|=p$. Ist nun $fn=0$ für ein festes $n(\neq 0, \in N)$ und für ein $f(\neq 0, \in F)$, so ist das annullierende Linksideal für n im Schiefkörper F selbst F, woraus wegen $N=\{n\}$ auch $AN=FN=0$ folgt. Diese Bedingung widerspricht der Existenz eines Linkseinselementes e in A (vgl. Lemma 2. 4). Also ergibt sich $fn\neq 0$ für jedes $n\neq 0$ und $f\neq 0$, und daher gilt auch $f_1n\neq f_2n$ für $f_1\neq f_2$, folglich $|F|=|N|=p$. Hiernach gilt $A=\{a,b\}$ und auch $pa=pb=a^2=b^2-b=ba-a=ab=0$ für jedes $0\neq a\in N$ mit $b=e$.

BEMERKUNGEN 2. 6.

I. Im Falle $NF\neq 0$ läßt sich jeder im Satz 2. 5 bei II vorkommende Ring A mit der Hilfe der Everettschen Ringerweiterungstheorie [9] etwas expliziter, aber i. a. nicht absolut explizit bestimmen. Der Ring A ist nämlich eine Erweiterung von N mit $F=A/N$. Man kennt aber das additive Faktorsystem, das multiplikative Faktorsystem und die Endomorphismensysteme dieses Erweiterungsverfahrens i. a. nicht explizit, denn man sollte dafür gewisse Funktionalgleichungen in Ringen lösen. Jedoch sei erwähnt: Jeder im Satz 2. 5 bei II vorkommende Ring A ist im Falle $NF=N\neq 0$ bis auf Ringisomorphie die Menge aller formal verschiedenen Paare

$$(f_0, f_1^\eta) \quad (f_i\in F=A/N),$$

wobei η ein additiver Isomorphismus von F^+ auf eine Gruppe N^+ ist, und die Verknüpfungen in dieser Menge folgendermaßen erklärt sind:

$$(*) \qquad (f_0, f_1^\eta)+(g_0, g_1^\eta) = (f_0+g_0, [f_0, g_0]^\eta + f_1^\eta + g_1^\eta)$$

$$(**) \qquad (f_0, f_1^\eta)\cdot(g_0, g_1^\eta) = (f_0\cdot g_0, \langle f_0, g_0\rangle^\eta + (f_0^\sigma g_1)^\eta + (f_1 g_0)^\eta).$$

Hierbei ist φ ein Isomorphismus des Schiefkörpers F in sich, ferner sind $[f_0, g_0]$ und $\langle f_0, g_0\rangle$ Abbildungen von $F\times F$ in F, für welche die Bedingungen

$$\Omega_1: \qquad [0,f]=\langle 0,f\rangle=\langle f,0\rangle=0$$

$$\Omega_2: \qquad [f_1,f_2]=[f_2,f_1]$$

$$\Omega_3: \qquad [f_1+f_2,f_3]+[f_1,f_2]=[f_1,f_2+f_3]+[f_2,f_3]$$

$$\Omega_4: \qquad \langle f_1+f_2,f_3\rangle+[f_1,f_2]f_3 = [f_1f_3,f_2f_3]+\langle f_1,f_3\rangle+\langle f_2,f_3\rangle$$

$$\Omega_5: \qquad \langle f_1,f_2+f_3\rangle+f_1\varphi[f_2,f_3] = [f_1f_2,f_1f_3]+\langle f_1,f_2\rangle+\langle f_1,f_3\rangle$$

$$\Omega_6: \qquad \langle f_1,f_2f_3\rangle+f_1^{\varphi}\langle f_2,f_3\rangle = \langle f_1f_2,f_3\rangle+\langle f_1,f_2\rangle f_3$$

erfüllt sind.

II. Ist A^+ eine elementare Abelsche p-Gruppe, oder eine torsionsfreie teilbare Gruppe, so läßt sich in I immer identisch $[f_0, g_0]=0$ wählen. Dafür ist aber $pF=0$ im allgemeinen nicht hinreichend, wie dies z. B. der Ring $\{a\}$ mit $a^2-a = = p^2a = 0$ zeigt. Kann aber identisch $[f_0, g_0]=0$ gewählt werden, so ist z. B. $\langle f_0, g_0\rangle = -f_0^{\varphi}hg_0$ (h ein festes Element von F) eine spezielle Lösung der Gleichungen $\Omega_1, \dots, \Omega_6$,und dann erhält man über der direkten Summe $F+F^{\eta}$ die Ringmultiplikation

$$(*\,*\,*) \qquad (f_0,f_1^{\eta})\cdot(g_0,g_1^{\eta}) = (f_0g_0,\, -(f_0^{\varphi}hg_0)^{\eta}+(f_0^{\varphi}g_1)^{\eta}+(f_1g_0)^{\eta})$$

für die genau $(1, h^{\eta})$ das Einselement des entsprechenden Ringes A mit $|V_A|=3$ ist. Im Falle $(0\neq)F^{\varphi}\neq F$ und $|F|=\aleph_\nu$ gilt mit $(*\,*\,*)$ auch $|_AV|\geqq\aleph_\nu$.(Vgl. Satz 1. 2, ferner [4], S. 27, und [27].)

SATZ 2. 7. *Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und $|_AV|\geqq\aleph_0$ ist einem im Satz 2. 5 bzw. Bemerkungen 2. 6, I erwähnten Ring mit $F=A/N$, $NF=N$, $|F|\geqq\aleph_0$, $[F:F^{\varphi}]\geqq 2$ isomorph. Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und $|_AV|\geqq\aleph_0$ hat Einselement. Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und ohne von Null verschiedene Linksannullatoren hat Einselement. Jeder Ring A mit $|V_A|=3$ und ohne von Null verschiedene Rechtsannullatoren hat ein Linkseinselement. Es gilt in jedem Ring A mit $|V_A|=3$ die Minimalbedingung für Hauptlinksideale.*

BEWEIS ist nach den Vorigen klar.

BEMERKUNGEN 2. 8.

I. Gilt $A(m, n)=\uparrow$ für die natürlichen Zahlen m und n, so gilt auch $A(km, kn)=\uparrow$ für jede natürliche Zahl k.

Das folgt daraus, daß der Faktorring $A_k=I/(p^k)$ des Ringes I der ganzen rationalen Zahlen nach dem Ideal (p^k) Einselement enthält, und die Eigenschaft $|V_{A_k}|=|_{A_k}V|=k$ hat. Es genügt nun im Falle $|V_B|=m$ und $|_BV|=n$ den Ring $A=B\oplus A_k$ zu betrachten.

II. Es seien p eine beliebige Primzahl, k, m, n beliebige natürliche Zahlen mit $m > n$. Ist nun

$$f_1 = 1 + \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{i} \frac{p^{(m-j+1)kn} - 1}{p^{jkn} - 1},$$

bzw.

$$f_2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} \frac{p^{(n-j+1)kn} - 1}{p^{jkn} - 1} + \sum_{i=1}^{(m-n)kn} \prod_{j=1}^{i} \frac{p^{((m-n)n-j+1)k} - 1}{p^{jk} - 1},$$

so läßt sich $A(f_1, f_2) = \uparrow$ oder $\downarrow$ fragen.

III. Gilt $A(3, \mathfrak{m}) = \uparrow$ für eine Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, so erhält man $\mathfrak{m} = 3$, oder $\mathfrak{m} = 5$ bzw. $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Insbesondere gilt also auch $A(3, 4) = \downarrow$.

Das ist eine Folgerung der Vorigen.

IV. Hat ein Ring A nur endlich viele Unterringe, so ist A selbst endlich.

Die in IV erwähnte Ringeigenschaft (d. h. die Existenz nur endlich vieler Unterringe) erbt jeder Unterring und jedes homomorphe Bild von A. Es sei zuerst A halbeinfach. Dann ergibt sich nach dem Satz 2. 3 $A = A_1 \oplus A_2$, wobei $|A_1| < \aleph_0$ und A_2 die direkte Summe von endlich vielen Schiefkörpern ist. Jeder Schiefkörper in A_2 hat eine Charakteristik p und ist absolut algebraisch. Wegen der Maximalbedingung für Unterringe erhält man $|A_2| < \aleph_0$ und somit $|A| < \aleph_0$, wenn A halbeinfach ist. Es sei jetzt A nilpotent. Dann erhält man nach dem Satz 2. 1 gewiß $|A| < \aleph_0$. Ist nun A weder halbeinfach, noch nilpotent, so gilt nach den Vorigen $|A/N| < \aleph_0$ und $|N| < \aleph_0$ folglich auch $|A| < \aleph_0$ (N ist das Radikal von A).

Problem 2. 9. Für welche endliche Paare m, n gilt $A(m, n) = \uparrow$? (m und n sind natürliche Zahlen.)

Problem 2. 10. Man bestimme sämtliche endliche Ringe mit distributiven Verbänden V_A und ${}_AV$.

Problem 2. 11. Gilt die Minimalbedingung für Hauptlinksideale in jedem Ring A mit $|V_A| < \aleph_0$?

Problem 2. 12. Ist A ein direkt unzerlegbarer Ring mit $|V_A| < \aleph_0$ und $|{}_AV| \geqq \aleph_0$, so soll V_A ein distributiver Verband sein?

Problem 2. 13. Ist ${}_AV$ für einen Ring A mit $|V_A| < \aleph_0$ distributiv, so soll auch $|{}_AV| < \aleph_0$ bestehen?

Problem 2. 14. Hat jeder Ring A mit $|V_A| < \aleph_0$, $|{}_AV| \geqq \aleph_0$ und ohne von Null verschiedene Linksannullatoren (Rechtsannullatoren) Einselement (bzw. ein Linkseinselement)?

Problem 2. 15. Ist A ein Ring mit dem Radikal N, und gelten $pA \subseteqq N$ (für eine Primzahl p) und $|V_A| = 3$ bzw. $|{}_AV| \geqq \aleph_0$, so läßt sich das in Bemerkungen 2. 6 I betrachtete additive Faktorsystem $[f_0, g_0]$ immer identisch Null wählen?

§ 3. Über die Radikale der *MHR*-Ringe

Wir haben in [21] bewiesen, daß in jedem *MHR*-Ring das Baersche untere Nilradikal [3] mit dem Jacobsonschen Radikal [13] und somit auch mit dem Levitzkischen Radikal [17] bzw. mit dem oberen Nilradikal [13] von A übereinstimmt.[4] Dabei wurde in [21] sowohl das Brown—McCoysche Radikal [5] als auch das Fuchssche Zeroidradikal [11] der *MHR*-Ringe mit Rechtseinselement betrachtet. (Vgl. noch [22].) In diesem § werden allgemeine Radikale im Sinne von KUROSCH [16] für die Klasse der *MHR*-Ringe untersucht und dabei das Jacobsonsche Radikal eines *MHR*-Ringes betrachtet.

Eine Klasse K assoziativer Ringe wird nach KUROSCH [16] eine Klasse von Radikalringen genannt, wenn für K die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. jedes homomorphe Bild eines Ringes aus K liegt ebenfalls in K;

2. jeder assoziative Ring A enthält ein Ideal B derart, daß für jedes in K fallende Ideal C von A die Beziehung $C \subseteqq B$ gilt;

3. ist B durch 2 bestimmt, so ist $\mathbf{0} = B/B$ das einzige zu K gehörende Ideal des Faktorringes A/B von A nach B.

Ist nun K eine beliebige Klasse von Radikalringen im Sinne von KUROSCH, so sind genau die Ringe aus K die $\mathbf{K}$-Radikalringe, wobei $\mathbf{K}$ die durch die Klasse K definierte Radikaleigenschaft ist.

Sind nun K und L zwei Klassen von Radikalringen und gilt $K \subseteqq L$, so definieren wir für die entsprechenden Radikaleigenschaften durch $\mathbf{K} \leqq \mathbf{L}$ eine Halbordnung. Also gilt $\mathbf{K} \leqq \mathbf{L}$ genau im Falle $K \subseteqq L$. Die Klasse K_0, die nur aus dem Ring $A = 0$ besteht, ist das minimale Element, und die Klasse K_1 aller assoziativen Ringe ist das maximale Element im halbgeordneten System aller Klassen von Radikalringen. Es gilt also $\mathbf{K}_0 \leqq \mathbf{X} \leqq \mathbf{K}_1$ für jede Radikaleigenschaft $\mathbf{X}$. Gilt nun $\mathbf{X} \leqq \mathbf{Y}$ für zwei Radikaleigenschaften, so erhält man für das $\mathbf{X}$-Radikal $A_{\mathbf{X}} \in X$ von A und das $\mathbf{Y}$-Radikal $A_{\mathbf{Y}} \in Y$ von A offensichtlich $A_{\mathbf{X}} \subseteqq A_{\mathbf{Y}}$ für jeden Ring A.

Es seien jetzt P und Q zwei beliebige Ringklassen, die i. a. keine Klassen von Radikalringen im Sinne von KUROSCH sind. Nehmen wir an, daß jedes von Null verschiedene Ideal jedes Ringes aus Q sich auf einen von Null verschiedenen Ring aus Q homomorph abbilden läßt. Dann können nach KUROSCH [16] gewisse Radikaleigenschaften $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ mit den folgenden Bedingungen definiert werden:

1. jeder Ring aus P ist ein $\mathbf{P}$-Radikalring, und es gilt $\mathbf{P} \leqq \mathbf{X}$ für jede Radikaleigenschaft $\mathbf{X}$, für die jeder Ring aus P ein $\mathbf{X}$-Radikalring ist;

2. jeder Ring aus Q ist $\mathbf{Q}$-halbeinfach (d. h. das $\mathbf{Q}$-Radikal ist für jeden Ring aus Q das Nullideal), und es gilt $\mathbf{Q} \geqq \mathbf{Y}$ für jede Radikaleigenschaft $\mathbf{Y}$, für die jeder Ring aus Q ein $\mathbf{Y}$-halbeinfacher Ring ist.

$\mathbf{P}$ (bzw. $\mathbf{Q}$) wird die durch die Klasse P (bzw. Q) erklärte untere (bzw. obere) Radikaleigenschaft genannt.

Nun betrachten wir einige Spezialfälle.

[4] Wie üblich, wird unter dem klassischen Radikal $N_1(A)$ eines Ringes A die Summe aller nilpotenten Rechtsideale von A verstanden, das für Artinsche Ringe bekanntlich mit dem Jacobsonschen Radikal $A_{\mathbf{J}}$ von A übereinstimmt. Ist nun $N_{\beta+1}/N_\beta = N_1(A/N_\beta)$ und $N_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$ für eine Limeszahl α, so läßt sich fragen: Gibt es zu jeder Ordnungszahl δ einen *MHR*-Nilring A mit $\boldsymbol{N}_\delta = \boldsymbol{A}$ und $N_\gamma \neq A$ für $\gamma < \delta$?

Es sei **Z** die durch die Klasse aller Zeroringe von Primzahlordnung erzeugte untere Radikaleigenschaft.

Es sei **D** die durch die Klasse derjenigen nilpotenten Ringe erzeugte untere Radikaleigenschaft, die (Jacobsonsche) Radikale Artinscher Ringe sind; offensichtlich ist $A_{\mathbf{D}}$ in A das Divinskysche Radikal [8].

Es sei **B** die durch die Klasse aller nilpotenten Ringe erzeugte untere Radikaleigenschaft; $A_{\mathbf{B}}$ ist in A bekanntlich das Baersche untere Nilradikal [3].

Es sei **M** die durch die Klasse derjenigen Nilringe erzeugte untere Radikaleigenschaft, die (Jacobsonsche) Radikale von *MHR*-Ringen sind.

Es sei **N** die durch die Klasse aller Nilringe erzeugte untere Radikaleigenschaft; $A_{\mathbf{N}}$ ist offensichtlich das obere Nilradikal von A [13].

Es sei **U** die durch die Klasse aller Artinschen einfachen Ringe erzeugte obere Radikaleigenschaft.

Es sei **T** die durch die Klasse aller einfachen *MHR*-Ringe erzeugte obere Radikaleigenschaft.

Nun gilt der folgende

SATZ 3. 1. *Für jeden MHR-Ring A stimmt eine Radikaleigenschaft* **R** *dann und nur dann mit dem Jacobsonschen Radikaleigenschaft* **J** *überein, wenn* $\mathbf{M} \leqq \mathbf{R} \leqq \mathbf{T}$ *gilt.*

BEWEIS. Ist $A_{\mathbf{R}} = A_{\mathbf{J}}$ für jeden *MHR*-Ring A, so sind alle **J**-halbeinfachen einfachen *MHR*-Ringe auch **R**-halbeinfach, und somit gilt nach der Definition von **T** offensichtlich $\mathbf{T} \geqq \mathbf{R}$. Ferner ist jeder solche Nilring, der das Jacobsonsche Radikal eines *MHR*-Ringes ist, ebenfalls ein **R**-Radikalring, woraus nach der Definition von **M** auch $\mathbf{R} \leqq \mathbf{M}$ folgt.

Bestehe nun umgekehrt $\mathbf{M} \leqq \mathbf{R} \leqq \mathbf{T}$, und sei A ein beliebiger *MHR*-Ring. Es gilt nach der Voraussetzung $A_{\mathbf{M}} \subseteqq A_{\mathbf{R}} \subseteqq A_{\mathbf{T}}$, und nach der Definition von **T** ergibt sich auch $A_{\mathbf{J}} \subseteqq A_{\mathbf{T}}$. Andererseits ist $A/A_{\mathbf{J}}$ nach [21] die direkte Summe von **J**-halbeinfachen einfachen *MHR*-Ringen, und $A_{\mathbf{T}}/A_{\mathbf{J}}$ ist ein Ideal dieser direkten Summe. Hiernach kann $A_{\mathbf{T}}$ im Falle $A_{\mathbf{T}} \neq A_{\mathbf{J}}$ homomorph auf einen **T**-halbeinfachen einfachen *MHR*-Ring abgebildet werden, was unmöglich ist. Also gilt $A_{\mathbf{T}} = A_{\mathbf{J}}$. Ferner ergibt sich wegen $\mathbf{M} \leqq \mathbf{J}$ auch $A_{\mathbf{M}} \subseteqq A_{\mathbf{J}}$. Da $A_{\mathbf{J}}$ ein Nilring und das Jacobsonsche Radikal eines *MHR*-Ringes ist, erhält man nach der Definition von **M** offensichtlich $A_{\mathbf{M}} = A_{\mathbf{J}}$. Somit gelten $A_{\mathbf{T}} = A_{\mathbf{J}} = A_{\mathbf{M}}$ und wegen $\mathbf{M} \leqq \mathbf{R} \leqq \mathbf{T}$ auch $A_{\mathbf{R}} = A_{\mathbf{J}}$, w. z. b. w.

Bezeichnet $(B:A)_l$ (bzw. $(B:A)_r$) die Menge aller $x \in A$ mit $xA \subseteqq B$ (bzw. $Ax \subseteqq B$) für ein zweiseitiges Ideal B eines beliebigen Ringes A, so ergibt sich der folgende

SATZ 3. 2. *Ist A ein MHR-Nilring, in dem $B \neq (B:A)_l \cap (B:A)_r$ für jedes echte zweiseitige Ideal B von A gilt, so ist A ein* **Z**-*Radikalring.*

BEWEIS. Nach der Voraussetzung existiert ein $x \notin B$ mit $xA \subseteqq B$ und $Ax \subseteqq B$ für jedes Ideal B von A. Dann läßt sich das Ideal $(x+B)$ des Faktorringes A/B von A nach B auf einen Zeroring von Primzahlordnung homomorph abbilden, woraus folgt, daß A „vom zweiten Grade über die Klasse Z" im Sinne von KUROSCH [16] ist. Also ist A nach [16] ein **Z**-Radikalring, w. z. b. w.

BEMERKUNGEN 3. 3. Nach einem Beispiel von DIVINSKY [8] existiert ein Artinscher Ring A derart, daß A kein **N**-Radikalring ist, und dass $A_{\mathbf{J}}$ ein **Z**-halbeinfacher Ring ist. Ferner gilt offensichtlich

$$\mathbf{Z} \leqq \mathbf{D} \leqq \mathbf{M} \leqq \mathbf{B} \leqq \mathbf{N} \leqq \mathbf{J} \leqq \mathbf{T} \leqq \mathbf{U}.$$

DIVINSKY [8] hat $\mathbf{Z} \neq \mathbf{D}$ gezeigt. Ob $\mathbf{D} = \mathbf{M}$ oder $\mathbf{D} \neq \mathbf{M}$ gilt, ist noch eine offene Frage. Ferner wissen wir ebenfalls nicht, ob $\mathbf{M} = \mathbf{B}$ oder $\mathbf{M} \neq \mathbf{B}$ besteht. Existiert aber ein Ring A mit $A_{\mathbf{M}} \neq A_{\mathbf{B}}$, so gibt es schon einen MHR-Ring A' mit $A'_{\mathbf{M}} \neq A'_{\mathbf{B}}$. Von BAER [3] wurde $\mathbf{B} \neq \mathbf{N}$ bewiesen. Ferner zeigt das Beispiel aller rationalen Zahlen mit ungeraden Nennern die Beziehung $\mathbf{N} \neq \mathbf{J}$. Es seien A der Ring aller linearen Transformationen eines Vektorraumes von der Dimension $\aleph_0$ über einem Schiefkörper, und A_0 das Ideal aller linearen Transformationen von endlichem Rang. Dann gilt in $F = A/A_0$ offensichtlich $F_{\mathbf{J}} \neq F_{\mathbf{T}}$, und somit ergibt sich $\mathbf{J} \neq \mathbf{T}$. Da im Ring A_0 aber $(A_0)_{\mathbf{T}} \neq (A_0)_{\mathbf{U}}$ gilt, erhält man $\mathbf{T} \neq \mathbf{U}$.

Es gilt der folgende

SATZ 3. 4. *Ist $A_{\mathbf{J}}$ das Jacobsonsche Radikal eines MHR-Ringes A, so existiert eine Ordnungszahl α mit $A_{\mathbf{J}}^{\alpha} = 0$.*

BEWEIS. Es sei $A (\neq 0)$ ein beliebiger MHR-Ring. Da jedes von Null verschiedene Rechtsideal eines beliebigen von Null verschiedenen homomorphen Bildes von A ein von Null verschiedenes minimales Rechtsideal enthält, existiert nach BAER [3] eine Ordnungszahl β mit $A_\beta = A$, wobei $A_1 = A_1(A)$ der Rechtssockel von A und $A_{\gamma+1}/A_\gamma = A_1(A/A_\gamma)$ bzw. $A_\delta = \bigcup_{\beta < \delta} A_\beta$ für eine Limeszahl δ. Ebenfalls nach BAER [3] gilt $A_\gamma \cdot A_{\mathbf{J}}^{\gamma} = 0$ für jedes γ, und insbesondere auch $A_\beta \cdot A_{\mathbf{J}}^{\beta} = 0$. Daher gewinnen wir $A_{\mathbf{J}}^{\beta+1} = A_{\mathbf{J}} \cdot A_{\mathbf{J}}^{\beta} \subseteqq A \cdot A_{\mathbf{J}}^{\beta} = A_\beta \cdot A_{\mathbf{J}}^{\beta} = 0$ und somit auch $A_{\mathbf{J}}^{\beta} = 0$.

Ist nun α eine minimale Ordnungszahl mit $A_{\mathbf{J}}^{\alpha} = 0$, so ergibt sich $A_{\mathbf{J}}^{\gamma} \neq 0$ für $\gamma < \alpha$.

SATZ 3. 5. *Es sei A ein beliebiger MH_1R-Radikalring. Dann ist jeder Unterring B von A ebenfalls ein MH_1R-Ring. Ferner gilt in einem MH_1R-Radikalring A die Minimalbedingung für diejenigen additiven Untergruppen von A^+, die in einem Hauptrechtsideal von A liegen.*

BEWEIS. A ist nach [21] ein Nilring, und es gibt nach dem Satz 3. 4 eine Ordnungszahl α mit $A^\alpha = 0$ und $A^\beta \neq 0$ für $\beta < \alpha$. Es sei Z_γ der Linksannullator von A^γ. Dann gilt $Z_{\beta_1} \subseteqq Z_{\beta_2}$ für $\beta_1 \leqq \beta_2$ und $Z_\alpha = A$. Nehmen wir an, daß B kein MH_1R-Ring ist. Dann existiert ein minimaler Index β_0 derart, daß es ein Element $b_0 \in B$ und eine echt absteigende unendliche Rechtsidealkette

$$(\ast) \qquad R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset R_4 \supset \dots$$

des Ringes B mit $R_1 \subseteqq Z_{\beta_0}$ und $R_1 \subseteqq \{b_1\} + b_0 B$ gibt. Die Existenz eines solchen Indexes β_0 folgt aus der Voraussetzung, und aus $b_0 \in Z_\alpha = A$. Wegen der Minimalität ist β_0 keine Limeszahl. Ferner kann auch $\beta_0 \geqq 2$ folgendermaßen bewiesen werden. Im Falle $\beta_0 = 1$ ist nämlich $R_1 \subseteqq Z_1$, und wegen $R_i A = 0$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ ist jedes R_i ein Rechtsideal schon von A, und die Existenz solcher Kette $(\ast)$ in A ist für einen MH_1R-Ring A unmöglich. Also gilt wirklich $\beta_0 \geqq 2$ und dabei ist β_0 keine Limeszahl. Hiernach gibt es einen Index γ mit $\beta_0 = \gamma + 1$. Es sei jetzt

$C^\varphi = C + CA$ für jeden Unterring C von A; offensichtlich ist C^φ das durch C in A erzeugte Rechtsideal. Da A ein MH_1R-Ring ist, und $\{b_0\}^\varphi \supseteq R_i^\varphi \supseteq R_{i+1}^\varphi$ für jedes i, existiert ein Index k mit $R_l^\varphi = R_k^\varphi$ für jedes $l \geqq k$. Wegen $R_i A \subseteq Z_{\beta_0} A = Z_{\gamma+1} A \subseteq Z_\gamma$ ergibt sich

$$R_l + Z_\gamma = R_k + Z_\gamma \quad \text{für jedes} \quad l \geqq k.$$

Da der Untergruppenverband von A^+ modular ist, erhält man wegen $(*)$ offensichtlich die echt absteigende unendliche Kette

$$D_k \supset D_{k+1} \supset D_{k+2} \supset D_{k+3} \supset \ldots$$

der Rechtsideale $D_i = R_i \cap Z_\gamma$ von B in Z_γ, das wegen $\beta_0 < \gamma$ und $D_i \subseteq \{b_0\} + b_0 B$ der Minimalität von β_0 widerspricht. Also muß B ebenfalls ein MH_1R-Ring sein. Die letzte Behauptung des Satzes 3. 5 läßt sich ganz ähnlich beweisen.

BEMERKUNG 3. 6. In [21] wurde ein Beispiel für einen MHR-Ring gegeben, der kein MH_1R-Ring ist. Es ist aber eine offene Frage, ob es einen MHR-Nilring gibt, der kein MH_1R-Ring ist.

PROBLEM 3. 7. Ist jeder MHR-Nilring ein **Z**-Radikalring?

PROBLEM 3. 8. Ist jeder **M**-Radikalring auch ein **D**-Radikalring?

PROBLEM 3. 9. Ist jeder **B**-Radikalring auch ein **M**-Radikalring?

(Hierbei können wegen $\mathbf{D} \neq \mathbf{B}$ nicht beide Probleme 3. 8 und 3. 9 mit „ja” beantwortet werden.)

§ 4. Über die rechtsseitig vollständig reduziblen Ringe

Ein Ring A heißt rechtsseitig vollständig reduzibel, wenn er als A-Rechtsmodul vollständig reduzibel ist, d. h. A ist eine diskrete direkte Summe seiner minimalen Rechtsideale. Ein solcher Ring braucht nicht halbeinfach im Sinne von JACOBSON zu sein. Jeder vollständig reduzible Ring ist ein MHR-Ring. Das Umgekehrte ist nach dem Beispeil des Faktorringes $I/(p^2)$ des Ringes I der ganzen rationalen Zahlen nach seinem Ideal (p^2) ungültig. Jedoch ist jeder halbeinfache MHR-Ring rechtsseitig vollständig reduzibel.

Zuerst möchte ich die erste Behauptung aus den „Bemerkungen” meiner Arbeit ([21], S. 421) berichtigen, wobei ich ein Glied D weggelassen habe. Die richtige Behauptung lautet folgendermaßen:

BEHAUPTUNG 4. 1. *Ist jedes Rechtsideal R eines Ringes A, als eines A-Rechtsmoduls ein rechtsseitiger direkter Summand, dann ist A rechtsseitig vollständig reduzibel, und zwar gilt: $A = B + C + D$, wobei B, C und D Rechtsideale von A, ferner B ein halbeinfacher MHR-Ring, C ein Zeroring auf einer elementaren Gruppe* [10] *und D eine Summe von nilpotenten minimalen Rechtsidealen R^* von A mit $R^* A = R^*$ ist.*

Der Beweis dieser Tatsache kann durch übliche Methoden erledigt werden (s. z. B. JACOBSON [13], CARTAN—EILENBERG [6] bzw. KERTÉSZ [14]).

Nun zeigt das folgende Beispiel, daß D im allgemeinen nicht weggelassen werden kann:

Im Matrizenring des Typs 3×3 über dem rationalen Zahlkörper K_0 nehmen wir den durch die Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Vektorraum $A = K_0M_1 + K_0M_2$, der ein Unterring ist. Dann sind sowohl K_0M_1, als auch K_0M_2 minimale Rechtsideale von A, also ist A rechtsseitig vollständig reduzibel. Dann gilt für $D = K_0M_2$ offensichtlich $D \neq 0$, $D^2 = 0$, $DA = D$ und D^+ ist dabei keine elementare Gruppe.

Wir möchten jetzt die Artinschen halbeinfachen Ringe in der Klasse der MHR-Ringe mit Einselement modultheretisch charakterisieren.

Für einen Ring A (der i. a. kein Einselement zu besitzen braucht) und für einen A-Rechtsmodul M sei $\Phi(M)$ der Frattinische Untermodul von M, und $K(M)$ die Menge aller $m \in M$ mit $mA \subseteqq \Phi(M)$. Offensichtlich ist $K(M)$ ein A-Untermodul von M, den in seiner Arbeit [15] A. KERTÉSZ ausführlich betrachtet hat. $K(M)$ hat Radikaleigenschaften, und $K(M)$ heißt Kertészsches Radikal des A-Moduls M. In [23] habe ich gezeigt, daß $K(A)$ in einem Ring A (als in einem A-Rechtsmodul A) i. a. vom Jacobsonschen Radikal verschieden ist. Jedoch wurde früher für gewisse Ringe A von KERTÉSZ [15] $K(A) = A_J$ gezeigt.

DEFINITION 4. 2. Ein beliebiger Ring A wird ein K-Ring genannt, wenn für jeden A-Rechtsmodul M das Kertészsche Radikal $K(M)$ der Bedingung $K(M) \cdot A = 0$ genügt.

Es gilt der folgende

SATZ 4. 3. *Ein MHR-Ring A mit Einselement ist dann und nur dann ein K-Ring, wenn A ein halbeinfacher Artinscher Ring ist.*

BEWEIS. Es sei der MHR-Ring A mit Einselement ein K-Ring. Dann gilt insbesondere auch $K(A) \cdot A = 0$, und wegen $1 \in A$ auch $K(A) = 0$. Ebenfalls wegen $1 \in A$ ergibt sich $\Phi(A) = A_J$. Da wegen $K(A) = 0$ aus $a \cdot A \subseteqq A_J$ immer $a = 0$ folgt, erhält man wegen $A_JA \subseteqq A_J$ auch $A_J = 0$. Somit ist A ein halbeinfacher MHR-Ring, und wegen $1 \in A$ ist auch A ein halbeinfacher Artinscher Ring.

Umgekehrt sei A ein halbeinfacher Artinscher Ring. Dann gilt $1 \in A$, und für jeden A-Rechtsmodul M ergibt sich die Peircesche Zerlegung $M = M_0 + M_1$ mit $M_0A = 0$ und $m_1 \cdot 1 = m_1$ für jedes $m_1 \in M_1$. Da nach [15] $K(M) = K(M_0) + K(M_1)$ gilt, und da offensichtlich $K(M_0) = M_0$ und $K(M_1) = 0$ bestehen, erhält man $K(M) = M_0$ und somit $K(M) \cdot A = 0$, w. z. b. w.

BEMERKUNG 4. 4. Es sei A ein halbeinfacher und einfacher MHR-Ring, eA $(e^2 = e \neq 0)$ ein idempotentes minimales Rechtsideal von A. Bekanntlich ist dann $S = eAe$ ein Schiefkörper. Jetzt möchte ich offene Fragen aufwerfen.

PROBLEM 4. 5. Haben der Linksvektorraum eA und der Rechtsvektorraum Ae über S immer dieselbe Dimension?

PROBLEM 4. 6. Gibt es einen K-Ring, der kein MHR-Ring mit Einselement ist? (Es sind alle K-Ringe explizit zu bestimmen!)

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST

(Eingegangen am 7. April 1962; — in veränderter Form am 20. März 1963.)

Literaturverzeichnis

[1] S. A. AMITSUR, A general theory of radicals. I, *Amer. Jour. Math.*, **74** (1952), S. 774—786; II, *Amer. Jour. Math.*, **76** (1954), S. 100—125; III, *Amer. Jour. Math.*, **76** (1954), S. 126—136.
[2] E. Artin—C. J. NESBITT—R. M. THRALL, *Rings with minimum condition* (Michigan, 1944).
[3] R. BAER, Radical ideals, *Amer. Journ. Math.*, **65** (1943), S. 537—568.
[4] N. BOURBAKI, Élements de Mathématique, I. Les structures fondamentales de l'analyse, Livre II., Algèbre, Chapitre 8, Modules et anneaux semi-simples, Actualités scientifiques et industrielles (Paris, 1958).
[5] B. BROWN—N. H. MCCOY, Radicals and subdirect sums, *Amer. Jour. Math.*, **69** (1947), S. 46—58.
[6] H. CARTAN—S. EILENBERG, *Homological algebra* (Princeton, 1956).
[7] J. DIEUDONNÉ, Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis, *Bull. Soc. Math. France*, **70** (1942), S. 46—75.
[8] N. DIVINSKY, General radicals that coincide with the classical radical on rings with D. D. C., *Canadian Jour. Math.*, **13 : 4** (1961), S. 639—644.
[9] C. J. EVERETT, An extension theory for rings, *Amer. Journ. Math.*, **64** (1942), S. 363—370.
[10] L. FUCHS, *Abelian groups* (Budapest, 1958).
[11] L. FUCHS, On a new type of radical, *Acta Sci. Math. Szeged*, **16** (1955), S. 43—53.
[12] L. FUCHS—T. SZELE, On Artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged*, **17** (1956), S. 30—40.
[13] N. JACOBSON, *Structure of rings* (Providence, 1956).
[14] A. KERTÉSZ, Beträge zur Theorie der Operatormoduln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), S. 235—257.
[15] A. KERTÉSZ, Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében. III (Untersuchungen in der Theorie der Operatormoduln, Ungarisch), *M. T. A. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei*, **9** (1959), S. 105—120.
[16] A. G. KUROSCH, Radikale der Ringe und der Algebren, *Mat. Sbor.*, **33 (75)** (1953), S. 13—26 (Russisch).
[17] J. LEVITZKI, On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), S. 463—466.
[18] L. RÉDEI, *Algebra. I* (Leipzig, 1959).
[19] O. STEINFELD, Bemerkungen zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 479—484.
[20] F. SZÁSZ, Note on rings in which every proper left ideal is cyclic, *Fund. Math.*, **44** (1957), S. 330—332.
[21] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale. I, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), S. 54—64; II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), S. 417—439.
[22] F. SZÁSZ, Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe, *Archiv der Math.*, **12** (1961), S. 282—289.
[23] F. SZÁSZ, Az operátormodulusok Kertész-féle radikáljáról (Über das Kertészsche Radikal der Operatormoduln, Ungarisch), *M. T. A. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei*, **10** (1960), S. 35—38.
[24] F. SZÁSZ, Szele Tibor egy gyűrűelméleti problémájának megoldása (Die Lösung eines ringtheoretischen Problems von Tibor Szele, Ungarisch), *M. T. A. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei*, **12** (1962), S. 47—50.
[25] T. SZELE, Die Ringe ohne Linksideale, *Bul. Stii. Acad. Popul. Repub. Romane*, **1** (1949), S. 783—789.
[26] T. SZELE, On nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), S. 71—78.