

Alma Mater Studiorum
Università degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia
Dipartimento di Fisica e Astronomia

**Funzioni di distribuzione estese
per galassie early-type:
decomposizione strutturale della
componente stellare**

Tesi di Laurea Magistrale

Relatore:
Chiar.mo Prof.:
Luca Ciotti

Candidata:
Francesca Sacquegna

Co-relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa:
Silvia Pellegrini

Sessione I
Anno Accademico 2016/2017

*Natura è tutto ciò che noi vediamo: il colle, il pomeriggio, lo scoiattolo,
l'eclissi, il calabrone. O meglio, la natura è il paradiso.*
*Natura è tutto ciò che noi udiamo: il passero bobolink, il mare, il tuono, il
grillo. O meglio, la natura è armonia.*
*Natura è tutto quello che sappiamo senza avere la capacità di dirlo, tanto
impotente è la nostra sapienza a confronto della sua semplicità.*
[E. Dickinson]

Sommario

Lo studio della formazione ed evoluzione delle galassie costituisce una branca della ricerca astrofisica in costante sviluppo. È dalla disponibilità di osservazioni sempre più dettagliate dovute essenzialmente al progresso in ambito tecnologico che scaturisce la necessità di creare modelli teorici all'altezza di ciò che si dispone a livello sperimentale.

In particolare la dinamica delle galassie ellittiche, regolata da equazioni analoghe a quelle che governano la dinamica dei fluidi, si avvale di uno strumento matematico di estrema importanza ai fini di una descrizione completa della struttura e della cinematica della galassia. Tale strumento è noto con il termine di **funzione di distribuzione**, f , la quale altro non è che una funzione a 7 variabili definita sullo spazio delle fasi (6 coordinate per spazio e velocità, e tempo).

I modelli dinamici usati fino ad ora assumono che un sistema sia costituito da stelle aventi tutte la stessa massa M , rappresentate dunque dalla stessa f . Tale assunzione non è effettivamente rappresentativa della realtà. In questo lavoro apriamo la strada a modelli dinamici più complessi, partendo dalla definizione di f **estesa**, dipendente cioè dalla massa stellare M . Dopo aver introdotto uno spettro di massa nelle equazioni della dinamica, associamo ad ogni massa M un rapporto massa-luminosità $\Upsilon(M)$, in modo da avere componenti stellari ciascuna fatta da stelle di data massa M , facenti la propria luce. Mostriamo nel corso del lavoro che impatto ha tale scelta, presentando i primi risultati per modelli dinamici estesi.

Elenco ora brevemente quali saranno gli argomenti affrontati.

Nel **Capitolo 1**, in una breve introduzione, vengono presentati i motivi principali che ci hanno condotto ad introdurre la f estesa.

Nel **Capitolo 2** viene trattato nel dettaglio il formalismo, del tutto generale, utile per la costruzione di modelli dinamici estesi. In particolare introdurremo il concetto di funzione di distribuzione estesa pesata con la massa, f_M , e con la luce, f_L ; il motivo di tale divisione concettuale permette di avere maggiore chiarezza nella determinazione dei rispettivi momenti sulla parte delle velocità dello spazio delle fasi, essendo questi ultimi differenti quando

si passi a considerare il sistema totale, comprensivo di tutte le componenti stellari. In altre parole vedremo come alcune importanti caratteristiche del sistema, quali il profilo di dispersione di velocità totale, sia diverso a seconda che i contributi alla totalità vengano pesati con la massa o con la luce delle stelle. Il ruolo dunque che riveste tale capitolo è quello di fornire in tutta generalità gli strumenti per affrontare qualsiasi tipo di studio che coinvolga i modelli dinamici estesi. I modelli dinamici adottati fino ad ora altro non sono che una sotto categoria di modelli più generali, ovvero dei modelli dinamici estesi; a tal proposito vedremo sempre in questo capitolo in dettaglio cosa accade in caso di f "fattorizzata".

La costruzione di modelli di galassia estesi può avvenire in due maniere: rendendo 'estesa' la struttura oppure la dinamica dell'oggetto in questione.

Nel **Capitolo 3** affrontiamo il problema di costruire un modello esteso effettuando una decomposizione strutturale, presentando due approcci differenti: il primo consiste nella costruzione del modello finale a partire dalla somma di componenti stellari (decomposizione strutturale I) aventi ciascuna un proprio profilo strutturale (porremo il raggio di scala dipendente da M); il secondo consiste invece nel partire da un profilo di densità totale dato, e nella successiva scomposizione in componenti, ciascuna avente la propria struttura (decomposizione strutturale II). Ciascuno dei due approcci presenta i suoi vantaggi e svantaggi, dei quali discuteremo nelle rispettive sezioni (**3.1** e **3.2**).

Nel **Capitolo 4** analizzeremo in dettaglio un ulteriore metodo con cui costruire i modelli estesi, basato sull'omologia strutturale fra le varie componenti, ma avente un qualche parametro legato alla dinamica dipendente da M ; per tale parametro scegliamo in particolare il raggio di anisotropia (per la scelta di anisotropia Osipkov-Merritt, OM): $r_a = r_a(M)$. In questo capitolo effettueremo poi le prime applicazioni di quanto esposto in precedenza, al caso della sfera di Plummer. In dettaglio effettuiamo prima una decomposizione strutturale di tipo I, scegliendo il raggio di scala r_* di Plummer tale che $r_* = r_*(M)$, e ne mostriamo i risultati in termini di profilo di densità totale e di dispersione di velocità totale (confrontando fra loro i profili pesati con la massa e con la luce). Successivamente effettuiamo una decomposizione dinamica della sfera di Plummer (assumendo omologia strutturale), e ne mostriamo i principali risultati. Come ultima ma non meno importante applicazione scriviamo la f nel caso di decomposizione dinamica OM applicata al modello di Plummer, ottenuta tramite un'inversione di Eddington per sistemi anisotropi estesi.

Infine nel **Capitolo 5** sono riassunti i risultati, ed è presentata una riflessione iniziale sull'importanza e le future applicazioni dei modelli dinamici estesi.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Le equazioni della dinamica stellare	1
1.2	Lo stato dell'arte del modellamento dinamico	2
1.3	Il lavoro di tesi	4
1.3.1	Le motivazioni di carattere empirico	4
1.3.2	Gli albori dei modelli dinamici estesi e questo lavoro	6
2	I modelli dinamici estesi	9
2.1	La funzione di distribuzione estesa, f	10
2.2	La funzione iniziale di massa stellare (IMF)	10
2.2.1	Il rapporto massa-luminosità	12
2.2.2	Importanza della IMF	13
2.2.3	Risultati recenti sulla IMF	13
2.3	La funzione f pesata con la massa e con la luce	15
2.4	Momenti della f	17
2.5	La f fattorizzata	20
3	Decomposizione strutturale	23
3.1	Decomposizione strutturale. I: somma di componenti	24
3.2	Decomposizione strutturale. II: suddivisione in componenti	25
3.2.1	La procedura generale volta alla scrittura delle componenti $\rho_*(r, M)$	26
4	Prime applicazioni dei modelli dinamici estesi	33
4.1	Applicazione della decomposizione strutturale I al modello di Plummer	34
4.2	Decomposizione dinamica: risoluzione dell'equazione di Jeans con scelta di anisotropia Osipkov-Merritt	38

4.3	Scrittura della f estesa per il modello di Plummer con anisotropia Osipkov-Merritt	41
5	Discussione, conclusioni e prospettive future	51
A	Le funzioni ipergeometriche (cenni)	57
B	La funzione Gamma di Eulero, Γ (cenni)	59
	Bibliografia	61

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Le equazioni della dinamica stellare

La dinamica stellare è una parte dell'astrofisica che si occupa dello studio di sistemi gravitazionali composti da un numero elevato di oggetti. In particolare, la dinamica di una galassia è quella di un sistema non collisionale in cui le stelle si muovono sotto l'influenza di un potenziale medio generato da tutte le altre stelle. Con il termine *non collisionale* riferiamo a sistemi per i quali il tempo di rilassamento per incontri a due corpi è maggiore della loro età. Il tempo di rilassamento è il tempo necessario affinché la variazione di energia cinetica di una generica stella in un sistema gravitazionale (come una galassia), dovuta all'effetto cumulativo di tutti gli altri incontri con le altre stelle, è dell'ordine della sua energia cinetica iniziale; cioè è il tempo necessario affinché una generica stella perda memoria della sua velocità iniziale. Tale tempo è esprimibile come:

$$t_{relax} = N_{relax} t_{cross}, \quad (1.1)$$

o meglio

$$t_{relax} \simeq \frac{0.1 N_*}{\ln N_*} t_{cross}, \quad (1.2)$$

in cui t_{cross} è il tempo necessario per un attraversamento dell'intero sistema, N_* è il numero di stelle ed N_{relax} è il numero di attraversamenti necessario per avere il rilassamento a due corpi. I sistemi per i quali $t_{relax} \gg$ età sono detti *non collisionali*. Una galassia early-type è un sistema non collisionale ($N_* \simeq 10^{11}$, $t_{cross} = 2 \times 10^8 yr$ da cui $t_{relax} \simeq 10^{15 \div 16} yr$). Gli ammassi globulari sono collisionali ($N_* \simeq 10^6$, $t_{cross} = 10^6 yr$ da cui $t_{relax} \simeq 5 \times 10^9 yr$). Da notare che ogni sistema stellare può essere approssimato come non collisionale su tempi scala sufficientemente brevi; viceversa, ogni sistema è collisionale

su tempi sufficientemente lunghi.

Immaginiamo ora un gran numero di stelle che si muovono sotto l'influenza di un potenziale medio, $\phi(\mathbf{x}, t)$. Ad ogni istante di tempo una descrizione completa dello stato del sistema è data da una funzione continua detta *funzione di distribuzione* (f) definita di modo che $\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ restituisca il numero totale di stelle N_* del sistema, con la condizione $f > 0$ [1] e dove \mathbf{x} e \mathbf{v} sono rispettivamente la coordinata spazio e velocità nello spazio delle fasi. Conoscendo dunque la f al tempo t_0 siamo in grado di sapere quanto vale la f al tempo t successivo, ovvero se conosciamo le coordinate iniziali di ogni stella, la legge di Newton ci permette di valutare le loro posizioni e velocità ad ogni tempo successivo. L'equazione che descrive l'evoluzione dinamica di un sistema non collisionale è scritta in termini di f , ed è nota come *Equazione non collisionale di Boltzman* (CBE). Essa è un'equazione di continuità analoga a quella valida per i fluidi, in cui la funzione di distribuzione svolge il ruolo di una densità nello spazio delle fasi. L'equazione detta CBE è la seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \langle \mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \rangle - \langle \nabla \Phi, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \rangle = 0. \quad (1.3)$$

Essa afferma l'incompressibilità del fluido dei punti rappresentativi delle stelle nello spazio delle fasi. Essendo la f una funzione a 7 variabili, la completa soluzione della CBE è di difficile determinazione. Ecco dunque che diviene necessario usufruire di metodi alternativi, fra cui figura il "metodo dei momenti": tale metodo consiste nel costruire a partire dalla CBE delle equazioni differenziali più semplici. Tali equazioni sono note come equazioni di Jeans. Esse si derivano come momenti sulla parte delle velocità dello spazio delle fasi, della CBE e contengono al loro interno i momenti della f , i quali sono, al contrario della f , direttamente confrontabili con le osservazioni. Riportiamo a titolo d'esempio l'equazione di Jeans scritta in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) per un sistema stellare a simmetria sferica, senza perdere di generalità:

$$\frac{d(\nu \overline{v_r^2})}{dr} + \frac{\nu}{r} [2\overline{v_r^2} - (\overline{v_\theta^2} + \overline{v_\phi^2})] = -\nu \frac{d\Phi}{dr}, \quad (1.4)$$

dove ν è la densità spaziale di stelle.

1.2 Lo stato dell'arte del modellamento dinamico

Come accennato in sezione 1.1 la descrizione strutturale e cinematica di una galassia si avvale dei momenti della f sulla parte delle velocità dello spazio

delle fasi, così definiti:

$$\bar{v}_i(r) = \frac{1}{\rho(r)} \int v_i f d^3\mathbf{v}, \quad (1.5)$$

$$\overline{v_i v_j}(r) = \frac{1}{\rho(r)} \int v_i v_j f d^3\mathbf{v}, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{ij}^2(r) = \frac{1}{\rho(r)} \int (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3\mathbf{v}, \quad (1.7)$$

per $i, j = 1, 2, 3$, rifacendosi all'equazione di Jeans in coordinate sferiche; tali momenti sono direttamente collegati ad alcune proprietà spettrali delle galassie, in una data posizione. Trattasi rispettivamente dei *moti ordinati*, ovvero dei valori medi delle velocità di tutte le stelle nei moti sistematici (velocità *media*) cioè in caso ad esempio di rotazione attorno ad un asse o di espansione/contrazione radiale e dei *moti disordinati*, ovvero la misura degli scarti quadratici medi delle velocità delle stelle rispetto al valore medio in quel dato punto (nota col termine di *dispersione* delle velocità). Quest'ultima è forse la quantità più importante ai fini astrofisici, perchè è utile alla comprensione della struttura e della dinamica delle galassie e all'interpretazione dei dati osservativi. Essa è scrivibile come:

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j, \quad (1.8)$$

ed è rappresentata matematicamente dal *tensore* di dispersione delle velocità a nove componenti; esso è simmetrico e diagonalizzabile in una certa base ortogonale e quindi si riduce a tre componenti. Esso risulta geometricamente visualizzabile come un *ellissoide* dai tre assi di lunghezza pari ai valori diagonali. Una famiglia importante di modelli dinamici per le galassie è caratterizzata dal fatto di avere: $\sigma_{ij}^2(r) = \sigma^2(r)\delta_{ij}$, cioè i tre valori sulla diagonale sono uguali fra loro. Ecco che l'ellissoide diviene una sfera in ogni punto del sistema. Modelli che presentano tale peculiarità sono detti isotropi. Se ciò non avviene, il modello è detto anisotropo.

Giungiamo ora a quello che è il problema centrale del presente lavoro di tesi. Nella quasi totalità dei lavori pubblicati ad oggi, le galassie sono state considerate come sistemi costituiti da stelle tutte uguali, in tutte le loro proprietà (ad esempio aventi tutte la stessa massa). Ciò ha portato a costruire modelli dinamici di sistemi stellari a partire da una considerevole semplificazione della realtà; ad esempio si è ipotizzato che il profilo radiale di brillantezza osservato fosse direttamente collegato al profilo di massa stellare dell'oggetto in questione. Tali modelli assumono dunque un rapporto massa-luminosità costante con il raggio nella galassia, quindi unico per tutto l'oggetto.

Anche i modelli JAM (Jeans Anisotropic Models) [24], che sono ad oggi alcuni fra i modelli cinematici più flessibili, partono da questa assunzione; nonostante rilevino un buon accordo con i dati sperimentali (usano mappe cinematiche 2D e profili di brillantezza) e siano comunque modelli flessibili (valutano la possibilità che sia $\sigma_R^2 \neq \sigma_\phi^2 \neq \sigma_z^2$), partono da assunzioni notevoli, come ad esempio l'assunzione di due parametri di anisotropia, $\beta_z = 1 - (\sigma_z/\sigma_r)^2$ e $\gamma = 1 - (\sigma_\phi/\sigma_r)^2$, costanti nella galassia e come appena detto l'assunzione di un rapporto massa-luminosità costante con il raggio.

1.3 Il lavoro di tesi

1.3.1 Le motivazioni di carattere empirico

È un fatto empirico ben accertato che nelle galassie coesistano popolazioni stellari diverse, cioè caratterizzate da proprietà dinamiche, strutturali e/o chimiche (di abbondanze) diverse. Ad esempio le popolazioni stellari nelle ellittiche non sono uniformi [2]; per esse sono riportate in letteratura numerose evidenze della presenza di gradienti di metallicità e di colore ([3], [4]). Inoltre, nel corso del tempo si sono evidenziate alcune correlazioni fra gradienti di metallicità e proprietà globali delle galassie, quali ad esempio la dispersione di velocità (quindi la massa stessa della galassia). In particolare per galassie con massa inferiore a $10^{11} M_\odot$ [5] si è riscontrata una forte correlazione tra gradiente del magnesio (Mg_2) e massa della galassia, ovvero il gradiente diventa più ripido all'aumentare della massa della galassia; tale correlazione sembrerebbe scomparire per galassie aventi massa superiore al limite appena citato.

La presenza o meno di queste correlazioni è collegabile al processo di formazione di tali galassie; il collasso dissipativo, ad esempio, spiegherebbe i gradienti di colore e di metallicità, mentre meccanismi quali il merging tra galassie potrebbe invece diluire o cancellare tali gradienti. Attualmente si distinguono due famiglie principali di galassie early-type: quelle massicce e "pressure supported" e le meno massicce e "rotationally supported". Queste due famiglie sono viste come i prodotti di storie di formazione differenti, che lasciano le loro impronte nella struttura orbitale e nelle popolazioni stellari. Tuttavia l'esatta relazione fra proprietà strutturali, dinamiche e di popolazione non è ancora ben chiara. Per esempio non è ancora chiaro se il contenuto metallico e la sua distribuzione all'interno della galassia sia legato a particolarità delle orbite. Alcuni studi sostengono anche che i gradienti di metallicità siano spiegabili con gradienti della IMF (Funzione iniziale di massa stellare) [6]. Infatti negli ultimi anni, è cresciuta la convinzione che la IMF possa

essere variabile, in opposizione all'assunzione di una IMF universale. Queste ipotesi provengono da una serie variegata di approcci, la quale include analisi di popolazione stellare ([7],[8],[9]), lensing gravitazionale e modelli dinamici [10]. Ma ad oggi costituisce ancora un quesito irrisolto quale sia il processo fisico all'origine di questa variazione della IMF. In particolare si è trovato da un lato una correlazione tra la dispersione di velocità stellare e la pendenza della IMF sia da modelli dinamici [10] che da modelli di popolazione stellare [11]. Dall'altro lato, ci sono studi che evidenziano una forte correlazione tra $[Mg/Fe]$ e la pendenza della IMF nelle galassie [12]. Dunque è possibile che la IMF sia una proprietà locale, che non varia solo *tra* galassie, ma anche *dentro* la galassia [13].

Ulteriori evidenze riguardo alla coesistenza di popolazioni stellari diverse nelle galassie, si hanno anche da studi fotometrici i quali riscontrano gradienti di colore nelle ellittiche [14]. La variazione dei colori nelle galassie è una caratteristica da tempo osservata infatti. Queste variazioni di solito si usano per evidenziare un cambiamento nella metallicità della popolazione stellare delle ellittiche; i meccanismi con cui tali gradienti di metallicità appaiono non hanno trovato ancora una spiegazione certa.

Ulteriori differenze fra le proprietà delle popolazioni stellari nelle galassie si sono riscontrate in termini di diverse proprietà dinamiche osservate in alcune galassie. In particolare si sono trovate differenze nelle proprietà rotazionali di nebulose planetarie e ammassi globulari negli aloni di tre diverse galassie early type [15]. Studi successivi hanno poi rilevato diverse proprietà strutturali e dinamiche in un campione di nebulose planetarie facente parte dell'ammasso della Vergine [16]; attraverso studi spettroscopici, è stato possibile comprendere che si trattava di componenti dinamicamente distinte, con diversi profili di densità e di velocità, e per questo alcune appartenenti all'alone di M87 mentre altre facenti parte delle stelle intra-cluster. Poiché la formazione di queste due componenti stellari è direttamente legata a trasformazioni avvenute nell'ammasso per fenomeni quali frizione dinamica e stripping mareali, ecco che sarebbe utile poter disporre di modelli dinamici che tengano conto di tali differenze.

Queste numerose evidenze osservative di compresenza di popolazioni stellari con proprietà dinamiche e chimiche differenti nelle galassie ellittiche ci hanno condotto alla necessità di introdurre il concetto di funzione di distribuzione estesa per la loro più completa descrizione. Una funzione di distribuzione estesa è una funzione di distribuzione che tiene conto di come masse diverse (in questo lavoro parleremo spesso di parametro esteso e nel nostro caso lo identificheremo con la massa stellare M) sono distribuite in modo diverso all'interno delle galassie.

1.3.2 Gli albori dei modelli dinamici estesi e questo lavoro

Prima del 1975 si pensava che le galassie ellittiche fossero appiattite dalla rotazione. Studi successivi, che combinavano modellistica con misure (tra le survey più recenti ricordiamo quella di *SAURON + ATLAS^{3D}*) di V/σ , (rapporto tra la componente rotazionale e la dispersione di velocità di una galassia), si capì che la forma era dovuta all'anisotropia nei moti. Risiedendo una frazione consistente dell'energia nei moti random, potremmo spiegare i gradienti di metallicità osservati supponendo che stelle con metallicità diversa, abbiano distribuzioni orbitali diverse [17]. Diviene quindi necessaria l'introduzione di strumenti più flessibili che tengano conto cioè della coesistenza di stelle aventi diverse proprietà, con i quali poter costruire modelli dinamici più complessi, finalizzati a spiegare ciò che osserviamo. Motivati da queste evidenze osservative introduciamo la così detta *funzione di distribuzione estesa*, f . Recentemente J. Binney in un articolo del 2015 ha presentato il concetto di f estesa applicato al caso della nostra Galassia [18]. Un'altra applicazione di tale concetto è già stata illustrata, ponendo la metallicità come ulteriore variabile della f [17]. Dal teorema di Jeans sappiamo che una f deve dipendere dagli integrali del moto per essere soluzione della CBE; scegliendo ad esempio di assegnare maggiore energia orbitale alle stelle meno metalliche, e una minore energia a quelle maggiormente metalliche, si potrebbero giustificare i gradienti osservati.

Sebbene l'idea di f estese abbia già mosso i primi passi da qualche anno a questa parte, fino ad ora non si sono riscontrati in letteratura suoi studi ed utilizzi più approfonditi. Ecco dunque che in questo lavoro di tesi definiremo il framework generale utile alla costruzione di modelli dinamici basati su f estese.

Ragionare in termini di f estese ha certamente delle conseguenze sulle equazioni della dinamica stellare. Per quanto riguarda la CBE notiamo che essa è soddisfatta da ciascuna componente del modello dal momento che il potenziale è quello totale; questo vale anche per le equazioni di Jeans che da essa discendono.

In particolare lo scopo è capire che impatto può avere l'introduzione della dipendenza di f dalla massa della singola stella, ove le masse delle stelle sono distribuite secondo una IMF scelta, sulle equazioni di Jeans. In più assoceremo ad ogni massa M un rapporto massa-luminosità $\Upsilon(M)$; quindi inizieremo a considerare il sistema stellare come costituito da più componenti, ciascuna fatta di stelle di uguale massa M , e ciascuna facente la propria luce.

Fintanto che si usano modelli mono-massa, le equazioni di Jeans pesate con la massa equivalgono a quelle pesate con la luce. La novità di questo lavoro

apre la possibilità di avere un rapporto massa-luminosità che varia punto per punto nella galassia, dunque le equazioni di Jeans sono diverse a seconda che le si pesi con la massa o con la luce.

In questo lavoro costruiremo dei "toy models" estesi, rappresentativi di una galassia tipica. La costruzione di tali modelli costituisce già un risultato, poichè aprirà la strada a modelli sempre più complessi e vicini alla realtà.

Capitolo 2

I modelli dinamici estesi

In questo capitolo introdurremo il concetto di funzione di distribuzione (f) estesa, scegliendo come parametro esteso la massa M ; l'uso di tale f presuppone quindi anche l'introduzione di una IMF. Questo capitolo costituisce dunque la base di partenza per i capitoli successivi, nei quali considereremo un sistema costituito da varie componenti, ciascuna rappresentata da una data massa M , di dato rapporto massa-luminosità $\Upsilon(M)$. La scelta di $\Upsilon(M)$ servirà per scrivere le equazioni di Jeans per ciascuna componente pesata con la luce. Per arrivare a scrivere queste equazioni avremo poi bisogno di introdurre le medie della f estesa sullo spazio delle fasi (momenti), pesate rispettivamente sulla probabilità, sulla massa e sulla luce. Successivamente ricaveremo delle relazioni fra queste quantità per capire come sono collegate e scopriremo di avere a che fare con quantità differenti a seconda che le si pesi con la luce o con la massa, proprio perchè il fattore di scala $\Upsilon(M)$ con cui sono legate le varie quantità globali tra di loro, dipende dagli oggetti che andiamo a sommare, ovvero dalla massa delle singole stelle.

L'obiettivo di questo capitolo è quello di costruire il framework generale a partire dal quale si tratteranno in seguito e in modo organico le sovrapposizioni di componenti stellari con diverse proprietà strutturali e dinamiche. I modelli che ne discendono sono suffragati empiricamente da osservazioni di gradienti di colore e di metallicità nelle galassie ellittiche, come annunciato già nell'introduzione.

2.1 La funzione di distribuzione estesa, f

La dinamica di oggetti non collisionali, quali ad esempio le galassie early-type è descritta in termini statistici tramite una particolare funzione, detta funzione di distribuzione f (DF) [19], la quale specifica il numero di stelle contenute nel volume $d^3\mathbf{x}$ centrato nella posizione \mathbf{x} e con velocità comprese nell'intervallo $d^3\mathbf{v}$ centrato in \mathbf{v} . Negli studi condotti fino ad ora il modello dinamico è considerato costituito da stelle aventi tutte la stessa massa, con un rapporto massa-luminosità M/L unico per tutto l'oggetto. Complichiamo ora questo disegno immaginando di avere un sistema costituito da diverse componenti, ciascuna composta soltanto da stelle di data massa M . Ovviamente un sistema stellare realistico è sempre la somma di queste componenti. Nel limite continuo, nei calcoli successivi le somme sulle masse saranno sostituite da integrali. Ad ognuna delle componenti di massa corrisponde una f . La funzione di distribuzione si scrive quindi come:

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, M). \quad (2.1)$$

A differenza della trattazione standard, nella quale è possibile considerare f come densità di massa, nel nostro caso è necessario interpretare f come densità di probabilità, e solo successivamente introdurre il fattore massa. Pertanto definiamo:

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, M) d^3\mathbf{v} = p(\mathbf{x}, M), \quad (2.2)$$

ove p è come la distribuzione di densità di probabilità per le stelle di massa M . La condizione di normalizzazione per la f è:

$$\frac{1}{M_*} \int M \Psi(M) p(\mathbf{x}, M) d^3\mathbf{x} dM = 1, \quad \forall M. \quad (2.3)$$

ove M_* è la massa totale del sistema e $\Psi(M)$ è la funzione iniziale di massa delle stelle. Nella sezione seguente descriviamo brevemente alcune delle proprietà di $\Psi(M)$.

2.2 La funzione iniziale di massa stellare (IMF)

Come accennato nell'introduzione, la novità dei modelli di galassia che presenteremo nei capitoli successivi consiste nell'introdurre uno spettro di massa $\Psi(M)$, e nell'assegnare un corrispettivo rapporto massa-luminosità $\Upsilon(M)$, in modo da avere diverse componenti stellari ciascuna composta da stelle di una

determinata massa M e ognuna facente la propria luce. Presentiamo di seguito alcune considerazioni di carattere generale riguardo una $\Psi(M)$ e un $\Upsilon(M)$ per ogni massa M . La funzione $\Psi(M)dM$, nota col nome di Funzione Iniziale di Massa (IMF), fornisce il numero di stelle al momento della formazione della popolazione stellare con massa compresa tra M e $M + dM$. Dalla definizione di Ψ si ha dunque, in una popolazione di massa stellare minima M_{inf} e massa stellare massima M_{sup}

$$\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \Psi(M)dM = N_*, \quad (2.4)$$

ove N_* il numero totale di stelle. Di conseguenza la massa totale in stelle, M_* , è data da:

$$\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \Psi(M)MdM = M_*. \quad (2.5)$$

In molte applicazioni si usa la seguente forma funzionale [20]:

$$\Psi(M) = AM^{-s}. \quad (2.6)$$

Si tratta di una legge di potenza nella quale A è una costante di scala, determinata dalle proprietà globali della popolazione stellare ed s ne è la pendenza. Per una tale IMF, si ha:

$$N_* = \frac{A}{s-1} (M_{inf}^{1-s} - M_{sup}^{1-s}), \quad s > 1. \quad (2.7)$$

Così, ad esempio, se sono note M_{inf} , M_{sup} , s ed N_* , è possibile determinare il valore di A dalla precedente identità. Analogamente, per quanto riguarda la massa,

$$M_* = \frac{A}{s-2} (M_{inf}^{2-s} - M_{sup}^{2-s}), \quad s > 2. \quad (2.8)$$

Anche l' espressione 2.8 permette di determinare il valore di A . A partire dalle equazioni 2.7 e 2.8 possiamo definire il valore della massa media della popolazione come

$$\langle M \rangle = \frac{M_*}{N_*}. \quad (2.9)$$

Nel caso di una IMF descritta da una legge di potenza come nella 2.6, si ha

$$\langle M \rangle = \frac{s-1}{s-2} \frac{M_{inf}^{2-s} - M_{sup}^{2-s}}{M_{inf}^{1-s} - M_{sup}^{1-s}}, \quad (2.10)$$

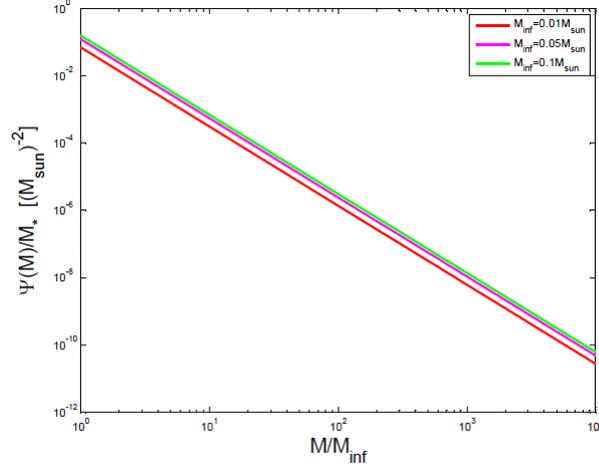


Figura 2.1: Andamento della IMF (equazione 2.6) per diversi valori scelti di M_{inf} con $s = 2.35$, $M_* = 1$, $M_{sup} \rightarrow \infty$. Vedasi sezione 2.2 per maggiori dettagli.

e, per $s > 2$, nel caso limite di $M_{sup} \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\langle M \rangle = \frac{s-1}{s-2} M_{inf}. \quad (2.11)$$

Ad esempio, nel caso di una legge di Salpeter ($s = 2.35$) ([21]), si ha $\langle M \rangle \simeq 3.9 M_{inf}$, e il numero di stelle aventi massa $M > \langle M \rangle$, rispetto al numero totale, è $[(s-2)/(s-1)]^{s-1} \sim 0.16$.

2.2.1 Il rapporto massa-luminosità

In questo lavoro assumiamo un rapporto massa-luminosità che dipende dalla massa della stella, dunque identico solo per stelle di stessa massa, ovvero $\Upsilon = \Upsilon(M)$. Per semplicità consideriamo una sua dipendenza dalla massa come una legge di potenza. Tale scelta è giustificata dal fatto che, come ben noto, per le stelle in Sequenza Principale [22] vale:

$$L(M) \propto M^\delta, \quad 3 < \delta < 4, \quad (2.12)$$

dunque

$$\Upsilon(M) = B M^{1-\delta}, \quad (2.13)$$

dove B è una costante di scala da determinare. Analogamente a quanto fatto per la IMF, è possibile ottenere l'espressione generale per la luminosità totale

L_* della popolazione come

$$\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \frac{M\Psi(M)}{\Upsilon(M)} dM = L_*. \quad (2.14)$$

Di conseguenza, è possibile definire il rapporto massa-luminosità medio di tutto l'oggetto come

$$\langle \Upsilon \rangle = \frac{M_*}{L_*}. \quad (2.15)$$

È possibile usare questa relazione per fissare il valore della costante B . Scegliamo i due andamenti a legge di potenza per $\Psi(M)$ e per $\Upsilon(M)$ appena visti; la luce totale L_* è quindi:

$$L_* = \frac{A}{B} \frac{M_{sup}^{1+\delta-s} - M_{inf}^{1+\delta-s}}{1 + \delta - s}, \quad (2.16)$$

e dalle rispettive definizioni di M_* e di L_* si ottiene (per $M_{sup} \rightarrow \infty$)

$$\langle \Upsilon \rangle = B \frac{1 + \delta - s}{s - 2} \frac{M_{inf}^{2-s}}{M_{sup}^{1+\delta-s}}. \quad (2.17)$$

Dunque se è noto il valore di $\langle \Upsilon \rangle$ si potrebbe fissare B .

2.2.2 Importanza della IMF

La IMF, fornisce lo spettro di massa di una generazione stellare al momento della sua nascita. Ci da informazioni riguardo all'importanza relativa di stelle di piccola massa rispetto a quelle di grande massa, dunque la forma di tale funzione influenza direttamente il numero di eventi di supernovae di tipo II, la loro composizione chimica, la quantità di remnants stellari, e il rapporto M_*/L della popolazione, essendo proprio la massa il parametro fondamentale dell'evoluzione stellare. Inoltre lo studio della IMF è cruciale per la stima della massa stellare galattica a partire dalla luminosità osservata. Dunque, lo studio della IMF è fondamentale nello studio delle galassie ([23]).

2.2.3 Risultati recenti sulla IMF

La IMF non è nota a partire da principi primi. Salpeter (1955) fu il primo a modellare sulla base di determinazioni empiriche nelle vicinanze del Sole, un andamento a legge di potenza per tale funzione, con esponente pari a $s = 2.35$. Il metodo migliore per la determinazione della IMF è il conteggio stellare diretto. Ove questo non sia possibile, ad esempio nell'osservazione

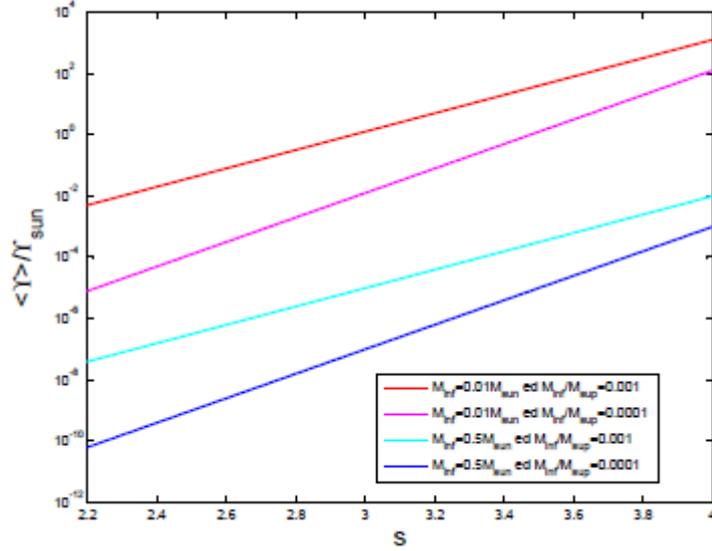


Figura 2.2: Andamento del rapporto massa-luminosità medio espresso in unità del rapporto massa-luminosità solare (esplicitato ponendo $B = \Upsilon_{\odot}/M_{\odot}^{1-\delta}$ nell'equazione 2.17) in funzione della pendenza della IMF (s) e per diversi valori di M_{inf} ed $M_{\text{inf}}/M_{\text{sup}}$ e per fissato $\delta = 4$. Per ulteriori dettagli si rimanda alla sottosezione 2.2.1

di galassie lontane, è necessario ricorrere a metodi indiretti alternativi. Tra questi uno dei più utilizzati attualmente, consiste nell' utilizzo di modelli di sintesi di popolazione stellare che hanno come parametri liberi una IMF, un'età, una metallicità. Essi forniscono uno spettro sintetico e per mezzo del confronto tra spettri sintetici e spettri osservati si ottiene una stima dei parametri liberi. Fra gli output di questo confronto c'è anche un valore per il rapporto M_*/L , che può essere confrontato con quello ottenuto inserendo nel rapporto una stima dinamica di M_* . Dunque si confrontano i rapporti massa-luminosità, M_*/L , determinati da due diagnostiche diverse ed indipendenti della massa stellare M_* , e nel confronto la IMF è una variabile del problema. Concentriamoci ora sui modelli dinamici che vengono più usati attualmente. Fra essi ci sono i cosiddetti JAM (Jeans Anisotropic Models), rappresentativi dello stato dell'arte del modellamento dinamico [24]. Tali modelli sono assisimmetrici e ritenuti una buona approssimazione per la classe dei regular rotators; si basano su alcune assunzioni, come ad esempio sulla scelta di un rapporto massa-luminosità costante col raggio. In più, poichè si vuole lasciare aperta la possibilità che sia $\sigma_R^2 \neq \sigma_{\phi}^2 \neq \sigma_z^2$, in tali modelli si introducono ben due parametri di anisotropia ($\gamma \neq 0$ e $\beta_z \neq 0$, [24]). Risolvendo dunque le equazioni di Jeans per tali modelli assisimmetrici anisotropi, dal best fit

con le mappe cinematiche di velocità osservate, si hanno i valori di i (angolo di inclinazione), M/L e γ e β_z per i quali il modello scelto risulta consistente con i dati osservativi.

Attualmente è in corso un grande dibattito sul fatto che la IMF si possa considerare universale o meno, dal momento che negli ultimi anni si è evidenziata una variazione della IMF tra galassie e nelle singole galassie. In base a quanto appena detto in merito alla procedura più usata per la determinazione della IMF, ecco che partendo dalla determinazione del rapporto $(M_*/L)_{Salp}$ (ottenuto da modelli di sintesi spettrale per la scelta della IMF di Salpeter) e del rapporto $(M_*/L)_{Dym}$ (ottenuto dai modelli dinamici), si costruisce un sistema di riferimento in cui figurano tali quantità rispettivamente sull'asse delle ascisse e su quello delle ordinate (per maggiore chiarezza vedasi Fig. 2.3 (a)). Avendo dunque a disposizione questi due metodi di diagnostica diversa, si va poi a vedere dove si posizionano le galassie reali e ciò che si nota è una disposizione variegata delle galassie tale per cui, le galassie a bassa dispersione (σ) sono consistenti con una IMF di tipo Chabrier o Kroupa mentre le galassie di medio-alta dispersione presentano una IMF di tipo Salpeter o anche più pesante. Ecco dunque che la IMF sembrerebbe non essere più universale. Spesso tale scenario viene illustrato considerando invece il cosiddetto "IMF mismatch parameter" [25], definito come il rapporto $\alpha = [(M_*/L)_{Dym}]/[(M_*/L)_{Salp}]$ in funzione della massa delle galassie (vedasi Fig. 2.3 (b)).

2.3 La funzione f pesata con la massa e con la luce

Partendo dalla definizione di $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, M)$ come densità di probabilità nello spazio delle fasi, possiamo decidere di pesare tale funzione rispettivamente con la massa, ottenendo una funzione che chiamiamo f_M o con la luce, ottenendo la funzione f_L , introduciamo quindi le seguenti definizioni:

$$f_M \equiv \Psi(M)Mf, \quad f_L \equiv \frac{\Psi(M)M}{\Upsilon(M)}f = \frac{f_M}{\Upsilon(M)}. \quad (2.18)$$

I momenti di ordine 0 di tali funzioni forniscono rispettivamente la densità di massa e la densità di luce dovuta alle stelle di massa compresa tra M ed $M + dM$, per unità di volume attorno al punto \mathbf{x} :

$$\rho_*(\mathbf{x}, M) = \int f_M d^3\mathbf{v}, \quad \nu_*(\mathbf{x}, M) = \int f_L d^3\mathbf{v}. \quad (2.19)$$

Le quantità $\rho_*(\mathbf{x}, M)$ e $\nu_*(\mathbf{x}, M)$ sono collegate alla densità di probabilità, p nell'equazione 2.2, dalle seguenti relazioni:

$$\rho_*(\mathbf{x}, M) = \Psi(M)Mp(\mathbf{x}, M), \quad \nu_*(\mathbf{x}, M) = \frac{\Psi(M)M}{\Upsilon(M)}p(\mathbf{x}, M). \quad (2.20)$$

Quindi si ha per ciascuna componente di massa M :

$$\nu_*(\mathbf{x}, M) = \frac{\rho_*(\mathbf{x}, M)}{\Upsilon(M)}. \quad (2.21)$$

Notiamo che, in aggiunta alle due definizioni di $\rho_*(\mathbf{x}, M)$ e di $\nu_*(\mathbf{x}, M)$, è possibile introdurne anche una terza, ovvero:

$$n_*(\mathbf{x}, M) = \int \Psi(M)f d^3\mathbf{v} = \Psi(M)p(\mathbf{x}, M), \quad (2.22)$$

dove $n_*(\mathbf{x}, M)$ è il numero di stelle di massa compresa tra M ed $M + dM$ nell'elemento di volume unitario attorno ad \mathbf{x} . Con questa definizione si ha quindi che

$$\rho_*(\mathbf{x}, M) = Mn_*(\mathbf{x}, M), \quad \nu_*(\mathbf{x}, M) = \frac{M}{\Upsilon(M)}n_*(\mathbf{x}, M). \quad (2.23)$$

Dalle definizioni precedenti risulta che le densità totali sono date da:

$$\rho_*(\mathbf{x}) = \int \rho_*(\mathbf{x}, M)dM, \quad \nu_*(\mathbf{x}) = \int \nu_*(\mathbf{x}, M)dM. \quad (2.24)$$

In base a tutte le definizioni precedenti l'identità ovvia

$$M_* = \int \rho d^3\mathbf{x} = \int M\Psi(M)p(\mathbf{x}, M)d^3\mathbf{x}dM, \quad (2.25)$$

risulta automaticamente soddisfatta.

Si noti che la 2.21 vale punto per punto nel sistema stellare, per ciascuna componente stellare di massa M , con un rapporto massa-luminosità che dipende da M , ma non dalla posizione nel sistema. In genere però questo non è più verificato quando si passi a considerare la densità totale di massa e la densità totale di luce in ogni punto. Infatti, dalla 2.21 risulta:

$$\rho_*(\mathbf{x}) = \int \rho_*(\mathbf{x}, M)dM = \int \nu_*(\mathbf{x}, M)\Upsilon(M)dM \equiv \nu_*(\mathbf{x}) \langle \Upsilon \rangle_L(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

dove si è definito il rapporto $\langle \Upsilon \rangle_L(\mathbf{x})$ pesato sulla luce come:

$$\langle \Upsilon \rangle_L(\mathbf{x}) \equiv \frac{\int \nu_*(\mathbf{x}, M)\Upsilon(M)dM}{\nu_*(\mathbf{x})}. \quad (2.27)$$

Non è in generale vero che l'integrale a secondo membro sia indipendente da \mathbf{x} . Vedremo più avanti in quali circostanze ciò possa avvenire. Notiamo che vale il seguente risultato, banale dal punto di vista formale, ma certamente non intuitivo, ovvero:

$$\langle \Upsilon \rangle_L(\mathbf{x}) = \langle \Upsilon \rangle_M(\mathbf{x}) \quad (2.28)$$

dove

$$\langle \Upsilon \rangle_M(\mathbf{x}) \equiv \rho_*(\mathbf{x}) \left[\int \frac{\rho_*(\mathbf{x}, M)}{\Upsilon(M)} dM \right]^{-1}. \quad (2.29)$$

La dimostrazione è immediata inserendo nell'integrale la densità specifica $\rho(\mathbf{x}, M)$, usando la 2.21, e considerando infine la 2.27.

Infine consideriamo da dove discende la condizione di normalizzazione in 2.3. Una definizione di massa stellare totale è:

$$M_* = \int f_M d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} dM, \quad (2.30)$$

mentre un'altra è:

$$M_* = \int M \Psi(M) dM. \quad (2.31)$$

Ricordando le definizioni 2.2 ed 2.18, ricaviamo dall'uguaglianza delle due precedenti definizioni di M_* , la condizione di normalizzazione 2.3.

2.4 Momenti della f

Nelle trattazioni in cui si considerano genericamente popolazioni stellari omogenee composte da stelle di stessa massa e stessa luminosità, la funzione di distribuzione f può essere indistintamente interpretata come distribuzione di probabilità, di massa, o di luce. Inoltre tutte le medie sono indipendenti da eventuali fattori di peso che moltiplicano la f . Il caso particolare appena enunciato verrà illustrato in dettaglio nella sezione 2.4.2.

Qui occorre notare come si possano avere medie diverse in termini di probabilità, di massa e di luce. Scopo di questa sezione è chiarire le differenze tra le varie quantità, e mettere in luce eventuali relazioni tra di esse. Per motivi che saranno chiari più avanti è opportuno iniziare a considerare delle grandezze del tutto generiche, definite sullo spazio delle fasi. Tali grandezze possono essere indicate come

$$F = F(\mathbf{v}) \quad \text{oppure} \quad F = F(\mathbf{v}, M), \quad (2.32)$$

ove \mathbf{v} è la velocità. Per la prima classe di grandezze definiamo in maniera naturale tre diversi valori medi, ovvero:

$$\overline{F}(\mathbf{x}, M) \equiv \frac{\int F f d^3\mathbf{v}}{p(\mathbf{x}, M)}, \quad (2.33)$$

$$\overline{F}_M(\mathbf{x}, M) \equiv \frac{\int F f_M d^3\mathbf{v}}{\rho(\mathbf{x}, M)}, \quad (2.34)$$

$$\overline{F}_L(\mathbf{x}, M) \equiv \frac{\int F f_L d^3\mathbf{v}}{\nu(\mathbf{x}, M)}. \quad (2.35)$$

Si noti che per le tre medie vale rigorosamente, in ogni punto, anche nel caso in cui $F = F(\mathbf{v}, M)$, l'uguaglianza

$$\overline{F}(\mathbf{x}, M) = \overline{F}_M(\mathbf{x}, M) = \overline{F}_L(\mathbf{x}, M). \quad (2.36)$$

Definiamo ora le rispettive quantità globali, cioè integrali su M , in ogni punto; esse sono rappresentative di quantità medie di tutta la popolazione stellare nel punto \mathbf{x} specifico. Anche in questo caso le quantità globali sono pesate sulla probabilità, sulla massa e sulla luce.

$$\langle \overline{F} \rangle(\mathbf{x}) = \frac{\int \overline{F}(\mathbf{x}, M) p(\mathbf{x}, M) dM}{p(\mathbf{x})}, \quad (2.37)$$

$$\langle \overline{F} \rangle_M(\mathbf{x}) = \frac{\int \overline{F}_M(\mathbf{x}, M) \rho(\mathbf{x}, M) dM}{\rho(\mathbf{x})}, \quad (2.38)$$

$$\langle \overline{F} \rangle_L(\mathbf{x}) = \frac{\int \overline{F}_L(\mathbf{x}, M) \nu(\mathbf{x}, M) dM}{\nu(\mathbf{x})}. \quad (2.39)$$

Si può notare che nel caso in cui $\overline{F} = \overline{F}(\mathbf{x})$, ovvero in cui non ci sia dipendenza di \overline{F} dalla massa, non solo $\overline{F} = \overline{F}_M = \overline{F}_L$ (cosa che è sempre vera), ma anche $\langle \overline{F} \rangle = \langle \overline{F} \rangle_M = \langle \overline{F} \rangle_L = \overline{F}$. Condizione sufficiente affinché ciò accada è che sia $F = F(\mathbf{v})$ e che la f sia esprimibile come $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, M) = h(M)g(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, ovvero sia fattorizzata.

Velocità di streaming

Come prima e più importante applicazione di tale risultato, consideriamo il caso della velocità di streaming. In questo caso

$$F = \mathbf{v}, \quad (2.40)$$

ed indicando con $\mathbf{v}(\mathbf{x}, M)$ il valore medio associato, si ha dalle 2.33 - 2.35:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, M) \equiv \frac{\int \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, M) d^3 \mathbf{v}}{p(\mathbf{x}, M)} = \mathbf{v}_M(\mathbf{x}, M) = \mathbf{v}_L(\mathbf{x}, M). \quad (2.41)$$

Ovvero, nel caso dei valori medi di ciascuna componente di massa M , la media sulla probabilità, sulla massa e sulla luce coincidono. Quindi la velocità di streaming di ogni componente è indipendente dal tipo di media che si effettua, come mostrato in generale nelle 2.33 - 2.35. Questo non è più vero quando si passa a considerare il valore medio su tutta la popolazione, come mostrato nelle 2.37 - 2.39.

Dispersione di velocità

La funzione che definisce il tensore di dispersione delle velocità è:

$$F = (v_i - v_i)(v_j - v_j), \quad (2.42)$$

dove, in generale le componenti della velocità di streaming v_i e v_j dipendono dalla massa M , ma non dipendono dal tipo di media che effettuiamo. Utilizzando tale funzione F definiamo ora il tensore di dispersione delle velocità pesato sulla probabilità, sulla massa e sulla luce:

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, M) = \frac{\int f F d^3 \mathbf{v}}{p(\mathbf{x}, M)} = \frac{1}{p(\mathbf{x}, M)} \int f \times (v_i v_j + v_i v_j - v_j v_i - v_j v_i) d^3 \mathbf{v} \quad (2.43)$$

$$= (\overline{v_i v_j}) - v_i v_j, \quad (2.44)$$

dove il secondo termine come già visto è indipendente dal tipo di media, ed anche il primo termine si può notare essere lo stesso per f , f_M ed f_L . Quindi anche nel caso $F = F(\mathbf{v}, M)$ vale l'uguaglianza tra le medie:

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, M) = \sigma_{ij,M}^2(\mathbf{x}, M) = \sigma_{ij,L}^2(\mathbf{x}, M). \quad (2.45)$$

Questa è un'ulteriore verifica delle proprietà generali 2.33 - 2.35, ovvero la dispersione di velocità di ogni componente di massa M è indipendente dal tipo di media che si effettua. Di nuovo, quando si integra su tutte le masse M l'uguaglianza non sussiste più, come nelle 2.37 - 2.39. Tuttavia, nel caso di f fattorizzata, dal momento che la velocità di streaming \mathbf{v} non dipende dalla massa, si ha $F = F(\mathbf{v})$ e quindi ricadiamo nella condizione sufficiente affinché l'uguaglianza fra le tre medie è valida anche quando si considera la popolazione globale di stelle nel punto \mathbf{x} specifico.

2.5 La f fattorizzata

Consideriamo ora come applicazione una funzione di distribuzione fattorizzata, ovvero esprimibile come

$$f = h(M)g(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \quad (2.46)$$

Nel caso specifico, la condizione di normalizzazione nella 2.3 diventa:

$$M_* = \int M\Psi(M)dM = \int h(M)M\Psi(M)dM \int g(\mathbf{x}, \mathbf{v})d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v} \quad (2.47)$$

da cui otteniamo che:

$$\int g(\mathbf{x}, \mathbf{v})d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v} = \frac{\int M\Psi(M)dM}{\int h(M)M\Psi(M)dM}. \quad (2.48)$$

In questo caso segue poi la fattorizzazione di f_M , f_L , p , ρ , ν come si può facilmente dimostrare sostituendo la 2.46 nelle rispettive quantità.

Consideriamo ora le grandezze medie nel caso di f fattorizzata, componente per componente

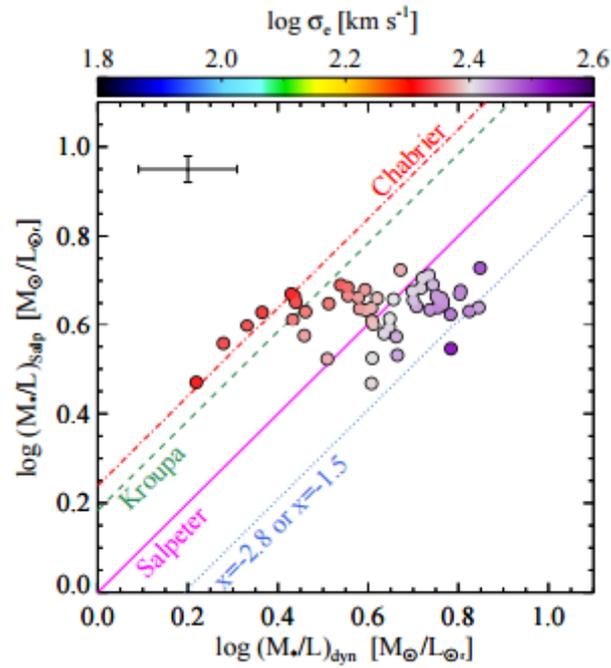
$$\bar{F}(\mathbf{x}, M) = \frac{h(M) \int Fgd^3\mathbf{v}}{h(M) \int gd^3\mathbf{v}} = \bar{F}(\mathbf{x}), \quad (2.49)$$

e quindi, per la proprietà generale 2.36, si ha che $\bar{F}_M(\mathbf{x}) = \bar{F}_L(\mathbf{x}) = \bar{F}(\mathbf{x})$. Ovvero *se F non dipende da M , nel caso di f fattorizzata si ha che anche \bar{F} non dipende da M* . Automaticamente allora, per quanto visto nelle 2.37 si ha anche che $\langle \bar{F} \rangle = \langle \bar{F} \rangle_M = \langle \bar{F} \rangle_L = \bar{F}$.

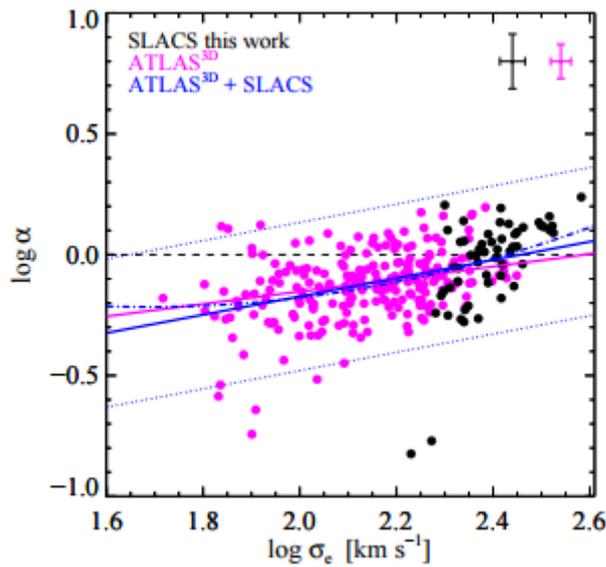
In base a quanto visto si capisce che lavorare con funzioni di distribuzioni fattorizzate non aggiunge nulla di nuovo alla procedura modellistica standard, poichè è come se avessimo a che fare con una funzione di distribuzione non *estesa*. Ciò risulta anche nel calcolo del rapporto massa-luminosità totale della 2.26, in cui, facendo semplicemente il rapporto tra i profili radiali di densità di massa totale e di luce totale, e ivi sostituendo f in 2.46, si ha che:

$$\langle \Upsilon \rangle_L = \frac{\int \frac{\Psi(M)M}{\Upsilon(M)} \int h(M)g(\mathbf{x}, \mathbf{v})d^3\mathbf{v}\Upsilon(M)dM}{\int \frac{\Psi(M)M}{\Upsilon(M)} \int h(M)g(\mathbf{x}, \mathbf{v})dM d^3\mathbf{v}}. \quad (2.50)$$

Portando fuori dall'integrale esterno $\int g(\mathbf{x}, \mathbf{v})d^3\mathbf{v}$ e semplificando, si vede come la dipendenza di tale rapporto dalla posizione scompaia. Questo significa che usare una f fattorizzata è sinonimo di avere oggetti aventi un unico rapporto massa-luminosità costante con il raggio.



(a)



(b)

Figura 2.3: (a) Confronto tra $(M_*/L)_{Salp}$, ottenuto da diagnostiche di spettri stellari, con assunzione di $s = 2.35$, e $(M_*/L)_{Dyn}$ ottenuto da modelli dinamici. (b) Correlazione tra α ('IMF mismatch parameter') e la dispersione di velocità stellare delle galassie, σ , per due campioni di galassie (SLACS e ATLAS^{3D}). Per ulteriori dettagli vedasi sezione (2.2).

Capitolo 3

Decomposizione strutturale

Dopo aver costruito il framework generale della modellistica con funzione di distribuzione estesa, in questo capitolo e in quello successivo presentiamo alcune procedure specifiche volte alla realizzazione di modelli di galassia. Per semplicità ridurremo il ragionamento al caso sferico.

Nella prima sezione (3.1) di questo capitolo vediamo come costruire un modello di galassia a partire dalla somma di componenti descritte dalle coppie $\phi_*(r, M)$, $\rho_*(r, M)$, ciascuna rappresentativa di una componente costituita da stelle di massa M . In altre parole, il modello a cui facciamo riferimento è comprensivo di uno spettro di masse stellari, dove ciascuna massa è rappresentativa di una determinata componente costituita da stelle aventi tutte la stessa massa M . La somma di tutte queste componenti costituisce il modello di galassia. Il profilo $\rho_*(r, M)$ dipende dalla massa M considerata, perciò sarà diverso da componente a componente. È dunque la massa il parametro discriminante tra le componenti. Il modo in cui si concretizza tale discriminazione consiste nel far dipendere una proprietà strutturale del profilo di densità, come ad esempio il raggio di core, proprio dalla massa M . Si tratterà di risolvere le equazioni di Jeans per ogni componente e successivamente di sommare le soluzioni in modo opportuno, cosa possibile per la linearità di tali equazioni.

Contrariamente a quanto visto nella prima sezione, in cui la somma di componenti produce il modello finale, nella sezione successiva (3.2) seguiamo un approccio differente: partiamo da un modello dato, e determiniamo una procedura volta a scomporlo in componenti, ciascuna composta da stelle di uguale massa M . Si tratta dunque di scomporre il profilo di densità totale, avendo cura che i profili risultanti delle componenti non siano fra loro paralleli.

3.1 Decomposizione strutturale. I: somma di componenti

In questo approccio, si **sommano** (pesando con la massa o con la luce) coppie potenziale-densità assegnate, nelle quali alcuni parametri strutturali (come ad esempio il raggio di scala) dipendono dalla massa della componente stellare considerata. Iniziamo dunque dalla scelta di un profilo di densità avente le proprietà strutturali che intendiamo attribuire alla componente dovuta alle stelle di massa M . In generale, alcuni dei parametri strutturali del profilo di densità della componente dipendono dalla massa M in questione. Considerando quindi una coppia densità potenziale $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$, dove si consideri la massa totale associata alla componente $\tilde{\rho}$ pari all'unità, si pone:

$$\rho_*(r, M) = \Psi(M)M\tilde{\rho}(r, M), \quad (3.1)$$

$$\phi_*(r, M) = \Psi(M)M\tilde{\phi}(r, M), \quad (3.2)$$

dove la dipendenza dalla massa M delle funzioni $\tilde{\rho}(r, M)$ e $\tilde{\phi}(r, M)$ è introdotta tramite il raggio di scala della distribuzione $\tilde{\rho}(r)$. Le coppie potenziale-densità $\rho_*(r, M)$ e $\phi_*(r, M)$ obbediscono per ogni valore fissato di M all'equazione di Poisson. Dunque, una volta esplicitate le coppie potenziale-densità di ciascuna componente, potremmo risolvere l'equazione di Jeans per ottenere il profilo radiale della dispersione di velocità della componente di massa M scelta. Per fare questo adotteremo una procedura meglio approfondita nel capitolo delle applicazioni (Capitolo 4), dove si farà vedere un'applicazione di tale procedura per la scelta del profilo di Plummer. Sostanzialmente si tratta di risolvere l'equazione di Jeans per la densità della componente di massa M , nel potenziale generato dalla sola componente di massa M' . La soluzione H delle equazioni di Jeans è dunque scrivibile come

$$\tilde{\rho}(r, M)\sigma^2(r, M, M') = H(r, M, M'). \quad (3.3)$$

Per integrazioni successive sullo spettro di massa, ricaviamo per prima la dispersione di velocità della componente di massa M :

$$\rho_*(r, M)\sigma^2(r, M) = \Psi(M)M \int_{M_{inf}}^{M_{sup}} H(r, M, M')\Psi(M')M'dM'. \quad (3.4)$$

Successivamente, integrando ulteriormente sulla massa M , si ottiene il profilo di dispersione di velocità globale, ovvero il profilo radiale della dispersione di velocità di tutte le stelle:

$$\rho_*(r)\sigma^2(r) = \int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \Psi(M)M\rho_*(r, M)\sigma^2(r, M)dM. \quad (3.5)$$

Si noti che nell'integrale di combinazione delle dispersioni di velocità non si assume che la dinamica sia uniforme per tutte le componenti: potremmo avere componenti caratterizzate da distribuzioni diverse di anisotropia orbitale. Ovvero abbiamo focalizzato l'attenzione solo sulla struttura, ma è possibile che anche le proprietà cinematiche siano diverse componente per componente.

3.2 Decomposizione strutturale. II: suddivisione in componenti

In questo secondo approccio, invece di sommare coppie potenziale-densità note per ottenere la coppia potenziale-densità totale, cerchiamo delle componenti che dipendono dalle masse delle singole stelle, tali che sommate riproducano il profilo totale da cui decidiamo di partire, e che in modo del tutto generale scriveremo come:

$$\rho_*(r) = M_* \tilde{\rho}(r), \quad (3.6)$$

$$\phi_*(r) = M_* \tilde{\phi}(r), \quad (3.7)$$

con $\int_{Volume} \tilde{\rho}(r) dV = 1$, essendo M_* la massa stellare totale. Questo approccio rispetto al precedente ha il vantaggio di fornire un completo controllo del modello risultante, ma presenta ovviamente la difficoltà di costruire una decomposizione tale che la somma di tutte le componenti di massa raggio per raggio riproduca il profilo potenziale-densità assegnato $\rho_*(r), \phi_*(r)$. Pertanto anche in questo approccio introduciamo le componenti frazionarie

$$\rho_*(r, M) = \Psi(M) M \tilde{\rho}(r, M), \quad (3.8)$$

$$\phi_*(r, M) = \Psi(M) M \tilde{\phi}(r, M), \quad (3.9)$$

dove $\phi_*(r, M)$ è il potenziale gravitazionale dovuto alla componente $\rho_*(r, M)$, e l'integrale di volume $\int_{Volume} \rho_*(r, M) dV = \Psi(M) M$. Ovvero si richiede che l'integrale di volume $\int_{Volume} \tilde{\rho}(r, M) dV = 1$ per qualsiasi valore di M . Il problema in questo approccio è la determinazione della famiglia di funzioni normalizzate $\tilde{\rho}(r, M)$ tali che sommate su tutte le M riproducano il profilo in equazione 3.6. Quindi ricapitolando, partiamo da una coppia potenziale-densità totale e ci chiediamo come decomporla con una IMF di un certo tipo. Il vantaggio è quello di conoscere già in partenza la $\rho_*(r), \phi_*(r)$ totale, lo svantaggio è lo scarso controllo sulle componenti $\rho_*(r, M), \phi_*(r, M)$. Mostriamo nel seguito come sia possibile impostare un approccio generale che permette la costruzione di $\tilde{\rho}(r, M)$.

3.2.1 La procedura generale volta alla scrittura delle componenti $\rho_*(r, M)$

Partiamo ponendo:

$$\tilde{\rho}(r, M) = \tilde{\rho}(r)g(r, M), \quad (3.10)$$

$$\tilde{\phi}(r, M) = \tilde{\phi}(r)g(r, M), \quad (3.11)$$

ove compare la funzione sconosciuta $g(r, M) \geq 0$, detta *decomposizione frazionaria* del profilo totale $\rho_*(r)$. Si sceglie tale funzione di modo che dipenda sia da M che da r , affinché non si ricada nel caso fattorizzato (vedasi sezione 2.5), in cui cioè i profili delle componenti sono fra loro paralleli. In particolare la determinazione della funzione g deriva dalla condizione che le funzioni $\tilde{\rho}$ e $\tilde{\phi}$ una volta sommate restituiscano il profilo iniziale. Partiamo dunque dalla richiesta che la somma dei profili $\tilde{\rho}(r, M)$ dia il profilo totale $\rho_*(r)$, e cioè che:

$$\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \Psi(M)M\tilde{\rho}(r)g(r, M)dM = M_*\tilde{\rho}(r), \quad (3.12)$$

da cui segue la condizione per avere una decomposizione frazionaria ammissibile:

$$\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \frac{\Psi(M)M}{M_*}g(r, M)dM = 1, \quad (3.13)$$

che è proprio la condizione di normalizzazione per g . Dalla precedente si può vedere come la $g(r, M)$ sia *indipendente* dal profilo totale $\tilde{\rho}(r)$; questo vuol dire che possiamo calcolare g indipendentemente dal profilo, e poi una volta determinata la possiamo applicare ad un profilo particolare (ad esempio Plummer). A questo punto vediamo come determinare la funzione $g(r, M)$, cioè come costruire praticamente la funzione di forma g normalizzata. In pratica si parte da una *guess function*, $\hat{g}(r, M)$, la quale possiede l'andamento qualitativo prescelto; una volta integrata sulle masse, \hat{g} produce la funzione $N(r)$:

$$\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \frac{\Psi(M)M}{M_*}\hat{g}(r, M)dM = N(r). \quad (3.14)$$

Partendo cioè da un andamento radiale preferito, $\hat{g}(r, M)$, se ne calcola l'integrale sulle masse da cui si ottiene una funzione del raggio, $N(r)$. Per ottenere infine la funzione g normalizzata basterà dividere la $\hat{g}(r, M)$ per $N(r)$, cioè

$$g(r, M) \equiv \frac{\hat{g}(r, M)}{N(r)}. \quad (3.15)$$

Esempi pratici

Facciamo ora un paio di esempi, che forniscono qualche forma esplicita per $g(r, M)$. Dato il profilo potenziale-densità totale, scegliamo come prima cosa con quale forma della IMF decomporlo. Scegliamo un andamento a legge di potenza $\Psi(M) = AM^{-s}$, con $s > 2$, $M_{sup} = \infty$. La costante A si ottiene da

$$M_* = A \int_{M_{inf}}^{\infty} M^{1-s} dM = A \frac{M_{inf}^{2-s}}{s-2}, \quad (3.16)$$

da cui

$$\Psi(M) = \frac{M_*(s-2)M^{-s}}{M_{inf}^{2-s}}, \quad s > 2. \quad (3.17)$$

Avendo scelto lo spettro di massa secondo cui decomporre il profilo di densità totale $\rho_*(r)$ nelle diverse componenti $\rho_*(r, M)$, ciascuna costituita da stelle aventi tutte la stessa massa M , proseguiamo scegliendo la funzione $\hat{g}(r, M)$. Vediamo di seguito due possibili scelte.

Consideriamo come primo esempio una *guess function* che abbia un andamento esponenziale:

$$\hat{g} = e^{-\tilde{r}^\alpha \tilde{M}^\beta}, \quad \alpha > 0, \quad (3.18)$$

dove $\tilde{r} = r/r_0$ e $\tilde{M} = M/M_{inf}$. Nel caso in cui $\beta > 0$ abbiamo che le stelle più massicce sono più concentrate rispetto a quelle meno massicce, mentre se fosse $\beta < 0$ avremmo il contrario. Tra i due regimi, il primo potrebbe essere il risultato degli effetti della frizione dinamica negli ammassi globulari. Determiniamo ora la funzione $N(r)$. Dalle equazioni 3.14,3.17,3.18 si ha

$$\begin{aligned} N(r) &= \int_{M_{inf}}^{\infty} \frac{M_*(s-2)M^{1-s}}{M_{inf}^{2-s} M_*} e^{-a\tilde{M}^\beta} dM \quad \text{dove } a = \tilde{r}^\alpha \\ &= (s-2) \int_1^{\infty} \tilde{M}^{1-s} e^{-a\tilde{M}^\beta} d\tilde{M} = \\ &= (s-2)I(s, \beta, \tilde{r}^\alpha), \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove si è definito $I(s, b, a) = \int_1^{\infty} x^{1-s} e^{-ax^b} dx$, in cui $\tilde{M} = x$.

Analizziamo prima il caso $\beta > 0$. Risolviamo per sostituzione di variabili, $ax^b = t$, $x = t^{1/b}/a^{1/b}$, $dx = (t^{1/b-1})/(ba^{1/b})dt$, da cui l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ba^{1/b}} \int_a^{\infty} \frac{t^{\frac{1-s}{b}}}{a^{\frac{1-s}{b}}} t^{\frac{1}{b}-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{ba^{\frac{2-s}{b}}} \int_a^{\infty} t^{\frac{2-s}{b}-1} e^{-t} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{a^{\frac{s-2}{b}}}{b} \Gamma\left(\frac{2-s}{b}, a\right), \quad (3.20)$$

dove $\Gamma\left(\frac{2-s}{b}, a\right)$ è la funzione Gamma incompleta a destra di Eulero.

Nel caso in cui invece $\beta < 0$, attraverso ragionamenti analoghi ai precedenti, si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ba^{\frac{1}{b}}} \int_0^a \frac{t^{\frac{1-s}{b}}}{a^{\frac{1-s}{b}}} t^{\frac{1}{b}-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{a^{\frac{s-2}{b}}}{|b|} \gamma\left(\frac{2-s}{b}, a\right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

dove $\gamma\left(\frac{2-s}{b}, a\right)$ è la funzione Gamma incompleta a sinistra di Eulero. Perciò, avendo ricavato

$$N(r) = (s-2)I(s, \beta, \tilde{r}^\alpha), \quad (3.22)$$

otteniamo la funzione di decomposizione frazionaria usando la 3.15, che con questa scelta particolare di \hat{g} , è:

$$g(r, M) = \frac{\hat{g}(r, M)}{N(r)} = \frac{e^{-\tilde{r}^\alpha \tilde{M}^\beta}}{(s-2)I(s, \beta, \tilde{r}^\alpha)}. \quad (3.23)$$

Infine, possiamo scrivere la formula generica per la componente $\rho_*(r, M)$:

$$\begin{aligned} \rho_*(r, M) &= \Psi(M) M \tilde{\rho}(r) g(r, M) = \\ &= \frac{M_*(s-2)M^{1-s}}{M_{inf}^{2-s}} \frac{e^{-\tilde{r}^\alpha \tilde{M}^\beta}}{(s-2)I} \tilde{\rho}(r) = \\ &= \frac{\tilde{M}^{1-s} e^{-\tilde{r}^\alpha \tilde{M}^\beta}}{I(s, \beta, \tilde{r}^\alpha)} \frac{\rho_*(r)}{M_{inf}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Quindi, ricapitolando, si ha:

$$\rho_*(r, M) = \frac{\tilde{M}^{1-s} e^{-\tilde{r}^\alpha \tilde{M}^\beta}}{I(s, \beta, \tilde{r}^\alpha)} \frac{\rho_*(r)}{M_{inf}}, \quad \alpha > 0, \quad (3.25)$$

dove

$$\begin{aligned} I(s, \beta, \tilde{r}^\alpha) &= \tilde{r}^{\alpha \frac{s-2}{\beta}} \times \\ &\begin{cases} \Gamma\left(\frac{2-s}{\beta}, \tilde{r}^\alpha\right) / \beta & \text{per } \beta > 0 \\ \gamma\left(\frac{2-s}{\beta}, \tilde{r}^\alpha\right) / |\beta| & \text{per } \beta < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Questa è quindi la decomposizione su una $\Psi(M)$ a legge di potenza in componenti, le quali una volta sommate restituiscono proprio il profilo totale da cui siamo partiti. Scelto il profilo di densità $\rho_*(r)$ della galassia, è possibile ottenere, tramite l'equazione 3.25, il profilo di densità delle varie componenti $\rho_*(r, M)$, a seconda della scelta della funzione g . La scomposizione in componenti è dunque indipendente dal profilo di densità totale $\rho_*(r)$ da cui decidiamo di partire; questo significa che, fatta la scelta su g , e seguendo il calcolo appena mostrato, possiamo arrivare a scrivere i profili di densità delle singole componenti stellari $\rho_*(r, M)$ (esplicitate in equazione 3.25) per un profilo totale del modello (che può essere quello di Plummer, di Jaffe, di Hernquist e così via). Associata alla $\rho_*(r, M)$ in equazione 3.25, si può introdurre il profilo di densità dovuto alle stelle di massa nell'intervallo finito $M_1 \leq M \leq M_2$:

$$\Delta\rho(r, M_1 \leq M \leq M_2) = \rho(r) \int_{\widetilde{M}_1}^{\widetilde{M}_2} \frac{\widetilde{M}^{1-s} e^{-\widetilde{r}^\alpha \widetilde{M}^\beta}}{I(s, \beta, \widetilde{r}^\alpha)} d\widetilde{M} \quad (3.27)$$

e l'integrale è $\leq 1 \forall r$ e $\forall M_1, M_2$ (l'integrando può essere > 1).

A scopo illustrativo vengono mostrati in figura 3.1 (a) gli andamenti della funzione g avendo scelto il profilo esponenziale di equazione 3.18, nella quale si fissano $s = 2.35$, $M_{sup}/M_{inf} = 10$, $\alpha = \beta = 1$ e tre valori diversi per $M/M_{inf} = 1.2, 2.2, 3.2$.

Consideriamo ora una seconda funzione di prova con andamento Lorenziano, del tipo:

$$\widehat{g} = \frac{1}{(1 + \widetilde{r}^\alpha \widetilde{M}^\beta)^\gamma}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \quad (3.28)$$

e ripetiamo lo stesso procedimento fatto per la \widehat{g} scelta nel primo esempio. Scriviamo quindi:

$$\begin{aligned} N(r) &= \int_{M_{inf}}^{\infty} \frac{M_*(s-2)M^{1-s}}{M_{inf}^{2-s}M_*} \frac{dM}{(1 + \widetilde{r}^\alpha \widetilde{M}^\beta)^\gamma} \\ &= (s-2) \int_1^{\infty} \frac{\widetilde{M}^{1-s} d\widetilde{M}}{(1 + \widetilde{r}^\alpha \widetilde{M}^\beta)^\gamma} \\ &= (s-2)I(s, \widetilde{r}^\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \quad (3.29)$$

dove abbiamo definito

$$I(s, a, b, c) \equiv \int_1^{\infty} \frac{x^{1-s} dx}{(1 + ax^b)^c}. \quad (3.30)$$

A titolo illustrativo analizziamo di seguito il caso $\beta > 0$. L'integrale precedente può essere espresso come una funzione Beta incompleta di Eulero. Ciò si ottiene con la sostituzione $z = 1/(ax^b + 1)$, da cui $x = 1/a^{1/b} \times ((1/z) - 1)^{1/b}$ e $dx = (1/a^{1/b}) \times (1/b) \times (1/z - 1)^{(1/b)-1} dz$. Da questo cambio di variabili si ottiene:

$$I = \int_0^{\frac{1}{a+1}} z^{c+\frac{s-2}{b}-1} (1-z)^{\frac{2-s}{b}-1} dz. \quad (3.31)$$

Dunque si ha che:

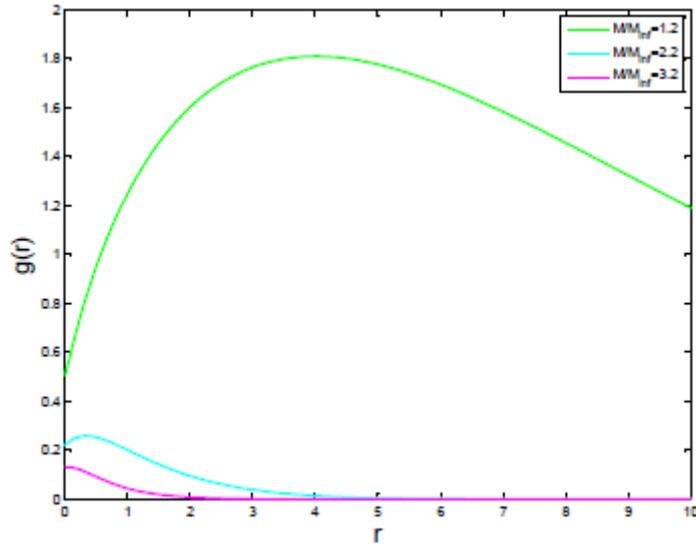
$$I = \frac{\tilde{r}^{\alpha \frac{s-2}{\beta}}}{\beta} B \left[\frac{1}{\tilde{r}^{\alpha} + 1}; \frac{s-2+\gamma\beta}{\beta}, \frac{2-s}{\beta} \right], \quad (3.32)$$

dove

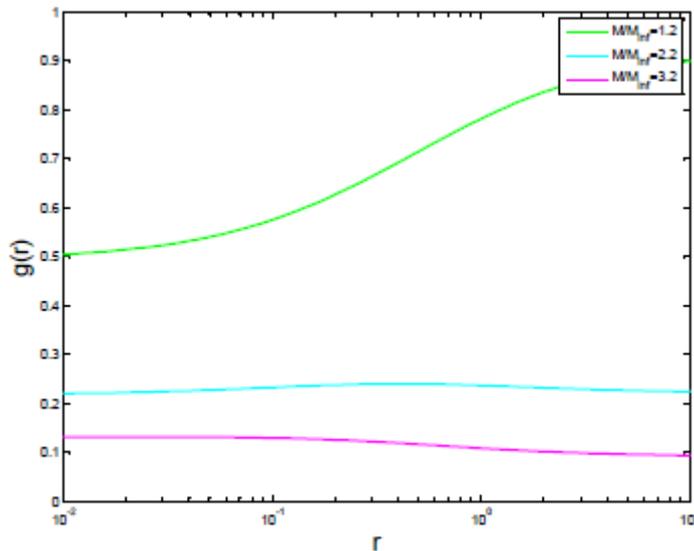
$$B[x; a, b] = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad (3.33)$$

è la funzione Beta incompleta. Si può ripetere la medesima analisi per il caso $\beta < 0$.

Anche per questa scelta per \hat{g} (equazione 3.28), sono mostrati in figura 3.1 (b) tre andamenti diversi della funzione g per tre valori diversi di $M/M_{inf} = 1.2, 2.2, 3.2$ e fissati parametri $s = 2.35$, $M_{sup}/M_{inf} = 10$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$.



(a)



(b)

Figura 3.1: (a) Grafico di g in funzione del raggio per la scelta del profilo esponenziale in equazione 3.18 e (b) per il profilo lorentz in equazione 3.28. Entrambi sono stati ottenuti per tre diversi valori di M/M_{inf} e avendo fissato $s = 2.35$, $M_{sup}/M_{inf} = 10$, $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Per maggiori dettagli vedasi sezione 3.2.1

Capitolo 4

Prime applicazioni dei modelli dinamici estesi

Questo capitolo consta di tre parti: la prima riguarda un'applicazione di quanto visto nella decomposizione strutturale I (Capitolo 3, sezione 3.1) fatta scegliendo il profilo di densità corrispondente alla sfera di Plummer per $\tilde{\rho}(r, M)$; la seconda parte consiste nel costruire un modello di galassia, in cui c'è similitudine strutturale fra le varie componenti, che hanno cioè lo stesso profilo di densità $\tilde{\rho}(r, M) = \tilde{\rho}(r)$ per ogni componente di massa M , e differenziandone le proprietà orbitali. Risolveremo dunque l'equazione di Jeans nel caso anisotropo, inserendo la dipendenza dalla massa M per il raggio di anisotropia (nella scelta dell'anisotropia di Osipkov-Merrit (OM) [26] [27]). Infine la terza parte riguarda la scrittura della funzione di distribuzione estesa per un modello di Plummer con componenti stellari strutturalmente omologhe e aventi raggio di anisotropia (per la scelta di anisotropia di OM) dipendente dalla massa M .

Lo scopo del capitolo è quello di mettere in risalto eventuali differenze fra quantità globali, caratteristiche dell'oggetto in questione, come il profilo di densità totale e il profilo di dispersione delle velocità, nel momento in cui si pesano con la massa e con la luce. Esula da questo lavoro lo studio di galassie specifiche, in quanto l'obiettivo consiste nell'illustrare il funzionamento dei modelli strutturali e dinamici estesi.

Verranno dunque mostrate alcune applicazioni delle procedure mostrate in precedenza, delle quali verranno poi messi in risalto gli aspetti più interessanti.

4.1 Applicazione della decomposizione strutturale I al modello di Plummer

Come prima applicazione di quanto illustrato in precedenza, partiamo scegliendo come profilo di densità da associare alla componente generica di massa M quello della sfera di Plummer [28], chiedendo che il raggio di scala r_* dipenda dalla massa caratteristica di ciascuna componente. Pertanto le funzioni $\tilde{\rho}(r, M)$ e $\tilde{\phi}(r, M)$ per questo modello sono le seguenti:

$$\tilde{\rho}(r, M) = \frac{3}{4\pi} \frac{r_*^2(M)}{[r^2 + r_*^2(M)]^{\frac{5}{2}}}, \quad (4.1)$$

$$\tilde{\phi}(r, M) = -\frac{G}{\sqrt{r^2 + r_*^2(M)}}, \quad (4.2)$$

dove scegliamo per il raggio di scala $r_*(M)$ della componente di massa M l'andamento:

$$r_*(M) = r_{*0} \left(\frac{M_{inf}}{M} \right)^\beta \quad \beta > 0, \quad (4.3)$$

in cui r_{*0} è il raggio di scala della sfera di Plummer costituita dalle stelle di massa minima $M = M_{inf}$. Questa scelta qualitativa corrisponde ad esempio, nel caso degli ammassi globulari, da considerazioni di evoluzione dinamica per le quali le stelle di massa più grande tendono a concentrarsi nelle zone centrali. Dunque in questa prima applicazione sommiamo componenti descritte strutturalmente da sfere di Plummer diverse, ciascuna avente raggio di scala dipendente dalla massa M che costituisce una determinata componente stellare; quindi abbiamo controllo sulle componenti di densità scelte, ma abbiamo poco controllo sul modello finale risultante.

Anche se non svilupperemo i calcoli seguenti fino alla determinazione del profilo $\sigma(r)$, mostriamo a grandi linee come esso si potrebbe ottenere dall'equazione di Jeans. L'equazione di Jeans sferica nel caso isotropo per la componente di massa M si scrive:

$$\frac{d[\rho_*(r, M)\sigma^2(r, M)]}{dr} = -\rho_*(r, M)\frac{d\phi_*(r)}{dr}, \quad (4.4)$$

ove $\sigma^2(r, M)$ è il profilo di dispersione delle velocità della singola componente ed $\phi_*(r)$ il potenziale totale. Per risolvere tale equazione di Jeans è necessario conoscere $\phi_*(r)$, pertanto dobbiamo integrare su tutto lo spettro di massa i potenziali associati alle singole componenti di massa; ricaviamo quindi $\phi_*(r)$ come:

$$\phi_*(r) = -\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \frac{GM\Psi(M)}{\sqrt{r^2 + r_*^2(M)}} dM. \quad (4.5)$$

Per la risoluzione dell'integrale facciamo prima alcune assunzioni. Per semplicità poniamo $M_{sup} \rightarrow \infty$; Scegliamo poi una IMF a legge di potenza, ovvero $\Psi(M) = AM^{-s}$. Per quanto riguarda il raggio di scala, lo scegliamo del tipo in 4.3, con $\beta = 1$; quindi esso ha il seguente andamento:

$$r_*(M) = r_{*0} \frac{M_{inf}}{M}. \quad (4.6)$$

Dunque si tratta di valutare il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \phi_*(r) &= -GA \int_{M_{inf}}^{\infty} \frac{M^{2-s}}{\sqrt{M^2 r^2 + r_{*0}^2 (M_{inf}^2)}} dM = \\ &= -\frac{GA}{r_{*0} M_{inf}} \int_{M_{inf}}^{\infty} \frac{M^{2-s}}{\sqrt{\frac{M^2 r^2}{r_{*0}^2 (M_{inf}^2)} + 1}} dM. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Risolviamo per sostituzione di variabile $t = (Mr)/(r_{*0}M_{inf})$, da cui $dM = ((r_{*0}M_{inf})/r)dt$, in cui per semplicità poniamo $(r_{*0}M_{inf})/r = c$; nell'estremo inferiore di integrazione poniamo $r/r_{*0} = R$, e infine indichiamo con un'unica costante $C = -(c^2 AG)/(r_{*0}M_{inf})$. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \phi_*(r) &= C \int_R^{\infty} \frac{t^{2-s}}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \\ &= C \int_R^{\infty} \frac{t^{3-s}}{t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} dt. \end{aligned}$$

Sostituendo poi $x = 1/t$, da cui $dt = -dx/x^2$, si ha:

$$\phi_*(r) = C \int_0^{\frac{1}{R}} x^{s-3} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Il potenziale totale risulta essere una funzione ipergeometrica, quindi complicata. Notiamo che esiste una procedura alternativa che permette la soluzione dell'equazione di Jeans in 4.4 senza passare attraverso il calcolo di $\phi_*(r)$. Infatti il termine $d\phi_*(r)/dr$ può essere scritto come $GM_*(r)/r^2$, sfruttando il secondo teorema di Newton. Per ricavare M_* occorre risolvere il seguente integrale:

$$M_*(r) = r^3 \int \frac{M\Psi(M)dM}{[r^2 + (\frac{r_{*0}M_{inf}}{M})^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.8)$$

in cui il profilo radiale M_* della massa stellare totale fino al raggio r viene ottenuto sommando su tutto lo spettro di masse M i profili radiali cumulativi

delle componenti costituite da stelle di massa M , ovvero si risolve $M_*(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho_*(r', M) dr' dM$. La soluzione delle equazioni di Jeans in equazione 4.4 può essere scritta come:

$$\rho_*(r, M) \sigma^2(r, M) = G \int_r^\infty \rho_*(M, r') \frac{M_*(r')}{r'^2} dr'. \quad (4.9)$$

Nel caso del modello di Plummer la soluzione dell'integrale in 4.9 è complicato dalla presenza, nuovamente di funzioni ipergeometriche. Concludiamo facendo notare che per questo motivo sostituiamo l'integrale nella 4.9 che può essere anche scritto come integrale doppio sulle masse e sul raggio:

$$\rho_*(r, M) \sigma^2(r, M) = \int M' \Psi(M') dM' \int_r^\infty \rho_*(r', M) \frac{M_*(M', r')}{r'^2} dr', \quad (4.10)$$

ove con la scrittura di $M(M', r)$ intendiamo quanto segue: non calcoliamo più la dispersione di velocità della componente M , $\sigma^2(r, M)$, a partire dall'integrale della componente $\rho_*(r, M)$ sul potenziale totale ϕ_* , ma integriamo la componente $\rho_*(r, M)$ nel potenziale di un'altra componente di massa M' , $\phi_*(r, M')$. L'equazione di Jeans ci fornisce alla fine l'andamento della dispersione di velocità della componente di massa M , $\sigma^2(r, M)$, pesata con la massa, da cui integrando poi su tutte le masse si ottiene l'espressione della dispersione di velocità totale (di tutte le stelle). Dunque ricapitolando, in questo metodo della somma di componenti Plummer, rinviando la somma sulle masse dopo aver risolto Jeans, altrimenti se decidessimo di sommare prima di risolvere Jeans ci ritroveremo con dei potenziali complicati.

Come ultimo commento, se integriamo la 4.10 sulle masse otterremo la dispersione di velocità totale, pesata con la massa; se integriamo invece dopo aver diviso la 4.10 per $\Upsilon(M)$, otterremo la dispersione di velocità totale pesata con la luce.

Come esempio di applicazione mostriamo i profili radiali di densità di massa e di luce, da cui poi ottenere il profilo radiale del rapporto massa-luminosità globale. Per fare questo è necessario scegliere una $\Psi(M)$ e un $\Upsilon(M)$, per i quali adottiamo:

$$\Psi(M) = AM^{-s} \quad s > 2, \quad (4.11)$$

$$\Upsilon(M) = BM^{1-\delta} \quad 3 < \delta < 4. \quad (4.12)$$

Partendo ora dalla definizione 3.1, scegliendo il profilo 4.1, e integrando sullo spettro delle masse, otteniamo il profilo radiale della densità di massa totale per la scelta della sfera di Plummer:

$$\rho_*(r) = \frac{3(s-2)}{4\pi} \left(\frac{M_*}{r_{0*}^3} \right) \int_1^\infty \frac{\widetilde{M}^{-(1+s)}}{(\widetilde{r}^2 + \widetilde{M}^{-2})^{\frac{5}{2}}} d\widetilde{M} \quad (4.13)$$

nel quale si è sostituita l'espressione per la costante di scala A , ricavata a partire dalla definizione 2.8 in sezione (2.2). È necessario effettuare un troncamento sull'estremo di integrazione superiore M_{sup} , evitando così di ricadere nel caso di un integrale divergente. Nella definizione di A decidiamo di non effettuare il limite $M_{sup} \rightarrow \infty$, ma di lasciare l'estremo superiore ad un valore finito; pertanto si ha:

$$M_* = \frac{A}{s-2} M_{inf}^{2-s} \left[1 - \left(\frac{M_{sup}}{M_{inf}} \right)^{2-s} \right], \quad (4.14)$$

da cui l'integrale nella 4.13 diviene

$$\rho_*(r) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{M_*}{r_{0*}^3} \right) \frac{s-2}{\left[1 - \left(\frac{M_{sup}}{M_{inf}} \right)^{2-s} \right]} \int_1^{\frac{M_{sup}}{M_{inf}}} \frac{\widetilde{M}^{-(1+s)}}{(\widetilde{r}^2 + \widetilde{M}^{-2})^{\frac{5}{2}}} d\widetilde{M}. \quad (4.15)$$

Dividendo per $\Upsilon(M)$ ciascuna componente $\rho_*(r, M)$ si ha:

$$\nu_*(r) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{L_*}{r_{0*}^3} \right) \frac{s-\delta-1}{\left[1 - \left(\frac{M_{sup}}{M_{inf}} \right)^{1-s+\delta} \right]} \int_1^{\frac{M_{sup}}{M_{inf}}} \frac{\widetilde{M}^{-(1+s)}}{(\widetilde{r}^2 + \widetilde{M}^{-2})^{\frac{5}{2}}} d\widetilde{M}. \quad (4.16)$$

Fissando i valori dei parametri $M_{inf} = 0.1$, $M_{sup} = 1$, $\delta = 3$, e tre valori diversi per s , cioè $s = 2.35, 1.5, 3.3$ si ottengono i grafici mostrati in Fig.4.1 e Fig.4.2.

Dal confronto mostrato in Fig.4.3 (a) si evince che, essendo il profilo di densità quello globale ed avendo assegnato a ciascuna massa stellare un proprio rapporto massa-luminosità, il profilo di densità globale pesato con la luce è diverso da quello pesato con la massa. Un ulteriore grandezza interessante da poter visualizzare è l'andamento del rapporto massa-luminosità totale locale (Fig.4.3 (b)).

Guardando le figure precedenti la conclusione importante a cui si giunge è che i modelli in cui le stelle più massicce sono più concentrate al centro, se interpretati in un contesto di rapporto massa-luminosità costante, darebbero importanza ad una componente di massa oscura, quando invece è presente un aumento del rapporto massa-luminosità con il raggio, dovuto alle diverse strutture delle varie componenti stellari.

4.2 Decomposizione dinamica: risoluzione dell'equazione di Jeans con scelta di anisotropia Osipkov-Merritt

In questo secondo approccio, riguardante la costruzione di un modello sono le proprietà orbitali, non la struttura delle componenti a dipendere dalla massa. Adesso consideriamo stelle di masse diverse distribuite dal punto di vista strutturale tutte allo stesso modo, ovvero secondo un unico profilo di densità; quello che cambia, da componente a componente, sono le proprietà orbitali che entrano nel tensore di dispersione delle velocità. Quindi partiamo dal profilo di densità totale scritto come:

$$\rho_*(r) = M_* \tilde{\rho}(r), \quad (4.17)$$

e da una decomposizione strutturale omologa

$$\begin{aligned} \rho_*(r, M) &= \Psi(M) M \tilde{\rho}(r) = \\ &= \frac{\Psi(M) M}{M_*} \rho_*(r). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Successivamente risolviamo l'equazione di Jeans con la scelta, a esempio, dell'anisotropia di Osipkov-Merritt, per la componente $\rho_*(r, M)$, nel potenziale totale associato alla densità in equazione 4.17; la soluzione è (si veda Binney e Tremaine 1987):

$$\rho_*(r, M) \sigma^2(r, M) = \frac{G \int_r^\infty M(r') \rho_*(r', M) \left(1 + \frac{r_a^2}{r'^2}\right) dr'}{r^2 + r_a^2}. \quad (4.19)$$

Ricordiamo che il profilo radiale di anisotropia di OM si scrive: $\sigma_T^2(r) = [(2r_a^2)/(r^2 + r_a^2)] \times \sigma^2(r)$, dove $\sigma_T^2(r)$ è la dispersione di velocità tangenziale, $\sigma^2(r)$ è la componente radiale, ed r_a è definito "raggio di anisotropia". L'equazione precedente può essere banalmente riscritta come:

$$\rho_*(r, M) \sigma^2(r, M) = \frac{\Psi(M) M}{M_*} \times \frac{A(r) + r_a^2 I(r)}{r^2 + r_a^2}, \quad (4.20)$$

dove le due funzioni radiali sono: $A(r) = G \int_r^\infty M(r') \rho_*(r') dr'$ e con $I(r) = G \int_r^\infty M(r') \rho_*(r') / r'^2 dr'$. Una ulteriore semplificazione, che renderà i calcoli molto più semplici, è ottenuta dalla seguente trasformazione:

$$\frac{A(r) + r_a^2 I(r)}{r^2 + r_a^2} = I(r) + \frac{A(r) - r^2 I(r)}{r^2 + r_a^2}.$$

Anche in questo caso adottiamo la seguente IMF

$$\Psi(M) = \frac{M_*(s-2)M^{-s}}{M_{inf}^{2-s}}, \quad s > 2, \quad M_{sup} = \infty, \quad (4.21)$$

ed integrando sull'intero spettro di massa, si ha che:

$$\begin{aligned} \rho_*(r)\sigma^2(r) &= \int_{M_{inf}}^{\infty} \rho_*(r, M)\sigma^2(r, M)dM \\ &= I(r) + [A(r) - r^2I(r)] \int_{M_{inf}}^{\infty} \frac{\Psi(M)M}{M_*} \frac{dM}{r^2 + r_a^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

In tale espressione facciamo dipendere il raggio di anisotropia r_a dalla massa M , assumendo per esempio il seguente andamento

$$r_a(M) = r_{a0} \left(\frac{M}{M_{inf}} \right)^\beta, \quad \beta > 0. \quad (4.23)$$

Nell'espressione precedente si è imposto che $r_a = r_{a0}$ per $M = M_{inf}$ e secondo questa scelta le stelle più massicce hanno un raggio di anisotropia maggiore rispetto alle stelle meno massicce, e pertanto seguono una dispersione di velocità maggiormente isotropa. L'integrale nell'equazione 4.22, diventa

$$\begin{aligned} \rho_*(r)\sigma^2(r) &= \int_{M_{inf}}^{\infty} \frac{M_*(s-2)M^{1-s}}{M_*M_{inf}^{2-s}} \frac{dM}{r^2 + r_{a0}^2 \widetilde{M}^{2\beta}} = \\ &= \int_1^{\infty} \frac{(s-2)\widetilde{M}^{1-s}}{r^2 + r_{a0}^2 \widetilde{M}^{2\beta}} d\widetilde{M}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Dopo qualche passaggio algebrico, il risultato può essere espresso come una funzione ipergeometrica standard ${}_2F_1$:

$$\begin{aligned} \rho_*(r)\sigma^2(r) &= \frac{s-2}{r_{a0}^2} \int_1^{\infty} \frac{\widetilde{M}^{1-s}}{\widetilde{r}^2 \widetilde{M}^{2\beta}} d\widetilde{M} = \\ &= \frac{s-2}{r_{a0}^2} \frac{1}{s-2+2\beta} F_1 \left[1, \frac{s-2+2\beta}{2\beta}, \frac{s-2+4\beta}{2\beta}, -\widetilde{r}^2 \right]. \end{aligned}$$

Dunque alla fine otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_*(r)\sigma^2(r) &= \\ &= I(r) + \frac{A(r) - r^2I(r)}{r_{a0}^2} \times \frac{s-2}{s-2+2\beta} \times F_1 \left[1, \frac{s-2+2\beta}{2\beta}, \frac{s-2+4\beta}{2\beta}, -\widetilde{r}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Questa è la dispersione di velocità totale pesata con la massa, per un modello con spettro di massa in cui ciascuna componente ha un proprio raggio di anisotropia. Per ottenere la medesima quantità, in cui però i contributi alla dispersione di velocità globale vengono pesati con la luce, basta dividere ciascuna componente per il proprio $\Upsilon(M)$. Scegliendo anche in questo caso un andamento a legge di potenza per il rapporto massa-luminosità, si otterrà di nuovo una funzione ipergeometrica.

Nonostante l'eleganza della soluzione, che mostra la flessibilità del metodo, l'espressione finale nella 4.25 è stata ottenuta con $M_{sup} = \infty$. Tale scelta non è compatibile con una dipendenza del tipo legge di potenza per $\Upsilon(M)$, e pertanto per esplorare le differenze fra $\sigma(r)$ ottenute pesando con la massa o con la luce dobbiamo scegliere M_{sup} finita. La soluzione per $\sigma^2(r)$ ora non ha più la forma elegante in 4.25, e va costruita numericamente. In tale esplorazione numerica si è utilizzato un andamento lineare per il raggio di anisotropia, ovvero

$$r_a(M) = r_{amin} + \frac{r_{amax} - r_{amin}}{R - 1} (\widetilde{M} - 1), \quad (4.26)$$

Si ricorda che $R = M_{sup}/M_{inf}$ e che $\widetilde{M} = M/M_{inf}$. Quando $M = M_{inf}$ si ha che $r_a = r_{amin}$, e all'aumentare della massa M , aumenta conseguentemente il raggio di anisotropia r_a . I profili radiali della dispersione di velocità totale, ottenuti cioè sommando su tutto il range di masse stellari, sono diversi a seconda che i contributi delle varie componenti stellari si pesino con la massa o con la luce, come si evince dai grafici mostrati in Fig 4.4.

In Fig. 4.4 si è scelto $M_{sup}/M_{inf} = 10$, un r_a/r_* che essendo una funzione di \widetilde{M} (dove \widetilde{M} va da 1 per le masse più piccole fino a 10 per le masse più grandi) va da 0.1, per le masse più piccole (ovvero le masse più piccole sono più anisotrope), fino a 5 per le masse più grandi (che sono le più isotrope). Si è poi fissato $\delta = 3$ per il profilo $\Upsilon(M)$ e per $\sigma^2(r)$, pesato con la luce, tre valori distinti per la pendenza della IMF ($s=1.5, 2.35, 3.3$).

Una verifica del comportamento delle soluzioni numeriche che si è effettuata è consistita nel ridurre il rapporto M_{sup}/M_{inf} e/o r_{amax}/r_{amin} . Si è ottenuta l'aspettata convergenza fra la $\sigma(r)$ pesata con la massa e con la luce.

Soffermiamoci ora sui motivi delle differenze in Fig.4.5. Concentrandosi sulle regioni interne, si può notare come il profilo di dispersione pesato con la massa sia maggiore rispetto a quello pesato con la luce. Questo si spiega con il fatto che abbiamo scelto di avere le stelle di piccola massa più anisotrope; questo significa che al centro la dispersione 'mass weighted' è molto alta per via delle orbite radiali delle stelle di massa piccola; se questi contributi vengono pesati con la luce, ecco che il profilo centrale risulterà più basso. Guardando

perciò solo il profilo pesato con la luce potremmo pensare di avere a che fare con componenti stellari più isotrope di quello che sono realmente.

Per quanto riguarda invece le regioni più esterne, qui i due profili tendono quasi a sovrapporsi, dal momento che nella scelta di OM all'esterno le orbite sono tutte radiali, ed è come se avessimo a che fare con un modello di OM 'mono-massa'.

4.3 Scrittura della f estesa per il modello di Plummer con anisotropia Osipkov-Merritt

Come ben noto, per alcune classi di modelli con tensore di dispersione anisotropo, è possibile ottenere l'analogo dell'inversione di Eddington, ovvero dato un profilo di densità, derivare la funzione di distribuzione $f(E, L)$ che lo genera. In questo caso particolare partiamo dalla scelta del un profilo di densità totale della sfera di Plummer, assumiamo omologia nella struttura delle componenti di massa, e adottiamo l'anisotropia di Osipkov-Merritt, ed ipotizziamo che il raggio di anisotropia dipenda da M ; introdotto poi uno spettro di massa, facciamo vedere come sia possibile ottenere la f di ciascuna componente. Dall'equazione 4.18

$$\rho_*(r, M) = \frac{\Psi(M)M}{M_*} \rho_*(r) \equiv \delta \rho_*(r), \quad (4.27)$$

con $\delta \equiv \Psi(M)M/M_*$. Per una IMF del tipo $\Psi(M) = AM^{-s}$, $s > 2$, $M_{sup} = \infty$, abbiamo che $\delta = (s-2)M^{1-s}/M_{inf}^{2-s}$. Ora, secondo la procedura descritta in Binney e Tremain 1987, la funzione di distribuzione è data dal seguente integrale:

$$f(Q) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \frac{d}{dQ} \int_0^Q \frac{\partial \rho_Q}{\partial \Psi} \frac{d\Psi}{\sqrt{Q-\Psi}}. \quad (4.28)$$

Nella 4.28 vale:

$$\rho_Q(r) = \rho(r) \left(1 + \frac{r^2}{r_a^2} \right),$$

dove la variabile Q definita come segue:

$$Q = \varepsilon - \frac{J^2}{2r_a^2},$$

e il potenziale relativo Ψ e l'energia relativa ε sono definiti come:

$$\Psi = -\phi_* \quad \varepsilon = -E = \Psi - \frac{v^2}{2}.$$

Avendo ricordato le formule generali relative all'anisotropia di OM, vediamo ora come estendere tale procedura nel caso che r_a dipenda da M , come visto in sezione (4.2). Partiamo dalla scelta di una coppia potenziale densità totale, per la quale adottiamo il profilo di Plummer; il potenziale relativo è:

$$\Psi(r) = \frac{GM_*}{\sqrt{r^2 + r_*^2}} = \frac{\Psi_0}{\sqrt{1 + s^2}} = \Psi_0 \tilde{\Psi}, \quad (4.29)$$

dove

$$\Psi_0 = \frac{GM_*}{r_*}, \quad s \equiv r/r_*.$$

La densità totale si scrive come:

$$\rho_*(r) = \frac{3M_*}{4\pi r_*^3 (1 + s^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\rho_0}{(1 + s^2)^{\frac{5}{2}}} = \rho_0 \tilde{\rho} \quad (4.30)$$

dove

$$\rho_0 = \frac{3M_*}{4\pi r_*^3}.$$

Introduciamo ora lo spettro di massa e tramite alcuni passaggi algebrici otteniamo l'analogo della $\rho_Q(r)$, scritto per ciascuna componente di massa, ovvero

$$\begin{aligned} \rho_Q(M, r) &= \delta\rho_0 \tilde{\rho} \times \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) \\ &= \delta\rho_0 \tilde{\Psi}^5 \times \left(1 + \frac{1 - \tilde{\Psi}^2}{a^2 \tilde{\Psi}^2}\right) \\ &= \delta\rho_0 \tilde{\rho}_Q(\tilde{\Psi}), \end{aligned} \quad (4.31)$$

in cui si è posto $a \equiv r_a/r_*$, e si è esplicitata la dipendenza $\tilde{\rho}_Q(\tilde{\Psi})$ con la sostituzione $\tilde{\Psi} = 1/\sqrt{1 + s^2}$. Scriviamo ora la f per ciascuna componente partendo dall'integrale della 4.28 e riscrivendolo in forma adimensionale; dopo alcuni passaggi abbiamo:

$$\begin{aligned} f(Q) &= \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \frac{1}{\Psi_0} \frac{d}{d\tilde{Q}} \int_0^{\tilde{Q}} \frac{\delta\rho_0}{\Psi_0} \frac{\partial \tilde{\rho}_Q}{\partial \tilde{\Psi}} \frac{\Psi_0 d\tilde{\Psi}}{\sqrt{\Psi_0} \sqrt{\tilde{Q} - \tilde{\Psi}}} = \\ &= \frac{\delta\rho_0}{\Psi_0^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \frac{d}{d\tilde{Q}} \int_0^{\tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{\rho}_Q}{\partial \tilde{\Psi}} \frac{d\tilde{\Psi}}{\sqrt{\tilde{Q} - \tilde{\Psi}}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le variabili adimensionali si scrivono ora come:

$$\tilde{Q} \equiv \frac{Q}{\Psi_0} = \tilde{\varepsilon} - \frac{J^2/(\Psi_0 r_*^2)}{2a^2} = \tilde{\varepsilon} - \frac{\tilde{J}}{2a^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\tilde{\rho}_Q = \tilde{\Psi}^5 + \frac{\tilde{\Psi}^3(1 - \tilde{\Psi}^2)}{a^2},$$

da cui

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_Q}{\partial \tilde{\Psi}} = 5\tilde{\Psi}^4 + \frac{\tilde{\Psi}^2(3 - 5\tilde{\Psi}^2)}{a^2},$$

e dunque l'integrale della 4.32 diventa:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tilde{Q}} \frac{d\tilde{\Psi}}{\sqrt{\tilde{Q} - \tilde{\Psi}}} \left[5\tilde{\Psi}^4 + \frac{\tilde{\Psi}^2(3 - 5\tilde{\Psi}^2)}{a^2} \right] = \\ & = \sqrt{\tilde{Q}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \left[5\tilde{Q}^4 t^2 + \frac{\tilde{Q} t^2 (3 - 5\tilde{Q}^2 t^2)}{a^2} \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

in cui si è sostituito $\tilde{\Psi} = \tilde{Q}t$. Effettuando ora il cambiamento di variabili $\sqrt{1-t} = x$, da cui $-dt/\sqrt{1-t} = 2dx$, arriviamo all'espressione finale della 4.33:

$$= \frac{256}{63} \tilde{Q}^{\frac{9}{2}} + \frac{16\tilde{Q}^{\frac{5}{2}}(63 - 80\tilde{Q}^2)}{\frac{3}{5}a^2}.$$

L'ultimo passaggio consiste ora nel risolvere la seguente derivata:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tilde{Q}} \int_0^{\tilde{Q}} \frac{\partial \tilde{\rho}_a}{\partial \tilde{\Psi}} \frac{d\tilde{\Psi}}{\sqrt{\tilde{Q} - \tilde{\Psi}}} \\ & = \frac{128}{7} \tilde{Q}^{\frac{7}{2}} + \frac{8\tilde{Q}^{\frac{3}{2}}(7 - 16\tilde{Q}^2)}{7a^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Abbiamo quindi dimostrato che la f della componente costituita da stelle di massa M , distribuita secondo un profilo di densità di Plummer, avente raggio di anisotropia dipendente dalla massa M , è un oggetto che dipende da tre contributi:

$$\tilde{Q}^{\frac{7}{2}}, \quad \frac{\tilde{Q}^{\frac{3}{2}}}{a^2}, \quad \frac{\tilde{Q}^{\frac{7}{2}}}{a^2}. \quad (4.35)$$

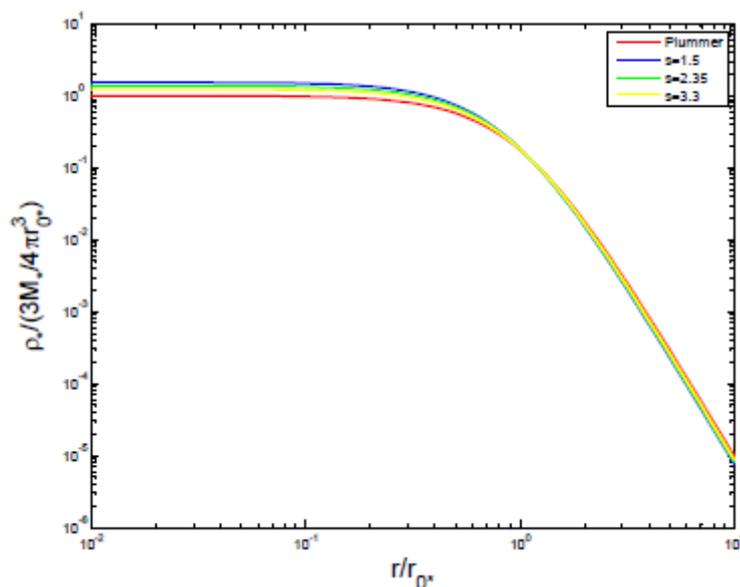
Se ora adottiamo:

$$r_a(M) = r_{a0} \left(\frac{M}{M_{inf}} \right)^\beta, \quad \beta > 0, \quad (4.36)$$

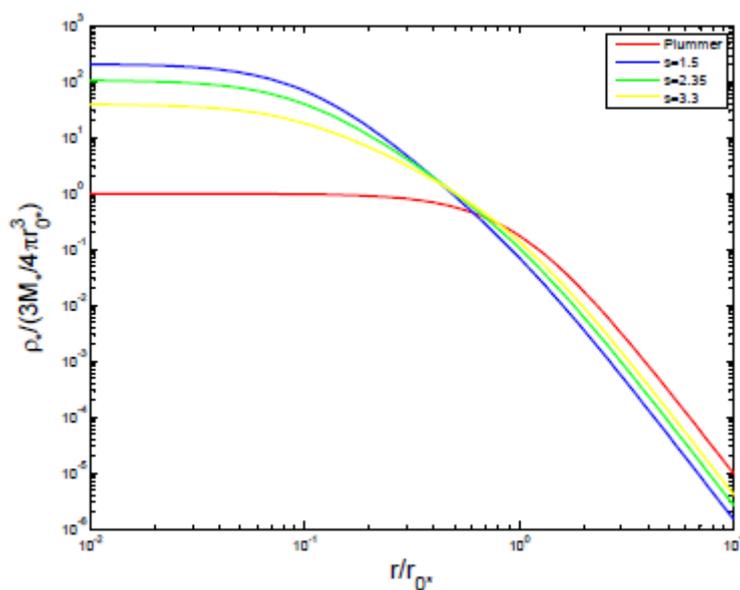
questi tre contributi sono tre funzioni Beta di Eulero incomplete. Infine la funzione di distribuzione globale si ottiene integrando su tutto lo spettro di

massa. Conoscere la funzione di distribuzione di un sistema è sufficiente a determinare tutte le quantità che descrivono struttura e cinematica interna di quel sistema.

Ricapitolando: in sezione (4.2) abbiamo effettuato una decomposizione dinamica partendo da un generico profilo di densità totale $\rho_*(r)$, costituito da componenti aventi tutte la medesima struttura, e con la scelta di anisotropia OM in cui $r_a = r_a(M)$; in sezione (4.3) abbiamo visto come poter scrivere la f per un sistema avente il profilo di densità totale $\rho_*(r)$ coincidente con quello di Plummer e con anisotropia OM, in cui $r_a = r_a(M)$. Dunque, scegliendo il profilo di Plummer anche nel calcolo riguardante la decomposizione dinamica, notiamo come per questa scelta particolare, riusciamo ad ottenere due risultanti importanti: - la scrittura del profilo totale di dispersione delle velocità per un modello con spettro di massa; - la scrittura della f estesa.

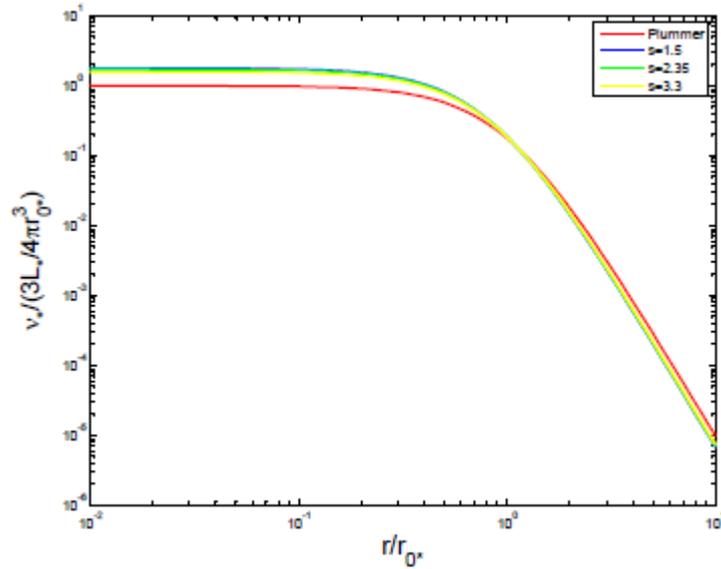


(a)

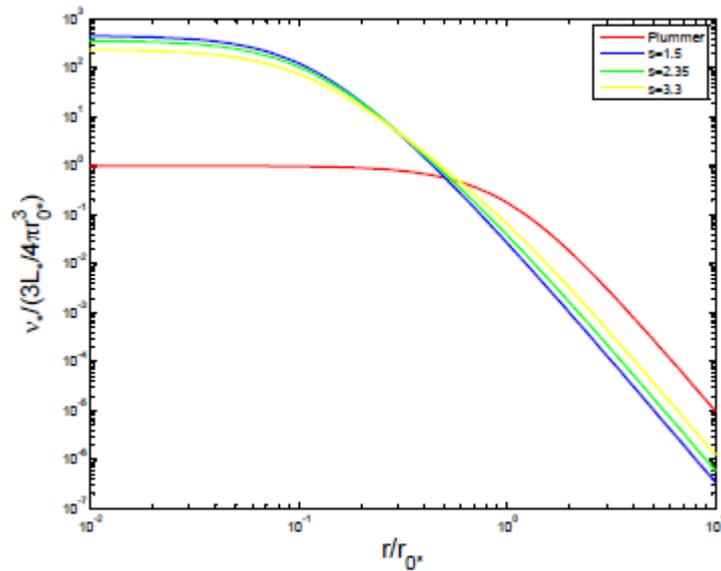


(b)

Figura 4.1: Profilo di densità totale pesato con la **massa** nel caso di decomposizione strutturale I, per (a) $\beta = 0.1$, e per (b) $\beta = 1$. In entrambe le figure le tre curve sono state ottenute per tre scelte di s e avendo fissato $R = M_{sup}/M_{inf} = 10$. La curva rossa rappresenta il profilo di Plummer 'puro': $\rho(r) = (3/4\pi)[r_*^2/(r^2 + r_*^2)^{5/2}]$. Vedasi sezione 4.1 per ulteriori dettagli.

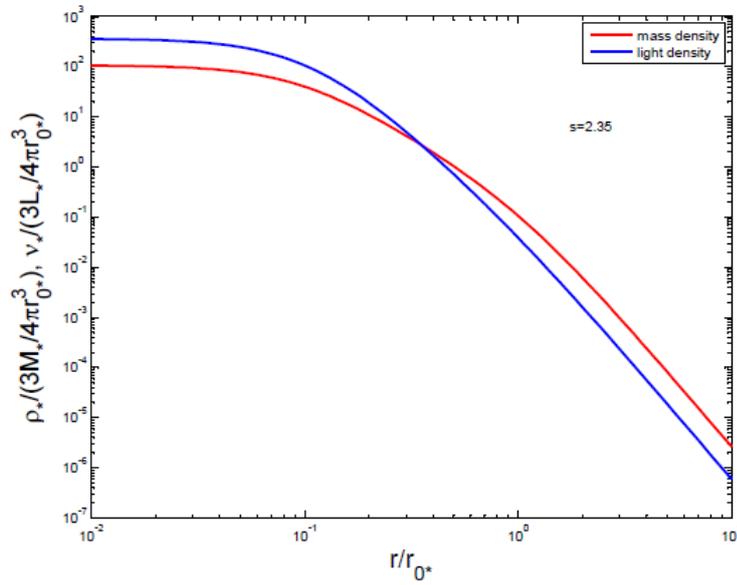


(a)

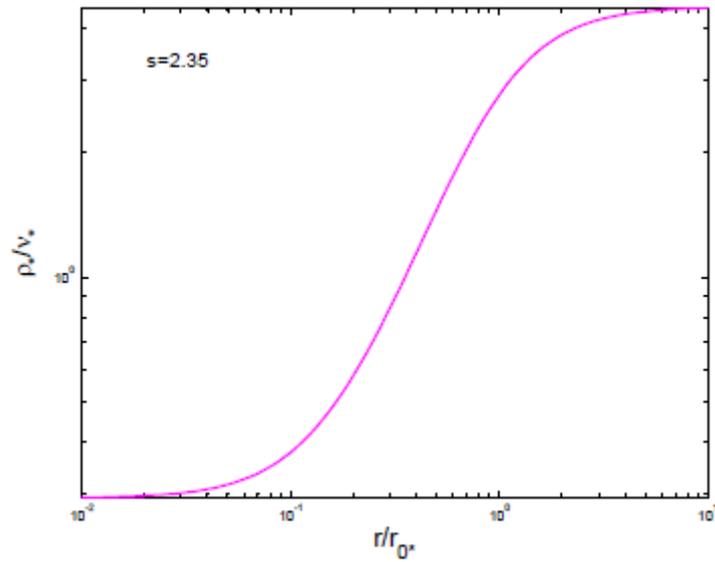


(b)

Figura 4.2: Profilo di densità totale pesato con la **luce** nel caso di decomposizione strutturale I, per (a) $\beta = 0.1$, e per (b) $\beta = 1$. In entrambe le figure le tre curve sono state ottenute per tre scelte di s e avendo fissato $R = M_{sup}/M_{inf} = 10$ e $\delta = 3$. La curva rossa rappresenta il profilo di Plummer 'puro': $\rho(r) = (3/4\pi)[r_*^2/(r^2 + r_*^2)^{5/2}]$. Vedasi sezione 4.1 per ulteriori dettagli

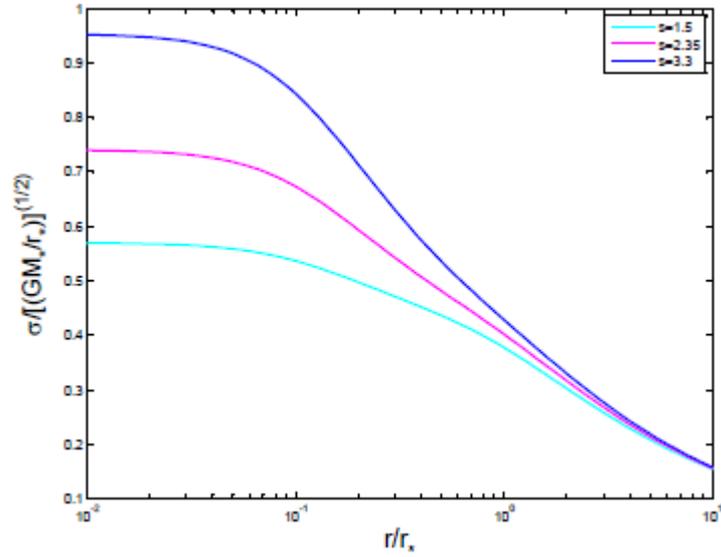


(a)

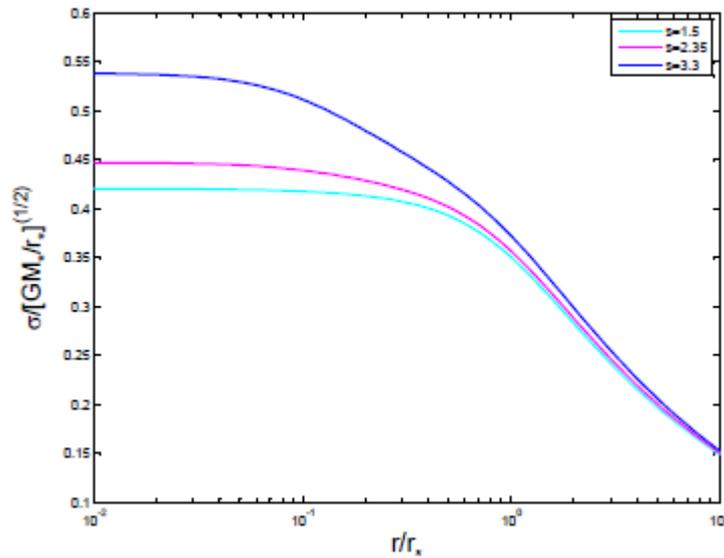


(b)

Figura 4.3: (a) Confronto tra il profilo di densità pesato con la massa e quello pesato con la luce nel caso di decomposizione strutturale I e (b) corrispondente andamento radiale del rapporto massa-luminosità. I valori scelti per i parametri sono $\beta = 1$ e $s = 2.35$. Vedasi sezione 4.1 per maggiori dettagli.



(a)



(b)

Figura 4.4: Profilo radiale della dispersione di velocità pesato (a) con la massa e (b) con la luce, per il profilo di densità di Plummer e con $r_a = r_a(M)$ (raggio di anisotropia per anisotropia OM) con l'andamento in equazione (4.26). I valori dei parametri sono fissati $s = 1.5, 2.35, 3.3$, $R = M_{sup}/M_{inf} = 10$, $\tilde{M} \in [1, 10]$ da cui $r_a \in [0.1, 5]$. Si rimanda alla sezione 4.2 per maggiori dettagli.

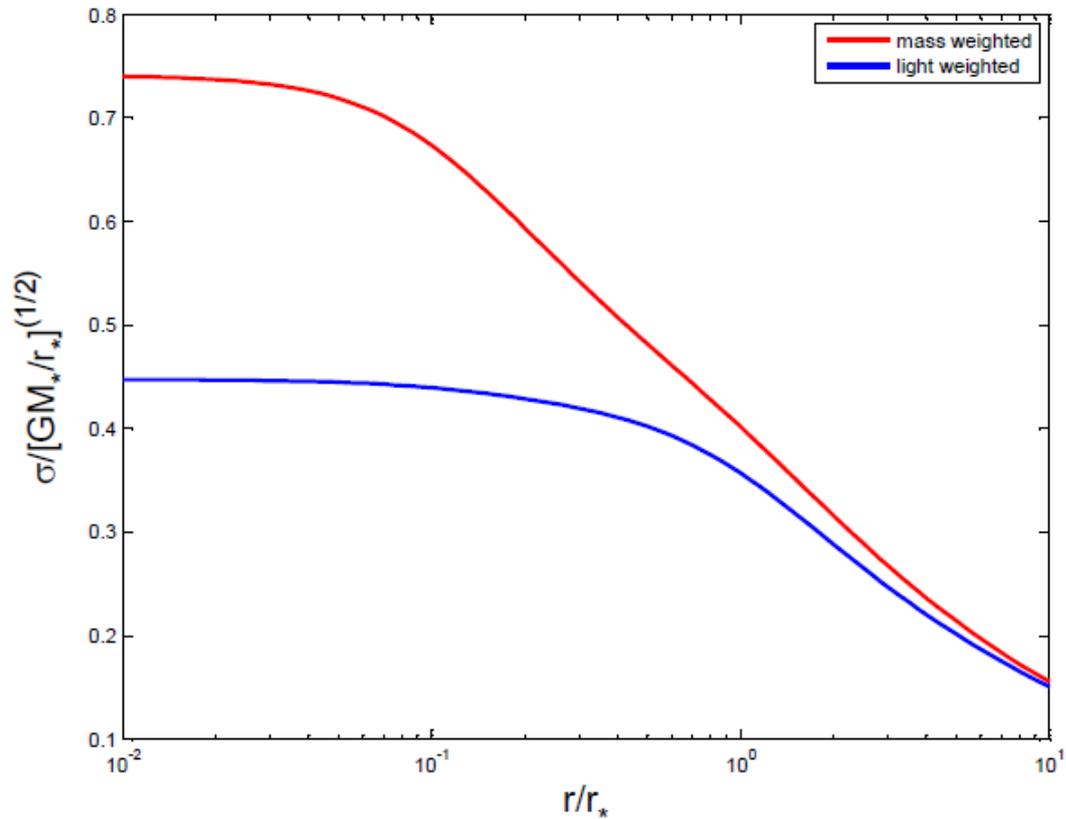


Figura 4.5: Confronto tra il profilo radiale della dispersione di velocità pesato con la massa e quello pesato con la luce per la scelta del profilo di densità di Plummer e con anisotropia Osipkov-Merritt 'estesa' ($r_a = r_a(M)$) per $s = 2.35$, $R = M_{sup}/M_{inf} = 10$. Si rimanda alla sezione 4.2 per maggiori dettagli.

Capitolo 5

Discussione, conclusioni e prospettive future

La costruzione di un formalismo teorico flessibile per la trattazione di sistemi estesi

In questo lavoro abbiamo sviluppato e introdotto lo schema generale con il quale a partire da una famiglia di funzioni di distribuzione estese definite nello spazio delle fasi è possibile costruire tutti i momenti associati a ciascuna componente stellare. Il quadro sviluppato nel **Capitolo 2** è sufficientemente generale da permettere il modellamento di sistemi con dinamica estesa, dipendente cioè dalle proprietà astrofisiche; ad esempio si può decidere di far dipendere la funzione di distribuzione estesa dalla massa stellare, come viene fatto in questo lavoro, dalla metallicità, dall'età, dall'IMF e così via. Ad esempio i gradienti di colore osservati nelle galassie ellittiche, che sono fenomeni ben noti attualmente e in relazione con la metallicità, rappresentano una motivazione per lo studio di funzioni di distribuzione estese. Quindi tale f è intesa come una funzione dipendente da qualche parametro esteso che nel caso specifico di questo lavoro è la massa stellare M . La generalità di questo formalismo ne permette comunque l'utilizzo nella costruzione di svariati modelli, a seconda dei propri obiettivi astrofisici. In conclusione la stesura di un formalismo di validità così generale costituisce già un primo risultato, dal momento che fino ad ora una tale trattazione non era stata ancora effettuata. Come esempio di applicazione abbiamo scelto di far dipendere la funzione di distribuzione dalla massa delle singole stelle distribuite secondo una IMF. Nel Capitolo 2 dunque abbiamo introdotto la possibilità di studiare modelli dinamici costituiti da componenti differenti, ciascuna formata da stelle di uguale massa. Ciascuna componente è rappresentata dalla propria f . Di seguito si è associato ad ogni massa M un rapporto massa-luminosità $\Upsilon(M)$.

Si sono quindi introdotte le funzioni f_M e f_L , rispettivamente la funzione di distribuzione pesata con la massa e quella pesata con la luce. Partendo da queste tre funzioni di distribuzione, si sono ottenute le densità di probabilità, di massa e di luce, le quali sono i momenti di ordine zero rispettivamente di f , f_M e f_L . Dai momenti primo e secondo si sono poi ottenute le velocità medie e le dispersioni di velocità pesate di nuovo con la massa e con la luce. È stato dunque possibile stabilire le relazioni che esistono fra le varie quantità pesate con la massa e con la luce, e se esistono o meno dei modi diretti per poter passare dalle une alle altre, dimostrando come questo sia possibile solo per le singole componenti di massa, e non per il sistema totale, integrato su tutto lo spettro di masse stellari.

Il quadro teorico sviluppato è così generale che anche nelle applicazioni da noi considerate, ovvero nel caso di dipendenza della funzione di distribuzione dalla massa delle singole stelle, la possibilità di modellizzazione è così ampia che si sono potuti identificare alcuni approcci fra loro diversi, ma non mutuamente escludentesi. In altre parole sarebbe possibile combinare fra loro alcuni approcci presentati separatamente nei successivi capitoli. Comprendiamo dunque come questo lavoro di tesi costituisca il punto di partenza di possibili studi futuri. Ad esempio è possibile cambiare il parametro esteso da utilizzare, e far dipendere la f dalla metallicità; potremmo anche utilizzare approcci differenti nella costruzione del modello di galassia (riassumeremo a breve quali sono stati gli approcci utilizzati) e quali particolari caratteristiche strutturali e/o dinamiche assegnare a ciascuna componente stellare costituente il sistema.

La decomposizione strutturale: vantaggi e svantaggi

Riassumiamo brevemente quali sono stati gli approcci adottati ai fini della costruzione di un modello esteso, le rispettive applicazioni e i rispettivi risultati.

Nel **Capitolo 3** ci siamo occupati del caso di decomposizione strutturale, ovvero della costruzione di un sistema come combinazione di componenti di densità aventi proprietà strutturali fra loro differenti, ma caratterizzate tutte dalle stesse proprietà orbitali. Dal punto di vista della costruzione dei modelli si sono sviluppati due approcci differenti: quello della *somma* di componenti (decomposizione strutturale I) e quello della *scissione* in componenti (decomposizione strutturale II). Nel primo approccio *sommiamo* coppie densità-potenziale note e rappresentative ciascuna di una determinata componente. Ogni componente ha il suo profilo di densità, e decidiamo di far dipendere una proprietà strutturale (nel nostro caso il raggio di scala del

profilo radiale di densità) dalla massa stellare. Questo approccio ha il vantaggio di permettere di risolvere facilmente l'equazione di Jeans per la singola componente; dall'integrazione successiva sullo spettro delle masse si ottiene poi l'andamento radiale della dispersione di velocità totale (pesato sia con la massa che con la luce). Tuttavia presenta lo svantaggio di avere poco controllo sul risultato finale, ovvero sulla coppia densità-potenziale totale; da qui discende anche la difficoltà di ricavare la funzione di distribuzione tramite l'inversione di Eddington.

Nel secondo approccio partiamo da un profilo di densità totale e lo *scindiamo* in componenti, con particolare attenzione a non ricadere nel caso di f fattorizzata. Tale richiesta viene soddisfatta tramite l'introduzione di una funzione g , detta 'funzione di decomposizione frazionaria', la quale è una funzione a due variabili, M ed r . In tal modo ogni componente avrà il proprio profilo di densità. Anche questo approccio ha i propri vantaggi e svantaggi, in particolare ha il vantaggio di poter effettuare l'inversione di Eddington poiché il potenziale totale è dato, ma presenta la difficoltà di dover trovare un modo secondo cui decomporre il profilo totale in componenti fra loro non parallele. Nonostante tale procedura sia non banale da un punto di vista tecnico (scelta della funzione g), allo stesso tempo le soluzioni trovate per i profili di densità di ciascuna componente, sono abbastanza flessibili e indipendenti dal profilo totale di densità di partenza.

I risultati delle prime applicazioni di modello dinamico esteso

Ricordiamo ora quali sono stati i risultati principali scaturiti dalle applicazioni delle procedure appena elencate.

Ci siamo concentrati nell'ambito della decomposizione strutturale che, pur essendo probabilmente la forma più semplice secondo cui costruire un modello esteso, già produce risultati molto interessanti, illustrati in dettaglio nel **Capitolo 4**. In questo capitolo presentiamo un'applicazione della decomposizione strutturale I, scegliendo per ciascuna componente il profilo di densità di Plummer con raggio di scala dipendente dalla massa M che caratterizza le stelle della componente. Come scelta particolare successiva distribuiamo le masse più grandi più concentrate verso il centro rispetto alle stelle di massa minore; questa scelta, motivata da fenomeni come la frizione dinamica negli ammassi globulari, ha uno scopo puramente illustrativo del concetto di modello esteso.

Sfruttando le definizioni enunciate nel Capitolo 2 e dalla risoluzione delle equazioni di Jeans (sferiche) nel caso isotropo per ciascuna componente

stellare, abbiamo trovato dei risultati interessanti. Fra questi figurano la variazione del rapporto massa-luminosità con il raggio (divenendo così una quantità locale che varia punto per punto nella galassia), e un profilo di dispersione delle velocità differente a seconda che lo si pesi con la massa o con la luce. Fra le conseguenze di maggior impatto astrofisico vi è sicuramente il fatto che un modello esteso, avente componenti stellari strutturalmente diverse, possa mimare la presenza di Materia Oscura se si interpretano i dati assumendo a priori un rapporto massa-luminosità costante.

In un'applicazione successiva abbiamo assunto un'omologia strutturale fra le varie componenti che sono caratterizzate questa volta da una dinamica interna diversa. Dopo aver adottato l'anisotropia di Osipkov-Merrit, facciamo dipendere il raggio di anisotropia dalla massa della stella, scegliendo un andamento del raggio di anisotropia crescente con la massa M . Con questa particolare scelta, anch'essa di carattere illustrativo, abbiamo visto come i profili di dispersione di velocità risultanti siano diversi a seconda che vengano pesati con la massa o con la luce, soprattutto nelle regioni centrali, in cui il profilo pesato con la massa risulta essere più alto di quello pesato con la luce. Questa diversità porta ad attribuire maggiore isotropia nei moti rispetto a quanto ce n'è realmente, essendo le stelle di massa più piccola quelle più radialmente anisotrope.

Come ultima applicazione, nel **Capitolo 4** abbiamo derivato la funzione di distribuzione totale (collettiva di tutte le stelle) nel caso di omologia strutturale fra le componenti, aventi profilo di densità di Plummer, e proprietà orbitali diverse, con la scelta di anisotropia OM. La funzione di distribuzione che ne risulta è esprimibile, in termini di funzioni ipergeometriche.

A nostra conoscenza questo è il primo caso in letteratura in cui il calcolo di una particolare funzione di distribuzione estesa è stato impostato, ed ammette anche soluzione esplicita.

Riflessioni e prospettive future

Una volta chiarito l'obiettivo e il contenuto di questo lavoro, ne comprendiamo il progresso rispetto alla procedura standard usata fino ad ora, in cui sono stati considerati sistemi mono-massa, cioè costituito da stelle aventi tutte la stessa massa. Il rapporto massa-luminosità è costante per tutto l'oggetto, e quindi molte grandezze caratterizzanti utilizzate, sono le stesse sia che le si pesi con la massa che con la luce. Se però si ha a che fare con sistemi per i quali il rapporto massa-luminosità è variabile, ecco che l'equazione di Jeans darà risultati diversi a seconda di come vengono pesate le grandezze che entrano in essa.

Ad esempio i modelli in cui le stelle più massicce sono più concentrate al

centro, se interpretati in un contesto di rapporto massa-luminosità costante, darebbero importanza ad una componente di massa oscura, quando invece si tratta di un aumento del rapporto massa-luminosità con il raggio, dovuto alle diverse strutture e dinamiche delle varie componenti.

Questo primo risultato ci fa capire quanto sia rischioso assumere omologia tra le componenti del sistema che si studia; i modelli usati si basano su importanti approssimazioni concettuali, fatte per poter trattare il problema. Così alcuni risultati riscontrati oggi in letteratura potrebbero rivelarsi meno robusti. Ad esempio alcuni articoli ([29], [30], [31], [32]) fanno dei claim sull'ipotetica variazione della IMF tra le galassie ellittiche in funzione della massa della galassia. Alla luce di quanto illustrato in questo lavoro, potrebbe essere interessante riuscire a capire se effettivamente si possano mettere dei vincoli contemporaneamente sulla IMF e la massa totale della galassia, ammettendo uno spettro di massa nella distribuzione delle masse stellari e scrivendo l'equazione di Jeans per l'intero sistema.

Concludendo potremmo dire che nel presente lavoro sono stati individuati due approcci principali:

- approccio *top-down*: partiamo dalla conoscenza della funzione di distribuzione estesa, e data una $\Psi(M)$ e un $\Upsilon(M)$ riusciamo a ricavare tutte le proprietà strutturali e cinematiche dell'oggetto. Si colloca in questo ambito l'applicazione in cui si fa vedere come poter ricavare la f tramite un'inversione di Eddington *estesa* (OM Plummer sphere);
- approccio *bottom-up*: in questo problema, inverso al precedente, si parte dalle osservazioni disponibili e si fa uso delle equazioni di Jeans pesate con la luce e scritte per ciascuna componente, in modo da produrre quantità direttamente confrontabili con ciò che si osserva.

È possibile ovviamente costruire anche modelli dinamici misti, in cui si assume che a cambiare possano essere contemporaneamente la distribuzione della massa e delle proprietà orbitali, ovvero in cui il modello di galassia sia composto da componenti ciascuna avente proprietà sia strutturali che dinamiche diverse da quelle delle altre. Si potrebbe partire dalla decomposizione strutturale tipo I, scegliendo che una proprietà strutturale (ad esempio il raggio di scala) sia funzione della massa M , e allo stesso tempo che una proprietà dinamica (come il raggio di anisotropia per la scelta OM) sia funzione anch'essa della massa M . L'integrazione dell'equazione di Jeans presenterà in tal caso non poche difficoltà, poichè si tratterebbe di risolvere

$$\rho_*(r, M)\sigma^2(r, M) = \frac{G \int_r^\infty M(r)\rho_*(r, M)(1 + \frac{r_a^2}{r^2})dr}{r^2 + r_a^2}, \quad (5.1)$$

in cui ora non sussiste l'omologia strutturale, ma si sceglie ad esempio

$$\rho_*(r, M) = \Psi(M)M\tilde{\rho}(r, M) = \Psi(M)M\frac{3}{4\pi}\frac{r_*^2(M)}{[r^2 + r_*^2(M)]^{\frac{5}{2}}}. \quad (5.2)$$

Infine, abbiamo sempre considerato come parametro esteso la massa delle singole stelle. Potremmo decidere di usare anche altri parametri, come la metallicità, l'età, a seconda del problema. Si potrebbe ad esempio far dipendere la pendenza della IMF dall'energia orbitale, assegnando in tal modo una IMF diversa in punti diversi della galassia, contrariamente a quanto adottato in questo lavoro in cui si è assunta un'unica pendenza per la IMF, uguale per tutto il sistema.

Le funzioni di distribuzione estese ed ancor più in generale i modelli dinamici estesi saranno sempre più in uso nell'ambito dei modelli di dinamica stellare e di evoluzione chimica, utili per interpretare nuove osservazioni. In questo lavoro abbiamo illustrato tre semplici modelli (dei toy model totalmente analitici), in cui venivano prospettate tre possibili strategie (somma strutturale, decomposizione strutturale e decomposizione dinamica). La missione GAIA ad esempio e il conseguente modellamento della Milky Way, forniranno il naturale playground per l'utilizzo dei modelli estesi.

Appendice A

Le funzioni ipergeometriche (cenni)

In matematica la funzione ipergeometrica **Gaussiana** o **ordinaria** ${}_2F_1(a, b; c; z)$, è una funzione speciale rappresentata dalla **serie ipergeometrica**, la quale include molte delle più comuni funzioni speciali come casi limite o specifici, e la maggior parte delle funzioni che compaiono nei problemi di fisica matematica. Ne sono casi particolari la funzione logaritmo, le funzioni trigonometriche, le funzioni di Bessel ed anche le funzioni β e Γ di Eulero, o ad esempio:

$$\ln(1+z) = z {}_2F_1(1, 1; 2; -z), \quad (\text{A.1})$$

$$(1-z)^{-a} = {}_2F_1(a, 1; 1; z), \quad (\text{A.2})$$

$$\arcsen(z) = z {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right). \quad (\text{A.3})$$

È una soluzione di una particolare equazione differenziale ordinaria del II° ordine (ODE), nota con il nome di **equazione ipergeometrica di Gauss** nella funzione incognita $u = u(t)$:

$$z(1-z)u'' + [c - (a+b+1)z]u' - abu = 0, \quad (\text{A.4})$$

dove i parametri a, b, c non dipendono dalla variabile indipendente t . Ogni ODE lineare del II° ordine con tre punti singolari regolari può essere trasformata in questa equazione; da qui l'importanza di tale funzione speciale.

Dunque definiamo la funzione ipergeometrica come:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{A.5})$$

nel cerchio di raggio unitario $|z| < 1$. In particolare è indefinita (o infinita) se c è uguale a un intero negativo. La serie termina se a o b sono interi negativi,

nel qual caso la funzione si riduce ad un polinomio.

Nella definizione precedente si è introdotto il simbolo di Pochhammer $(a)_n$ con $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} (a)_n := 1 \\ (a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \end{cases}$$

Il simbolo di Pochhammer può essere espresso anche mediante la funzione Gamma, ovvero:

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (\text{A.6})$$

e che $(1)_n = n!$, $(2)_n = (n+1)!$, $(3)_n = (n+2)!/2!$, $(4)_n = (n+3)!/3!$ e così via.

Da quest'ultima scriviamo il teorema di rappresentazione integrale di Eulero
Teorema Se $c > a > 0$ e se $|z| < 1$ allora

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 \frac{s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}}{(1-zs)^b} ds. \quad (\text{A.7})$$

Appendice B

La funzione Gamma di Eulero, Γ (cenni)

Il fattoriale $n!$ di un numero naturale è definito ricorsivamente come:

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ (n+1)! = (n+1)n! \end{cases}$$

Eulero (1707-1783) trovò che è possibile definire una funzione di variabile reale (o complessa) $\Gamma(x)$ con la stessa proprietà di ricorsività.

Ovvero egli trovò il modo di prolungare il dominio della funzione fattoriale dai naturali a tutti i numeri reali positivi determinando una funzione $e(x)$ definita mediante una formula per ogni $x > 0$ con la proprietà di interpolare i valori $e(n) = n!$ in corrispondenza dei numeri naturali. La costruzione proposta da Eulero è esposta in una lettera a Christian Goldbach (1690-1764) che pose, assieme a Daniel Benoulli (1700-1784), il problema alla sua attenzione. La costruzione di Eulero lo condusse a rappresentare in forma integrale tale funzione:

$$e(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t} \right)^x dt. \quad (\text{B.1})$$

Usando tale rappresentazione integrale, Eulero studiò le principali proprietà della funzione fattoriale. Successivamente Adrien Marie Legendre (1752-1833) introdusse la notazione $\Gamma(x)$ tuttora in uso e quella che è la definizione standard della funzione Gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (\text{B.2})$$

Confrontando le ultime due definizioni ed effettuando il cambio di variabile $t = -\ln u$, vediamo che:

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^1 e^{\ln u} \left(\ln \frac{1}{u} \right)^x \frac{1}{u} du = e(x). \quad (\text{B.3})$$

Dalla definizione della funzione Gamma, integrando per parti si giunge alla seguente relazione ricorsiva che vale per $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad (\text{B.4})$$

dove in particolare se $x = n \in N$ allora $\Gamma(n + 1) = n!$.

Bibliografia

- [1] Binney J. and Tremaine S., 1994, 'Galactic Dynamics', Princeton Univ. Press, Princeton, NJ
- [2] Danziger I.J., Carollo C.M., Buson L., Matteucci F., Brocato E., 1993, In: "Structure, Dynamics and Chemical Evolution of Elliptical Galaxies", Garching: (ESO), 1993, (eds) Danziger J., Zeilinger W. W., and Kjaer K., p.399, 'Gradients of metal line indices in a sample of early type galaxies'
- [3] Suh H. et al, 2010, ApJ, 187, 374
- [4] Carollo C. M. et al, 2007, Nature, 450, 1020-1025, 'Two stellar components in the halo of the Milky Way'
- [5] Carollo C. M., Danziger I. J., Buson L., 1993, MNRAS, 265, 553, 'Metallicity gradients in early type galaxies'
- [6] Carollo C. M., Danziger I. J., 1994, MNRAS, 270, 523, 'Dynamics and stellar populations in early type galaxies'
- [7] Cenarro A. J., Gorgas J., Vazdekis A., Cardiel N. and Peletier R. F., 2003, MNRAS, 339, L12-L16, 'Near-infrared line-strengths in elliptical galaxies: evidence for initial mass function variations?'
- [8] van Dokkum P. G., Conroy C., 2010, Nature, 468, 940, 'A substantial population of low-mass stars in luminous elliptical galaxies'
- [9] Spiniello C., Trager S., Koopmans L. V. E., Conroy C., 2014, MNRAS, 438, 1483, 'The stellar IMF in early-type galaxies from a non-degenerate set of optical line indices'
- [10] Cappellari M., McDermid R. M., Alatalo K., et al., 2012, Nature, 484,

485, 'Systematic variation of the stellar initial mass function in early-type galaxies'

[11] La Barbera F., Ferreras I., Vazdekis A. et al., 2013, MNRAS, 433, 3017, 'SPIDER VIII - constraints on the stellar initial mass function of early-type galaxies from a variety of spectral features'

[12] Conroy C., van Dokkum P. G., 2012, ApJ, 760, 1, 'The stellar initial mass function in early type galaxies from absorption line spectroscopy.II.results'

[13] Conroy C., van Dokkum P. G., 2012, ApJ, 760, 71, 'The stellar initial mass function in early type galaxies from absorption line spectroscopy. I. Data and empirical trends'

[14] Franx M., Illingworth G., 1990, ApJ, Part 2, 359, L41-L45. 'Color gradients in elliptical galaxies'

[15] Coccato et al, 2013, MNRAS, 000, 1-10, 'Signatures of accretion events in the halos of early-type galaxies from comparing PNe and GCs kinematics'

[16] Coccato et al, 2015, A&A, 579, A135, 'The outer regions of the giant Virgo galaxy M87 Kinematic separation of stellar halo and intracluster light'

[17] Ciotti L., Stiavelli M. and Braccetti A., 1995, MNRAS, 276, 961-964, 'Recovering the intrinsic metallicity distribution of elliptical galaxies'

[18] Sanders J., Binney J., 2015, MNRAS, 000, 1-24, 'Extended distributions functions for our Galaxy'

[19] Bertin G., 2000, 'Dynamics of Galaxies', Cambridge University Press

[20] Greggio L., Renzini A., 2011, 'Stellar population', John Wiley and sons

[21] Salpeter E. E., 1955, ApJ, 121, 161, 'The Luminosity Function and Stellar Evolution'

[22] Chandrasekhar S., 1958, 'An introduction to the study of stellar structure', Dover Books on Astronomy

[23] Chabrier G., 2004, In: Corbelli E., Palla F., Zinnecker H. (eds) "The Initial Mass Function 50 Years Later". Astrophysics and Space Science Li-

brary, vol 327. Springer, Dordrecht

[24] Cappellari M., 2016, *A&A*, 54, 597-665, 'Structure and Kinematics of Early type Galaxies from Integral field spectroscopy'

[25] Lyubenova M., Navarro I. M. et al, 2016, *MNRAS*, 000, 1-6, 'IMF shape constrains from stellar populations and dynamics from CALIFA'

[26] Osipkov, Merritt, 1985, *AJ*, 90, 1027

[27] Ciotti L., Morganti L., de Zeeuw, 2009, *MNRAS*, 393, 491-500, 'Two-component galaxies with flat rotation curve'

[28] Plummer H. C., 1911, *MNRAS*, 71, 460, 'On the problem of distribution in globular star clusters'

[29] Van Dokkum P., Conroy C., 2016, *ApJ*, 841, 2, 'The stellar Initial Mass Function in Early Type galaxies from absorption line spectroscopy. III. Radial gradients'

[30] Smith R. J., Lucey J. R and Edge A. C., 2017, *MNRAS* 000, 1-14, 'A counter-image to the gravitational arc in Abell 1201: Evidence for IMF variations, or a $10^{10}M_{\odot}$ black hole?'

[31] Thomas J., Saglia R. P., 2011, *MNRAS*, 000, 1-22, 'Dynamical masses of early-type galaxies: a comparison to lensing results and implications for the stellar IMF and the distribution of dark matter'

[32] Dutton A. A., Mendel J. T. and Simard L., 2012, *MNRAS*, 422, L33-L37, 'Evidence for a non universal stellar initial mass function in low-redshift high-density early-type galaxies'