

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Bilancio energetico ed irreversibilità in termodinamica dei continui

Relatore:  
Prof. Roberto Zucchini

Presentata da:  
Federica Pompa

Anno Accademico 2016/2017



*A mia madre e mio padre, che sempre mi  
hanno sostenuta ed incoraggiata.*



# Abstract

Molti sistemi fisici sono descritti, con ottima approssimazione, come sistemi continui, nei quali è trascurata la descrizione della struttura molecolare della materia costituente. La loro descrizione, tuttavia, deve essere arricchita, precisando quelle che sono tutte le altre proprietà caratterizzanti il continuo fisico, quali, ad esempio, la massa, la velocità, la temperatura e la pressione. Ciò viene fatto introducendo, nelle regioni occupate dal continuo, opportuni campi, scalari e tensoriali, corrispondenti a caratteristiche grandezze fisiche le cui leggi di bilancio sono formulate in modo tale da possedere carattere universale: valide per ogni continuo in ogni riferimento da cui lo si studia.

A livello meccanico, la trattazione del continuo fisico è basata sui concetti di volume e superficie materiali, in grado di muoversi e deformarsi nello spazio e nel tempo. A livello termodinamico, l'impossibilità di attribuire un valore globale alle grandezze intensive di una porzione estesa di continuo non in equilibrio porta al bisogno di ripartire quest'ultima in porzioni infinitesime, ciascuna approssimativamente in equilibrio termodinamico, nelle quali i diversi campi possono essere definiti con continuità in ogni punto.

Tuttavia le sole leggi di bilancio non risultano sufficienti per studiare compiutamente il comportamento di uno specifico continuo: ad esse si affiancano le relazioni costitutive, caratteristiche di ciascun mezzo, che legano tra loro i diversi campi introdotti nella trattazione.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ix</b>
<b>1 Cinematica dei mezzi continui</b>	<b>1</b>
1.1 Continuo meccanico . . . . .	1
1.2 Descrizioni euleriana e lagrangiana . . . . .	2
1.3 Legge di bilancio: formalismo generale . . . . .	2
<b>2 Meccanica dei mezzi continui</b>	<b>5</b>
2.1 Bilancio della massa . . . . .	5
2.2 Bilancio dell'impulso . . . . .	6
2.3 Bilancio del momento angolare . . . . .	7
<b>3 Termodinamica dei mezzi continui</b>	<b>9</b>
3.1 Bilancio dell'energia . . . . .	10
3.1.1 Lavoro meccanico . . . . .	13
3.2 Bilancio dell'entropia . . . . .	14
3.2.1 Principio di Prigogine . . . . .	16
3.2.2 Fluidi viscosi . . . . .	17
<b>4 Relazioni costitutive</b>	<b>21</b>
4.1 Metodo di Coleman e Noll applicato ai fluidi viscosi . . . . .	21
4.1.1 Modello fluido di Navier-Stokes . . . . .	23
<b>A Teorema del trasporto di Reynolds</b>	<b>25</b>
<b>B Tensore di stress</b>	<b>29</b>
<b>C Decomposizione di tensori</b>	<b>31</b>
<b>D Espressione per <math>N_{Sup}</math></b>	<b>33</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>





# Introduzione

Questa tesi ha lo scopo di trattare quelli che in fisica sono chiamati mezzi continui, cioè sistemi fisici macroscopici le cui proprietà fisiche sono descritte trascurando la struttura molecolare della materia che li costituisce. Matematicamente, un mezzo continuo è rappresentato come un insieme di punti materiali, cioè porzioni infinitesime di continuo che, ad ogni istante di tempo, corrispondono a punti geometrici dello spazio fisico, le cui proprietà fisiche sono descritte mediante campi scalari o tensoriali. Le relazioni descrittive che ne governano la fisica sono formulate in maniera tale da mantenere la loro validità indipendentemente dal sistema di coordinate utilizzato. Esse costituiscono le cinque leggi fondamentali, di carattere sia meccanico che termodinamico, valide universalmente per tutti i continui osservati in natura:

- legge di bilancio della massa;
- legge di bilancio dell'impulso;
- legge di bilancio del momento angolare;
- legge di bilancio dell'energia;
- legge di bilancio dell'entropia.

Il loro sviluppo analitico, tuttavia, mostra che esse non sono sufficientemente numerose per determinare completamente tutti i campi incogniti. È risultato necessario, quindi, affiancare alle fondamentali le relazioni costitutive tra i diversi campi, derivate sperimentalmente e valide per specifici continui in particolari regimi. La trattazione è articolata in quattro capitoli:

**IL PRIMO CAPITOLO** introduce, in termini generali, la teoria ed il formalismo utilizzato per derivare le leggi di bilancio precedentemente citate. Di notevole importanza è risultato essere il teorema del trasporto di Reynolds, introdotto in Appendice A, il cui utilizzo ha permesso di valutare la variazione temporale di grandezze fisiche tenendo conto del moto associato a volumi e superfici materiali considerati.

**IL SECONDO CAPITOLO** è dedicato alla meccanica dei mezzi continui: in esso sono trattate le leggi di bilancio di massa, impulso e momento angolare.

**IL TERZO CAPITOLO** tratta lo studio della termodinamica dei mezzi continui effettuato tramite una ripartizione, in porzioni infinitesime, del volume materiale considerato. In questo capitolo sono trattate le leggi di bilancio di energia, entropia ed è riportato il principio di Prigogine che porta alla formulazione della disuguaglianza di Clausius-Duhem con un'applicazione legata ai fluidi viscosi.

**IL QUARTO CAPITOLO** è dedicato alle relazioni costitutive ed al metodo di Coleman e Noll applicato ai fluidi viscosi precedentemente trattati.

# Capitolo 1

## Cinematica dei mezzi continui

### 1.1 Continuo meccanico

Lo studio della fisica dei mezzi continui è esteso in maniera generale ai cosiddetti continui deformabili, corpi ai quali sono applicate delle forze e che quindi si muovono nello spazio e nel tempo, presentando una variazione continua delle grandezze meccaniche che li caratterizzano. La configurazione di un mezzo continuo è descritta attraverso la posizione dello spazio occupata da ciascuno dei suoi punti materiali in funzione del tempo.

Si supponga, ad esempio, che all'istante  $t_0$  un punto materiale si trovi nella posizione  $\mathbf{x}_0$  dello spazio. Ad un istante successivo  $t$  esso si sarà mosso, portandosi nella posizione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t);$$

che, a meno di eventuali discontinuità del mezzo, è una funzione differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e  $t$  ed invertibile, con inversa:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t);$$

a sua volta differenziabile in  $\mathbf{x}$  e  $t$  a meno di discontinuità.

È possibile definire il vettore velocità di spostamento di un punto materiale che all'istante  $t$  si trova nella posizione  $\mathbf{x}$  come segue:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \right|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)}.$$

Esso costituisce un campo di velocità dipendente dalla posizione  $\mathbf{x}$  dei punti materiali e dal tempo  $t$  in cui la si valuta.

È importante introdurre i concetti di volume e superficie materiali per poter valutare l'evoluzione temporale di quantità definite come integrali su di essi di densità caratterizzanti la grandezza.

Un volume materiale  $\mathcal{V}$  è definito come l'insieme dei punti materiali  $\mathbf{x}$  cui succede di trovarsi, all'istante  $t_0$ , nel punto geometrico  $\mathbf{x}_0$  appartenente ad un volume geometrico fisso  $\mathcal{V}_0$ :

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) | \mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}_0\}. \quad (1.1)$$

Tale volume materiale può deformarsi nello spazio e nel tempo, tuttavia è composto, istante per istante, dallo stesso numero di particelle materiali costituenti inizialmente il continuo.

È possibile introdurre una definizione analoga di superficie materiale  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) | \mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}_0\},$$

con  $\mathcal{A}_0$  superficie geometrica fissa. Ad ogni volume materiale è associato un volume geometrico, quello istantaneamente occupato dal volume materiale stesso. Analogamente, ad ogni superficie materiale ne corrisponde una geometrica.

## 1.2 Descrizioni euleriana e lagrangiana

Le proprietà caratterizzanti campi scalari e vettoriali tipici della descrizione dei mezzi continui, possono essere studiate seguendo due metodi di indagine cinematica:

- il metodo euleriano (o locale), basato sulla determinazione del moto e delle sue variazioni in ogni punto dello spazio;
- il metodo lagrangiano (o materiale), proprio della meccanica classica, che si focalizza sullo studio delle traiettorie delle singole particelle.

Dato un campo arbitrario  $f$ , le relazioni che legano le sue descrizioni euleriana  $f_E(\mathbf{x}, t)$  e lagrangiana  $f_L(\mathbf{x}_0, t)$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} f_E(\mathbf{x}, t) &= f_L(\mathbf{x}_0, t) |_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)}; \\ f_L(\mathbf{x}_0, t) &= f_E(\mathbf{x}, t) |_{\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}. \end{aligned}$$

Nella trattazione euleriana le proprietà di campo vengono definite in funzione delle coordinate spaziali  $(\mathbf{x}, t)$ , caratterizzanti un singolo punto dello spazio in cui, al variare del tempo, vengono a trovarsi particelle di continuo diverse.

L'approccio lagrangiano si fonda invece sul concetto di elemento materiale, porzione di continuo in moto solidale con lo stesso e quindi costituita dalle stesse particelle componenti. Le proprietà del campo sono quindi definite in funzione delle coordinate materiali  $(\mathbf{x}_0, t)$ , descrittive del comportamento dinamico del volume materiale considerato, individuato dalla posizione  $\mathbf{x}_0$  ad un istante  $t$  fissato.

## 1.3 Legge di bilancio: formalismo generale

Si consideri un mezzo continuo in moto nel tempo a velocità  $\mathbf{v}$  e si consideri una sua porzione materiale che al tempo  $t$  occupa una regione spaziale di volume  $\mathcal{V}$ . È possibile definire con  $f(\mathcal{V}, t)$ , il valore, al tempo  $t$ , di un'arbitraria grandezza fisica misurabile del mezzo continuo avente le seguenti proprietà:

- è localizzabile, cioè per ogni porzione di continuo di volume  $\mathcal{V}$  è sempre definita

$$f = f(\mathcal{V});$$

### 1.3. LEGGE DI BILANCIO: FORMALISMO GENERALE

- è estensiva, cioè per ogni porzione di continuo, il cui volume  $\mathcal{V}$  è dato dall'unione di due sezioni  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  non interagenti,

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset \end{cases}$$

si ha che

$$f(\mathcal{V}) = f(\mathcal{V}_1) + f(\mathcal{V}_2);$$

- ha definito un flusso  $\Phi_f(\mathcal{A})$ , descrittivo della quantità di  $f$  che fluisce nell'unità di tempo attraverso una superficie  $\mathcal{A}$  orientata, secondo la normale  $\mathbf{n}$ , dal lato negativo a quello positivo della frontiera  $\partial\mathcal{V}$  di continuo, come rappresentato in Figura 1.1. Tale flusso è estensivo:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset \end{cases}$$

si ha che

$$\Phi_f(\mathcal{A}) = \Phi_f(\mathcal{A}_1) + \Phi_f(\mathcal{A}_2);$$

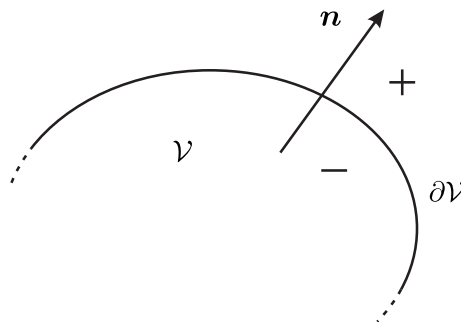
- ha definito un rateo di produzione  $\Pi_f(\mathcal{V})$  che descrive la quantità di  $f$  prodotta nel volume materiale  $\mathcal{V}$  del continuo. Anch'esso è estensivo:

$$\Pi_f(\mathcal{V}) = \Pi_f(\mathcal{V}_1) + \Pi_f(\mathcal{V}_2);$$

- obbedisce all'equazione di bilancio

$$\frac{df(\mathcal{V})}{dt} = \Pi_f(\mathcal{V}) - \Phi_f(\partial\mathcal{V}), \quad (1.2)$$

che descrive come il tasso di variazione di  $f$  in  $\mathcal{V}$  è dato dalla quantità di  $f$  prodotta in  $\mathcal{V}$  nell'unità di tempo alla quale viene sottratta la quantità di  $f$  uscente da  $\mathcal{V}$  attraverso la frontiera  $\partial\mathcal{V}$  nell'unità di tempo.



**Figura 1.1:** Orientazione della normale  $\mathbf{n}$ , uscente dalla frontiera  $\partial\mathcal{V}$ .

L'estensività permette di definire come segue le densità di massa  $\rho_f$ , flusso  $\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n}$  e rateo di produzione  $\pi_f$  rispettivamente associate ad  $f$ ,  $\Phi_f$  e  $\Pi_f$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\text{Vol}(\mathcal{V}) \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} \in \mathcal{V}}} \frac{f(\mathcal{V})}{\text{Vol}(\mathcal{V})} \\ \mathbf{J}_f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\substack{\text{Area}(\mathcal{A}) \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \mathbf{n} \perp \mathcal{A}}} \frac{\Phi_f(\mathcal{A})}{\text{Area}(\mathcal{A})} \\ \pi_f(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\text{Vol}(\mathcal{V}) \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} \in \mathcal{V}}} \frac{\Pi_f(\mathcal{V})}{\text{Vol}(\mathcal{V})} \end{array} \right.$$

In termini di tali densità è possibile riscrivere l'equazione (1.2):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_f \, d^3x = \int_{\mathcal{V}} \pi_f \, d^3x - \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n} \, d^2x . \quad (1.3)$$

L'applicazione del teorema del trasporto di Reynolds, dimostrato in Appendice A, permette di riscrivere il termine a sinistra come segue:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_f \, d^3x = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) \right] d^3x ,$$

tenendo conto del fatto che  $\mathcal{V}$  ed  $\mathcal{A}$  sono volumi ed aree materiali, in moto nel tempo alla stessa velocità con cui si muove il mezzo continuo. Applicando il teorema della divergenza all'ultimo termine di equazione (1.3), è possibile ricondurre l'integrale di superficie del flusso  $\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{n}$  ad integrale di volume della sua divergenza:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) \right] d^3x = \int_{\mathcal{V}} [\pi_f - \nabla \cdot \mathbf{J}_f] \, d^3x .$$

Portando tutto al primo membro si ottiene l'espressione differenziale dell'equazione di bilancio:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v} + \mathbf{J}_f) - \pi_f = 0 . \quad (1.4)$$

Tale equazione può essere applicata a tutte le grandezze  $f$  caratterizzanti il continuo; meccaniche quali la massa, l'impulso ed il momento angolare e termodinamiche quali l'energia e l'entropia.

# Capitolo 2

## Meccanica dei mezzi continui

### 2.1 Bilancio della massa

Data una porzione di continuo di volume  $\mathcal{V}$ , è possibile definirne la massa  $m(\mathcal{V}, t)$  come una sua proprietà estensiva e quantificabile, indipendente dal sistema di coordinate nella quale la si misura. È possibile quindi esprimerla in termini di densità di massa  $\rho_m(\mathbf{x}, t)$  ad essa associata:

$$m(\mathcal{V}, t) = \int_{\mathcal{V}} \rho_m d^3x .$$

Essa risulta essere una quantità indipendente dal tempo e dal moto della porzione  $\mathcal{V}$ ,

$$m(\mathcal{V}, t) = m(\mathcal{V})$$

e quindi conservata

$$\frac{dm(\mathcal{V})}{dt} = 0 .$$

Nonostante l'indipendenza temporale di  $m(\mathcal{V})$ , la configurazione di densità  $\rho_m(\mathbf{x}, t)$  mantiene entrambe le dipendenze spaziale e temporale. Facendo uso del teorema di Reynolds, riportato in Appendice A:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_m d^3x = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) \right] d^3x = 0 ,$$

è possibile ricavare l'equazione di bilancio della massa:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0 . \tag{2.1}$$

Si osservi che essa ha una forma analoga all'equazione di bilancio (1.4) nella quale

$$\mathbf{J}_m = \pi_m = 0 .$$

## 2.2 Bilancio dell'impulso

Si consideri una porzione di continuo di volume materiale  $\mathcal{V}$  soggetta all'azione di una forza  $\mathbf{F}(\mathcal{V})$ . Sia  $\Delta\mathcal{V}$  una frazione di  $\mathcal{V}$  che, all'istante  $t$ , si trova attorno al punto  $\mathbf{x}$  dello spazio ed il cui volume geometrico è dato da  $\Delta V = \text{Vol}(\Delta\mathcal{V})$ . L'impulso posseduto da essa è dato da

$$\Delta\mathbf{P} = \rho_m(\mathbf{x}, t) \Delta V \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

con  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  velocità calcolata nella porzione spaziale attorno alla quale  $\Delta\mathcal{V}$  è posto. Integrando sull'intera porzione  $\mathcal{V}$  si ottiene l'impulso totale posseduto dalla stessa:

$$\mathbf{P}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \rho_m \mathbf{v} d^3x .$$

La seconda legge di Newton permette di scrivere l'equazione del moto come segue:

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \frac{d\mathbf{P}(\mathcal{V})}{dt} . \quad (2.2)$$

Il contributo alla forza  $\mathbf{F}(\mathcal{V})$  è portato da due termini di differente natura:

- un termine volumetrico  $\mathbf{F}_{Vol}$ , che agisce su ogni punto di  $\mathcal{V}$ ;
- un termine superficiale o di stress  $\mathbf{F}_{Sup}$ , che agisce su ogni punto della frontiera  $\partial\mathcal{V}$ .

Esempi di forze volumetriche sono le forze dovute ad interazioni a distanza, come ad esempio la forza di gravità e le forze elettromagnetiche; esempi di forze superficiali sono invece le forze di contatto, come la pressione idrostatica e le forze di attrito. La risultante delle forze volumetriche è descritta da:

$$\mathbf{F}_{Vol} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} d^3x , \quad (2.3)$$

dove  $\mathbf{f}$  rappresenta la densità di forza volumetrica, mentre la risultante delle forze superficiali è data da un integrale esteso su tutta la frontiera  $\partial\mathcal{V}$ :

$$\mathbf{F}_{Sup} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{T}(\mathbf{n}) d^2x , \quad (2.4)$$

con

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} . \quad (2.5)$$

È possibile dimostrare la relazione precedente nella quale  $\mathbf{n}$  rappresenta la normale uscente dalla superficie  $\partial\mathcal{V}$  e  $\mathbf{t}$  è un tensore di rango due detto tensore di stress. Tale dimostrazione è riportata in Appendice B.

L'effetto risultante di  $\mathbf{F}(\mathcal{V})$  è dato dalla somma dei contributi (2.3) e (2.4):

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \mathbf{F}_{Vol} + \mathbf{F}_{Sup} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} d^3x + \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} d^2x . \quad (2.6)$$



## 2.3. BILANCIO DEL MOMENTO ANGOLARE

Mettendo a sistema le equazioni (2.2) e (2.6) ed applicando il teorema di Reynolds (Appendice A), si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}) \right] d^3x = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{t}] d^3x .$$

che porta all'equazione di bilancio dell'impulso:

$$\frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{t}) - \mathbf{f} = 0 , \quad (2.7)$$

nella quale, in riferimento alla (1.4), si ricavano i termini:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_P &= -\mathbf{t} ; \\ \pi_P &= \mathbf{f} . \end{aligned}$$

## 2.3 Bilancio del momento angolare

Si consideri una porzione di continuo di volume  $\mathcal{V}$ , soggetta ad una forza  $\mathbf{F}(\mathcal{V})$ . La meccanica classica afferma che il momento torcente  $\mathbf{N}(\mathcal{V})$  della forza applicata a  $\mathcal{V}$  eguaglia l'evoluzione temporale del momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$  di  $\mathcal{V}$ :

$$\mathbf{N}(\mathcal{V}) = \frac{d\mathbf{L}(\mathcal{V})}{dt} . \quad (2.8)$$

Sia  $\Delta\mathcal{V}$  una frazione di  $\mathcal{V}$  che, all'istante  $t$ , si trova attorno al punto  $\mathbf{x}$  dello spazio ed il cui volume geometrico è dato da  $\Delta V = \text{Vol}(\Delta\mathcal{V})$ . Il momento angolare ad essa associato è dato da:

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \rho_m(\mathbf{x}, t) \Delta V \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) ,$$

con  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  velocità calcolata nella porzione spaziale attorno alla quale  $\Delta\mathcal{V}$  è posto. Integrando sull'intera porzione  $\mathcal{V}$  si ottiene il momento angolare totale della stessa:

$$\mathbf{L}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v}] d^3x .$$

Anche il momento torcente è dato dalla somma di due contributi, volumetrico e superficiale. Considerando lo stesso  $\Delta\mathcal{V}$  precedentemente introdotto, il contributo volumetrico al momento torcente è dato da:

$$\Delta\mathbf{N}_{Vol} = \mathbf{x} \times \mathbf{f} \Delta V$$

e, integrando su  $\mathcal{V}$ ,

$$\mathbf{N}_{Vol} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times (\mathbf{f} d^3x) . \quad (2.9)$$

Per il contributo superficiale, è opportuno considerare una porzione  $\Delta\mathcal{A}$  di una superficie materiale  $\mathcal{A}$  che racchiude  $\mathcal{V}$ , la cui area geometrica è data da  $\Delta A = \text{Area}(\Delta\mathcal{A})$ . Il contributo superficiale al momento torcente è dato da:

$$\Delta\mathbf{N}_{Sup} = \mathbf{x} \times (\Delta A \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) ,$$

e, integrando sulla frontiera  $\partial\mathcal{V}$  di  $\mathcal{V}$ ,

$$\mathbf{N}_{Sup} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{x} \times (d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}). \quad (2.10)$$

A questo punto, l'equazione (2.8) può essere esplicitata:

$$\int_{\mathcal{V}} [\mathbf{x} \times \mathbf{f}] d^3x + \oint_{\partial\mathcal{V}} [\mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})] d^2x = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v}] d^3x. \quad (2.11)$$

Il membro destro, facendo uso del teorema di Reynolds (Appendice A), può essere scritto come segue:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{x} \left[ \mathbf{x} \times \left( \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}) \right) \right].$$

Lavorando ulteriormente sul termine superficiale  $\mathbf{N}_{Sup}$ , è possibile ottenere l'espressione:

$$\mathbf{N}_{Sup} = \int_{\mathcal{V}} d^3x [(2 * \mathbf{t}) + \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{t})]. \quad (2.12)$$

I passaggi algebrici sono riportati in Appendice D.

L'equazione (2.11) può a questo punto essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} d^3x \left[ \mathbf{x} \times \left( \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}) \right) \right] &= \int_{\mathcal{V}} d^3x [(2 * \mathbf{t}) + \mathbf{x} \times (\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{t})] \\ \implies \int_{\mathcal{V}} d^3x \left[ \mathbf{x} \times \left( \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{t}) - \mathbf{f} \right) \right] &= \int_{\mathcal{V}} d^3x (2 * \mathbf{t}). \end{aligned}$$

Si osservi come il membro sinistro rappresenti l'equazione di bilancio dell'impulso (2.7).

In definitiva si ottiene:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x (2 * \mathbf{t}) = 0.$$

Questa conclusione non comporta l'aggiunta di una nuova equazione di bilancio, bensì introduce un vincolo algebrico sul tensore di stress  $\mathbf{t}$  precedentemente definito. Osservando la forma esplicita (D.1) dell'integrando, fissando ad esempio  $i = 1$ :

$$0 = (2 * \mathbf{t})_1 = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{1jk} T_{jk}.$$

Per le proprietà di  $\epsilon_{ijk}$ , le uniche combinazioni che ne producono un valore non nullo, avendo fissato  $i$ , sono  $\epsilon_{123} = 1$  ed  $\epsilon_{132} = -1$ . Si ottiene dunque:

$$T_{23} - T_{32} = 0.$$

Fissando poi  $i = \{2, 3\}$ , si ottiene similmente:

$$\begin{aligned} T_{31} - T_{13} &= 0; \\ T_{12} - T_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Si ricava dunque che il tensore di stress  $\mathbf{t}$  è simmetrico:

$$T_{jk} - T_{kj} = 0 \implies \mathbf{t} = \mathbf{t}^T.$$

# Capitolo 3

## Termodinamica dei mezzi continui

Lo studio termodinamico dei continui in moto, associati quindi a condizioni di non equilibrio dovute a variazioni continue nello spazio e nel tempo delle grandezze che li caratterizzano, deve essere sviluppato applicando il concetto di campo  $\gamma(\mathbf{x}, t)$  alle variabili di stato termodinamico.

In condizioni di non equilibrio, non è possibile attribuire direttamente valori globali a grandezze intensive, quali ad esempio temperatura e pressione. Spontaneamente, un sistema che non si trova in equilibrio raggiunge quest'ultimo dopo un determinato tempo di rilassamento  $\tau_{rel}$ . Osservazioni empiriche hanno dimostrato l'esistenza di una relazione tra  $\tau_{rel}$  e le dimensioni  $\mathcal{V}$  del sistema continuo considerato: porzioni  $\Delta\mathcal{V}$  piccole di continuo  $\mathcal{V}$  hanno tempi di rilassamento brevi e raggiungono rapidamente l'equilibrio. Lo studio della termodinamica dei continui viene quindi affrontato effettuando una partizione del volume materiale  $\mathcal{V}$  considerato, in sottovolumi  $\Delta\mathcal{V}$  piccoli abbastanza da avere tempi di rilassamento molto brevi, tanto da poter essere considerati sempre, in buona approssimazione, in equilibrio termodinamico.

Il primo principio della termodinamica è espresso come:

$$dU = \delta Q + \delta L; \quad (3.1)$$

dove  $U$  rappresenta l'energia interna del sistema,  $Q$  il calore ed  $L$  il lavoro meccanico delle forze esterne. Per trasformazioni reversibili, è possibile ottenere la seguente formulazione del secondo principio della termodinamica:

$$\delta Q^{rev} = \Theta dS, \quad (3.2)$$

nella quale  $\Theta$  rappresenta la temperatura del sistema.

Scrivendo

$$\delta L = \sum_i \xi_i dX_i,$$

in cui  $\xi_i$  rappresenta il campo di forze generalizzate in  $\mathcal{V}$ , mentre  $dX_i$  esprime gli spostamenti generalizzati, e combinando la (3.1) con la (3.2) si ottiene:

$$dU = \Theta dS + \sum_i \xi_i dX_i. \quad (3.3)$$

L'equazione (3.3) può essere riscritta per la porzione infinitesima  $\Delta\mathcal{V}$ :

$$d\Delta U = \Theta d\Delta S + \sum_i \xi_i d\Delta X_i.$$

Durante una trasformazione termodinamica, poiché non varia la massa  $\Delta m$  della porzione materiale  $\Delta \mathcal{V}$ , è possibile riscrivere l'equazione precedente come segue:

$$d\left(\frac{\Delta U}{\Delta m}\right) = \Theta d\left(\frac{\Delta S}{\Delta m}\right) + \sum_i \xi_i d\left(\frac{\Delta X_i}{\Delta m}\right). \quad (3.4)$$

Nel limite in cui  $\Delta m \rightarrow 0$  è possibile, come descritto similmente in Sezione 1.3, definire le densità specifiche di energia interna  $u^*$ , entropia  $s^*$  e spostamento generalizzato  $x_i^*$

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ x \in \Delta \mathcal{V}}} \frac{\Delta U}{\Delta m} \\ s^* = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ x \in \Delta \mathcal{V}}} \frac{\Delta S}{\Delta m} \\ x_i^* = \lim_{\substack{\Delta m \rightarrow 0 \\ x \in \Delta \mathcal{V}}} \frac{\Delta X_i}{\Delta m} \end{array} \right.$$

in funzione delle quali la (3.4) diventa:

$$du^* = \Theta ds^* + \sum_i \xi_i dx_i^*.$$

Considerando inoltre trasformazioni che avvengono in un tempo infinitesimo  $dt$ , è possibile valutarne il tasso di variazione temporale:

$$\frac{du^*}{dt} = \Theta \frac{ds^*}{dt} + \sum_i \xi_i \frac{dx_i^*}{dt}. \quad (3.5)$$

### 3.1 Bilancio dell'energia

Si consideri una porzione di continuo di volume  $\mathcal{V}$ . Il primo principio della termodinamica impone che la variazione energetica  $E(\mathcal{V})$  all'interno di  $\mathcal{V}$  eguagli la potenza  $\mathcal{P}(\mathcal{V})$  che l'ambiente esterno fornisce a  $\mathcal{V}$ :

$$\frac{dE(\mathcal{V})}{dt} = \mathcal{P}(\mathcal{V}); \quad (3.6)$$

dove  $E(\mathcal{V})$  è data dalla somma dei due contributi di energie cinetica  $K(\mathcal{V})$  ed interna  $U(\mathcal{V})$ , esprimibili mediante le corrispondenti densità di energia:

$$\begin{aligned} K(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho_m v^2 d^3x; \\ U(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} u d^3x. \end{aligned}$$

La potenza  $\mathcal{P}(\mathcal{V})$  risulta invece essere la somma di tre termini:

- della potenza meccanica  $W(\mathcal{V}) = W(\mathcal{V})_{vol} + W(\mathcal{V})_{sup}$  prodotta dalle forze esterne;

### 3.1. BILANCIO DELL'ENERGIA

- del flusso di conduzione  $Q_{Sup}$  di energia entrante o uscente;
- del tasso di produzione o assorbimento  $Q_{Vol}$  energetico dovuto a processi interni.

Considerando una frazione  $\Delta\mathcal{V}$  di  $\mathcal{V}$  che, all'istante  $t$ , si trova attorno al punto  $\mathbf{x}$  dello spazio ed il cui volume geometrico è dato da  $\Delta V = \text{Vol}(\Delta\mathcal{V})$ , è possibile calcolare il contributo volumetrico al lavoro meccanico:

$$\Delta L_{Vol} = \Delta V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Delta t ,$$

con  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  velocità calcolata nella porzione spaziale attorno alla quale  $\Delta\mathcal{V}$  è posto. Dividendo la precedente espressione per  $\Delta t$  si ottiene:

$$\Delta W_{Vol} = \frac{\Delta L_{Vol}}{\Delta t} = \Delta V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) .$$

Integrando sull'intera porzione  $\mathcal{V}$ , si ricava il contributo alla potenza meccanica  $W(\mathcal{V})$  portato dalle forze volumetriche:

$$W(\mathcal{V})_{Vol} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d^3x .$$

Per studiare il contributo superficiale  $W(\mathcal{V})_{Sup}$ , occorre introdurre una porzione  $\Delta\mathcal{A}$  della superficie materiale  $\mathcal{A}$  che racchiude  $\mathcal{V}$ , la cui area geometrica è data da  $\Delta A = \text{Area}(\Delta\mathcal{A})$ . Il contributo superficiale al lavoro meccanico è dato da:

$$\Delta L_{Sup} = \Delta A \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Delta t .$$

Dividendo la precedente espressione per  $\Delta t$  si ottiene:

$$\Delta W_{Sup} = \frac{\Delta L_{Sup}}{\Delta t} = \Delta A \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) ,$$

e, integrando sulla frontiera  $\partial\mathcal{V}$  di  $\mathcal{V}$ , si ricava il contributo alla potenza meccanica  $W(\mathcal{V})$  portato dalle forze superficiali:

$$W(\mathcal{V})_{Sup} = \oint_{\partial\mathcal{V}} (d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} .$$

Gli altri due termini della  $\mathcal{P}(\mathcal{V})$  sono espressi come segue:

$$\begin{aligned} Q_{Sup} &= - \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{j}_U \cdot d^2\mathbf{x} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{j}_U d^3x ; \\ Q_{Vol} &= \int_{\mathcal{V}} Z d^3x ; \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{j}_U$  e  $Z$  sono, rispettivamente, la densità di corrente di energia interna e la densità di potenza emessa. La potenza  $\mathcal{P}(\mathcal{V})$  risulta dunque essere:

$$\mathcal{P}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + Z) + \nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{j}_U)] d^3x . \quad (3.7)$$

Per valutare il membro sinistro dell'equazione (3.6) occorre calcolare la derivata temporale dei termini cinetico e potenziale facendo uso del teorema di Reynolds (Appendice A):

$$\begin{aligned}\frac{dK(\mathcal{V})}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho_m v^2 d^3x \right] = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial(\frac{1}{2} \rho_m v^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \frac{1}{2} \rho_m v^2 \right) \right] d^3x ; \\ \frac{dU(\mathcal{V})}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{\mathcal{V}} u d^3x \right] = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} u) \right] d^3x .\end{aligned}$$

Si ottiene dunque

$$\frac{dE(\mathcal{V})}{dt} = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial(\frac{1}{2} \rho_m v^2)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \mathbf{v} \frac{1}{2} \rho_m v^2 + \mathbf{v} u \right) \right] d^3x . \quad (3.8)$$

Uguagliando le equazioni (3.7) e (3.8) è possibile riscrivere la (3.6) in forma più esplicita:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\frac{1}{2} \rho_m v^2)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho_m \mathbf{v} v^2 \right) \\ = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + Z - \nabla \cdot \mathbf{j}_U .\end{aligned} \quad (3.9)$$

Applicando le regole di derivazione e raccogliendo opportunamente i termini, si arriva alla forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) \right) v^2 \right] + \rho_m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_m \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + Z - \nabla \cdot \mathbf{j}_U .\end{aligned}$$

Per l'equazione di bilancio della massa (2.1), il primo addendo è nullo:

$$\begin{aligned}\rho_m \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho_m \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + Z - \nabla \cdot \mathbf{j}_U .\end{aligned} \quad (3.10)$$

Ricordando la legge di bilancio dell'impulso (2.7) ed applicando le regole di derivazione, si ottiene:

$$\left[ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}) \right] \mathbf{v} + \rho_m \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] - \nabla \cdot \mathbf{t} - \mathbf{f} = 0 .$$

Il primo termine, alla luce della (2.1), è nullo. Si ottiene dunque:

$$\rho_m \mathbf{v} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = (\nabla \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} . \quad (3.11)$$

L'espressione

$$\nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) ,$$

### 3.1. BILANCIO DELL'ENERGIA

che compare nell'equazione (3.9), può essere scritta come segue:

$$\nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Da quest'ultima, ricavando l'espressione per  $(\nabla \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}$  e sostituendola nella (3.11) si ottiene:

$$\rho_m \mathbf{v} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

A questo punto è possibile ottenere, per la (3.10), una forma in termini delle nuove quantità esplicitate:

$$\nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + Z - \nabla \cdot \mathbf{j}_U,$$

la quale, cancellando i termini comuni ad entrambi i membri, fornisce l'equazione di bilancio dell'energia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}u + \mathbf{j}_U) - Z - \mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (3.12)$$

nella forma (1.4) in cui

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_E &= \mathbf{j}_U; \\ \pi_E &= Z + \mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Tale equazione non è altro che l'espressione della prima legge della termodinamica classica, date le dipendenze da termini di energia interna ( $u$ ) e termini legati a processi termici ( $\mathbf{j}_U$ ,  $Z$ ).

#### 3.1.1 Lavoro meccanico

È possibile mostrare come il termine

$$w = \mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.13)$$

che compare nella (3.12) corrisponda al lavoro meccanico compiuto dalle forze esterne al sistema. Tale corrispondenza è comune ad ogni tipologia di mezzo continuo. È possibile considerare, come modello, un fluido non viscoso, per il quale il tensore di stress  $\mathbf{t}$  è isotropo, riferito cioè a direzioni spaziali totalmente indeterminate in quanto privo di direzionalità preferenziali. Esso può quindi essere descritto come un multiplo della matrice identità  $\mathbb{1}$ :

$$\mathbf{t} = -\varpi \mathbb{1}, \quad (3.14)$$

dove  $\varpi$  risulta essere il termine associato alla pressione esercitata sul continuo. La variazione di volume associata ad una porzione  $\mathcal{P}$  di fluido di volume  $\mathcal{V}$  è valutata come segue:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\mathcal{V}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho_g d^3x,$$

dove la densità volumetrica del fluido è posta pari a  $\rho_g = 1$ . Applicando il teorema di Reynolds (Appendice A), si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial 1}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{1}\mathbf{v}) \right] d^3x = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) d^3x. \quad (3.15)$$

Nel particolare caso di continuo incompressibile, in cui il volume non può variare, si ha che  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ . In generale però, ciò non è valido.

Si consideri ora una porzione  $\Delta\mathcal{P}$  della porzione di fluido  $\mathcal{P}$  precedentemente considerata. Come prima, può essere valutata la variazione  $\Delta\mathcal{V}$  del suo volume:

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(\Delta\mathcal{V}) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \text{Vol}(\Delta\mathcal{V}).$$

A questo punto il lavoro meccanico compiuto sul volume  $\Delta\mathcal{V}$  di fluido nell'unità di tempo è dato da:

$$\frac{dL}{dt} = -\varpi \frac{d}{dt} \text{Vol}(\Delta\mathcal{V}) = -\varpi (\nabla \cdot \mathbf{v}) \text{Vol}(\Delta\mathcal{V}).$$

Sostituendo la relazione (3.14) nella (3.13)

$$\mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} = -\varpi \mathbf{1} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v},$$

e studiandone le componenti:

$$\mathbf{1} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} = \sum_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

nella quale la riduzione degli indici di sommatoria è avvenuta considerando la definizione della delta di Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

si ottiene che

$$\mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} = -\varpi \nabla \cdot \mathbf{v},$$

formalmente uguale al termine  $\delta L$  che compare nell'equazione (3.1).

## 3.2 Bilancio dell'entropia

Si consideri una porzione di continuo, occupante il volume  $\Delta\mathcal{V}$  in moto nel tempo a velocità  $\mathbf{v}$ . Lo studio della sua entropia  $S(\Delta\mathcal{V}, t)$  può essere affrontato a partire dalla relazione (3.5) che può essere riscritta come segue:

$$\frac{ds^*}{dt} - \frac{1}{\Theta} \left[ \frac{du^*}{dt} - \sum_i \xi_i \frac{dx_i^*}{dt} \right] = 0. \quad (3.16)$$



### 3.2. BILANCIO DELL'ENTROPIA

Ricordando che  $u^*$  e  $x_i^*$  obbediscono alle seguenti leggi di bilancio

$$\rho_m \frac{du^*}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_U - \rho_m \pi_U^* = 0; \quad (3.17)$$

$$\rho_m \frac{dx_i^*}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{X_i} - \rho_m \pi_{X_i}^* = 0, \quad (3.18)$$

dalle quali è possibile ricavare

$$\frac{du^*}{dt} = \frac{1}{\rho_m} [\rho_m \pi_U^* - \nabla \cdot \mathbf{j}_U]; \quad (3.19)$$

$$\frac{dx_i^*}{dt} = \frac{1}{\rho_m} [\rho_m \pi_{X_i}^* - \nabla \cdot \mathbf{j}_{X_i}], \quad (3.20)$$

con  $\rho_m$  densità di massa,  $\mathbf{j}$  densità di corrente associata e  $\pi^*$  densità di rateo specifico di produzione associato.

Le relazioni (3.19) e (3.20) permettono di riscrivere la (3.16) come segue:

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{ds^*}{dt} - \frac{1}{\Theta} \left[ \rho_m \pi_U^* - \nabla \cdot \mathbf{j}_U - \sum_i \xi_i \rho_m \pi_{X_i}^* + \sum_i \xi_i \nabla \cdot \mathbf{j}_{X_i} \right] \\ = \rho_m \frac{ds^*}{dt} + \frac{1}{\Theta} \left[ \nabla \cdot \mathbf{j}_U - \sum_i \xi_i \nabla \cdot \mathbf{j}_{X_i} \right] - \frac{\rho_m}{\Theta} \left[ \pi_U^* - \sum_i \xi_i \pi_{X_i}^* \right] = 0. \end{aligned}$$

Portando il campo di temperatura  $\Theta$  all'interno del simbolo di divergenza e sottraendo dalla relazione precedente i termini ottenuti dall'azione di  $\nabla$  sullo stesso:

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{ds^*}{dt} + \nabla \cdot \left[ \frac{1}{\Theta} \left( \mathbf{j}_U - \sum_i \xi_i \mathbf{j}_{X_i} \right) \right] \\ - \frac{\rho_m}{\Theta} \left[ \pi_U^* - \sum_i \xi_i \pi_{X_i}^* \right] - \mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta} + \sum_i \mathbf{j}_{X_i} \cdot \nabla \frac{\xi_i}{\Theta} = 0, \end{aligned}$$

si ottiene la legge di bilancio per l'entropia. Ponendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_S &= \frac{1}{\Theta} \left( \mathbf{j}_U - \sum_i \xi_i \mathbf{j}_{X_i} \right); \\ \rho_m \pi_S^* &= \frac{\rho_m}{\Theta} \left[ \pi_U^* - \sum_i \xi_i \pi_{X_i}^* \right] + \mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta} - \sum_i \mathbf{j}_{X_i} \cdot \nabla \frac{\xi_i}{\Theta}. \end{aligned}$$

è possibile ridurre la legge di bilancio precedente in forma analoga alle (3.19) e (3.20):

$$\rho_m \frac{ds^*}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_S - \rho_m \pi_S^* = 0. \quad (3.21)$$

Introducendo le densità volumetriche al posto di quelle specifiche:

$$\begin{aligned} u &= u^* \rho_m; \\ x_i &= x_i^* \rho_m; \\ s &= s^* \rho_m, \end{aligned}$$

ed applicando il cambio di variabile nell'equazione (3.21), viene ricavata la forma classica della legge di bilancio dell'entropia:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (s \mathbf{v} + \mathbf{j}_S) - \pi_S = 0, \quad (3.22)$$

nella quale

$$\pi_S = \frac{1}{\Theta} \left[ \pi_U - \sum_i \xi_i \pi_{X_i} \right] + \mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta} - \sum_i \mathbf{j}_{X_i} \cdot \nabla \frac{\xi_i}{\Theta}.$$

La legge di bilancio (3.22) può essere scritta nella forma integrale (1.2):

$$\frac{dS(\mathcal{V})}{dt} = \Pi_S(\mathcal{V}) - \Phi_S(\partial\mathcal{V}), \quad (3.23)$$

in cui

$$\begin{aligned} S(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} s \, d^3x; \\ \Pi_S(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} \pi_S \, d^3x; \\ \Phi_S(\partial\mathcal{V}) &= \oint_{\mathcal{V}} \mathbf{j}_S \cdot d^2\mathbf{x}. \end{aligned}$$

### 3.2.1 Principio di Prigogine

Generalmente, il tasso di produzione  $\Pi_f(\mathcal{V})$  della grandezza  $f$  che compare nella (1.2) è generato da due sorgenti: una sorgente interna  $\Pi_f^{int}(\mathcal{V})$ , dovuta a produzione interna al volume, ed una esterna  $\Pi_f^{ext}(\mathcal{V})$ , dovuta a scambi esterni. Le modalità con cui il termine  $\Pi_f(\mathcal{V})$  viene generato dai due contributi sono specifiche di ciascun mezzo continuo.

Contrariamente a quanto visto per massa, impulso, momento angolare ed energia, per i quali le leggi di bilancio sono leggi di conservazione e

$$\begin{aligned} \Pi_f^{ext}(\mathcal{V}) &= \Pi_f(\mathcal{V}); \\ \Pi_f^{int}(\mathcal{V}) &= 0, \end{aligned}$$

nei riguardi dell'entropia la situazione è diversa. Il contributo dovuto a sorgenti interne, a causa dell'irreversibilità, non risulta essere nullo ed il rateo di produzione della stessa è dato dal principio di Prigogine

$$\Pi_S(\mathcal{V}) = \Pi_S^{int}(\mathcal{V}) + \Pi_S^{ext}(\mathcal{V}); \quad (3.24)$$

in cui

$$\Pi_S^{int}(\mathcal{V}) \geq 0. \quad (3.25)$$

Sostituendo il termine (3.24) nell'equazione (3.23),

$$\begin{aligned} \frac{dS(\mathcal{V})}{dt} &= \Pi_S^{int}(\mathcal{V}) + \Pi_S^{ext}(\mathcal{V}) - \Phi_S(\partial\mathcal{V}) \\ &\implies \frac{dS(\mathcal{V})}{dt} + \Phi_S(\partial\mathcal{V}) - \Pi_S^{ext}(\mathcal{V}) = \Pi_S^{int}(\mathcal{V}) \geq 0, \end{aligned}$$

### 3.2. BILANCIO DELL'ENTROPIA

si ottiene la disuguaglianza di Clausius-Duhem, formulazione generale del secondo principio della termodinamica classica. In forma differenziale:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (s \mathbf{v} + \mathbf{j}_s) - \pi_S^{ext} = \pi_S^{int} \geq 0. \quad (3.26)$$

Il termine di produzione interna di entropia  $\pi_S^{int}$  è, in generale, difficile da modellizzare. Il vincolo imposto dalla disuguaglianza (3.25) permette di procedere attraverso un'analisi fisica basata su ipotesi ragionevoli. Inoltre tale condizione pone dei vincoli su quella che è la forma del tensore di stress  $\mathbf{t}$  e sul segno degli eventuali coefficienti introdotti nelle relazioni costitutive.

#### 3.2.2 Fluidi viscosi

La trattazione dei fluidi reali è legata al concetto di viscosità, responsabile di forze che si esercitano tra porzioni di fluido contigue in moto relativo, che non sono dirette normalmente alla loro superficie ma presentano componenti tangenziali. Lo scopo della trattazione è quello di trovare un modello che tenga conto, oltre che degli sforzi normali legati alla pressione, anche di quelli tangenziali, dovuti alla presenza di attrito viscoso tra le superfici a contatto del continuo.

In Appendice C sono stati sviluppati i concetti matematici utili a livello operativo per la seguente trattazione. Riguardo un fluido viscoso, è possibile introdurre il tensore simmetrico

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad (3.27)$$

le cui componenti sono definite come segue:

$$\mathbf{D}_A = 0; \quad (3.28)$$

$$\mathbf{D}_{ST} = \mathbf{D} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{1}; \quad (3.29)$$

$$\mathbf{D}_T = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{1}, \quad (3.30)$$

con  $\text{tr}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{v}$ .

Inoltre è possibile introdurre, nel tensore di stress  $\mathbf{t}$  definito come in (3.14), un termine dissipativo  $\mathbf{t}^{(d)}$ , manifesto nel momento in cui porzioni di fluido, aventi velocità che differiscono di quantità infinitesime, entrano in contatto tra loro. La simmetria del tensore di stress  $\mathbf{t}$  comporta:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_A &= 0; \\ \mathbf{t}_{ST} &= \mathbf{t}^{(d)} = \mathbf{t} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{t})\mathbf{1}; \\ \mathbf{t}_T &= \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{t})\mathbf{1}, \end{aligned}$$

con  $\text{tr}(\mathbf{t}) = -3\varpi$ .

Allora  $\mathbf{t}$  può essere riscritto come

$$\mathbf{t} = -\varpi\mathbf{1} + \mathbf{t}^{(d)}. \quad (3.31)$$

Il prodotto diadico tra i due tensori precedentemente definiti permette di ricavare un campo diadico  $w = \mathbf{t} \cdot \cdot \mathbf{D}$ . Dalla relazione (C.1) è possibile esplicitarne la forma:

$$w = \mathbf{t}_A \cdot \cdot \mathbf{D}_A + \mathbf{t}_T \cdot \cdot \mathbf{D}_T + \mathbf{t}_{ST} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST} = -\varpi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST}. \quad (3.32)$$

Il primo termine, come mostrato in precedenza, è legato al lavoro meccanico fatto da un campo di pressione  $\varpi$ . Il secondo termine necessita di una trattazione più particolareggiata. Essendo il volume  $\text{Vol}(\mathcal{V})$  del fluido una proprietà localizzabile ed estensiva, obbedisce ad una legge di bilancio del tipo (1.2). È possibile scrivere

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x = \Pi_{\text{Vol}}(\mathcal{V}) - \Phi_{\text{Vol}}(\partial\mathcal{V}).$$

Essendo  $\text{Vol}(\mathcal{V})$  una porzione dello spazio costituita da punti materiali che non fuoriescono mai da  $\partial\mathcal{V}$ , è ragionevole assumere che

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{Vol}}(\partial\mathcal{V}) &= \oint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{j}_{\text{Vol}} \cdot d^2\mathbf{x} = 0; \\ \Pi_{\text{Vol}}(\mathcal{V}) &= \int_{\mathcal{V}} \pi_{\text{Vol}} \, d^3x = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d^3x. \end{aligned}$$

Ciò comporta dunque:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\text{Vol}} &= 0; \\ \pi_{\text{Vol}} &= \nabla \cdot \mathbf{v} = Z_{\text{Vol}}. \end{aligned}$$

Si consideri adesso l'entropia come trattata in Sezione 3.2. Relativamente alla trattazione dei fluidi reali, occorre esplicitare le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} X_i &\longrightarrow \mathcal{V}; \\ \xi_i &\longrightarrow -\varpi. \end{aligned}$$

Così facendo è possibile ottenere la densità di corrente  $\mathbf{j}_S$  ed il tasso di produzione  $\pi_S$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_S &= \frac{1}{\Theta} (\mathbf{j}_U + \varpi \mathbf{j}_{\text{Vol}}); \\ \pi_S &= \frac{1}{\Theta} (Z + \varpi Z_{\text{Vol}}) + \frac{1}{\Theta} \mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta} + \mathbf{j}_{\text{Vol}} \cdot \nabla \frac{\varpi}{\Theta}. \end{aligned}$$

Ricordando che  $\mathbf{j}_{\text{Vol}} = 0$  e che, dalle equazioni (3.13) e (3.32), è possibile scrivere

$$\mathbf{t} \cdot \cdot \nabla \mathbf{v} = -\varpi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST} = -\varpi Z_{\text{Vol}} + \mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST},$$

i termini precedenti vengono riscritti come segue:

$$\mathbf{j}_S = \frac{\mathbf{j}_U}{\Theta}; \quad (3.33)$$

$$\pi_S = \frac{Z}{\Theta} + \frac{1}{\Theta} (\mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST}) + \mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta}. \quad (3.34)$$

### 3.2. BILANCIO DELL'ENTROPIA

Ricordando la relazione (3.24) riguardo il termine di produzione di entropia, occorre riorganizzare i singoli termini di equazione (3.34) nei contributi  $\pi_S^{int}$  e  $\pi_S^{ext}$ .

A questo punto occorre avanzare ipotesi basate su considerazioni fisiche. È logico pensare che, poiché  $Z$  descrive il tasso con cui l'energia nel volume viene scambiata, il termine

$$\frac{Z}{\Theta}$$

contribuisca a  $\pi_S^{ext}$ . Il termine

$$\frac{1}{\Theta}(\mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST}),$$

invece, legato al gradiente di velocità di due porzioni contigue di continuo e quindi espressione di un effetto viscoso dissipativo, viene attribuito a  $\pi_S^{int}$ . Infine, anche il termine

$$\mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta},$$

legato al gradiente di temperatura, è espressione di un effetto conduttivo di dissipazione e quindi incluso in  $\pi_S^{int}$ . Quindi:

$$\begin{aligned}\pi_S^{ext} &= \frac{Z}{\Theta}; \\ \pi_S^{int} &= \frac{1}{\Theta}(\mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST}) + \mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta}.\end{aligned}$$

Il principio di Prigogine impone che

$$\pi_S^{int} = \frac{1}{\Theta}(\mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST}) + \mathbf{j}_U \cdot \nabla \frac{1}{\Theta} \geq 0,$$

inoltre, la disuguaglianza di Clausius-Duhem (3.26) può essere riscritta per i fluidi viscosi:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \left( s \mathbf{v} + \frac{\mathbf{j}_U}{\Theta} \right) - \frac{Z}{\Theta} \geq 0. \quad (3.35)$$



# Capitolo 4

## Relazioni costitutive

Riportando le leggi di bilancio ottenute:

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (4.1)$$

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{t} - \mathbf{f} = 0; \quad (4.2)$$

$$\rho_m \frac{du^*}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_U - Z - \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0; \quad (4.3)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}^T; \quad (4.4)$$

$$\rho_m \frac{ds^*}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j}_S - \pi_S^{ext} = \pi_S^{int} \geq 0, \quad (4.5)$$

si osserva come le prime (4.1), (4.2), (4.3) forniscono 5 equazioni, la (4.4) impone 3 vincoli algebrici sulle componenti del tensore di stress  $\mathbf{t}$  e la (4.5) costituisce una disequazione differenziale. Le equazioni (4.1), (4.2), (4.3) formano un sistema di  $m = 5$  equazioni differenziali in funzione di  $n = 16$  campi incogniti, il cui numero eccede quello delle equazioni disponibili,  $n > m$ . Per poter risolvere compiutamente il sistema, occorre esprimere gli  $n - m$  campi incogniti in eccesso in funzione degli  $m$  scelti come campi di base. Tali relazioni imposte vengono dette costitutive. Generalmente la scelta dei campi di base ricade su quelli di densità di massa  $\rho_m(\mathbf{x}, t)$ , di velocità  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  o di temperatura  $\Theta(\mathbf{x}, t)$ .

Le relazioni costitutive non hanno carattere universale ma presentano una modellizzazione specifica per ciascun caso. Si osservi che la disuguaglianza di Clausius-Duhem (4.5) non è stata inclusa nel sistema precedente. L'assunzione di base del metodo di Coleman e Noll vede quest'ultima come un vincolo per le relazioni costitutive.

### 4.1 Metodo di Coleman e Noll applicato ai fluidi viscosi

Un esempio di relazione costitutiva è quella che riguarda i fluidi viscosi, per i quali gli effetti dissipativi, dovuti alle forze di attrito che si generano tra superfici di fluido in moto relativo, non sono trascurabili. Ricavando dall'equazione (4.3) il

termine  $\nabla \cdot \mathbf{j}_U$ , mettendolo a sistema con la disequazione (3.35)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{j}_U = Z + \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{v} - \rho_m \frac{du^*}{dt} \\ \rho_m \frac{ds^*}{dt} + \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}_U}{\Theta} \right) - \frac{Z}{\Theta} \geq 0 \end{cases}$$

in cui, applicando le regole di derivazione,

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{j}_U}{\Theta} \right) = \frac{1}{\Theta} \nabla \cdot \mathbf{j}_U + \mathbf{j}_U \cdot \left( -\frac{1}{\Theta^2} \right) \nabla \Theta,$$

si ricava la disequazione seguente:

$$\rho_m \frac{ds^*}{dt} + \frac{1}{\Theta} \left( -\rho_m \frac{du^*}{dt} + \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{v} + Z \right) + \mathbf{j}_U \cdot \left( -\frac{1}{\Theta^2} \right) \nabla \Theta - \frac{Z}{\Theta} \geq 0.$$

Poiché il campo di temperatura  $\Theta \geq 0$ , raccogliendo opportunamente i termini è possibile riorganizzare la relazione precedente:

$$-\rho_m \left( \frac{du^*}{dt} - \Theta \frac{ds^*}{dt} \right) - \mathbf{j}_U \cdot \frac{1}{\Theta} \nabla \Theta + \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{v} \geq 0. \quad (4.6)$$

Definendo la densità specifica di energia libera

$$f^* = u^* - \Theta s^*, \quad (4.7)$$

è possibile riscrivere la (4.6) in termini della nuova variabile introdotta:

$$-\rho_m \left( \frac{df^*}{dt} + s^* \frac{d\Theta}{dt} \right) - \mathbf{j}_U \cdot \frac{1}{\Theta} \nabla \Theta + \mathbf{t} \cdot \nabla \mathbf{v} \geq 0.$$

Occorre, a questo punto, instaurare una relazione tra la nuova variabile introdotta e quelli che sono i campi incogniti da determinare. Supponendo una relazione del tipo

$$f^* = f^*(\rho_m, \Theta),$$

e ricordando la decomposizione del tensore di stress (3.31), applicando le regole di derivazione è possibile riscrivere la relazione precedente:

$$-\rho_m \left( \frac{\partial f^*}{\partial \rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} + \frac{\partial f^*}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt} + s^* \frac{d\Theta}{dt} \right) - \mathbf{j}_U \cdot \frac{1}{\Theta} \nabla \Theta - \varpi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t}^{(d)} \cdot \mathbf{D}_{ST} \geq 0. \quad (4.8)$$

Dalla (4.1) si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt},$$

ed è possibile riscrivere la (4.8):

$$-\rho_m \left( s^* + \frac{\partial f^*}{\partial \Theta} \right) \frac{d\Theta}{dt} - \rho_m \left( \frac{\partial f^*}{\partial \rho_m} - \frac{\varpi}{\rho_m^2} \right) \frac{d\rho_m}{dt} + \mathbf{t}^{(d)} \cdot \mathbf{D}_{ST} - \mathbf{j}_U \cdot \frac{1}{\Theta} \nabla \Theta \geq 0. \quad (4.9)$$



#### 4.1. METODO DI COLEMAN E NOLL APPLICATO AI FLUIDI VISCOSI

Poiché  $\frac{d\rho_m}{dt}$  e  $\frac{d\Theta}{dt}$  possono assumere valori arbitrari in ogni istante di tempo, i loro coefficienti potrebbero annullarsi. Per soddisfare la disuguaglianza è possibile porre:

$$s^* = -\frac{\partial f^*}{\partial \Theta};$$

$$\varpi = \rho_m^2 \frac{\partial f^*}{\partial \rho_m},$$

analoghe alle relazioni termodinamiche

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V;$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T.$$

La disuguaglianza (4.9) si riduce a

$$\mathbf{t}^{(d)} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST} - \mathbf{j}_U \cdot \frac{1}{\Theta} \nabla \Theta \geq 0. \quad (4.10)$$

Dalla definizione (4.7) è possibile ricavare

$$u^* = f^* + \Theta s^* = f^* - \Theta \frac{\partial f^*}{\partial \Theta}.$$

In questo modo i campi incogniti  $s^*$ ,  $u^*$  e  $\varpi$  sono stati legati al nuovo termine  $f^*$ . Tuttavia rimangono incogniti i campi  $\mathbf{t}^{(d)}$  e  $\mathbf{j}_U$ .

##### 4.1.1 Modello fluido di Navier-Stokes

I campi rimasti incogniti possono essere determinati, rispettivamente, con il modello di Navier-Stokes e con quello conduttivo di Fourier:

$$\mathbf{t}^{(d)} = 2\mu \mathbf{D}_{ST};$$

$$\mathbf{j}_U = -\kappa \nabla \Theta.$$

La disuguaglianza (4.10) viene riscritta come segue:

$$2\mu \mathbf{D}_{ST} \cdot \cdot \mathbf{D}_{ST} + \kappa \frac{1}{\Theta} \nabla \Theta \cdot \nabla \Theta \geq 0,$$

dalla quale si ricavano le condizioni di determinazione di  $\mathbf{t}^{(d)}$  e  $\mathbf{j}_U$ :

$$\mu(\rho_m, \Theta) > 0;$$

$$\kappa(\rho_m, \Theta) > 0.$$



# Appendice A

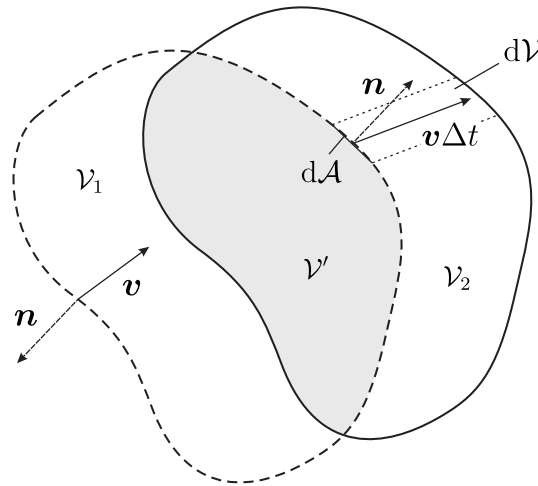
## Teorema del trasporto di Reynolds

Il teorema del trasporto di Reynolds permette di portare l'operazione di derivazione sotto il segno di integrale. È utilizzato nella meccanica dei continui per studiare le variazioni temporali di grandezze fisiche estensive associate a porzioni di continuo.

Come riportato in Sezione 1.3, è possibile definire una grandezza estensiva

$$f = \int_{\mathcal{V}} \rho_f d\mathcal{V},$$

come integrale della sua densità  $\rho_f$  sul volume materiale considerato  $\mathcal{V}$ . Per valutarne la variazione temporale, è necessario tenere conto del fatto che lo stesso volume materiale  $\mathcal{V}$  varia nel tempo in modo tale che, nell'intervallo temporale  $\Delta t$ , passi da  $\mathcal{V}(t)$  a  $\mathcal{V}(t + \Delta t)$  come rappresentato in Figura A.1.



**Figura A.1:** Moto, in un intervallo  $\Delta t$ , di un volume materiale  $\mathcal{V}$ .

Dalla definizione analitica di derivata come limite  $\Delta t \rightarrow 0$  di un rapporto incrementale, è possibile scrivere:

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho_f(t) d\mathcal{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} \rho_f(t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}(t)} \rho_f(t) d\mathcal{V}}{\Delta t}.$$

In riferimento alla Figura A.1, i volumi iniziale e finale possono essere scritti come segue:

$$\begin{cases} \mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}' \\ \mathcal{V}(t + \Delta t) = \mathcal{V}_2 \cup \mathcal{V}' \end{cases}$$

L'estensività di  $f$  permette inoltre di scrivere:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}_2} \rho_f(t + \Delta t) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}'} \rho_f(t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_1} \rho_f(t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}'} \rho_f(t) d\mathcal{V}}{\Delta t}.$$

Raggruppando opportunamente i termini al numeratore, è possibile decomporre il limite precedente nella somma dei due seguenti:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}'} \rho_f(t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}'} \rho_f(t) d\mathcal{V}}{\Delta t}, \quad (\text{A.1})$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}_2} \rho_f(t + \Delta t) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}_1} \rho_f(t) d\mathcal{V}}{\Delta t}. \quad (\text{A.2})$$

Dalla relazione A.1 si ottiene come risultato:

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} d\mathcal{V}. \quad (\text{A.3})$$

La relazione A.2 necessita di un'ulteriore osservazione. Osservando la Figura A.1 è possibile esprimere, come segue, gli elementi infinitesimi di volume  $d\mathcal{V}$ , relativi a  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$  rispettivamente:

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= -(\mathbf{v}\Delta t \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A}; \\ d\mathcal{V} &= (\mathbf{v}\Delta t \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A}, \end{aligned}$$

in cui i segni opposti sono dati dal fatto che, mentre l'elemento di superficie infinitesima  $d\mathcal{A}$  relativo a  $\mathcal{V}_2$  è orientato in maniera concorde alla velocità  $\mathbf{v}$  con cui il volume iniziale  $\mathcal{V}$  si muove, l'elemento  $d\mathcal{A}$  relativo a  $\mathcal{V}_1$  è discorde rispetto a  $\mathbf{v}$ . È possibile dunque riscrivere i singoli integrali della relazione A.2 in termini di flusso della  $\rho_f$  attraverso le rispettive frontiere  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_1} \rho_f(t) d\mathcal{V} &= - \oint_{\mathcal{A}_1} \rho_f(t) (\mathbf{v}\Delta t \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A}; \\ \int_{\mathcal{V}_2} \rho_f(t + \Delta t) d\mathcal{V} &= \oint_{\mathcal{A}_2} \rho_f(t) (\mathbf{v}\Delta t \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Alla luce del fatto che

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2,$$

la relazione A.2 diventa quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\oint_{\mathcal{A}_2} \rho_f(t + \Delta t) (\mathbf{v}\Delta t \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A} + \oint_{\mathcal{A}_1} \rho_f(t) (\mathbf{v}\Delta t \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A}}{\Delta t} \\ = \oint_{\mathcal{A}(t)} \rho_f(t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A}. \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Mettendo insieme le relazioni (A.3) e (A.4):

$$\frac{df}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{A}(t)} \rho_f (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\mathcal{A},$$

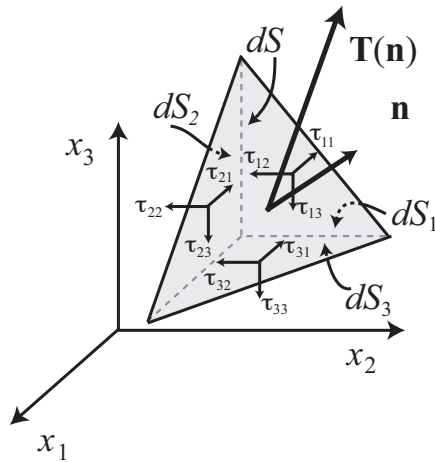
ed applicando il teorema della divergenza al secondo termine del membro destro, ottengo l'espressione analitica del teorema di Reynolds:

$$\frac{df}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[ \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) \right] d\mathcal{V}. \quad (\text{A.5})$$



# Appendice B

## Tensore di stress



**Figura B.1:** Tetraedro  $\tau$  di altezza  $h$  ed area  $dS$  della singola faccia.

Si consideri il tetraedro  $\tau$  di Figura B.1, delimitato da una superficie obliqua  $dS$  orientata come  $\mathbf{n}$  e dalle superfici coordinate  $dS_1$ ,  $dS_2$ ,  $dS_3$  orientate, rispettivamente, come  $-\mathbf{n}_1$ ,  $-\mathbf{n}_2$ ,  $-\mathbf{n}_3$ . Sia  $h$  l'altezza del tetraedro rispetto alla base e sia  $dV = \frac{1}{3}h dS$  il suo volume.

Consideriamo per semplicità la direzione  $x_1$ : è possibile riscrivere l'equazione del moto come segue:

$$\rho_m(\mathbf{x}, t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \mathbf{f}_1 dV + T_1(\mathbf{n}) dS + t_{11} dS_1 + t_{21} dS_2 + t_{31} dS_3 .$$

Sostituendo l'espressione di  $dV$  e considerando  $dS_k = dS \mathbf{n}_k$ , si ottiene

$$\rho_m(\mathbf{x}, t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{1}{3} h dS = \mathbf{f}_1 \frac{1}{3} h dS + T_1(\mathbf{n}) dS - t_{11} dS \mathbf{n}_1 - t_{21} dS \mathbf{n}_2 - t_{31} dS \mathbf{n}_3 .$$

Valutando il limite per  $h \rightarrow 0$  ottengo

$$T_1(\mathbf{n}) = t_{11} \mathbf{n}_1 + t_{21} \mathbf{n}_2 + t_{31} \mathbf{n}_3 ,$$

che rappresenta l'equazione (2.5) per la componente lungo  $x_1$ .

Il procedimento è analogo per le direzioni  $x_2$  ed  $x_3$ .





# Appendice C

## Decomposizione di tensori

Ogni generico tensore  $\mathbf{X}$  ammette una decomposizione

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_A + \mathbf{X}_{ST} + \mathbf{X}_T$$

in parte antisimmetrica  $\mathbf{X}_A$ , parte simmetrica a traccia nulla  $\mathbf{X}_{ST}$  e componente scalare di traccia  $\mathbf{X}_T$  definite come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{Aij} &= \frac{1}{2}(X_{ij} - X_{ji}); \\ \mathbf{X}_{STij} &= \frac{1}{2}(X_{ij} + X_{ji}) - \frac{1}{3}\left(\sum_k X_{kk}\right)\delta_{ij}; \\ \mathbf{X}_{Tij} &= \frac{1}{3}\left(\sum_k X_{kk}\right)\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Il prodotto diadico tra due generici tensori  $\mathbf{X}$  ed  $\mathbf{Y}$  agisce separatamente su ciascuna componente della decomposizione senza mischiarle:

$$\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{X}_A \cdot \cdot \mathbf{Y}_A + \mathbf{X}_{ST} \cdot \cdot \mathbf{Y}_{ST} + \mathbf{X}_T \cdot \cdot \mathbf{Y}_T. \quad (\text{C.1})$$



# Appendice D

## Espressione per $N_{Sup}$

Ragionando sulle componenti, è possibile riscrivere la (2.10):

$$\oint_{\partial V} d^2x [\mathbf{x} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})]_i.$$

Introducendo l'espressione del prodotto vettoriale in termini del simbolo di Levi-Civita  $\epsilon_{ijk}$ :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k;$$

è possibile esplicitare:

$$\oint_{\partial V} d^2x \left( \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})_k \right)_i.$$

Procedendo con il calcolo, si possono esplicitare anche le componenti del prodotto scalare  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t})_k$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} d^2x \left( \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j \sum_{l=1}^3 n_l t_{lk} \right)_i &= \oint_{\partial V} \left( \sum_{l=1}^3 d^2x n_l \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j t_{lk} \right)_i = \\ &= \oint_{\partial V} \sum_{l=1}^3 d^2x_l (\mathbf{x} \times \mathbf{t})_{il} = \\ &= \oint_{\partial V} d^2x (\mathbf{x} \times \mathbf{t})_i. \end{aligned}$$

Applicando il teorema della divergenza:

$$\int_V d^3x \left[ \sum_{l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j t_{lk} \right) \right]_i = \int_V \left[ \sum_{l=1}^3 \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial x_j}{\partial x_l} t_{lk} + x_j \frac{\partial t_{lk}}{\partial x_l} \right) \right]_i.$$

Sapendo che

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{il} \neq 0 \Leftrightarrow j = l,$$

è possibile ridurre gli indici di sommatoria eliminando quella in  $l$ :

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \left[ \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} t_{jk} + \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j (\nabla \cdot \mathbf{t})_k \right]_i.$$

Per comodità di notazione è possibile scrivere

$$\left( \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} t_{jk} \right)_i = (2 * \mathbf{t})_i; \quad (\text{D.1})$$

e reintroducendo l'espressione del prodotto vettoriale, eliminando la dipendenza da  $\epsilon_{ijk}$ , ottengo l'espressione finale (2.12) del termine superficiale  $\mathbf{N}_{Sup}$ , valida per tutte le tre componenti  $i$ .

# Bibliografia

- [1] URL: <http://m.docente.unife.it/alessandra.borrelli/dispense-meccanica-dei-continui/Meccanica%20dei%20continui,%20ultima%20versione.pdf>.
- [2] URL: <http://www.uniroma2.it/didattica/fluidodinamica/deposito/capno4-7.pdf>.
- [3] URL: [http://www.image.unipd.it/s.lanzoni/teaching/PDF/Meccanica\\_Fluidi.pdf](http://www.image.unipd.it/s.lanzoni/teaching/PDF/Meccanica_Fluidi.pdf).
- [4] R. Abeyaratne. *Continuum Mechanics*. 1988.
- [5] M. Bonafede. “Meccanica dei continui”. 2014.
- [6] A. C. Eringen e G. A. Maugin. *Electrodynamics of continua I*. Springer-Verlag New York Inc., 1990.
- [7] A. Kovetz. *Electromagnetic Theory*. Oxford University Press, 2000.
- [8] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [9] P. Penfield Jr. e H. A. Haus. *Electrodynamics of moving media*. The Massachusetts Institute of Technology (MIT), 1967.
- [10] A. Spada. “Elettrodinamica dei mezzi continui mobili”. 2001-2002.