

Sara Regina da Rosa Pinter

**SOBRE EQUIVARIANTIZAÇÕES DE CATEGORIAS  
MÓDULO E SEUS OBJETOS SIMPLES**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Doutora em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Orientadora: Prof. Dr<sup>a</sup>. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pinter, Sara Regina da Rosa  
Sobre equivariantizações de categorias módulo e  
seus objetos simples / Sara Regina da Rosa Pinter ;  
orientadora, Virgínia Silva Rodrigues - SC, 2017.  
148 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e  
Aplicada, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Categoria  
módulo. 3. Equivariantização. 4. Dimensão de  
Frobenius-Perron. 5. Grupo (anel) de Grothendieck.  
I. Rodrigues, Virgínia Silva. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação  
em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Sara Regina da Rosa Pinter

**SOBRE EQUIVARIANTIZAÇÕES DE CATEGORIAS  
MÓDULO E SEUS OBJETOS SIMPLES**

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de “Doutora”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 19 de abril de 2017.

---

Prof. Ruy Coimbra Charão, Dr.  
Coordenador  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

**Comissão Examinadora:**

---

Prof.<sup>a</sup> Virgínia Silva Rodrigues, Dr.<sup>a</sup>.  
Orientadora  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

---

Prof. Abdelmoubine Amar Henni, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

---

Prof. Alcides Buss, Dr.  
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

---

Prof. Alveri Alves Sant'Ana, Dr.  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS (Participação  
por videoconferência)

---

Luz Adriana Mejía Castaño, Dr<sup>a</sup>.  
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC

---

Prof. Juan Martín Mombelli, Dr.  
Universidad Nacional de Córdoba - UNC

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à minha orientadora e, com todo respeito e carinho, amiga Professora Virgínia Silva Rodrigues.

Aos Professores Abdelmoubine Amar Henni, Alcides Buss, Alveri Alves Sant'Ana, Luz Adriana Mejía Castaño e Juan Martín Mombelli por terem aceitado participar da banca avaliadora. Muito obrigada pelos comentários e sugestões.

À CAPES e à FAPESC, pelo período de bolsa de doutorado, que foi fundamental na realização desta tese.

Ao Instituto Federal Catarinense - Campus São Francisco do Sul, por ter me concedido afastamento para a conclusão deste trabalho.



# Resumo

Sejam  $G$  um grupo finito que age em uma categoria de fusão  $\mathcal{C}$ ,  $H$  um subgrupo de  $G$  e  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ . Se  $\mathcal{M}$  é um  $\mathcal{C}$ -módulo  $H$ -equivariante, existe a equivariantização  $\mathcal{M}^H$ . O presente trabalho caracteriza os objetos simples em  $\mathcal{M}^H$ , em que  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo indecomponível semissimples, bem como traz um estudo detalhado das ferramentas usadas para tal.

**Palavras-chave:** Categoria módulo, Equivariantização, Dimensão de Frobenius-Perron, Grupo (anel) de Grothendieck.





# Abstract

Let  $G$  be a group acting on a fusion category  $\mathcal{C}$ ,  $H$  a subgroup of  $G$  and  $\mathcal{M}$  a module category over  $\mathcal{C}$ . If  $\mathcal{M}$  is a  $H$ -equivariant  $\mathcal{C}$ -module then there exists the equivariantization  $\mathcal{M}^H$ . This work characterizes simple objects in  $\mathcal{M}^H$ , where  $\mathcal{M}$  is a semisimple indecomposable module category, as well as presents a detailed study of the tools used for it.

**Keywords:** Module category, Equivariantization, Frobenius-Perron dimension, Grothendieck group (ring).



# Sumário

<b>1</b>	<b>Categorias abelianas</b>	<b>17</b>
1.1	Sequências exatas . . . . .	17
1.2	Funtores e transformações naturais . . . . .	28
1.3	Categorias localmente finitas . . . . .	33
1.4	Equivariantização de categorias abelianas $k$ -lineares . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Categorias tensoriais</b>	<b>45</b>
2.1	Noções Básicas . . . . .	45
2.2	Equivariantização de categorias tensoriais finitas . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Categorias módulo</b>	<b>51</b>
3.1	Noções básicas . . . . .	51
3.2	Equivariantização de categorias módulo . . . . .	57
3.3	Ação de $\text{vect}_k$ em categorias abelianas finitas . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Dimensão de Frobenius-Perron</b>	<b>75</b>
4.1	$\mathbb{Z}_+$ -anéis e $\mathbb{Z}_+$ -módulos . . . . .	76
4.2	O grupo de Grothendieck . . . . .	97
4.3	Dimensão de Frobenius-Perron em categorias . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Objetos simples em equivariantizações de categorias módulo</b>	<b>117</b>
5.1	Dimensão de Frobenius-Perron de objetos simples em $\mathcal{M}^H$	118
5.2	Caracterização de objetos simples em $\mathcal{M}^H$ . . . . .	122
5.3	Equivariantização e representações projetivas de grupos	137



# Introdução

A definição de uma categoria monoidal surgiu em 1963 em um trabalho de Mac Lane [16]. Em seu livro [15], ele desenvolveu a teoria de categorias monoidais, bem como definiu categorias simétricas e categorias trançadas. Alguns anos depois, Saavedra-Rivano em sua tese [20], motivado por necessidades em geometria algébrica e teoria dos números desenvolveu a teoria de categorias Tannakianas, que estuda estruturas monoidais simétricas sobre categorias abelianas. Desde então a teoria de categorias tensoriais (categorias monoidais e abelianas) vem se tornando um assunto promissor, com notáveis conexões com teoria da representação, grupos quânticos, álgebras de Hopf, álgebras de Lie de dimensão infinita, álgebra de operadores e teoria dos números, dentre outros assuntos.

Se um grupo  $G$  age em um anel  $S$ , então o anel dos invariantes é denotado por  $S^G$ . Pensando no lugar do anel  $S$  uma categoria tensorial  $\mathcal{C}$  e categorificando os conceitos envolvidos, surge a definição de equivariantização, a categoria  $\mathcal{C}^G$ . Tal definição e analogia podem ser encontradas em [22].

As categorias tensoriais podem ser divididas em dois tipos: as semisimples e as não semissimples. O estudo de cada uma dessas famílias se subdivide em diversos tipos. Dentro de categorias tensoriais semissimples, uma classe que vem gerando grande interesse é a das categorias de fusão. Estas são categorias tensoriais semissimples que possuem um número finito de classes de isomorfismos de objetos simples. Se  $\mathcal{C}$  é uma categoria de fusão, sua equivariantização por um grupo finito  $\mathcal{C}^G$  também o é. Tal fato é demonstrado em ([6], Theorem 4.18).

Em ([2], Section 2), Burciu e Natale descrevem os objetos simples da equivariantização de uma categoria de fusão. Uma das principais ferramentas usadas na demonstração dessa caracterização é a dimensão de Frobenius-Perron.

A noção de categoria tensorial pode ser pensada como uma cate-

gorificação do conceito de anel. Generalizando essa ideia, a noção de categoria módulo pode ser pensada como uma categorificação do conceito de um módulo sobre um anel. Tal noção foi dada por I. Bernstein, em [1] e por L. Crane e I. B. Frenkel, em [4]. Da mesma forma que o estudo dos módulos ajuda na compreensão da estrutura dos anéis, o estudo das categorias módulo ajuda no entendimento das categorias tensoriais.

Consideremos um grupo finito  $G$  que age em uma categoria de fusão  $\mathcal{C}$ . Seja  $H$  um subgrupo de  $G$ . A definição a seguir é encontrada em [11]. Uma categoria módulo  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{C}$  é dita  $H$ -equivariante se o grupo  $H$  age sobre a categoria  $\mathcal{M}$  como categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear e certas condições de compatibilidade na estrutura de categoria módulo são satisfeitas. Uma das condições é a de que os funtores  $U_g : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , que definem a ação de  $G$  sobre  $\mathcal{M}$ , são funtores de  $\mathcal{C}$ -módulo, em que a estrutura de módulo sobre  $\mathcal{C}$  da categoria  $\mathcal{M}$ , vista no “contradomínio”, é dada através da ação de  $H$  em  $\mathcal{C}$ .

Dado um  $\mathcal{C}$ -módulo  $H$ -equivariante  $\mathcal{M}$ , podemos considerar a categoria dos objetos equivariantes, a equivariantização  $\mathcal{M}^H$ . Esta nova categoria tem uma estrutura de categoria módulo sobre a categoria de fusão  $\mathcal{C}^G$ .

Nosso objetivo é caracterizar os objetos simples de equivariantizações de categorias módulo sobre  $\mathcal{C}$  que são indecomponíveis e semissimples.

Uma ferramenta essencial para esse objetivo é a dimensão de Frobenius-Perron. Tal dimensão é bem conhecida no contexto de categorias de fusão. Esse entendimento se dá através do estudo de  $\mathbb{Z}_+$ -anéis que são, basicamente, anéis livres como  $\mathbb{Z}$ -módulos que satisfazem certas condições. Neste trabalho, fazemos um estudo acerca de  $\mathbb{Z}_+$ -módulos sobre  $\mathbb{Z}_+$ -anéis, no intuito de compreender e utilizar a dimensão de Frobenius-Perron em categorias módulo.

O presente trabalho se organiza da seguinte forma. No primeiro capítulo fazemos um apanhado geral de resultados acerca de categorias abelianas, já que tanto categorias de fusão quanto categorias módulo são, em particular, categorias abelianas. Optamos por não colocar todas as demonstrações, mas procuramos incluir ao máximo os resultados utilizados no objetivo de fazer um trabalho o mais autocontido possível.

No segundo capítulo inserimos a estrutura monoidal e, nesse caso, as categorias abelianas tornam-se tensoriais. Incluímos os principais resultados utilizados envolvendo tais categorias, todos bem conhecidos.

No capítulo três apresentamos as categorias módulo ou representações de categorias tensoriais. Categorias módulo podem ser definidas

em um contexto muito amplo, mas já pensando em nosso objetivo final, optamos por trabalhar apenas com categorias módulo que sejam localmente finitas, semissimples e que possuam uma quantidade finita de classes de isomorfismo de objetos simples. Neste capítulo, apresentamos também a equivariantização de categorias módulo, objeto fundamental do nosso estudo. Falamos ainda da maneira como a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita age em qualquer categoria abeliana finita, através da soma direta. Tal ação será utilizada no último capítulo.

No capítulo quatro, escrevemos com detalhes alguns resultados sobre  $\mathbb{Z}_+$ -anéis e  $\mathbb{Z}_+$ -módulos. Boa parte é conhecida e encontrada em [7] e [19]. Na parte específica sobre  $\mathbb{Z}_+$ -módulos, com o objetivo de conseguirmos as ferramentas necessárias para utilizarmos a dimensão de Frobenius-Perron no último capítulo, desenvolvemos alguns resultados novos, mais especificamente a partir do Teorema 4.1.36 até o final da primeira seção.

Ainda no capítulo quatro, escrevemos uma seção especialmente dedicada ao grupo de Grothendieck e suas estruturas de anel e módulo, quando nas respectivas “categorificações”. É nesta seção que traçamos o vínculo entre  $\mathbb{Z}_+$ -anéis (e  $\mathbb{Z}_+$ -módulos) e categorias de fusão (e categorias módulo), respectivamente. Na última seção deste capítulo, trasladamos os resultados sobre dimensão de Frobenius-Perron em  $\mathbb{Z}_+$ -anéis e  $\mathbb{Z}_+$ -módulos para categorias de fusão e categorias módulo e acreditamos ter nessa seção uma contribuição genuína. Agora as ferramentas necessárias para o capítulo final estão todas em mãos.

No capítulo cinco, inicialmente relacionamos as dimensões de Frobenius-Perron de objetos simples em  $\mathcal{M}^H$  com a dimensão de Frobenius-Perron de suas componentes simples em  $\mathcal{M}$ . Na segunda seção, caracterizamos os objetos simples de  $\mathcal{M}^H$  através de uma correspondência bijetiva com os objetos simples de  $\mathcal{M}^{H_N}$ , em que  $H_N$  é o subgrupo de  $H$  conhecido por estabilizador de  $N$ , desde que  $N$  seja um somando direto simples em  $\mathcal{M}$  dos objetos estudados. Na última seção, apresentamos uma equivalência entre objetos simples de equivariantizações  $\mathcal{M}^{H_N}$  e as  $\sigma_N$ -representações projetivas irredutíveis de  $H_N$ , em que  $\sigma_N$  é um 2-cociclo que depende de  $N$ . Neste último capítulo, basicamente generalizamos as ideias de classificação de objetos simples em equivariantizações de categorias de fusão, da seção 2 de [2], para categorias módulo.

Ao longo deste trabalho,  $\mathbb{k}$  é um corpo algebricamente fechado de característica zero. Para simplificar a notação, escrevemos  $X \in \mathcal{C}$  para dizer que  $X$  é um objeto na categoria  $\mathcal{C}$ . Para um objeto  $X \in \mathcal{C}$ , deno-

tamos por  $I_X$  o morfismo identidade em  $X$  e para o funtor identidade em  $\mathcal{C}$ , usamos a notação  $Id_{\mathcal{C}}$ . Para denotar a existência de um isomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ , escrevemos  $X \cong Y$  e para dizer que não existe tal isomorfismo, escrevemos  $X \not\cong Y$ . Todas as categorias consideradas são essencialmente pequenas, isto é, para todo par de objetos  $X, Y$ , a classe dos morfismos, denotada por  $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , é um conjunto e as classes de isomorfismos de objetos formam um conjunto.



# Capítulo 1

## Categorias abelianas

Consideramos conhecidas algumas definições básicas envolvendo categorias, que podem ser encontradas em [7] e [17]. No intuito de fazermos um trabalho o mais autocontido possível lembramos, a seguir, algumas definições.

### 1.1 Sequências exatas

Nesta seção apresentamos definições e alguns resultados conhecidos que serão úteis nos capítulos posteriores.

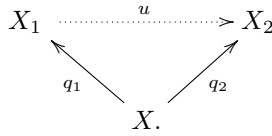
**Definição 1.1.1** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Dois monomorfismos  $i_1 : X_1 \rightarrow X$  e  $i_2 : X_2 \rightarrow X$  em  $\mathcal{C}$  são ditos equivalentes se existe um isomorfismo  $u : X_1 \rightarrow X_2$  tal que o diagrama a seguir comuta*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \overset{u}{\dashrightarrow} & X_2 \\ & \searrow i_1 & \swarrow i_2 \\ & X & \end{array}$$

Um subobjeto de  $X$  é uma classe de equivalência de monomorfismos para  $X$ . Se  $Y$  é um subobjeto de  $X$ , existe um monomorfismo  $\iota : Y \rightarrow X$ . Denotamos tal fato por  $Y \subseteq X$  ou  $(Y, \iota)$ .

**Definição 1.1.2** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria. Dois epimorfismos  $q_1 : X \rightarrow X_1$ ,  $q_2 : X \rightarrow X_2$  em  $\mathcal{C}$  são ditos equivalentes se existe um isomorfismo*

$u : X_1 \rightarrow X_2$  tal que o diagrama a seguir comuta



Um quociente de  $X$  é uma classe de equivalência de epimorfismos de  $X$ .

**Definição 1.1.3** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita *pré-aditiva* se possui um objeto zero, o conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  é um grupo abeliano, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ , e a composição de morfismos é bilinear, isto é, para quaisquer  $f, f' : X \rightarrow Y$  e  $g, g' : Y \rightarrow Z$  valem

$$g(f + f') = gf + gf' \text{ e } (g + g')f = gf + g'f.$$

Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria pré-aditiva e  $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ . Uma *soma direta* de  $X_1$  e  $X_2$  é uma coleção  $(Z, \pi_1, \pi_2, \iota_1, \iota_2)$ , em que  $\pi_1 : Z \rightarrow X_1$ ,  $\pi_2 : Z \rightarrow X_2$ ,  $\iota_1 : X_1 \rightarrow Z$  e  $\iota_2 : X_2 \rightarrow Z$  são morfismos em  $\mathcal{C}$  que satisfazem

$$\pi_1 \iota_1 = I_{X_1}, \quad \pi_2 \iota_2 = I_{X_2} \quad \text{e} \quad \iota_1 \pi_1 + \iota_2 \pi_2 = I_Z.$$

A soma direta de dois objetos é única, a menos de isomorfismo. Nas condições acima, escrevemos  $Z = X_1 \oplus X_2$ . Os morfismos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são epimorfismos, chamados projeções e os morfismos  $\iota_1$  e  $\iota_2$  são monomorfismos, chamados inclusões. Tais morfismos satisfazem  $\pi_i \iota_j = 0$ , se  $i \neq j$ .

**Definição 1.1.4** Uma categoria pré-aditiva  $\mathcal{C}$  é dita *aditiva* se todo par de objetos em  $\mathcal{C}$  possui uma soma direta.

Consideramos que todas as categorias  $\mathcal{C}$  neste trabalho sejam aditivas. Denotamos por  $0$  tanto o objeto zero quanto o morfismo nulo.

**Definição 1.1.5** Seja  $X \in \mathcal{C}$  que não seja o objeto zero.

- (1) O objeto  $X$  é dito *simples* se os únicos subobjetos de  $X$  são o objeto zero e ele mesmo.
- (2) O objeto  $X$  é dito *semissimples* se  $X$  é uma soma direta de objetos simples.



**Demonstração:** Sejam  $k : Ker(f) \rightarrow X$  e  $k' : K' \rightarrow X$  núcleos de  $f$ . Como  $fk' = 0$ , pela propriedade universal de  $(Ker(f), k)$ , existe um único morfismo  $u : K' \rightarrow Ker(f)$  tal que  $k' = ku$ , isto é, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccc} Ker(f) & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow u & \circlearrowleft & \uparrow k' & \\ & & & K' & \end{array}$$

Mostremos que  $u$  é isomorfismo. Como  $fk = 0$ , pela propriedade universal de  $(K', k')$ , existe um único morfismo  $u' : Ker(f) \rightarrow K'$  tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} K' & \xrightarrow{k'} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow u' & \circlearrowleft & \uparrow k & \\ & & & Ker(f) & \end{array}$$

Assim,  $kuu' = k'u' = k$  e  $k'u'u = ku = k'$ , ou seja, os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccccc} Ker(f) & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow uu' & \circlearrowleft & \uparrow k & \\ & & & Ker(f) & \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} K' & \xrightarrow{k'} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \swarrow u'u & \circlearrowleft & \uparrow k' & \\ & & & K' & \end{array}$$

Como  $I_{Ker(f)}$  e  $I_{K'}$  também comutam os diagramas acima, pela unicidade do morfismo da propriedade universal de  $(Ker(f), k)$  e de  $(K', k')$ , respectivamente, segue que  $uu' = I_{Ker(f)}$  e  $u'u = I_{K'}$ . Portanto,  $u : K' \rightarrow Ker(f)$  é um isomorfismo tal que  $ku = k'$ . Logo,  $(K', k') = (Ker(f), k)$ , como subobjetos de  $X$ .

Analogamente, mostra-se a versão para conúcleo. ■

**Lema 1.1.10** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$ ,  $k : Ker(f) \rightarrow X$  o núcleo de  $f$  e  $q : Y \rightarrow coKer(f)$  o conúcleo de  $f$ . Então são equivalentes.*

- (1)  $(Ker(f), k) = (X, I_X)$ , como subobjetos de  $X$ .
- (2)  $k$  é um isomorfismo.

(3)  $f = 0$ .

(4)  $(\text{coKer}(f), q) = (Y, I_Y)$ , como quocientes de  $Y$ .

(5)  $q$  é um isomorfismo.

**Demonstração:** (1)  $\Rightarrow$  (2) Tal igualdade como subobjetos implica que existe um isomorfismo  $u : \text{Ker}(f) \rightarrow X$  tal que  $k = I_X u = u$ . Portanto,  $k$  é um isomorfismo.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Como  $fk = 0$ , segue que  $f = 0$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4) É claro que  $I_Y f = I_Y 0 = 0$ . Seja  $q' : Y \rightarrow K'$  um morfismo em  $\mathcal{C}$  tal que  $q'f = 0$ . Claramente, o próprio  $q'$  é o único morfismo que comuta o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{0} & Y & \xrightarrow{I_Y} & Y \\ & & \downarrow q' & \circlearrowleft & \swarrow q' \\ & & Q' & & \end{array}$$

Logo,  $(Y, I_Y)$  é um conúcleo de  $f$ . Pela Proposição 1.1.9, segue que  $(Y, I_Y) = (\text{coKer}(f), q)$ , como quocientes de  $Y$ .

(4)  $\Rightarrow$  (5) Análogo a (1)  $\Rightarrow$  (2).

(5)  $\Rightarrow$  (3) Análogo a (2)  $\Rightarrow$  (3).

(3)  $\Rightarrow$  (1) Análogo a (3)  $\Rightarrow$  (4). ■

**Definição 1.1.11** *Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita abeliana se é aditiva, todo morfismo possui um núcleo e um conúcleo, todo monomorfismo é um núcleo e todo epimorfismo é um conúcleo.*

Consideremos a partir de agora que todas as categorias envolvidas sejam categorias abelianas.

**Proposição 1.1.12** *Um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  é um epimorfismo e um monomorfismo se, e somente se, é um isomorfismo.*

**Demonstração:** Se  $f$  é um isomorfismo, é claro que  $f$  é um monomorfismo e um epimorfismo. Suponhamos que  $f$  seja um monomorfismo e um epimorfismo. Como  $f$  é um monomorfismo, segue que  $f$  é um núcleo, ou seja,  $f = \text{Ker}(g)$ , para algum morfismo  $g : Y \rightarrow Z$ . Assim,  $gf = 0 = 0f$  e como  $f$  é um epimorfismo, segue que  $g = 0$ . Logo, pelo Lema 1.1.10,  $f$  é um isomorfismo. ■

A seguir, desenvolvemos noções e resultados básicos envolvendo seqüências exatas. Estes resultados são usados como ferramentas para o desenvolvimento de outros neste mesmo capítulo como, por exemplo, o Lema de Schur para categorias abelianas. Mas são auxiliares para os outros capítulos também.

**Definição 1.1.13** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$ . A imagem de  $f$ , denotada por  $Im(f)$ , é dada por*

$$Im(f) = Ker(coKer(f)).$$

**Definição 1.1.14** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos em  $\mathcal{C}$ . A seqüência*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

*é uma seqüência exata em  $Y$  se  $Im(f) = Ker(g)$ , como subobjetos de  $Y$ .*

Uma seqüência

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \longrightarrow 0$$

é dita *exata* se é exata em  $X_i$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Uma seqüência exata da forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é chamada seqüência *exata curta*.

**Lema 1.1.15** *Seja  $X$  em  $\mathcal{C}$ . Então*

$$Ker(I_X) = 0 \text{ e } coKer(I_X) = 0.$$

**Demonstração:** É claro que  $I_X 0 = 0$ . Seja  $k' : K' \rightarrow X$  tal que  $I_X k' = 0$ . Então  $k' = 0$ . Existe um único morfismo  $u : K' \rightarrow 0$ , pelo fato do contradomínio ser o objeto zero e é claro que esse morfismo comuta o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & X & \xrightarrow{I_X} & X \\ & \swarrow u & \circlearrowleft & \uparrow k' & \\ & & & K' & \end{array}$$

Portanto,  $Ker(I_X) = 0$ .

Analogamente mostra-se que  $coKer(I_X) = 0$ . ■

**Proposição 1.1.16** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$  e  $(Ker(f), k)$  o núcleo de  $f$ . Então são equivalentes.*

(1)  $f$  é um monomorfismo.

(2)  $(Ker(f), k) = (0, 0)$ .

(3)  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$  é uma sequência exata.

**Demonstração:** (1)  $\Rightarrow$  (2) Temos que  $fk = 0 = f0$ . Como  $f$  é um monomorfismo, segue que  $k = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Sejam  $g, h : Z \rightarrow X$  tais que  $fg = fh$ . Então  $f(g - h) = 0$ . Pela propriedade universal do núcleo, existe um único morfismo  $u : Z \rightarrow Ker(f)$  tal que  $ku = g - h$ . Mas, por hipótese,  $k = 0$ . Logo,  $g = h$ . Portanto,  $f$  é um monomorfismo.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) Segue do lema acima, pois

$$Im(0) = Ker(coKer(0)) = Ker(I_X) = 0.$$

■

A seguir é enunciado um resultado análogo para epimorfismos.

**Proposição 1.1.17** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$  e  $(coKer(f), q)$  o conúcleo de  $f$ . Então são equivalentes.*

(1)  $f$  é um epimorfismo.

(2)  $(coKer(f), q) = (0, 0)$ .

(3)  $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$  é uma sequência exata.

**Corolário 1.1.18** *A sequência  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$  é exata se, e somente se,  $f$  é um isomorfismo.*

**Demonstração:** Segue diretamente das Proposições 1.1.12, 1.1.16 e 1.1.17. ■

**Lema 1.1.19 ([17], Lema 2.8.3)** *Todo monomorfismo em  $\mathcal{C}$  é o núcleo do seu conúcleo. Todo epimorfismo em  $\mathcal{C}$  é o conúcleo do seu núcleo.*

**Proposição 1.1.20** *Sejam  $X, Y, Z$  em  $\mathcal{C}$  e a seqüência*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0.$$

*Então são equivalentes.*

- (1) *A seqüência acima é uma seqüência exata curta.*
- (2)  *$f$  é o núcleo de  $g$  e  $g$  é o conúcleo de  $f$ .*

**Demonstração:**

(1)  $\Rightarrow$  (2) Em particular, a seqüência é exata em  $X$ . Pela Proposição 1.1.16,  $f$  é um monomorfismo. Daí, pelo lema anterior,  $f$  é o núcleo do seu conúcleo. Assim,  $Im(f) = Ker(coKer(f)) = f$ . Além disso, como a seqüência é exata em  $Y$ , segue que  $f = Im(f) = Ker(g)$ . Portanto,  $f$  é o núcleo de  $g$ .

Como a seqüência é exata em  $Z$ , pela Proposição 1.1.17,  $g$  é um epimorfismo. Assim, pelo lema anterior,  $g$  é o conúcleo do seu núcleo, isto é,  $g$  é o conúcleo de  $f$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1) Como  $f$  é um monomorfismo, segue a exatidão em  $X$  e segue que  $Im(f) = Ker(coKer(f)) = f$ . Como  $f$  é um núcleo de  $g$ , temos que  $ker(g) = f = Im(f)$  e segue a exatidão em  $Y$ . Como  $g$  é um conúcleo,  $g$  é um epimorfismo e a seqüência é exata em  $Z$ . Portanto, a seqüência é exata curta. ■

**Lema 1.1.21** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo,  $k : ker(f) \rightarrow X$  o seu núcleo e  $q : Y \rightarrow coKer(f)$  o seu conúcleo. Então a seqüência*

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} coKer(f) \longrightarrow 0$$

*é exata.*

**Demonstração:** A seqüência é exata em  $Ker(f)$  e em  $coKer(f)$ , pelas Proposições 1.1.16 e 1.1.17, respectivamente, pois  $k$  é um monomorfismo e  $q$  é um epimorfismo. Além disso, pelo Lema 1.1.19, temos que  $Im(k) = k$ . Logo,  $Im(k) = ker(f)$  e então a seqüência é exata em  $X$ . Além disso, por definição,  $Im(f) = Ker(coKer(f)) = Ker(q)$ . Logo, a seqüência é exata em  $Y$  também. Portanto a seqüência é exata. ■

Sejam  $f : X \rightarrow Y$  e  $f' : X' \rightarrow Y'$  morfismos em  $\mathcal{C}$ . A soma direta dos morfismos  $f$  e  $f'$ , denotada por  $f \oplus f' : X \oplus X' \rightarrow Y \oplus Y'$ , é a composição

$$f \oplus f' = \iota_Y f \pi_X + \iota_{Y'} f' \pi_{X'},$$

em que os morfismos  $\iota$  e  $\pi$  são as inclusões e projeções das respectivas somas diretas.



**Lema 1.1.22** *Sejam  $f$  e  $f'$  como acima. Então  $\text{Ker}(f \oplus f') = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f')$  e  $\text{CoKer}(f \oplus f') = \text{CoKer}(f) \oplus \text{CoKer}(f')$ .*

**Demonstração:** Sejam  $k : \text{Ker}(f) \rightarrow X$  e  $k' : \text{Ker}(f') \rightarrow X'$  os núcleos de  $f$  e  $f'$ , respectivamente. Mostremos que

$$(\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f'), k \oplus k')$$

é um núcleo de  $f \oplus f'$ . Temos

$$\begin{aligned} (f \oplus f')(k \oplus k') &= (\iota_Y f \pi_X + \iota_{Y'} f' \pi_{X'}) (\iota_X k \pi_{\text{Ker}(f)} + \iota_{X'} k' \pi_{\text{Ker}(f')}) \\ &= \iota_Y f k \pi_{\text{Ker}(f)} + \iota_{Y'} f' k' \pi_{\text{Ker}(f')} = 0. \end{aligned}$$

Sejam  $K \in \mathcal{C}$  e  $u : K \rightarrow X \oplus X'$  tais que  $(f \oplus f')u = 0$ . Então  $\pi_Y(f \oplus f')u = 0$  e  $\pi_{Y'}(f \oplus f')u = 0$ . Logo,  $f \pi_X u = 0$  e  $f' \pi_{X'} u = 0$ . Pela propriedade universal de  $(\text{Ker}(f), k)$  e de  $(\text{Ker}(f'), k')$ , respectivamente, existem únicos  $g : K \rightarrow \text{Ker}(f)$  e  $g' : K \rightarrow \text{Ker}(f')$  tais que  $kg = \pi_X u$  e  $k'g' = \pi_{X'} u$ . Definimos  $h : K \rightarrow \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f')$  por

$$h = \iota_{\text{Ker}(f)} g + \iota_{\text{Ker}(f')} g'.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (k \oplus k')h &= (\iota_X k \pi_{\text{Ker}(f)} + \iota_{X'} k' \pi_{\text{Ker}(f')}) (\iota_{\text{Ker}(f)} g + \iota_{\text{Ker}(f')} g') \\ &= \iota_X k g + \iota_{X'} k' g' = \iota_X \pi_X u + \iota_{X'} \pi_{X'} u = u. \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f') & \xrightarrow{k \oplus k'} & X \oplus X' & \xrightarrow{f \oplus f'} & Y \oplus Y' \\ & \swarrow h & \circlearrowleft & \uparrow u & \\ & & & K & \end{array}$$

Mostremos a unicidade de  $h$ . Seja  $h' : K \rightarrow \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f')$  tal que  $(k \oplus k')h' = u$ . Então

$$k \pi_{\text{Ker}(f)} h' = \pi_X (k \oplus k') h' = \pi_X u = kg$$

e

$$k' \pi_{\text{Ker}(f')} h' = \pi_{X'} (k \oplus k') h' = \pi_{X'} u = k' g'.$$

Como  $k$  e  $k'$  são monomorfismos, isto implica que  $\pi_{\text{Ker}(f)} h' = g$  e que  $\pi_{\text{Ker}(f')} h' = g'$ . Logo,

$$\begin{aligned} h &= \iota_{\text{Ker}(f)} g + \iota_{\text{Ker}(f')} g' \\ &= \iota_{\text{Ker}(f)} \pi_{\text{Ker}(f)} h' + \iota_{\text{Ker}(f')} \pi_{\text{Ker}(f')} h' = h'. \end{aligned}$$

A demonstração para conúcleo é análoga. ■

**Proposição 1.1.23** *Sejam*

$$X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \quad e \quad X' \xrightarrow{f'} Z' \xrightarrow{g'} Y'$$

*sequências exatas. Então*

$$X \oplus X' \xrightarrow{f \oplus f'} Z \oplus Z' \xrightarrow{g \oplus g'} Y \oplus Y'$$

*é uma sequência exata.*

**Demonstração:** Segue, do lema acima, que  $\text{Ker}(g \oplus g') = \text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(g')$  e que  $\text{Im}(f \oplus f') = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(f')$ . Por hipótese, temos que  $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$  e  $\text{Ker}(g') = \text{Im}(f')$ . Portanto,  $\text{Ker}(g \oplus g') = \text{Im}(f \oplus f')$ . ■

**Lema 1.1.24** *Se  $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$  é uma sequência exata e  $\phi : Z \rightarrow W$  é um isomorfismo então  $\phi$  induz uma sequência exata*

$$X \longrightarrow W \longrightarrow Y .$$

**Demonstração:** Basta considerarmos a sequência  $X \xrightarrow{\phi f} W \xrightarrow{g \phi^{-1}} Y$ . ■

**Lema 1.1.25** *Sejam  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$  uma sequência exata curta e  $W \in \mathcal{C}$ . Então existem sequências exatas*

$$0 \longrightarrow X \oplus W \longrightarrow Z \oplus W \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

*e*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \oplus W \longrightarrow Y \oplus W \longrightarrow 0.$$

**Demonstração:** Segue da Proposição 1.1.23 usando as sequências exatas da hipótese e  $0 \longrightarrow W \xrightarrow{I_W} W \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ , do Lema 1.1.24 e do fato de que  $Y \oplus 0 \cong Y$ . ■

**Lema 1.1.26** (Lema de Schur para categorias abelianas) *Sejam  $X$  e  $Y$  objetos simples em  $\mathcal{C}$ . Se  $f : X \rightarrow Y$  é um morfismo não-nulo então  $f$  é um isomorfismo.*

**Demonstração:** Seja  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo não-nulo. Temos que  $(Ker(f), k)$ , o núcleo de  $f$ , é um subobjeto de  $X$ . Como  $X$  é simples, isto implica que  $Ker(f) \cong 0$  ou  $Ker(f) \cong X$ . Se  $Ker(f) \cong X$ , pelo Lema 1.1.10,  $f = 0$ , o que é um absurdo. Assim,  $Ker(f) \cong 0$  e, pela Proposição 1.1.16, segue que  $f$  é um monomorfismo. Assim,  $(X, f)$  é um subobjeto de  $Y$ . Como  $Y$  é simples e  $X \not\cong 0$ , temos que  $X \cong Y$  e que  $f$  é um isomorfismo. ■

Seja  $\iota : X \rightarrow Y$  um monomorfismo em  $\mathcal{C}$ , isto é,  $X \subseteq Y$ . Denotamos o quociente  $coKer(\iota)$  por  $Y/X$ .

**Lema 1.1.27** *Seja  $(X, \iota)$  um subobjeto de  $Y$ . Então a sequência*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{q} Y/X \longrightarrow 0$$

*é exata.*

**Demonstração:** Como  $\iota$  é um monomorfismo, pelo Lema 1.1.19,  $\iota$  é o núcleo do seu conúcleo. Assim, pela Proposição 1.1.20, segue que a sequência é exata. ■

**Proposição 1.1.28 ([13], Proposition 16.1)** *Suponhamos que o diagrama a seguir, formado pelas linhas e colunas contínuas, comuta e que suas linhas e colunas sejam sequências exatas. Então existem morfismos  $\gamma : A' \rightarrow A$  e  $\gamma' : A \rightarrow A''$  que preservam a comutatividade do diagrama e tornam a sequência pontilhada uma sequência exata.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \cdots & \rightarrow & A' & \cdots & \xrightarrow{\gamma} & A & \cdots & \xrightarrow{\gamma'} & A'' & \cdots & \rightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow \alpha' & & & \downarrow \alpha & & & \downarrow \alpha'' & & & \\
 0 & \rightarrow & B' & \xrightarrow{i_1} & B & \xrightarrow{q_1} & B'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \beta' & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta'' & & & & & \\
 0 & \rightarrow & C' & \xrightarrow{i_2} & C & \xrightarrow{q_2} & C'' & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & & 
 \end{array}$$

**Corolário 1.1.29** *Sejam  $A, B$  e  $C$  objetos em  $\mathcal{C}$  tais que  $A \subseteq B \subseteq C$ . Então  $B/A \subseteq C/A$  e  $(C/A)/(B/A) \cong C/B$ .*

**Demonstração:** Sejam  $i_1 : A \rightarrow B$ ,  $i_2 : B \rightarrow C$  monomorfismos,  $q_1 : B \rightarrow B/A$  o conúcleo de  $i_1$ ,  $q_2 : C \rightarrow C/B$  o conúcleo de  $i_2$  e  $q : C \rightarrow C/A$  o conúcleo de  $i_2 i_1$ . Não é difícil ver que o diagrama abaixo é análogo ao da proposição acima e que satisfaz as hipóteses da mesma. Logo, existem  $\gamma : B/A \rightarrow C/A$  e  $\gamma' : C/A \rightarrow C/B$  tais que a seqüência pontilhada é exata

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{I_A} & A & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 i_1 & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i_2} & C & \xrightarrow{q_2} & C/B \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow q_1 & & \downarrow q & & \downarrow I_{C/B} \\
 0 & \cdots \longrightarrow & B/A & \cdots \xrightarrow{\gamma} & C/A & \cdots \xrightarrow{\gamma'} & C/B \cdots \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0.
 \end{array}$$

Assim,  $\gamma$  é um monomorfismo e, pela Proposição 1.1.20,  $\gamma'$  é um conúcleo de  $\gamma$ . Portanto,  $B/A \subseteq C/A$  e  $(C/A)/(B/A) \cong C/B$ . ■

## 1.2 Funtores e transformações naturais

Nesta seção são apresentadas as definições e alguns resultados, acerca de funtores e transformações naturais, necessários não apenas para o entendimento de várias definições que aparecem neste trabalho, mas também como ferramentas auxiliares importantes para inúmeras demonstrações apresentadas aqui.

Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  categorias e  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores. Lembremos que uma transformação natural  $\mu : F \rightarrow G$  é uma coleção de morfismos  $\{\mu_X : F(X) \rightarrow G(X) : X \in \mathcal{C}\}$  tal que, para todo par de objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$  e para cada morfismo  $f : X \rightarrow Y$ , o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\mu_X} & G(X) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & G(Y).
 \end{array}$$

Uma transformação natural  $\mu : F \rightarrow G$  é dita um isomorfismo natural se, para todo objeto  $X$ , o morfismo  $\mu_X : F(X) \rightarrow G(X)$  é um isomorfismo. Neste caso,  $F$  é equivalente a  $G$  e denotamos este fato por  $F \sim G$ .

Duas categorias  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são equivalentes se existem funtores  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tais que  $FG \sim Id_{\mathcal{D}}$  e  $GF \sim Id_{\mathcal{C}}$ . Neste caso,  $F$  e  $G$  são ditos equivalências entre categorias.

**Lema 1.2.1 ([18], Proposição 2.21)** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  uma equivalência entre categorias. Um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  é um monomorfismo (epimorfismo) em  $\mathcal{C}$  se, e somente se,  $F(f)$  é um monomorfismo (epimorfismo) em  $\mathcal{D}$ .*

Lembremos também que se  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é uma equivalência entre categorias e  $Z$  é um objeto zero em  $\mathcal{C}$ , então  $F(Z)$  é um objeto zero em  $\mathcal{D}$ , veja ([17], Ejercicio 2.7.5).

**Proposição 1.2.2** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  uma equivalência entre categorias. Se  $S$  é um objeto simples em  $\mathcal{C}$  então  $F(S)$  é um objeto simples em  $\mathcal{D}$ .*

**Demonstração:** Como  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é uma equivalência, existe um functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $GF \sim Id_{\mathcal{C}}$  e  $FG \sim Id_{\mathcal{D}}$ . Seja  $X \subseteq F(S)$ , isto é, existe um monomorfismo  $\iota : X \rightarrow F(S)$  em  $\mathcal{D}$ . Pelo lema acima,  $G(\iota) : G(X) \rightarrow GF(S) \cong S$  é um monomorfismo. Assim,  $G(X)$  é um subobjeto de  $S$ . Como  $S$  é simples,  $G(X) \cong 0$  ou  $G(X) \cong S$ . Logo,  $X \cong FG(X) \cong F(0) \cong 0$  ou  $X \cong FG(X) \cong F(S)$ . Portanto,  $X \cong 0$  ou  $X \cong F(S)$ , donde  $F(S)$  é um objeto simples em  $\mathcal{D}$ . ■

Lembremos que as categorias consideradas são essencialmente pequenas e isso implica que as classes de isomorfismos de objetos formam um conjunto.

**Proposição 1.2.3** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  uma equivalência entre categorias. Então existe uma bijeção entre as classes de isomorfismo de objetos simples de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\{S_i\}_{i \in I}$  e  $\{S'_j\}_{j \in J}$  conjuntos de representantes das classes de isomorfismo de objetos simples em  $\mathcal{C}$  e em  $\mathcal{D}$ , respectivamente. Definimos  $f : \{[S_i]\}_{i \in I} \rightarrow \{[S'_j]\}_{j \in J}$  por  $f([S_i]) = [F(S_i)]$ . Pela proposição acima,  $F(S_i)$  é um objeto simples em  $\mathcal{D}$ . Além disso, se  $S_i \cong S_j$  então  $F(S_i) \cong F(S_j)$ . Logo, a função  $f$  está bem definida.

Como  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é uma equivalência entre categorias, existe um functor  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $GF \sim Id_{\mathcal{C}}$  e  $FG \sim Id_{\mathcal{D}}$ . Sejam  $\phi : FG \rightarrow Id_{\mathcal{D}}$  e  $\varphi : GF \rightarrow Id_{\mathcal{C}}$  os isomorfismos naturais correspondentes.

Mostremos que  $f$  é injetiva. Sejam  $S_i, S_j$  tais que  $f([S_i]) = f([S_j])$ . Então  $[F(S_i)] = [F(S_j)]$ . Donde existe um isomorfismo  $t : F(S_i) \rightarrow F(S_j)$ . Logo,  $G(t) : G(F(S_i)) \rightarrow G(F(S_j))$  é um isomorfismo. Além disso, existem os isomorfismos  $\varphi_{S_i} : GF(S_i) \rightarrow S_i$  e  $\varphi_{S_j} : GF(S_j) \rightarrow S_j$ . Dessa forma, a composição abaixo é um isomorfismo entre  $S_i$  e  $S_j$

$$S_i \xrightarrow{\varphi_{S_i}^{-1}} GF(S_i) \xrightarrow{G(t)} GF(S_j) \xrightarrow{\varphi_{S_j}} S_j .$$

Logo,  $[S_i] = [S_j]$ .

Mostremos que  $f$  é sobrejetiva. Seja  $j \in J$ . Então  $[S'_j] = [F(G(S'_j))]$ , pois existe o isomorfismo  $\phi_{S'_j} : FG(S'_j) \rightarrow S'_j$ . Pela proposição acima, como  $G$  é também uma equivalência entre categorias, temos que  $G(S'_j)$  é simples em  $\mathcal{C}$ . Donde existe  $i \in I$  tal que  $[S_i] = [G(S'_j)]$ . Assim,  $[S'_j] = [F(G(S'_j))] = [F(S_i)] = f([S_i])$ . Portanto,  $f$  é uma bijeção. ■

Agora recordamos o conceito de adjunção, o mesmo se aplica em várias provas do Capítulo 5, principalmente.

**Definição 1.2.4** *Uma adjunção de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{D}$  é uma tripla  $(F, G, \phi)$ , em que  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  são funtores e  $\{\phi_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) : X \in \mathcal{C} \text{ e } Y \in \mathcal{D}\}$  é uma família de isomorfismos naturais.*

Na definição acima, estamos considerando os funtores

$$Hom_{\mathcal{D}}(-, -)(F \times Id_{\mathcal{D}}) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow Set$$

e

$$Hom_{\mathcal{C}}(-, -)(Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow Set,$$

tais que, para cada morfismo  $(f, g) \in (Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, U), Hom_{\mathcal{D}}(Y, V))$  (ou  $(f, g) \in (Hom_{\mathcal{C}}(U, X), Hom_{\mathcal{D}}(Y, V))$ ), temos

$$(Hom_{\mathcal{D}}(-, -)(F \times Id_{\mathcal{D}}))(f, g) = Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g),$$

em que

$$Hom_{\mathcal{D}}(F(f), g) : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \rightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(U), V)$$

$$\alpha \quad \mapsto \quad g\alpha F(f)$$

e

$$(Hom_{\mathcal{C}}(-, -)(Id_{\mathcal{C}^{op}} \times G))(f, g) = Hom_{\mathcal{C}}(f, G(g)),$$

em que

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G(g)) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, G(V)) \\ & \beta & \mapsto G(g)\beta f. \end{array}$$

Finalmente,

$$\phi : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(-, -)(F \times \text{Id}_{\mathcal{D}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)(\text{Id}_{\mathcal{C}} \circ F \times G)$$

é um isomorfismo natural e sua naturalidade é expressa pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) & \xrightarrow{\phi_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(f), g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, G(g)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(U), V) & \xrightarrow{\phi_{U,V}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, G(V)). \end{array}$$

Na tripla  $(F, G, \phi)$  o funtor  $F$  é chamado adjunto à esquerda de  $G$  e o funtor  $G$  é chamado adjunto à direita de  $F$ .

**Teorema 1.2.5 ([18], Teorema 2.28)** *Sejam  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  e  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores. As afirmações abaixo são equivalentes.*

- (1) *Existe uma adjunção  $(F, G, \phi)$ .*
- (2) *Existem transformações naturais  $e : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}$  e  $c : \text{Id}_{\mathcal{C}} \rightarrow GF$  tais que, para quaisquer  $Y \in \mathcal{D}$  e  $X \in \mathcal{C}$ , valem as igualdades*

$$I_{G(Y)} = G(e_Y)c_{G(Y)} \quad (1.1)$$

e

$$I_{F(X)} = e_{F(X)}F(c_X). \quad (1.2)$$

Lembremos que  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são categorias abelianas.

**Definição 1.2.6** *Um funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é dito aditivo se, para todo par de objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$ , vale*

$$F(f + g) = F(f) + F(g),$$

para quaisquer  $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .

**Proposição 1.2.7 ([7], Proposition 1.2.4)** *Para qualquer funtor aditivo  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  existe um isomorfismo natural*

$$F(X) \oplus F(Y) \cong F(X \oplus Y).$$

Segundo [17], temos também que toda equivalência entre categorias aditivas é necessariamente um funtor aditivo. O adjunto à esquerda (ou à direita) de um funtor aditivo entre categorias aditivas é aditivo e uma transformação natural entre funtores aditivos é aditiva.

A seguir, recordamos a definição de um funtor exato, tais funtores são mencionados inúmeras vezes ao longo deste trabalho. Tal definição é encontrada em ([7], Definition 1.6.1).

**Definição 1.2.8** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtor aditivo. O funtor  $F$  é dito exato à esquerda se, para toda sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

em  $\mathcal{C}$ , a sequência

$$0 \longrightarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

é exata em  $\mathcal{D}$ . O funtor  $F$  é dito exato à direita se, para toda sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

em  $\mathcal{C}$ , a sequência

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$

é exata em  $\mathcal{D}$ .

O funtor  $F$  é dito exato se for exato à esquerda e à direita.

**Corolário 1.2.9** *Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$  e  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um funtor exato. Se  $f$  é um monomorfismo em  $\mathcal{C}$  então  $F(f)$  é um monomorfismo em  $\mathcal{D}$ . Se  $f$  é um epimorfismo em  $\mathcal{C}$  então  $F(f)$  é epimorfismo em  $\mathcal{D}$ .*

**Demonstração:** Segue diretamente da definição de funtor exato e das Proposições 1.1.16 e 1.1.17. ■

**Proposição 1.2.10 ([17], Ejercicio 2.7.43)** *Se  $F$  é uma equivalência entre categorias aditivas então  $F$  é um funtor exato.*

**Teorema 1.2.11 ([17], Teorema 2.8.16)** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um funtor aditivo. Então  $F$  é exato se, e somente se,  $F$  possui adjuntos à direita e à esquerda.*



## 1.3 Categorias localmente finitas

Uma propriedade essencial dos objetos nas categorias que trabalhamos nos próximos capítulos é a existência de uma série de composição. Esta seção trata de explicar tal conceito, bem como algumas consequências desse fato que serão usadas mais adiante. Consideremos, a menos que se diga algo contrário, categorias abelianas.

**Definição 1.3.1** *Seja  $X \in \mathcal{C}$ . Uma filtração de  $X$  é uma cadeia*

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$$

*tal que  $X_{i-1}$  é um subobjeto de  $X_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Se, para cada  $i$ , o objeto  $X_i/X_{i-1}$  for simples, tal a filtração é dita uma série de composição de  $X$ .*

Os objetos simples  $X_i/X_{i-1}$  da definição acima são chamados *fatores de composição* de  $X$  e o inteiro não-negativo  $n$  é chamado *comprimento* da série de composição.

Uma série de composição de  $X$  contém um objeto simples  $Y$  com multiplicidade  $m$  se o número de valores de  $i$  para os quais  $X_i/X_{i-1} \cong Y$  é  $m$ . Denotamos por  $[X : Y]$  a multiplicidade de  $Y$  em uma série de composição de  $X$ .

**Definição 1.3.2** *Diz-se que um objeto  $X$  tem comprimento finito se  $X$  possui uma série de composição  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$ . Neste caso, o comprimento de  $X$  é  $n$ .*

Notemos que o teorema seguinte garante a boa definição de comprimento de um objeto qualquer e da multiplicidade de um objeto simples em um dado objeto.

**Teorema 1.3.3 ([7], Theorem 1.5.4.)** (Teorema de Jordan-Hölder) *Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana e  $X \in \mathcal{C}$  um objeto com comprimento finito. Então toda filtração de  $X$  pode ser estendida a uma série de composição. Além disso, quaisquer duas séries de composição de  $X$  contêm qualquer fator de composição com a mesma multiplicidade, em particular, possuem o mesmo comprimento.*

A seguir, recordamos duas definições que culminam na definição de cobertura projetiva. Esta última é importante para o conceito de categorias finitas.

**Definição 1.3.4** Um objeto  $P$  é projetivo se para todo epimorfismo  $\pi : M \rightarrow N$  e para todo morfismo  $f : P \rightarrow N$  existe um morfismo  $g : P \rightarrow M$  que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 g \swarrow & & \downarrow f \\
 M & \xrightarrow{\pi} & N \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

isto é,  $f = \pi g$ .

**Definição 1.3.5** Um morfismo  $f : M \rightarrow N$  é dito essencial se é um epimorfismo e para todo morfismo  $g : L \rightarrow M$  tal que  $fg$  é epimorfismo, então  $g$  é epimorfismo.

**Definição 1.3.6** Uma cobertura projetiva de um objeto  $M$  é um par  $(P, f)$  em que  $f : P \rightarrow M$  é essencial e  $P$  é um objeto projetivo.

**Definição 1.3.7** Uma categoria  $\mathcal{C}$  é dita

- (1)  $\mathbb{k}$ -linear se é aditiva, o conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ , e a composição de morfismos é  $\mathbb{k}$ -linear.
- (2) localmente finita se é abeliana,  $\mathbb{k}$ -linear, o espaço vetorial  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tem dimensão finita, para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ , e todo objeto possui comprimento finito.
- (3) finita se é localmente finita, todo objeto simples tem cobertura projetiva e a quantidade de classes de isomorfismo de objetos simples é finita.

Seja  $A$  uma álgebra de dimensão finita sobre  $\mathbb{k}$ . Denotamos por  ${}_A\mathbf{m}$  a categoria dos  $A$ -módulos à esquerda que possuem dimensão finita sobre  $\mathbb{k}$ .

**Proposição 1.3.8 ([7], Definition 1.8.5.)** Toda categoria abeliana finita é equivalente à categoria  ${}_A\mathbf{m}$ , para alguma álgebra  $A$  de dimensão finita sobre  $\mathbb{k}$ .

A proposição acima traz uma definição equivalente para categoria abeliana finita, porém a álgebra de dimensão finita citada não está canonicamente determinada. Assim, optamos por usar a definição intrinsecamente categórica.

Um functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre categorias  $\mathbb{k}$ -lineares é dito  $\mathbb{k}$ -linear se, para qualquer par de morfismos  $f, g$  em  $\mathcal{C}$  e  $\alpha \in \mathbb{k}$ , vale

$$F(f + \alpha g) = F(f) + \alpha F(g).$$

**Proposição 1.3.9** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria  $\mathbb{k}$ -linear e  $X, Y \in \mathcal{C}$  tais que  $X \subseteq Y$ . Então  $\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \leq \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ , para qualquer  $Z \in \mathcal{C}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $g : X \rightarrow Y$  um monomorfismo e  $Z \in \mathcal{C}$ . Definimos  $T : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$  por  $T(f) = gf$ . É claro que  $T$  é uma transformação linear, pois a composição de morfismos é  $\mathbb{k}$ -linear. Além disso, dados  $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$  tais que  $T(f) = T(f')$ , então  $gf = gf'$  e isto implica  $f = f'$ , pois  $g$  é um monomorfismo. Portanto,  $T$  é uma transformação linear injetiva, donde segue o resultado. ■

**Proposição 1.3.10** *Sejam  $X$  e  $Y$  objetos simples em uma categoria localmente finita  $\mathcal{C}$ . Então  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$  se  $X \not\cong Y$  e  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \mathbb{k}$  se  $X \cong Y$ .*

**Demonstração:** Se  $X \not\cong Y$  então, pelo Lema de Schur,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$ . Se  $X \cong Y$  então  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ . Novamente pelo Lema de Schur, dado  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ , existe  $f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  tal que  $ff^{-1} = I_X = f^{-1}f$ . Logo,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  é uma  $\mathbb{k}$ -álgebra de divisão.

Como a categoria em questão é localmente finita, temos que  $\dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) < \infty$  e isto implica que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  é uma álgebra que é algébrica sobre  $\mathbb{k}$  ([12], EXAMPLE, p.453). Assim,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$  é uma álgebra de divisão algébrica sobre um corpo  $\mathbb{k}$  que é algebricamente fechado. Logo, por ([12], Lemma 5.6),  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \cong \mathbb{k}$ . ■

Observemos que na demonstração da proposição acima foi usado fortemente que o corpo  $\mathbb{k}$  é algebricamente fechado.

Para a próxima proposição, observemos que se  $f : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo então uma série de composição de  $X$  induz uma série de composição de  $Y$ , ou seja, para cada objeto simples  $S$  em  $\mathcal{C}$ , temos

$$[X : S] = [Y : S].$$

**Proposição 1.3.11** *Se  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$  é uma sequência exata curta em uma categoria localmente finita, então os fatores de composição de  $Z$  são exatamente os fatores de composição de  $X$  e de  $Y$ , a menos de isomorfismo.*

**Demonstração:** Pela Proposição 1.1.20,  $f$  é um núcleo de  $g$  e  $g$  é um conúcleo de  $f$ . Dessa forma,  $f$  é um monomorfismo e  $Y \cong Z/X$ . Assim, os fatores de composição de  $Y$  e de  $Z/X$  são os mesmos.

Seja  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$  uma série de composição de  $X$ . Então  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X \subseteq Z$  é uma filtração de  $Z$ . Pelo Teorema de Jordan-Hölder, esta filtração pode ser estendida a uma série de composição de  $Z$ , isto é, existem  $m \in \mathbb{N}$  e  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m \in \mathcal{C}$  tais que

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \cdots \subseteq Z_m = Z \quad (1.3)$$

seja uma série de composição de  $Z$ .

Pelo Corolário 1.1.29,

$$0 \subseteq Z_1/X \subseteq Z_2/X \subseteq \cdots \subseteq Z_m/X = Z/X$$

é uma filtração de  $Z/X$ . Mais ainda, é uma série de composição de  $Z/X$ , pois o mesmo garante que  $(Z_i/X)/(Z_{i-1}/X) \cong Z_i/Z_{i-1}$  é simples, para todo  $i \in \{2, \dots, m\}$ , veja (1.3). A mesma série de composição garante que  $Z_1/X$  também é simples.

Logo, os fatores de composição de  $X$  são  $X_i/X_{i-1}$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$  e os fatores de composição de  $Z/X$  são  $(Z_i/X)/(Z_{i-1}/X) \cong Z_i/Z_{i-1}$  para  $i \in \{2, \dots, m\}$  e  $Z_1/X$ . Pela série de composição (1.3), os fatores de composição de  $Z$  são os mesmos de  $X$  e de  $Z/X \cong Y$ , a menos de isomorfismo. ■

Observemos que o resultado acima nos diz que se  $S$  é um objeto simples em  $\mathcal{C}$ , então

$$[Z : S] = [X : S] + [Y : S].$$

**Proposição 1.3.12** *Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  categorias localmente finitas,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um functor exato e  $X \in \mathcal{C}$  com uma série de composição  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$ . Então os fatores de composição de  $F(X)$  são os fatores de composição de  $F(X_i/X_{i-1})$ , em que  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Demonstração:** Mostremos por indução sobre o comprimento do objeto  $X$ . O caso  $n = 1$  é óbvio. Consideremos  $n = 2$ . Seja  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 = X$  uma série de composição de  $X$ . Então existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 = X \longrightarrow X_2/X_1 \longrightarrow 0.$$

Como  $F$  é um functor exato, a sequência

$$0 \longrightarrow F(X_1) \longrightarrow F(X_2) = F(X) \longrightarrow F(X_2/X_1) \longrightarrow 0$$

é exata. Assim, pela Proposição 1.3.11, os fatores de composição de  $F(X)$  são os fatores de composição de  $F(X_1) = F(X_1/X_0)$  e os de  $F(X_2/X_1)$ . Logo, concluímos a prova para  $n = 2$ .

Consideremos como hipótese de indução que, para todo objeto  $X \in \mathcal{C}$  de comprimento  $n$  com uma série de composição  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$ , os fatores de composição de  $F(X)$  sejam os fatores de composição de  $F(X_i/X_{i-1})$ , com  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Seja  $Y \in \mathcal{C}$  com uma série de composição  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_n \subseteq Y_{n+1} = Y$ . Então o objeto  $Y_n \in \mathcal{C}$  possui comprimento  $n$  e série de composição  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_n$ . Assim, por hipótese de indução, os fatores de composição de  $F(Y_n)$  são os fatores de composição de  $F(Y_i/Y_{i-1})$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Além disso, existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow Y_n \longrightarrow Y_{n+1} = Y \longrightarrow Y_{n+1}/Y_n \longrightarrow 0$$

e, por ser  $F$  exato, a sequência

$$0 \longrightarrow F(Y_n) \longrightarrow F(Y_{n+1}) = F(Y) \longrightarrow F(Y_{n+1}/Y_n) \longrightarrow 0$$

também é exata. Assim, pela Proposição 1.3.11, os fatores de composição de  $F(Y)$  são os de  $F(Y_n)$  e os de  $F(Y_{n+1}/Y_n)$ . Portanto, os fatores de composição de  $F(Y)$  são os fatores de composição de  $F(Y_i/Y_{i-1})$ , para  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ , concluindo a prova para  $n+1$ . ■

Sejam  $\{S_i : i \in I\}$  e  $\{S'_j : j \in J\}$  conjuntos de representantes das classes de isomorfismo de objetos simples em  $\mathcal{C}$  e em  $\mathcal{D}$ , respectivamente. A proposição acima nos diz que, para cada  $j \in J$ ,

$$[F(X) : S'_j] = \sum_{i \in I} [X : S_i][F(S_i) : S'_j].$$

**Lema 1.3.13 ([17], Ejercicio 2.8.20)** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Então  $\mathcal{C}$  é semissimples se, e somente se, para todo  $X \in \mathcal{C}$ , todo subobjeto  $Y$  de  $X$  possui um complemento direto, isto é, existe  $Y' \in \mathcal{C}$  tal que  $X = Y \oplus Y'$ .*

**Proposição 1.3.14** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria localmente finita semissimples. Então todo objeto em  $\mathcal{C}$  é uma soma direta de seus fatores de composição.*

**Demonstração:** Sejam  $X \in \mathcal{C}$  e  $n$  o comprimento de  $X$ . Mostremos por indução sobre  $n$ . O caso  $n = 1$  é óbvio, pois  $X$  seria simples. Suponhamos que  $n = 2$ . Seja  $0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 = X$  uma série de composição

para  $X$ . Assim,  $X/X_1$  é simples. Pelo lema anterior  $X_1$ , que é subobjeto de  $X$ , possui um complemento direto, isto é, existe  $X' \in \mathcal{C}$  tal que  $X = X_1 \oplus X'$ . Imediatamente temos a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X = X_1 \oplus X' \longrightarrow X' \longrightarrow 0.$$

Pela Proposição 1.1.20, segue que  $(X_1 \oplus X')/X_1 \cong X'$ , ou seja,  $X/X_1 \cong X'$ . Portanto,  $X = X_1 \oplus X' \cong X_1 \oplus (X/X_1)$ .

Consideremos como hipótese de indução que, para todo objeto  $X \in \mathcal{C}$  de comprimento  $n$  com uma série de composição  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$ ,  $X \cong \bigoplus_{i=1}^n (X_i/X_{i-1})$ .

Seja  $Y \in \mathcal{C}$  de comprimento  $n+1$  com série de composição  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y_n \subseteq Y_{n+1} = Y$ . O objeto  $Y_n$  tem comprimento  $n$  e série de composição  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y_n$ . Por hipótese de indução, temos que  $Y_n \cong \bigoplus_{i=1}^n (Y_i/Y_{i-1})$ . Além disso,  $Y_n$  é um subobjeto de  $Y$ . Pelo lema acima,  $Y_n$  tem um complemento direto, ou seja,  $Y_n \oplus Y' = Y = Y_{n+1}$ , para algum  $Y' \in \mathcal{C}$ . A sequência

$$0 \longrightarrow Y_n \longrightarrow Y = Y_n \oplus Y' \longrightarrow Y' \longrightarrow 0$$

é exata. Logo,  $Y' \cong (Y_n \oplus Y')/Y_n = Y_{n+1}/Y_n$ . Portanto,

$$Y = Y_n \oplus Y' \cong \bigoplus_{i=1}^n (Y_i/Y_{i-1}) \oplus (Y_{n+1}/Y_n) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} (Y_i/Y_{i-1}),$$

concluindo a prova. ■

**Corolário 1.3.15** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria localmente finita semissimples. Sejam  $X, S \in \mathcal{C}$ , em que  $S$  é um objeto simples. Então*

$$[X : S] = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X).$$

**Demonstração:** Pela proposição acima,  $X \cong \bigoplus_{i=1}^n (X_i/X_{i-1})$ . Assim,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, \bigoplus_{i=1}^n (X_i/X_{i-1})) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X_i/X_{i-1})$ .

Pela Proposição 1.3.10,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X_i/X_{i-1}) \cong \mathbb{k}$  se  $S \cong X_i/X_{i-1}$  e  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X_i/X_{i-1}) \cong 0$  se  $S \not\cong X_i/X_{i-1}$ . Logo,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X) \cong [X : S]\mathbb{k}.$$

■

**Corolário 1.3.16** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria localmente finita semissimples. Se  $N$  e  $N'$  são subobjetos simples de um objeto  $W$  tais que  $N \not\cong N'$ , então  $N \oplus N'$  é um subobjeto de  $W$ .*

**Demonstração:** Sendo  $N$  e  $N'$  subobjetos simples de  $W$ , pelo Teorema de Jordan-Hölder, as filtrações  $N \subseteq W$  e  $N' \subseteq W$  estendem-se a séries de composição de  $W$ . Pela hipótese,  $N$  e  $N'$  não são isomorfos e portanto, são fatores de composição de  $W$  não isomorfos entre si. Da proposição acima, segue que  $W$  é uma soma direta de seus fatores de composição. Logo,  $N \oplus N'$  é um subobjeto de  $W$ . ■

**Proposição 1.3.17** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria localmente finita semissimples. Então, para cada  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,*

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

**Demonstração:** Escrevemos  $X = \bigoplus_{i=1}^n S_i$  e  $Y = \bigoplus_{j=1}^m S'_j$ , em que  $S_i$  e  $S'_j$  são objetos simples em  $\mathcal{C}$ , para  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Então

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i=1}^n S_i, \bigoplus_{j=1}^m S'_j) \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S_i, S'_j).$$

Pela Proposição 1.3.10,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(S_i, S'_j) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S'_j, S_i)$ , para quaisquer  $i$  e  $j$ . Logo,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^m \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S'_j, S_i) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

■

## 1.4 Equivariantização de categorias abelianas $\mathbb{k}$ -lineares

Para a definição de ação de um grupo  $G$  em uma categoria  $\mathcal{C}$ , não é necessário que tal grupo seja finito, mas pediremos que  $G$  seja finito para o que vamos desenvolver neste trabalho. Esta seção é desenvolvida com base nas referências [17] e [18]. Denotamos por  $1$  o elemento neutro de  $G$ .

**Definição 1.4.1** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear. Uma ação de  $G$  em  $\mathcal{C}$  é uma coleção de funtores aditivos  $\mathbb{k}$ -lineares  $\{F_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}\}_{g \in G}$  munida de isomorfismos naturais*

$$\gamma_{g,h} : F_g F_h \rightarrow F_{gh} \text{ e } \gamma_0 : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow F_1$$

tais que, para quaisquer  $f, g, h \in G$  e  $X \in \mathcal{C}$ , valem as igualdades

$$(\gamma_{gh,f})_X (\gamma_{g,h})_{F_f(X)} = (\gamma_{g,hf})_X F_g((\gamma_{h,f})_X) \quad (1.4)$$

$$(\gamma_{g,1})_X F_g((\gamma_0)_X) = (\gamma_{1,g})_X (\gamma_0)_{F_g(X)}, \quad (1.5)$$

ou seja, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccc} (F_g F_h F_f)(X) & \xrightarrow{F_g((\gamma_{h,f})_X)} & (F_g F_{hf})(X) \\ (\gamma_{g,h})_{F_f(X)} \downarrow & & \downarrow (\gamma_{g,hf})_X \\ (F_{gh} F_f)(X) & \xrightarrow{(\gamma_{gh,f})_X} & F_{ghf}(X) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F_g(X) & \xrightarrow{(\gamma_0)_{F_g(X)}} & (F_1 F_g)(X) \\ F_g((\gamma_0)_X) \downarrow & & \downarrow (\gamma_{1,g})_X \\ (F_g F_1)(X) & \xrightarrow{(\gamma_{g,1})_X} & F_g(X). \end{array}$$

Intuitivamente, o primeiro diagrama nos diz que essa ação é “associativa nos funtores” e o segundo diagrama nos diz que  $F_1$  é como uma espécie de “unidade”.

**Lema 1.4.2 ([18], Lema 4.2)** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear tal que  $G$  age em  $\mathcal{C}$ . Para cada  $g \in G$ , o funtor  $F_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é uma equivalência de categorias.*



**Definição 1.4.3** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear tal que  $G$  age em  $\mathcal{C}$ . Um objeto  $X \in \mathcal{C}$  é dito equivariante, se existe uma família  $s = \{s_g : F_g(X) \rightarrow X\}_{g \in G}$  de isomorfismos em  $\mathcal{C}$  tais que  $s_1(\gamma_0)_X = I_X$  e*

$$s_g F_g(s_h) = s_{gh}(\gamma_{g,h})_X, \quad (1.6)$$

isto é, os seguintes diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{(\gamma_0)_X} F_1(X) & & (F_g F_h)(X) \xrightarrow{F_g(s_h)} F_g(X) \\ & \searrow I_X \downarrow s_1 & \downarrow (\gamma_{g,h})_X \downarrow s_g \\ & X & F_{gh}(X) \xrightarrow{s_{gh}} X, \end{array}$$

para quaisquer  $g, h \in G$ .

**Observação 1.4.4** Sem perda de generalidade, como em [2], assumimos que  $F_1 = Id_{\mathcal{C}}$  e que  $\gamma_{1,g}$ ,  $\gamma_{g,1}$  e  $\gamma_0$  são transformações naturais identidade entre os funtores convenientes. Como consequência dessa hipótese temos que  $s_1 = I_X$ , para todo objeto equivariante  $(X, s)$  e que

$$(\gamma_{g,g^{-1}})_{F_g(X)} = F_g((\gamma_{g^{-1},g})_X), \quad (1.7)$$

para quaisquer  $g \in G$  e  $X \in \mathcal{C}$ . O segundo fato segue da igualdade (2.6) para os elementos  $g, g^{-1}, g \in G$ .

**Proposição 1.4.5** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear tal que  $G$  age em  $\mathcal{C}$ . Então*

$$Hom_{\mathcal{C}}(F_g(X), F_g(Y)) \cong Hom_{\mathcal{C}}(X, Y),$$

para todo  $g \in G$ .

**Demonstração:** Seja  $g \in G$ . Definimos

$$\varphi : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathcal{C}}(F_g(X), F_g(Y))$$

por  $\varphi(f) = F_g(f)$ , para todo  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ . Claramente  $\varphi$  é  $\mathbb{k}$ -linear, pois o functor  $F_g$  o é. Mostremos que  $\varphi$  é injetiva. Sejam  $f, h \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tais que  $F_g(f) = F_g(h)$ . Então  $F_{g^{-1}}(F_g(f)) = F_{g^{-1}}(F_g(h))$ . Pela naturalidade de  $\gamma_{g^{-1},g}$ , os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{(\gamma_{g^{-1},g})_X} F_{g^{-1}}(F_g(X)) \xrightarrow{(\gamma_{g^{-1},g})_X} & X \\ h \downarrow & F_{g^{-1}}(F_g(h)) \downarrow F_{g^{-1}}(F_g(f)) & \downarrow f \\ Y & \xleftarrow{(\gamma_{g^{-1},g})_Y} F_{g^{-1}}(F_g(Y)) \xrightarrow{(\gamma_{g^{-1},g})_Y} & Y. \end{array}$$

Logo,

$$f = (\gamma_{g^{-1},g})_Y F_{g^{-1}}(F_g(f))(\gamma_{g^{-1},g})_X^{-1} = h.$$

Mostremos que  $\varphi$  é sobrejetiva. Seja  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F_g(X), F_g(Y))$ .

Consideremos  $f = (\gamma_{g^{-1},g})_Y F_{g^{-1}}(h)(\gamma_{g^{-1},g})_X^{-1}$ , vemos que  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .  
Então

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= F_g(f) = F_g((\gamma_{g^{-1},g})_Y F_{g^{-1}}(h) F_g((\gamma_{g^{-1},g})_X^{-1})) \\ &\stackrel{(1.7)}{=} (\gamma_{g,g^{-1}})_{F_g(Y)} F_g F_{g^{-1}}(h) (\gamma_{g,g^{-1}})_{F_g(X)}^{-1} \\ &\stackrel{(*)}{=} h, \end{aligned}$$

em que a igualdade  $(*)$  segue da naturalidade de  $\gamma_{g,g^{-1}}$ , ou seja, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} F_g(F_{g^{-1}}(F_g(X))) & \xrightarrow{(\gamma_{g,g^{-1}})_{F_g(X)}} & F_g(X) \\ \downarrow F_g(F_{g^{-1}}(h)) & & \downarrow h \\ F_g(F_{g^{-1}}(F_g(Y))) & \xrightarrow{(\gamma_{g,g^{-1}})_{F_g(Y)}} & F_g(Y). \end{array}$$

■

**Definição 1.4.6** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear tal que  $G$  age em  $\mathcal{C}$ . A categoria  $\mathcal{C}^G$ , chamada equivariantização de  $\mathcal{C}$  por  $G$ , é a categoria cujos objetos são os pares  $(X, s)$ , em que  $X$  é um objeto equivariante de  $\mathcal{C}$  e  $s$  a família de isomorfismos associada.*

*Dados  $(X, s), (Y, r) \in \mathcal{C}^G$ , um morfismo  $f : (X, s) \rightarrow (Y, r)$  em  $\mathcal{C}^G$  (ou um morfismo equivariante) é um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathcal{C}$  tal que*

$$f s_g = r_g F_g(f), \quad (1.8)$$

ou seja, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} F_g(X) & \xrightarrow{F_g(f)} & F_g(Y) \\ s_g \downarrow & & \downarrow r_g \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

para todo  $g \in G$ .

**Exemplo 1.4.7 ([7], Example 4.15.2)** Sejam  $\text{vect}_{\mathbb{k}}$  a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita sobre  $\mathbb{k}$ ,  $G$  um grupo finito e

$Rep(G)$  a categoria das representações de dimensão finita de  $G$ . Considerando a ação trivial de  $G$  em  $vect_{\mathbb{k}}$ , temos que  $vect_{\mathbb{k}}^G$  e  $Rep(G)$  são categorias equivalentes. De fato,  $(V, u)$  é um objeto equivariante, se e somente se, existem isomorfismos  $u_g : V \rightarrow V$  tais que  $u_g u_h = u_{gh}$ , para quaisquer  $g, h \in G$ , e isto é equivalente à  $u : G \rightarrow End(V)$  dada por  $u(g) = u_g$  ser uma representação de  $G$ .

**Proposição 1.4.8 ([18], Teorema 4.7)** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear tal que  $G$  age em  $\mathcal{C}$ . Então a categoria  $\mathcal{C}^G$  é abeliana  $\mathbb{k}$ -linear.*

Para cada  $j \in G$  e cada  $X \in \mathcal{C}$ , denotamos por  $\iota_j^X : F_j(X) \rightarrow \bigoplus_{g \in G} F_g(X)$  e  $\pi_j^X : \bigoplus_{g \in G} F_g(X) \rightarrow F_j(X)$  as inclusões e projeções da soma direta, respectivamente.

Definimos o funtor  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^G$  por

$$L(X) = (\bigoplus_{h \in G} F_h(X), s^X),$$

em que  $s_g^X : F_g(\bigoplus_{h \in G} F_h(X)) \rightarrow \bigoplus_{h \in G} F_h(X)$  é dada por

$$s_g^X = \sum_{j \in G} \iota_{gj}^X (\gamma_{g,j})_X F_g(\pi_j^X).$$

Seja  $X \in \mathcal{C}$ . Mostremos que  $L(X) \in \mathcal{C}^G$ . Primeiramente, não é difícil ver que

$$(s_g^X)^{-1} = \sum_{l \in G} F_g(\iota_l^X) (\gamma_{g,l})_X^{-1} \pi_{gl}^X$$

é inverso de  $s_g^X$ , para todo  $g \in G$ .

Sejam  $g, h \in G$ . Temos que

$$\begin{aligned} s_g^X F_g(s_h^X) &= \left( \sum_{j \in G} \iota_{gj}^X (\gamma_{g,j})_X F_g(\pi_j^X) \right) F_g \left( \sum_{l \in G} \iota_{hl}^X (\gamma_{h,l})_X F_h(\pi_l^X) \right) \\ &= \sum_{l \in G} \iota_{ghl}^X (\gamma_{g,hl})_X F_g((\gamma_{h,l})_X) F_g(F_h(\pi_l^X)) \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \sum_{l \in G} \iota_{ghl}^X (\gamma_{gh,l})_X (\gamma_{g,h})_{F_l(X)} F_g(F_h(\pi_l^X)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{l \in G} \iota_{ghl}^X (\gamma_{gh,l})_X F_{gh}(\pi_l^X) (\gamma_{g,h})_{\bigoplus_{l \in G} F_l(X)} \\ &= s_{gh}^X (\gamma_{g,h})_{\bigoplus_{l \in G} F_l(X)}, \end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue da naturalidade de  $\gamma_{g,h}$ . Logo, vale a igualdade (1.6), isto é,  $L(X)$  é um objeto equivariante.

**Proposição 1.4.9 ([17], Proposition 2.10.2)** *O funtor  $L$  definido acima é um adjunto à direita e à esquerda do funtor esquecimento  $F : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$ . Em particular,  $F$  é exato.*

**Proposição 1.4.10 ([17], Proposition 2.10.2)** *Se  $\mathcal{C}$  é uma categoria abeliana finita então  $\mathcal{C}^G$  é uma categoria abeliana finita.*

## Capítulo 2

# Categorias tensoriais

Neste capítulo escrevemos as definições e resultados acerca de categorias tensoriais e suas equivariantizações que são bastante utilizados nos capítulos posteriores. As referências básicas para este capítulo são [6], [7] e [17].

### 2.1 Noções Básicas

Iniciamos definindo categorias monoidais e inserimos as demais propriedades ao longo do capítulo.

**Definição 2.1.1** *Uma categoria monoidal é uma coleção  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$  em que  $\mathcal{C}$  é uma categoria,  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é um funtor, chamado produto tensorial,  $\mathbf{1}$  é um objeto em  $\mathcal{C}$ , chamado objeto unidade,  $a, l$  e  $r$  são isomorfismos naturais entre os funtores  $((- \otimes -) \otimes -)$  e  $(- \otimes (- \otimes -))$ ,  $\mathbf{1} \otimes -$  e  $Id_{\mathcal{C}}$ ,  $- \otimes \mathbf{1}$  e  $Id_{\mathcal{C}}$ , respectivamente e são tais que, para quaisquer objetos  $U, V, W, X$  em  $\mathcal{C}$ , os diagramas*

$$\begin{array}{ccc}
 & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X & \\
 & \swarrow a_{U,V,W \otimes I_X} & \searrow a_{U \otimes V,W,X} \\
 (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X & & (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \\
 \downarrow a_{U,V \otimes W,X} & & \downarrow a_{U,V,W \otimes X} \\
 U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) & \xrightarrow{I_U \otimes a_{V,W,X}} & U \otimes (V \otimes (W \otimes X))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(U \otimes \mathbf{1}) \otimes V & \xrightarrow{a_{U, \mathbf{1}, V}} & U \otimes (\mathbf{1} \otimes V) \\
& \searrow r_U \otimes I_V & \swarrow I_U \otimes l_V \\
& & U \otimes V
\end{array}$$

são comutativos.

Na definição acima, a comutatividade do primeiro diagrama é conhecida como *axioma do pentágono* e a comutatividade do segundo diagrama, como *axioma do triângulo*. Esses axiomas expressam, essencialmente, que o produto tensorial de um número finito de objetos está bem definido, independentemente da posição dos parênteses e que  $\mathbf{1}$  é uma unidade para o produto tensorial.

**Exemplo 2.1.2** Sejam  $G$  um grupo e  $A$  um grupo abeliano. A categoria  $Cat(G)$ , cujos objetos são indexados pelos elementos do grupo  $G$ , ou seja,  $\delta_g$  e os morfismos são  $Hom(\delta_g, \delta_g) = 1_A$  e  $Hom(\delta_g, \delta_h) = \emptyset$  se  $g \neq h$ , é uma categoria monoidal com produto tensorial dado pelo produto de  $G$ .

**Definição 2.1.3** Seja  $V$  um objeto em uma categoria monoidal  $\mathcal{C}$ . Um dual à direita de  $V$  é uma tripla  $(V^*, e_V, b_V)$ , em que  $V^*$  é um objeto em  $\mathcal{C}$ ,  $e_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbf{1}$  e  $b_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$  são morfismos em  $\mathcal{C}$  tais que as composições

$$\begin{array}{ccccccc}
V & \xrightarrow{l_V^{-1}} & \mathbf{1} \otimes V & \xrightarrow{b_V \otimes I_V} & (V \otimes V^*) \otimes V & \xrightarrow{a_{V, V^*, V}} & V \otimes (V^* \otimes V) & \xrightarrow{I_V \otimes e_V} & V \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{r_V} & V \\
V^* & \xrightarrow{r_{V^*}^{-1}} & V^* \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{I_{V^*} \otimes b_V} & V^* \otimes (V \otimes V^*) & \xrightarrow{a_{V^*, V, V^*}^{-1}} & (V^* \otimes V) \otimes V^* & \xrightarrow{e_V \otimes I_{V^*}} & \mathbf{1} \otimes V^* & \xrightarrow{l_{V^*}} & V^*
\end{array}$$

são  $I_V$  e  $I_{V^*}$ , respectivamente.

Um dual à esquerda de  $V$  é uma tripla  $({}^*V, e'_V, b'_V)$ , em que  ${}^*V$  é um objeto em  $\mathcal{C}$ ,  $e'_V : V \otimes {}^*V \rightarrow \mathbf{1}$  e  $b'_V : \mathbf{1} \rightarrow {}^*V \otimes V$  são morfismos em  $\mathcal{C}$  tais que as composições

$$\begin{array}{ccccccc}
V & \xrightarrow{r_V^{-1}} & V \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{I_V \otimes b'_V} & V \otimes ({}^*V \otimes V) & \xrightarrow{a_{V, {}^*V, V}^{-1}} & (V \otimes {}^*V) \otimes V & \xrightarrow{e'_V \otimes I_V} & \mathbf{1} \otimes V & \xrightarrow{l_V} & V \\
{}^*V & \xrightarrow{l_{{}^*V}^{-1}} & \mathbf{1} \otimes {}^*V & \xrightarrow{b'_V \otimes I_{{}^*V}} & ({}^*V \otimes V) \otimes {}^*V & \xrightarrow{a_{{}^*V, V, {}^*V}} & {}^*V \otimes (V \otimes {}^*V) & \xrightarrow{I_{{}^*V} \otimes e'_V} & {}^*V \otimes \mathbf{1} & \xrightarrow{r_{{}^*V}} & {}^*V
\end{array}$$

são  $I_V$  e  $I_{{}^*V}$ , respectivamente.

**Definição 2.1.4** Uma categoria monoidal  $\mathcal{C}$  é dita

- (1) *rígida* se todo objeto em  $\mathcal{C}$  possui um dual à esquerda e um dual à direita.

(2) *tensorial se é localmente finita, rígida, tal que todos os funtores e transformações naturais envolvidos são aditivos e  $\mathbb{k}$ -lineares e o objeto unidade é simples.*

(3) *categoria de fusão se é uma categoria tensorial finita semissimples.*

**Exemplo 2.1.5 ([7], Example 4.1.2)** A categoria  $\text{vect}_{\mathbb{k}}$  é uma categoria de fusão.

**Exemplo 2.1.6 ([7], Example 4.1.2)** Seja  $G$  um grupo finito. Então  $\text{Rep}(G)$  é uma categoria de fusão. Para este fato a hipótese de  $\mathbb{k}$  ter característica zero é necessária.

**Exemplo 2.1.7 ([6], Example 2.8)** Seja  $H$  uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita. Então a categoria das representações de dimensão finita de  $H$ , denotada por  $\text{Rep}(H)$ , é uma categoria de fusão.

**Definição 2.1.8** *Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  categorias monoidais. Um funtor monoidal de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{D}$  é uma tripla  $(F, \xi, \phi)$ , em que  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é um funtor,  $\xi : F(-) \otimes F(-) \rightarrow F(- \otimes -)$  é um isomorfismo natural e  $\phi : \mathbf{1} \rightarrow F(\mathbf{1})$  é um isomorfismo tais que*

$$\xi_{X, Y \otimes Z}(I_{F(X)} \otimes \xi_{Y, Z})a_{F(X), F(Y), F(Z)} = F(a_{X, Y, Z})\xi_{X \otimes Y, Z}(\xi_{X, Y} \otimes I_{F(Z)}), \quad (2.1)$$

$$l_{F(X)} = F(l_X)\xi_{\mathbf{1}, X}(\phi \otimes I_{F(X)}) \text{ e} \quad (2.2)$$

$$r_{F(X)} = F(r_X)\xi_{X, \mathbf{1}}(I_{F(X)} \otimes \phi), \quad (2.3)$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ .

**Definição 2.1.9** *Sejam  $(F, \xi, \phi), (F', \xi', \phi') : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  funtores monoidais. Uma transformação natural monoidal  $\theta : (F, \xi, \phi) \rightarrow (F', \xi', \phi')$  é uma transformação natural  $\theta : F \rightarrow F'$  tal que para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$*

$$\theta_{\mathbf{1}}\phi = \phi' \text{ e } \theta_{X \otimes Y}\xi_{X, Y} = \xi'_{X, Y}(\theta_X \otimes \theta_Y). \quad (2.4)$$

*Um isomorfismo natural monoidal é uma transformação natural monoidal que é um isomorfismo natural.*

**Definição 2.1.10** *Sejam  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  e  $\mathcal{E}$  categorias monoidais e  $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $(F', \xi', \phi') : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  funtores monoidais. A composição destes funtores é um funtor monoidal  $(F'F, \eta, \psi)$ , em que  $\eta_{X, Y} : F'F(X) \otimes F'F(Y) \rightarrow F'F(X \otimes Y)$  e  $\psi : \mathbf{1} \rightarrow F'F(\mathbf{1})$  são dadas, respectivamente, por*

$$\eta_{X, Y} = F'(\xi_{X, Y})\xi'_{F(X), F(Y)} \text{ e } \psi = F'(\phi)\phi' \quad (2.5)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ .

**Definição 2.1.11** *Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  categorias tensoriais. Um funtor tensorial é um funtor monoidal  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  aditivo  $\mathbb{k}$ -linear*

**Proposição 2.1.12 ([7], Proposition 4.2.1)** *Se  $\mathcal{C}$  é uma categoria tensorial então o funtor  $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é biexato, isto é, exato em cada variável.*

## 2.2 Equivariantização de categorias tensoriais finitas

Sejam  $G$  um grupo finito,  $g, h \in G$  e  $(F_g, \xi_g, \phi_g), (F_h, \xi_h, \phi_h) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores tensoriais. Pela Definição 2.1.10,  $(F_g F_h, \xi, \phi)$  é um funtor tensorial, em que

$$\xi_{X,Y} = F_g((\xi_h)_{X,Y})(\xi_g)_{F_h(X),F_h(Y)} \text{ e } \phi = F_g(\phi_h)\phi_g,$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ .

**Definição 2.2.1** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria tensorial finita e  $G$  um grupo finito. Uma ação de  $G$  em  $\mathcal{C}$  é uma coleção de autoequivalências tensoriais  $(F_g, \xi_g, \phi_g) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  e isomorfismos naturais monoidais  $\gamma_{g,h} : (F_g F_h, \xi, \phi) \rightarrow (F_{gh}, \xi_{gh}, \phi_{gh})$ , para quaisquer  $g, h \in G$ , que satisfazem as igualdades*

$$(\gamma_{gh,f})_X(\gamma_{g,h})_{F_f(X)} = (\gamma_{g,hf})_X F_g((\gamma_{h,f})_X) \quad (2.6)$$

e

$$(\gamma_{g,1})_X F_g((\gamma_0)_X) = (\gamma_{1,g})_X(\gamma_0)_{F_g(X)}. \quad (2.7)$$

No contexto de categorias tensoriais finitas  $\mathcal{C}$ , a equivariantização  $\mathcal{C}^G$  é definida de forma análoga ao caso em que  $\mathcal{C}$  é abeliana  $\mathbb{k}$ -linear.

A definição acima é equivalente à existência de um funtor monoidal  $F : \text{Cat}(G) \rightarrow \text{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$ , em que  $A$  é o grupo trivial e  $\text{Aut}_{\otimes}(\mathcal{C})$  é a categoria das autoequivalências tensoriais de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}$ . Desta definição equivalente vem a analogia com a teoria de anéis, já que uma ação de um grupo  $G$  em um anel  $S$  é exatamente um morfismo de grupos  $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(S)$ . Neste caso, o anel dos invariantes é dado por

$$S^G = \{s \in S : \phi_g(s) = s, \forall g \in G\}.$$

Tendo em mente as observações acima, fica claro porque dizemos que a equivariantização pode ser pensada como uma categorificação da noção de anel dos invariantes por uma ação de um grupo de  $G$ .



Sem perda de generalidade, como já estamos assumindo que  $F_1 = Id_{\mathcal{C}}$ , assumiremos também que  $\xi_1$  e  $\phi_1$  sejam triviais.

Observemos que, pela igualdade (2.4), o fato de  $\gamma_{g,h}$  ser um isomorfismo natural monoidal implica que

$$(\gamma_{g,h})_{\mathbf{1}} F_g(\phi_h) \phi_g = \phi_{gh} \quad (2.8)$$

e

$$(\gamma_{g,h})_{X \otimes Y} F_g((\xi_h)_{X,Y})(\xi_g)_{F_h(X), F_h(Y)} = (\xi_{gh})_{X,Y} ((\gamma_{g,h})_X \otimes (\gamma_{g,h})_Y). \quad (2.9)$$

**Teorema 2.2.2 ([17], Teorema 3.7.1)** *A equivariantização  $\mathcal{C}^G$  de uma categoria tensorial finita  $\mathcal{C}$  é uma categoria tensorial finita, com produto tensorial dado por*

$$(X, s) \otimes (Y, r) = (X \otimes Y, t),$$

em que  $t_g = (s_g \otimes r_g)(\xi_g)_{X,Y}^{-1}$  e unidade  $(\mathbf{1}, \phi_g^{-1})$ .

**Proposição 2.2.3** *O funtor esquecimento  $F : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$  é um funtor tensorial.*

**Demonstração:** É claro que o funtor esquecimento é aditivo e  $\mathbb{k}$ -linear. Para que seja monoidal, basta definirmos, para cada  $(X, s), (Y, r) \in \mathcal{C}^G$ ,  $\xi_{(X,s),(Y,r)} : F(X, s) \otimes F(Y, r) = X \otimes Y \rightarrow F((X, s) \otimes (Y, r)) = X \otimes Y$  por  $\xi_{(X,s),(Y,r)} = I_{X \otimes Y}$  e  $\phi = I_{\mathbf{1}}$ . ■

**Proposição 2.2.4 ([6], Theorem 4.18-(iii))** *Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana. Então  $\mathcal{C}$  é uma categoria de fusão se, e somente se,  $\mathcal{C}^G$  é uma categoria de fusão.*



# Capítulo 3

## Categorias módulo

Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria monoidal. É possível definir categorias módulo  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{C}$ , pedindo apenas que  $\mathcal{M}$  seja uma categoria, sem hipóteses adicionais (veja [7], Seção 7.1). No entanto, para que nosso objetivo no restante do trabalho seja atingido, consideraremos  $\mathcal{C}$  uma categoria tensorial finita e apenas categorias módulo  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{C}$  que sejam localmente finitas, semissimples e possuam uma quantidade finita de classes de isomorfismo de objetos simples. Este capítulo é apoiado principalmente em [11].

### 3.1 Noções básicas

Fixemos  $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$  uma categoria tensorial finita. Nesta seção todos os funtores são considerados aditivos e  $\mathbb{k}$ -lineares.

**Definição 3.1.1** *Um  $\mathcal{C}$ -módulo à esquerda ou uma categoria módulo à esquerda sobre  $\mathcal{C}$  é uma coleção  $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ , em que  $\mathcal{M}$  é uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear,  $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é um funtor bixato,  $m : ((- \otimes -) \overline{\otimes} -) \rightarrow (- \overline{\otimes} (- \overline{\otimes} -))$  e  $l : \mathbf{1} \overline{\otimes} - \rightarrow Id_{\mathcal{M}}$  são isomorfismos naturais tais que*

$$m_{X,Y,Z} \overline{\otimes} m_{X \otimes Y, Z, M} = (I_X \overline{\otimes} m_{Y,Z,M}) m_{X,Y \otimes Z, M} (a_{X,Y,Z} \overline{\otimes} I_M) \quad (3.1)$$

e

$$(I_X \overline{\otimes} l_M) m_{X, \mathbf{1}, M} = r_X \overline{\otimes} I_M \quad (3.2)$$

para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ , isto é, os diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \overline{\otimes} M & \\
 a_{X,Y,Z} \overline{\otimes} I_M \swarrow & & \searrow m_{X \otimes Y, Z, M} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \overline{\otimes} M & & (X \otimes Y) \overline{\otimes} (Z \overline{\otimes} M) \\
 m_{X,Y \otimes Z, M} \downarrow & & \downarrow m_{X,Y,Z} \overline{\otimes} M \\
 X \overline{\otimes} ((Y \otimes Z) \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{(I_X \overline{\otimes} m_{Y,Z,M})} & X \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} (Z \overline{\otimes} M))
 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes \mathbf{1}) \overline{\otimes} M & \xrightarrow{m_{X,\mathbf{1},M}} & X \overline{\otimes} (\mathbf{1} \overline{\otimes} M) \\
 & \searrow r_X \overline{\otimes} I_M & \swarrow (I_X \overline{\otimes} l_M) \\
 & X \overline{\otimes} M &
 \end{array}$$

comutam.

De maneira análoga, define-se  $\mathcal{C}$ -módulos à direita. Ao longo do trabalho consideramos  $\mathcal{C}$ -módulos à esquerda e, dessa forma, a lateralidade é omitida no texto.

**Exemplo 3.1.2** Toda categoria tensorial finita  $\mathcal{C}$  é uma categoria módulo sobre si mesma, com  $m = a$ .

**Exemplo 3.1.3** Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear finita. Então  $\mathcal{C}$  é uma categoria módulo sobre  $\text{vect}_{\mathbb{k}}$ . Para detalhes sobre este exemplo, veja Seção 3.3.

**Definição 3.1.4** *Sejam  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  dois  $\mathcal{C}$ -módulos. Um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos é um par  $(F, c)$ , em que  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é um funtor e  $c : F(- \overline{\otimes} -) \rightarrow - \overline{\otimes} F(-)$  é um isomorfismo natural tais que*

$$m_{X,Y,F(M)} c_{X \otimes Y, M} = (I_X \overline{\otimes} c_{Y,M}) c_{X,Y \overline{\otimes} M} F(m_{X,Y,M}) \quad (3.3)$$

e

$$l_{F(M)} c_{\mathbf{1}, M} = F(l_M), \quad (3.4)$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ .

Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$  e  $g : M \rightarrow N$  um morfismo em  $\mathcal{M}$ . O fato de  $c$  da definição acima ser um isomorfismo natural implica

na comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{c_{X,M}} & X \overline{\otimes} F(M) \\ F(f \overline{\otimes} g) \downarrow & & \downarrow f \overline{\otimes} F(g) \\ F(Y \overline{\otimes} N) & \xrightarrow{c_{Y,N}} & Y \overline{\otimes} F(N). \end{array}$$

As igualdades (3.3) e (3.4) podem ser expressas via os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccc} & & (X \otimes Y) \overline{\otimes} F(M) & & \\ & \nearrow c_{X \otimes Y, M} & & \searrow m_{X, Y, F(M)} & \\ F((X \otimes Y) \overline{\otimes} M) & & & & X \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} F(M)) \\ \downarrow F(m_{X, Y, M}) & & & & \uparrow I_X \overline{\otimes} c_{Y, M} \\ F(X \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} M)) & \xrightarrow{c_{X, Y \overline{\otimes} M}} & & \xrightarrow{} & X \overline{\otimes} (F(Y \overline{\otimes} M)) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{1} \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{c_{\mathbf{1}, M}} & \mathbf{1} \overline{\otimes} F(M) \\ & \searrow F(l_M) & \swarrow l_{F(M)} \\ & & F(M). \end{array}$$

**Exemplo 3.1.5** O functor identidade  $(Id_{\mathcal{M}}, c) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  é um functor de  $\mathcal{C}$ -módulos, em que  $c_{X, M} = I_X \overline{\otimes} c_M$ , para todo  $X \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ .

**Definição 3.1.6** Sejam  $(F, c), (G, d) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  funtores de  $\mathcal{C}$ -módulos. Uma transformação natural de  $\mathcal{C}$ -módulos é uma transformação natural  $\theta : F \rightarrow G$  que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{\theta_{X \overline{\otimes} M}} & G(X \overline{\otimes} M) \\ c_{X, M} \downarrow & & \downarrow d_{X, M} \\ X \overline{\otimes} F(M) & \xrightarrow{I_X \overline{\otimes} \theta_M} & X \overline{\otimes} G(M), \end{array} \quad (3.5)$$

para quaisquer  $X \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ , ou seja,

$$d_{X, M} \theta_{X \overline{\otimes} M} = (I_X \overline{\otimes} \theta_M) c_{X, M}. \quad (3.6)$$

**Definição 3.1.7** *Sejam  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  dois  $\mathcal{C}$ -módulos. Um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é uma equivalência de  $\mathcal{C}$ -módulos se existem um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos  $G : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  e isomorfismos naturais de  $\mathcal{C}$ -módulos  $\theta : Id_{\mathcal{M}} \rightarrow GF$  e  $\eta : Id_{\mathcal{N}} \rightarrow FG$ .*

**Lema 3.1.8** *Se  $(F, c) : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  e  $(G, d) : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3$  são funtores de  $\mathcal{C}$ -módulos, então  $(GF, b) : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_3$  é um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos, em que  $b_{X,M} = d_{X,F(M)}G(c_{X,M})$ .*

**Demonstração:** Sejam  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$  e  $g : M \rightarrow N$  um morfismo em  $\mathcal{M}$ . Mostremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} GF(X \otimes M) & \xrightarrow{b_{X,M}} & X \otimes GF(M) \\ GF(f \otimes g) \downarrow & & \downarrow f \otimes GF(g) \\ GF(Y \otimes N) & \xrightarrow{b_{Y,N}} & Y \otimes GF(N) \end{array}$$

comuta. Temos

$$\begin{aligned} (f \otimes GF(g))b_{X,M} &= (f \otimes GF(g))d_{X,F(M)}G(c_{X,M}) \\ &\stackrel{(*)}{=} d_{Y,F(N)}G(f \otimes F(g))G(c_{X,M}) \\ &= d_{Y,F(N)}G((f \otimes F(g))c_{X,M}) \\ &\stackrel{(**)}{=} d_{Y,F(N)}G(c_{Y,N}F(f \otimes g)) \\ &= d_{Y,F(N)}G(c_{Y,N})GF(f \otimes g) \\ &= b_{Y,N}GF(f \otimes g), \end{aligned}$$

em que a igualdade  $(*)$  segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(X \otimes F(M)) & \xrightarrow{d_{X,F(M)}} & X \otimes G(F(M)) \\ G(f \otimes F(g)) \downarrow & & \downarrow f \otimes G(F(g)) \\ G(Y \otimes F(N)) & \xrightarrow{d_{Y,F(N)}} & Y \otimes G(F(N)), \end{array}$$

devido à naturalidade de  $d$ . A igualdade  $(**)$  segue da naturalidade de  $c$ . Portanto,  $b$  é uma transformação natural.

É claro que  $b_{X,M}$  é isomorfismo para todo  $X \in \mathcal{C}$  e todo  $M \in \mathcal{M}$ , pois é composição de isomorfismos.

Mostremos que  $(GF, b)$  satisfaz a igualdade (3.3). Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ . Então

$$\begin{aligned}
m_{X,Y,GF(M)}b_{X \otimes Y, M} &= m_{X,Y,G(F(M))}d_{X \otimes Y, F(M)}G(c_{X \otimes Y, M}) \\
&\stackrel{(3.3)}{=} (I_X \bar{\otimes} d_{Y, F(M)})d_{X, Y \bar{\otimes} F(M)}G(m_{X,Y, F(M)})G(c_{X \otimes Y, M}) \\
&= (I_X \bar{\otimes} d_{Y, F(M)})d_{X, Y \bar{\otimes} F(M)}G(m_{X,Y, F(M)}c_{X \otimes Y, M}) \\
&\stackrel{(3.3)}{=} (I_X \bar{\otimes} d_{Y, F(M)})d_{X, Y \bar{\otimes} F(M)}G((I_X \bar{\otimes} c_{Y, M})c_{X, Y \bar{\otimes} M}F(m_{X,Y, M})) \\
&= (I_X \bar{\otimes} d_{Y, F(M)})d_{X, Y \bar{\otimes} F(M)}G(I_X \bar{\otimes} c_{Y, M})G(c_{X, Y \bar{\otimes} M})GF(m_{X,Y, M}) \\
&\stackrel{(\star)}{=} (I_X \bar{\otimes} d_{Y, F(M)})(I_X \bar{\otimes} G(c_{Y, M}))d_{X, F(Y \bar{\otimes} M)}G(c_{X, Y \bar{\otimes} M})GF(m_{X,Y, M}) \\
&= (I_X \bar{\otimes} d_{Y, F(M)}G(c_{Y, M}))b_{X, Y \bar{\otimes} M}GF(m_{X,Y, M}) \\
&= (I_X \bar{\otimes} b_{Y, M})b_{X, Y \bar{\otimes} M}GF(m_{X,Y, M}),
\end{aligned}$$

em que a igualdade (3.3) foi usada para os funtores  $(G, d)$  e  $(F, c)$ , respectivamente, e a igualdade  $(\star)$  segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
G(X \bar{\otimes} F(Y \bar{\otimes} M)) & \xrightarrow{d_{X, F(Y \bar{\otimes} M)}} & X \bar{\otimes} G(F(Y \bar{\otimes} M)) \\
\downarrow G(I_X \bar{\otimes} c_{Y, M}) & & \downarrow I_X \bar{\otimes} G(c_{Y, M}) \\
G(X \bar{\otimes} (Y \bar{\otimes} F(M))) & \xrightarrow{d_{X, Y \bar{\otimes} F(M)}} & X \bar{\otimes} G(Y \bar{\otimes} F(M)),
\end{array}$$

devido à naturalidade de  $d$ .

Finalmente, mostremos que  $(GF, b)$  satisfaz (3.4). Temos

$$\begin{aligned}
l_{GF(M)}b_{\mathbf{1}, M} &= l_{G(F(M))}d_{\mathbf{1}, F(M)}G(c_{\mathbf{1}, M}) \\
&\stackrel{(3.4)}{=} G(l_{F(M)})G(c_{\mathbf{1}, M}) \\
&= G(l_{F(M)}c_{\mathbf{1}, M}) \\
&\stackrel{(3.4)}{=} G(F(l_M)) = GF(l_M).
\end{aligned}$$

■

A proposição seguinte é crucial para a definição de equivariantização de categorias módulo, pois para tal definição é necessária uma nova ação em uma dada categoria módulo  $\mathcal{M}$ . Tal ação é definida através de funtores tensoriais exatos específicos que apresentamos na próxima seção.

**Proposição 3.1.9** *Se  $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é um funtor tensorial exato e  $(\mathcal{M}, \bar{\otimes}, m, l)$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{D}$ , então  $(\mathcal{M}, \bar{\otimes}^F, m^F, l^F)$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ , em que*

$$\begin{aligned}
X \bar{\otimes}^F M &= F(X) \bar{\otimes} M, & m_{X,Y,M}^F &= m_{F(X), F(Y), M}(\xi_{X,Y}^{-1} \bar{\otimes} I_M), \\
l_M^F &= l_M(\phi^{-1} \bar{\otimes} I_M) & e \quad f \bar{\otimes}^F g &= F(f) \bar{\otimes} g,
\end{aligned}$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $M, N \in \mathcal{M}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  morfismo em  $\mathcal{C}$  e  $g : M \rightarrow N$  morfismo em  $\mathcal{M}$ .

**Demonstração:** Não é difícil ver que  $\overline{\otimes}^F$  é um funtor biexato, pois  $F$  é um funtor exato e  $\overline{\otimes}$  é um funtor biexato. Claramente,  $m^F$  e  $l^F$  são isomorfismos naturais. Mostremos que vale (3.1) para  $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^F, m^F, l^F)$ . Temos

$$\begin{aligned}
& m_{X,Y,Z}^F \overline{\otimes}^F m_{X \otimes Y, Z, M}^F = \\
& = m_{F(X), F(Y), F(Z)} \overline{\otimes} m_{F(X \otimes Y), F(Z), M} (\xi_{X,Y}^{-1} \overline{\otimes} I_{F(Z)} \overline{\otimes} M) m_{F(X \otimes Y), F(Z), M} (\xi_{X \otimes Y, Z}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(*)}{=} m_{F(X), F(Y), F(Z)} \overline{\otimes} m_{F(X) \otimes F(Y), F(Z), M} ((\xi_{X,Y}^{-1} \otimes I_{F(Z)}) \overline{\otimes} I_M) \\
& (\xi_{X \otimes Y, Z}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(3.1)}{=} (I_{F(X)} \overline{\otimes} m_{F(Y), F(Z), M}) m_{F(X), F(Y) \otimes F(Z), M} (a_{F(X), F(Y), F(Z)} \overline{\otimes} I_M) \\
& ((\xi_{X,Y}^{-1} \otimes I_{F(Z)}) \xi_{X \otimes Y, Z}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& = (I_{F(X)} \overline{\otimes} m_{F(Y), F(Z), M}) m_{F(X), F(Y) \otimes F(Z), M} \\
& (a_{F(X), F(Y), F(Z)} (\xi_{X,Y}^{-1} \otimes I_{F(Z)}) \xi_{X \otimes Y, Z}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(2.1)}{=} (I_{F(X)} \overline{\otimes} m_{F(Y), F(Z), M}) m_{F(X), F(Y) \otimes F(Z), M} \\
& ((I_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z}^{-1}) \xi_{X,Y \otimes Z}^{-1} F(a_{X,Y,Z}) \overline{\otimes} I_M) \\
& = (I_{F(X)} \overline{\otimes} m_{F(Y), F(Z), M}) m_{F(X), F(Y) \otimes F(Z), M} ((I_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z}^{-1}) \overline{\otimes} I_M) \\
& (\xi_{X,Y \otimes Z}^{-1} F(a_{X,Y,Z}) \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(**)}{=} (I_{F(X)} \overline{\otimes} m_{F(Y), F(Z), M}) ((I_{F(X)} \overline{\otimes} (\xi_{Y,Z}^{-1} \overline{\otimes} I_M)) m_{F(X), F(Y \otimes Z), M} \\
& (\xi_{X,Y \otimes Z}^{-1} F(a_{X,Y,Z}) \overline{\otimes} I_M) \\
& = (F(I_X) \overline{\otimes} m_{Y,Z,M}^F) m_{X,Y \otimes Z, M}^F (a_{X,Y,Z} \overline{\otimes}^F I_M) \\
& = (I_X \overline{\otimes}^F m_{Y,Z,M}^F) m_{X,Y \otimes Z, M}^F (a_{X,Y,Z} \overline{\otimes}^F I_M),
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue da naturalidade de  $m$ , isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
((F(X) \otimes F(Y)) \otimes F(Z)) \overline{\otimes} M & \xrightarrow{m_{F(X) \otimes F(Y), F(Z)}^M} & (F(X) \otimes F(Y)) \overline{\otimes} (F(Z) \overline{\otimes} M) \\
(\xi_{X,Y} \otimes I_{F(Z)}) \overline{\otimes} I_M \downarrow & & \downarrow \xi_{X,Y} \overline{\otimes} (I_{F(Z)} \overline{\otimes} I_M) \\
(F(X \otimes Y) \otimes F(Z)) \overline{\otimes} M & \xrightarrow{m_{F(X \otimes Y), F(Z)}^M} & F(X \otimes Y) \overline{\otimes} (F(Z) \overline{\otimes} M)
\end{array}$$

e a igualdade (\*\*) segue também da naturalidade de  $m$ , via um diagrama análogo.

Mostremos agora que vale (3.2). Temos



$$\begin{aligned}
& (I_X \overline{\otimes}^F l_M^F) m_{X,1,M}^F = \\
& = (F(I_X) \overline{\otimes} l_M (\phi^{-1} \overline{\otimes} I_M)) m_{F(X),F(1),M} (\xi_{X,1}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& = (I_{F(X)} \overline{\otimes} l_M) (I_{F(X)} \overline{\otimes} (\phi^{-1} \overline{\otimes} I_M)) m_{F(X),F(1),M} (\xi_{X,1}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(***)}{=} (I_{F(X)} \overline{\otimes} l_M) m_{F(X),1,M} ((I_{F(X)} \otimes \phi^{-1}) \overline{\otimes} I_M) (\xi_{X,1}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(3.2)}{=} (r_{F(X)} \overline{\otimes} I_M) ((I_{F(X)} \otimes \phi^{-1}) \overline{\otimes} I_M) (\xi_{X,1}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& = r_{F(X)} (I_{F(X)} \otimes \phi^{-1}) \xi_{X,1}^{-1} \overline{\otimes} I_M \\
& \stackrel{(2.3)}{=} F(r_X) \overline{\otimes} I_M = r_X \overline{\otimes}^F I_M,
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*\*\*) segue da naturalidade de  $m$ . ■

## 3.2 Equivariantização de categorias módulo

Os resultados desenvolvidos nessa seção são de importância fundamental para o entendimento do Capítulo 5.

Suponhamos que um grupo finito  $G$  age em uma categoria tensorial finita  $\mathcal{C}$ . Consideremos  $H$  um subgrupo de  $G$ . Para cada  $g \in H$ , temos que  $F_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é uma equivalência tensorial, em particular, um funtor tensorial exato.

Seja  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ . Denotamos por  $\mathcal{M}^g$  a categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$   $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}^{F_g}, m^{F_g}, l^{F_g})$  definida na Proposição 3.1.9. Dessa forma, para cada  $X, Y \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ , temos

$$\begin{aligned}
X \overline{\otimes}^{F_g} M &= F_g(X) \overline{\otimes} M, & l_M^{F_g} &= l_M (\phi_g^{-1} \overline{\otimes} I_M) \text{ e} \\
m_{X,Y,M}^{F_g} &= m_{F_g(X),F_g(Y),M} ((\xi_g)_{X,Y}^{-1} \overline{\otimes} I_M). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Observemos que, como estamos assumindo  $F_1, \xi_1$  e  $\phi_1$  triviais, segue que  $\mathcal{M}^1$  é exatamente  $\mathcal{M}$  como categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ .

Sejam  $g \in H$  e  $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^g$  um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos. Tal fato é equivalente à existir, para cada  $X \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ , um isomorfismo natural

$$c_{X,M}^g : U_g(X \overline{\otimes} M) \rightarrow X \overline{\otimes}^{F_g} U_g(M) = F_g(X) \overline{\otimes} U_g(M)$$

que satisfaz as igualdades (3.3) e (3.4), isto é,

$$m_{X,Y,U_g(M)}^{F_g} c_{X \otimes Y, M}^g = (I_X \overline{\otimes}^{F_g} c_{Y, M}^g) c_{X, Y \overline{\otimes} M}^g U_g(m_{X, Y, M})$$

e

$$l_{U_g(M)}^{F_g} c_{1, M}^g = U_g(l_M),$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ . Considerando a estrutura da categoria módulo  $\mathcal{M}^g$ , as igualdades acima tornam-se

$$\begin{aligned} m_{F_g(X), F_g(Y), U_g(M)}((\xi_g)_{X,Y}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{X \otimes Y, M}^g = \\ (I_{F_g(X)} \overline{\otimes} c_{Y, M}^g) c_{X, Y \overline{\otimes} M}^g U_g(m_{X, Y, M}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

e

$$l_{U_g(M)}(\phi_g^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{1, M}^g = U_g(l_M). \quad (3.9)$$

Seja  $h \in H$ . Então  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^h = \mathcal{M}^{gh}$  como categorias abelianas. Definimos  $((U_g)^h, d^{gh}) : \mathcal{M}^h \rightarrow \mathcal{M}^{gh}$  por  $(U_g)^h = U_g$  e  $d_{X, M}^{gh}$  pela composição abaixo

$$U_g(F_h(X) \overline{\otimes} M) \xrightarrow{c_{F_h(X), M}^g} F_g(F_h(X)) \overline{\otimes} U_g(M) \xrightarrow{(\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} I_{U_g(M)}} F_{gh}(X) \overline{\otimes} U_g(M),$$

isto é,

$$d_{X, M}^{gh} = ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(X), M}^g, \quad (3.10)$$

para quaisquer  $X \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}^h$ .

**Lema 3.2.1** *Sejam  $g, h \in H$  e  $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^g$  um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos. O funtor  $((U_g)^h, d^{gh}) : \mathcal{M}^h \rightarrow \mathcal{M}^{gh}$  definido acima é um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos.*

**Demonstração:** Não é difícil ver que  $d^{gh}$  é um isomorfismo natural, pois  $\gamma_{g,h}$  e  $c^g$  o são. Mostremos que vale (3.3). Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ . Então

$$\begin{aligned} (I_X \overline{\otimes} F_{gh} d_{Y, M}^{gh}) d_{X, Y \overline{\otimes} F_h M}^{gh} (U_g)^h(m_{X, Y, M}^{F_h}) = \\ = (I_{F_{gh}(X)} \overline{\otimes} d_{Y, M}^{gh}) d_{X, F_h(Y) \overline{\otimes} M}^{gh} U_g(m_{X, Y, M}^{F_h}) \\ \stackrel{(3.10)}{=} (I_{F_{gh}(X)} \overline{\otimes} (((\gamma_{g,h})_Y \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(Y), M}^g)) \\ ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} I_{U_g(F_h(Y) \overline{\otimes} M)}) c_{F_h(X), F_h(Y) \overline{\otimes} M}^g U_g(m_{X, Y, M}^{F_h}) \\ = ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} ((\gamma_{g,h})_Y \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(Y), M}^g) c_{F_h(X), F_h(Y) \overline{\otimes} M}^g U_g(m_{X, Y, M}^{F_h}) \\ \stackrel{(3.7)}{=} ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} ((\gamma_{g,h})_Y \overline{\otimes} I_{U_g(M)})) (I_{F_g F_h(X)} \overline{\otimes} c_{F_h(Y), M}^g) c_{F_h(X), F_h(Y) \overline{\otimes} M}^g \\ U_g(m_{F_h(X), F_h(Y), M}) U_g((\xi_h)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\ \stackrel{(3.8)}{=} ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} ((\gamma_{g,h})_Y \overline{\otimes} I_{U_g(M)})) m_{F_g F_h(X), F_g F_h(Y), U_g(M)} \\ ((\xi_g)_{F_h(X), F_h(Y)}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(X) \otimes F_h(Y), M}^g U_g((\xi_h)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\ \stackrel{(*)}{=} m_{F_{gh}(X), F_{gh}(Y), U_g(M)}(((\gamma_{g,h})_X \otimes (\gamma_{g,h})_Y) \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((\xi_g)_{F_h(X), F_h(Y)}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(X) \otimes F_h(Y), M}^g U_g((\xi_h)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(\square)}{=} m_{F_{gh}(X), F_{gh}(Y), U_g(M)}((((\gamma_{g,h})_X \otimes (\gamma_{g,h})_Y)(\xi_g)_{F_h(X), F_h(Y)}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) \\
& (F_g((\xi_h)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} U_g(I_M))) c_{F_h(X \otimes Y), M}^g \\
& = m_{F_{gh}(X), F_{gh}(Y), U_g(M)} \\
& (((\gamma_{g,h})_X \otimes (\gamma_{g,h})_Y)(\xi_g)_{F_h(X), F_h(Y)}^{-1} F_g((\xi_h)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(X \otimes Y), M}^g \\
& \stackrel{(2.9)}{=} m_{F_{gh}(X), F_{gh}(Y), U_g(M)}(((\xi_{gh})_{X, Y}^{-1} (\gamma_{g,h})_{X \otimes Y} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(X \otimes Y), M}^g \\
& = m_{F_{gh}(X), F_{gh}(Y), U_g(M)}((\xi_{gh})_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)})((\gamma_{g,h})_{X \otimes Y} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) \\
& c_{F_h(X \otimes Y), M}^g \\
& = m_{X, Y, (U_g)^h(M)}^{F_{gh}} d_{X \otimes Y, M}^{gh},
\end{aligned}$$

em que as igualdades  $(\star)$  e  $(\square)$  seguem da naturalidade de  $m$  e de  $c^g$ , respectivamente, via a comutatividade dos diagramas abaixo

$$\begin{array}{ccc}
(F_g F_h(X) \otimes F_g F_h(Y)) \overline{\otimes} U_g(M) & \xrightarrow{m_{F_g F_h(X), F_g F_h(Y), U_g(M)}} & F_g F_h(X) \overline{\otimes} (F_g F_h(Y) \overline{\otimes} U_g(M)) \\
\downarrow ((\gamma_{g,h})_X \otimes (\gamma_{g,h})_Y) \overline{\otimes} I_{U_g(M)} & & \downarrow (\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} ((\gamma_{g,h})_Y \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) \\
(F_{gh}(X) \otimes F_{gh}(Y)) \overline{\otimes} U_g(M) & \xrightarrow{m_{F_{gh}(X), F_{gh}(Y), U_g(M)}} & F_{gh}(X) \overline{\otimes} (F_{gh}(Y) \overline{\otimes} U_g(M))
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
U_g((F_h(X) \otimes F_h(Y)) \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{c_{F_h(X) \otimes F_h(Y), M}^g} & F_g(F_h(X) \otimes F_h(Y)) \overline{\otimes} U_g(M) \\
\downarrow U_g((\xi_h)_{X, Y} \overline{\otimes} I_M) & & \downarrow F_g((\xi_h)_{X, Y} \overline{\otimes} U_g(I_M)) \\
U_g(F_h(X \otimes Y) \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{c_{F_h(X \otimes Y), M}^g} & F_g(F_h(X \otimes Y)) \overline{\otimes} U_g(M).
\end{array}$$

Mostremos que vale (3.4). Seja  $M \in \mathcal{M}$ . Então

$$\begin{aligned}
l_{(U_g)^h(M)}^{F_{gh}} d_{\mathbf{1}, M}^{gh} & = l_{U_g(M)}(\phi_{gh}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)})((\gamma_{g,h})_{\mathbf{1}} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(\mathbf{1}), M}^g \\
& = l_{U_g(M)}((\phi_{gh}^{-1} (\gamma_{g,h})_{\mathbf{1}}) \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(\mathbf{1}), M}^g \\
& \stackrel{(2.8)}{=} l_{U_g(M)}((\phi_g^{-1} F_g(\phi_h^{-1})) \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(\mathbf{1}), M}^g \\
& = l_{U_g(M)}(\phi_g^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)})(F_g(\phi_h^{-1}) \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{F_h(\mathbf{1}), M}^g \\
& \stackrel{(*)}{=} l_{U_g(M)}(\phi_g^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{\mathbf{1}, M}^g U_g(\phi_h^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& \stackrel{(3.9)}{=} U_g(l_M) U_g(\phi_h^{-1} \overline{\otimes} I_M) \\
& = U_g(l_M(\phi_h^{-1} \overline{\otimes} I_M)) = (U_g)^h(l_M^{F_h}),
\end{aligned}$$

em que a igualdade  $(*)$  segue da naturalidade de  $c^g$ , isto é, da comuta-

tividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 U_g(F_h(\mathbf{1})\overline{\otimes}M) & \xrightarrow{c_{F_h(\mathbf{1}),M}^g} & F_g(F_h(\mathbf{1}))\overline{\otimes}U_g(M) \\
 U_g(\phi_h^{-1}\overline{\otimes}I_M) \downarrow & & \downarrow F_g(\phi_h^{-1})\overline{\otimes}U_g(I_M) \\
 U_g(\mathbf{1}\overline{\otimes}M) & \xrightarrow{c_{\mathbf{1},M}^g} & F_g(\mathbf{1})\overline{\otimes}U_g(M).
 \end{array}$$

■

Sejam  $g, h \in H$  e  $(U_h, c^h) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^h$ ,  $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^g$  funtores de  $\mathcal{C}$ -módulos. Pelo exposto acima,  $((U_g)^h, d^{gh}) : \mathcal{M}^h \rightarrow \mathcal{M}^{gh}$  é um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos. Segue do Lema 3.1.8 que  $((U_g)^h U_h, b) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{gh}$  também o é, em que

$$\begin{aligned}
 b_{X,M} &= d_{X, U_h(M)}^{gh} U_g(c_{X,M}^h) \\
 &= ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} I_{U_g(U_h(M))}) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X,M}^h),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

para quaisquer  $X \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ .

**Definição 3.2.2** Um  $\mathcal{C}$ -módulo  $\mathcal{M}$  diz-se  $H$ -equivariante se existem funtores de  $\mathcal{C}$ -módulos  $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^g$ , para todo  $g \in H$ , e uma família de isomorfismos naturais  $\mu_{g,h} : ((U_g)^h U_h, b) \rightarrow (U_{gh}, c^{gh})$  tais que

$$(\mu_{g,hf})_M U_g((\mu_{h,f})_M) = (\mu_{gh,f})_M (\mu_{g,h})_{U_f(M)} \tag{3.12}$$

$$c_{X,M}^{gh} (\mu_{g,h})_{X\overline{\otimes}M} = ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} (\mu_{g,h})_M) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X,M}^h) \tag{3.13}$$

para quaisquer  $g, h, f \in H$ ,  $X \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ .

Observemos que a igualdade (3.13) é equivalente a  $\mu_{g,h}$  ser uma transformação natural de  $\mathcal{C}$ -módulos. De fato,  $\mu_{g,h}$  é uma transformação natural de  $\mathcal{C}$ -módulos se, e somente, se o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
 U_g U_h(X\overline{\otimes}M) & \xrightarrow{(\mu_{g,h})_{X\overline{\otimes}M}} & U_{gh}(X\overline{\otimes}M) \\
 b_{X,M} \downarrow & & \downarrow c_{X,M}^{gh} \\
 X\overline{\otimes}^{F_{gh}} U_g U_h(M) & \xrightarrow{I_{X\overline{\otimes}^{F_{gh}}}(\mu_{g,h})_M} & X\overline{\otimes}^{F_{gh}} U_{gh}(M).
 \end{array}$$

Além disso, por (3.11),

$$\begin{aligned}
& (I_X \overline{\otimes}^{F_{gh}} (\mu_{g,h})_M) b_{X,M} = \\
& = (I_{F_{gh}(X)} \overline{\otimes} (\mu_{g,h})_M) ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} I_{U_g(U_h(M))}) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X,M}^h) \\
& = ((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} (\mu_{g,h})_M) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X,M}^h),
\end{aligned}$$

concluindo a afirmação.

Ao longo deste trabalho assumiremos, sem perda de generalidade, que  $(U_1, c^1)$  é o funtor identidade do Exemplo 3.1.5 e que  $\mu_{1,g}$  e  $\mu_{g,1}$  são iguais a transformação natural identidade entre os funtores convenientes.

**Exemplo 3.2.3** Toda categoria tensorial finita  $\mathcal{C}$  é uma categoria módulo  $G$ -equivariante sobre si mesma, via  $(U_g, c^g) = (F_g, \xi_g^{-1})$  e  $\mu_{g,h} = \gamma_{g,h}$ , para todo  $g, h \in G$ .

De fato, o par  $(F_g, \xi_g^{-1})$  satisfaz as igualdades (3.8) e (3.9) devido às igualdades (2.1) e (2.2), ou seja, é um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos.

Além disso, as igualdades (3.12) e (3.13) seguem das igualdades (2.6) e (2.9), respectivamente.

Notemos que o funtor  $(Id_{\mathcal{M}^g}, b^g) : \mathcal{M}^g \rightarrow \mathcal{M}^g$  é um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos, em que  $b_{X,M}^g = I_{F_g(X)} \overline{\otimes} M$ . Tal fato será usado na demonstração da proposição abaixo.

**Proposição 3.2.4** *Se  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo  $H$ -equivariante, então o funtor  $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^g$  é uma equivalência de  $\mathcal{C}$ -módulos, para todo  $g \in H$ .*

**Demonstração:** Seja  $g \in H$ . Então  $g^{-1} \in H$ . Consideremos

$$(U_{g^{-1}}, c^{g^{-1}}) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{g^{-1}}.$$

Pelo Lema 3.2.1,  $((U_{g^{-1}})^g, d) : \mathcal{M}^g \rightarrow \mathcal{M}^{g^{-1}g} = \mathcal{M}$  é um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos, em que

$$d_{X,M} = ((\gamma_{g^{-1},g})_X \overline{\otimes} I_{U_{g^{-1}}(M)}) c_{F_g(X), M}^{g^{-1}}.$$

Assim,  $\mu_{g^{-1},g} : ((U_{g^{-1}})^g U_g, b) \rightarrow (U_{gg^{-1}}, c^{g^{-1}g}) = (U_1, c^1) = (Id_{\mathcal{M}}, c)$  é um isomorfismo natural de  $\mathcal{C}$ -módulos, por definição.

Além disso, pelo Lema 3.1.8,  $(U_g(U_{g^{-1}})^g, e) : \mathcal{M}^g \rightarrow \mathcal{M}^g$  é um funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos em que

$$\begin{aligned}
e_{X,M} & = c_{X, U_{g^{-1}}(M)}^g U_g(d_{X,M}) \\
& = c_{X, U_{g^{-1}}(M)}^g U_g(((\gamma_{g^{-1},g})_X \overline{\otimes} I_{U_{g^{-1}}(M)}) c_{F_g(X), M}^{g^{-1}}).
\end{aligned}$$

Definimos  $\theta : (U_g(U_{g^{-1}})^g, e) \rightarrow (Id_{\mathcal{M}^g}, b^g)$  por  $\theta_M = (\mu_{g,g^{-1}})_M : U_g(U_{g^{-1}})^g(M) \rightarrow M$ , para cada  $M \in \mathcal{M}$ . Claramente  $\theta$  é um isomorfismo natural. Mostremos que  $\theta$  é uma transformação natural de  $\mathcal{C}$ -módulos, isto é, que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_g U_{g^{-1}}(X \overline{\otimes}^{F_g} M) & \xrightarrow{(\mu_{g,g^{-1}})_{X \overline{\otimes}^{F_g} M}} & X \overline{\otimes}^{F_g} M \\ \downarrow e_{X,M} & & \downarrow b_{X,M}^g \\ X \overline{\otimes}^{F_g} U_g U_{g^{-1}}(M) & \xrightarrow{I_{X \overline{\otimes}^{F_g}(\mu_{g,g^{-1}})_M}} & X \overline{\otimes}^{F_g} M \end{array}$$

comuta. Sejam  $X \in \mathcal{C}$  e  $M \in \mathcal{M}$ . Então

$$\begin{aligned} & (I_{F_g(X)} \overline{\otimes}(\mu_{g,g^{-1}})_M) e_{X,M} = \\ &= (I_{F_g(X)} \overline{\otimes}(\mu_{g,g^{-1}})_M) c_{X, U_{g^{-1}}(M)}^g U_g((\gamma_{g^{-1},g})_X \overline{\otimes} I_{U_{g^{-1}}(M)}) U_g(c_{F_g(X), M}^{g^{-1}}) \\ &\stackrel{(\star)}{=} (I_{F_g(X)} \overline{\otimes}(\mu_{g,g^{-1}})_M) (F_g((\gamma_{g^{-1},g})_X) \overline{\otimes} I_{U_g U_{g^{-1}}(M)}) c_{F_{g^{-1}} F_g(X), U_{g^{-1}}(M)}^g \\ & U_g(c_{F_g(X), M}^{g^{-1}}) \\ &= (F_g((\gamma_{g^{-1},g})_X) \overline{\otimes}(\mu_{g,g^{-1}})_M) c_{F_{g^{-1}} F_g(X), U_{g^{-1}}(M)}^g U_g(c_{F_g(X), M}^{g^{-1}}) \\ &\stackrel{(1.7)}{=} ((\gamma_{g^{-1},g})_{F_g(X)} \overline{\otimes}(\mu_{g,g^{-1}})_M) c_{F_{g^{-1}} F_g(X), U_{g^{-1}}(M)}^g U_g(c_{F_g(X), M}^{g^{-1}}) \\ &\stackrel{(3.13)}{=} c_{F_g(X), M}^1 (\mu_{g,g^{-1}})_{F_g(X) \overline{\otimes} M} = b_{X,M}^g (\mu_{g,g^{-1}})_{X \overline{\otimes}^{F_g} M}, \end{aligned}$$

em que a igualdade  $(\star)$  segue da naturalidade de  $c^g$ , isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_g(F_{g^{-1}} F_g(X) \overline{\otimes} U_{g^{-1}}(M)) & \xrightarrow{c_{F_{g^{-1}} F_g(X), U_{g^{-1}}(M)}^g} & F_g(F_{g^{-1}} F_g(X)) \overline{\otimes} U_g(U_{g^{-1}}(M)) \\ \downarrow U_g((\gamma_{g^{-1},g})_X \overline{\otimes} I_{U_{g^{-1}}(M)}) & & \downarrow F_g((\gamma_{g^{-1},g})_X) \overline{\otimes} U_g(I_{U_{g^{-1}}(M)}) \\ U_g(X \overline{\otimes} U_{g^{-1}}(M)) & \xrightarrow{c_{X, U_{g^{-1}}(M)}^g} & F_g(X) \overline{\otimes} U_g(U_{g^{-1}}(M)). \end{array}$$

Portanto,  $(U_g, c^g) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^g$  é uma equivalência de  $\mathcal{C}$ -módulos.  $\blacksquare$

**Definição 3.2.5** *Um objeto  $M$  de uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$   $H$ -equivariante  $\mathcal{M}$  é dito equivariante se existe uma família de isomorfismos  $\{v_g : U_g(M) \rightarrow M\}_{g \in H}$  tal que, para quaisquer  $g, h \in H$ ,*

$$v_{gh}(\mu_{g,h})_M = v_g U_g(v_h). \quad (3.14)$$

**Definição 3.2.6** A categoria dos objetos equivariantes  $(M, v)$  é denotada por  $\mathcal{M}^H$ . Os morfismos nesta categoria são  $f : (M, v) \rightarrow (N, w)$  tais que  $f : M \rightarrow N$  é um morfismo em  $\mathcal{M}$  e

$$w_g U_g(f) = f v_g, \quad (3.15)$$

para todo  $g \in H$ .

**Observação 3.2.7** Notemos que o fato de uma categoria módulo  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{C}$  ser  $H$ -equivariante nos diz que, em particular, o grupo  $H$  age em  $\mathcal{M}$  como categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear.

De fato,  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^g$  como categorias abelianas  $\mathbb{k}$ -lineares, os funtores  $U_g$  relacionados são considerados aditivos  $\mathbb{k}$ -lineares e vale (2.6).

Em particular, a categoria  $\mathcal{M}^H$  é uma equivariantização de  $\mathcal{M}$  por  $H$  via a ação de  $H$  em  $\mathcal{M}$ .

Pelo exposto acima, pela Proposição 1.4.9, o funtor  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^H$  é adjunto à esquerda e à direita do funtor esquecimento  $F : \mathcal{M}^H \rightarrow \mathcal{M}$ . Em particular,  $F$  é um funtor exato.

O lema a seguir será usado na demonstração da Proposição 5.1.4, que é de grande importância para o principal teorema de Capítulo 5.

**Lema 3.2.8** *Sejam  $g \in H$ ,  $N \in \mathcal{M}$  e  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ . Então*

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, U_g(N)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N).$$

**Demonstração:** Pela Proposição 1.4.5, segue que

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(U_g(M), U_g(N)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N).$$

Por hipótese,  $\nu_g : U_g(M) \rightarrow M$  é um isomorfismo. Logo,  $\varphi : \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, U_g(N)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}}(U_g(M), U_g(N))$  dada por  $\varphi(f) = f \nu_g$  é um isomorfismo de espaços vetoriais. Segue que

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(U_g(M), U_g(N)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, U_g(N)).$$

Portanto,

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, U_g(N)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N).$$

■

**Proposição 3.2.9 ([11], Lemma 3.3)** *Sejam  $H$  um subgrupo de  $G$  e  $\mathcal{M}$  um  $\mathcal{C}$ -módulo  $H$ -equivariante. A categoria  $\mathcal{M}^H$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}^G$ .*

**Demonstração:** Sejam  $(X, s) \in \mathcal{C}^G$  e  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ . Definimos  $(X, s) \overline{\otimes} (M, \nu) = (X \overline{\otimes} M, t)$ , em que  $t_g = (s_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{X, M}^g$ , para todo  $g \in H$ . Mostremos que  $(X \overline{\otimes} M, t) \in \mathcal{M}^H$ . Sejam  $g, h \in H$ . Temos

$$\begin{aligned}
t_{gh}(\mu_{g,h})_{X \overline{\otimes} M} &= (s_{gh} \overline{\otimes} \nu_{gh}) c_{X, M}^{gh}(\mu_{g,h})_{X \overline{\otimes} M} \\
&\stackrel{(3.13)}{=} (s_{gh} \overline{\otimes} \nu_{gh})((\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} (\mu_{g,h})_M) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X, M}^h) \\
&= (s_{gh}(\gamma_{g,h})_X \overline{\otimes} \nu_{gh}(\mu_{g,h})_M) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X, M}^h) \\
&\stackrel{(1.6)}{=} (s_g F_g(s_h) \overline{\otimes} \nu_g U_g(\nu_h)) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X, M}^h) \\
&= (s_g \overline{\otimes} \nu_g)(F_g(s_h) \overline{\otimes} U_g(\nu_h)) c_{F_h(X), U_h(M)}^g U_g(c_{X, M}^h) \\
&\stackrel{(*)}{=} (s_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{X, M}^g U_g(s_h \overline{\otimes} \nu_h) U_g(c_{X, M}^h) \\
&= t_g U_g(t_h),
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue da naturalidade de  $c^g$ , isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U_g(F_h(X) \overline{\otimes} U_h(M)) & \xrightarrow{c_{F_h(X), U_h(M)}^g} & F_g(F_h(X)) \overline{\otimes} U_g(U_h(M)) \\
U_g(s_h \overline{\otimes} \nu_h) \downarrow & & \downarrow F_g(s_h) \overline{\otimes} U_g(\nu_h) \\
U_g(X \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{c_{X, M}^g} & F_g(X) \overline{\otimes} U_g(M).
\end{array}$$

Sejam  $f : (X, s) \rightarrow (X', s')$  um morfismo em  $\mathcal{C}^G$  e  $h : (M, \nu) \rightarrow (M', \nu')$  um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ . Mostremos que  $f \overline{\otimes} h : (X, s) \overline{\otimes} (M, \nu) \rightarrow (X', s') \overline{\otimes} (M', \nu')$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ . Seja  $g \in H$ . Então

$$\begin{aligned}
(f \overline{\otimes} h) t_g &= (f \overline{\otimes} h)(s_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{X, M}^g = (f s_g \overline{\otimes} h \nu_g) c_{X, M}^g \\
&\stackrel{(1.8)}{=} (s'_g F_g(f) \overline{\otimes} \nu'_g U_g(h)) c_{X, M}^g = (s'_g \overline{\otimes} \nu'_g)(F_g(f) \overline{\otimes} U_g(h)) c_{X, M}^g \\
&\stackrel{(\square)}{=} (s'_g \overline{\otimes} \nu'_g) c_{X', M}^g U_g(f \overline{\otimes} h) = t'_g U_g(f \overline{\otimes} h),
\end{aligned}$$

em que a igualdade  $(\square)$  segue da naturalidade de  $c^g$ .

Consideremos  $(X, s), (Y, r) \in \mathcal{C}^G$  e  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ . Lembremos que  $(X \otimes Y, u) \in \mathcal{C}^G$ , em que  $u_g = (s_g \otimes r_g)(\xi_g)_{X, Y}^{-1}$ , para todo  $g \in G$ . Assim,

$$((X, s) \otimes (Y, r)) \overline{\otimes} (M, \nu) = (X \otimes Y, u) \overline{\otimes} (M, \nu) = ((X \otimes Y) \overline{\otimes} M, t),$$

em que

$$t_g = (u_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{X \otimes Y, M}^g = ((s_g \otimes r_g)(\xi_g)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} \nu_g) c_{X \otimes Y, M}^g,$$



para todo  $g \in H$ . Além disso,  $(Y, r) \overline{\otimes} (M, \nu) = (Y \overline{\otimes} M, v)$ , com  $v_g = (r_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{Y, M}^g$ , para todo  $g \in H$ , e

$$(X, s) \overline{\otimes} ((Y, r) \overline{\otimes} (M, \nu)) = (X, s) \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} M, v) = (X \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} M), z),$$

em que

$$z_g = (s_g \overline{\otimes} v_g) c_{X, Y \overline{\otimes} M}^g = (s_g \overline{\otimes} (r_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{Y, M}^g) c_{X, Y \overline{\otimes} M}^g,$$

para todo  $g \in H$ . Definimos

$$m_{(X, s), (Y, r), (M, \nu)} : ((X, s) \otimes (Y, r)) \overline{\otimes} (M, \nu) \rightarrow (X, s) \overline{\otimes} ((Y, r) \overline{\otimes} (M, \nu))$$

por  $m_{(X, s), (Y, r), (M, \nu)} = m_{X, Y, M}$ . Mostremos que  $m_{(X, s), (Y, r), (M, \nu)}$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ , isto é, vale a igualdade (3.15). Seja  $g \in H$ , temos

$$\begin{aligned} m_{(X, s), (Y, r), (M, \nu)} t_g &= \\ &= m_{X, Y, M} ((s_g \otimes r_g) (\xi_g)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} \nu_g) c_{X \otimes Y, M}^g \\ &= m_{X, Y, M} ((s_g \otimes r_g) \overline{\otimes} \nu_g) ((\xi_g)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{X \otimes Y, M}^g \\ &\stackrel{(\star)}{=} (s_g \overline{\otimes} (r_g \overline{\otimes} \nu_g)) m_{F_g(X), F_g(Y), U_g(M)} ((\xi_g)_{X, Y}^{-1} \overline{\otimes} I_{U_g(M)}) c_{X \otimes Y, M}^g \\ &\stackrel{(3.8)}{=} (s_g \overline{\otimes} (r_g \overline{\otimes} \nu_g)) (I_{F_g(X)} \overline{\otimes} c_{Y, M}^g) c_{X, Y \overline{\otimes} M}^g U_g(m_{X, Y, M}) \\ &= (s_g \overline{\otimes} (r_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{Y, M}^g) c_{X, Y \overline{\otimes} M}^g U_g(m_{X, Y, M}) \\ &= z_g U_g(m_{(X, s), (Y, r), (M, \nu)}), \end{aligned}$$

em que a igualdade  $(\star)$  segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} (F_g(X) \otimes F_g(Y)) \overline{\otimes} U_g(M) & \xrightarrow{m_{F_g(X), F_g(Y), U_g(M)}} & F_g(X) \overline{\otimes} (F_g(Y) \overline{\otimes} U_g(M)) \\ \downarrow (s_g \otimes r_g) \overline{\otimes} \nu_g & & \downarrow s_g \overline{\otimes} (r_g \overline{\otimes} \nu_g) \\ (X \otimes Y) \overline{\otimes} M & \xrightarrow{m_{X, Y, M}} & X \overline{\otimes} (Y \overline{\otimes} M), \end{array}$$

devido à naturalidade de  $m$ .

Lembremos que  $(\mathbf{1}, \phi^{-1}) \in \mathcal{C}^G$ . Assim,  $(\mathbf{1}, \phi^{-1}) \overline{\otimes} (M, \nu) = (\mathbf{1} \overline{\otimes} M, k)$ , com  $k_g = (\phi^{-1} \overline{\otimes} \nu_g) c_{\mathbf{1}, M}^g$ . Definimos

$$l_{(M, \nu)} : (\mathbf{1}, \phi^{-1}) \overline{\otimes} (M, \nu) \rightarrow (M, \nu)$$

por  $l_{(M, \nu)} = l_M$ . Mostremos que  $l_{(M, \nu)}$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ . Seja

$g \in H$ . Então

$$\begin{aligned}
 l_{(M,\nu)}k_g &= l_M(\phi_g^{-1}\overline{\otimes}\nu_g)c_{\mathbf{1},M}^g \\
 &= l_M(I_{\mathbf{1}}\overline{\otimes}\nu_g)(\phi_g^{-1}\overline{\otimes}I_{U_g(M)})c_{\mathbf{1},M}^g \\
 &\stackrel{(3.9)}{=} l_M(I_{\mathbf{1}}\overline{\otimes}\nu_g)l_{U_g(M)}^{-1}U_g(l_M) \\
 &\stackrel{(**)}{=} \nu_g U_g(l_{(M,\nu)}),
 \end{aligned}$$

em que a igualdade (\*\*) segue da naturalidade de  $l$ , isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1}\overline{\otimes}U_g(M) & \xrightarrow{l_{U_g(M)}} & U_g(M) \\
 I_{\mathbf{1}}\overline{\otimes}\nu_g \downarrow & & \downarrow \nu_g \\
 \mathbf{1}\overline{\otimes}M & \xrightarrow{l_M} & M.
 \end{array}$$

É claro que  $m$  e  $l$  definidos como acima são isomorfismos naturais e satisfazem as igualdades (3.1) e (3.2). ■

**Lema 3.2.10** *A categoria  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}^G$ .*

**Demonstração:** Pelas Proposições 1.4.9 e 2.2.3, o funtor esquecimento  $F : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$  é um funtor tensorial exato. Como  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$  segue, pela Proposição 3.1.9, que  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}^G$ , com  $(X, s)\overline{\otimes}^F M = X\overline{\otimes}M$ ,  $m_{(X,s),(Y,r),M}^F = m_{X,Y,M}$  e  $l_M^F = l_M$ , para quaisquer  $(X, s), (Y, r) \in \mathcal{C}^G$  e  $M \in \mathcal{M}$ . ■

A seguinte proposição é devida ao lema acima.

**Proposição 3.2.11** *O funtor esquecimento  $F : \mathcal{M}^H \rightarrow \mathcal{M}$  é um funtor de  $\mathcal{C}^G$ -módulos.*

**Demonstração:** Claramente o funtor esquecimento é aditivo e  $\mathbb{k}$ -linear. Para verificarmos que  $F$  é um funtor de  $\mathcal{C}^G$ -módulos basta definirmos, para cada  $(X, s) \in \mathcal{C}^G$  e  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ ,

$$c_{(X,s),(M,\nu)} : F((X, s)\overline{\otimes}(M, \nu)) = X\overline{\otimes}M \rightarrow (X, s)\overline{\otimes}F(M, \nu) = X\overline{\otimes}M$$

por  $c_{(X,s),(M,\nu)} = I_{X\overline{\otimes}M}$ . ■

O objetivo agora é, no contexto de categorias módulo, mostrarmos que o funtor  $L$  já apresentado na Seção 1.4, é um funtor de  $\mathcal{C}^G$ -módulos.

Imaginamos que tal resultado seja conhecido, porém não encontramos sua prova na literatura.

Para tal, apresentamos, a seguir, notações importantes para a demonstração do mesmo. Para cada  $j \in H$  e  $M \in \mathcal{M}$ , denotamos por

$$\iota_j^M : U_j(M) \rightarrow \bigoplus_{h \in H} U_h(M) \quad \text{e} \quad \pi_j^M : \bigoplus_{h \in H} U_h(M) \rightarrow U_j(M)$$

as inclusões e projeções da definição de soma direta, respectivamente.

**Proposição 3.2.12** *O funtor  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^H$  dado por*

$$L(M) = (\bigoplus_{h \in H} U_h(M), s^M),$$

em que

$$s_g^M = \sum_{j \in H} \iota_{gj}^M (\mu_{g,j})_M U_g (\pi_j^M),$$

para todo  $g \in H$ , e

$$L(f) = \sum_{l \in H} \iota_l^N U_l(f) \pi_l^M,$$

para todo morfismo  $f : M \rightarrow N$  em  $\mathcal{M}$ , é um funtor de  $\mathcal{C}^G$ -módulos.

**Demonstração:** Sejam  $(X, s) \in \mathcal{C}^G$  e  $M \in \mathcal{M}$ . Temos que

$$L((X, s) \overline{\otimes} M) = L(X \overline{\otimes} M) = (\bigoplus_{h \in H} U_h(X \overline{\otimes} M), s^{X \overline{\otimes} M})$$

e

$$(X, s) \overline{\otimes} L(M) = (X \overline{\otimes} (\bigoplus_{h \in H} U_h(M)), t),$$

em que  $t_g = (s_g \overline{\otimes} s_g^M) c_{X, \bigoplus_{h \in H} U_h(M)}^g$ , para todo  $g \in H$ . Definimos

$$c_{(X,s),M} : L((X, s) \overline{\otimes} M) \rightarrow (X, s) \overline{\otimes} L(M),$$

por

$$c_{(X,s),M} = \sum_{l \in H} (s_l \overline{\otimes} \iota_l^M) c_{X,M}^l \pi_l^{X \overline{\otimes} M}.$$

A composição acima é dada por:

$$\bigoplus_{h \in H} U_h(X \overline{\otimes} M) \xrightarrow{\pi_l^{X \overline{\otimes} M}} U_l(X \overline{\otimes} M) \xrightarrow{c_{X,M}^l} F_l(X) \overline{\otimes} U_l(M) \xrightarrow{s_l \overline{\otimes} \iota_l^M} X \overline{\otimes} (\bigoplus_{h \in H} U_h(M)).$$

Mostremos que  $c_{(X,s),M}$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ . Seja  $g \in H$ , temos

$$\begin{aligned}
& c_{(X,s),M} s_g^{X\overline{\otimes} M} = \\
& = \sum_{l \in H} (s_l \overline{\otimes} \iota_l^M) c_{X,M}^l \pi_l^{X\overline{\otimes} M} \sum_{j \in H} \iota_{gj}^{X\overline{\otimes} M} (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes} M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes} M}) \\
& = \sum_{j \in H} (s_{gj} \overline{\otimes} \iota_{gj}^M) c_{X,M}^{gj} (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes} M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes} M}) \\
& \stackrel{(3.13)}{=} \sum_{j \in H} (s_{gj} \overline{\otimes} \iota_{gj}^M) ((\gamma_{g,j})_{X\overline{\otimes} M} (\mu_{g,j})_M) c_{F_j(X), U_j(M)}^g U_g(c_{X,M}^j) U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes} M}) \\
& = \sum_{j \in H} (s_{gj} (\gamma_{g,j})_{X\overline{\otimes} M} \iota_{gj}^M (\mu_{g,j})_M) c_{F_j(X), U_j(M)}^g U_g(c_{X,M}^j) U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes} M}) \\
& \stackrel{(1.6)}{=} \sum_{j \in H} (s_g F_g(s_j) \overline{\otimes} \iota_{gj}^M (\mu_{g,j})_M) c_{F_j(X), U_j(M)}^g U_g(c_{X,M}^j) U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes} M}).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
t_g U_g(c_{(X,s),M}) & = (s_g \overline{\otimes} s_g^M) c_{X, \oplus_{h \in H} U_h(M)}^g U_g \left( \sum_{l \in H} (s_l \overline{\otimes} \iota_l^M) c_{X,M}^l \pi_l^{X\overline{\otimes} M} \right) \\
& = (s_g \overline{\otimes} \left( \sum_{j \in H} \iota_{gj}^M (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \right)) c_{X, \oplus_{h \in H} U_h(M)}^g \sum_{l \in H} U_g(s_l \overline{\otimes} \iota_l^M) \\
& U_g(c_{X,M}^l) U_g(\pi_l^{X\overline{\otimes} M}) \\
& = \sum_{j,l \in H} (s_g \overline{\otimes} \iota_{gj}^M (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M)) c_{X, \oplus_{h \in H} U_h(M)}^g U_g(s_l \overline{\otimes} \iota_l^M) U_g(c_{X,M}^l) \\
& U_g(\pi_l^{X\overline{\otimes} M}) \\
& \stackrel{(*)}{=} \sum_{j,l \in H} (s_g \overline{\otimes} \iota_{gj}^M (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M)) (F_g(s_l) \overline{\otimes} U_g(\iota_l^M)) c_{F_l(X), U_l(M)}^g \\
& U_g(c_{X,M}^l) U_g(\pi_l^{X\overline{\otimes} M}) \\
& = \sum_{j,l \in H} (s_g F_g(s_l) \overline{\otimes} \iota_{gj}^M (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) U_g(\iota_l^M)) c_{F_l(X), U_l(M)}^g U_g(c_{X,M}^l) \\
& U_g(\pi_l^{X\overline{\otimes} M}) \\
& = \sum_{l \in H} (s_g F_g(s_l) \overline{\otimes} \iota_{gl}^M (\mu_{g,l})_M) c_{F_l(X), U_l(M)}^g U_g(c_{X,M}^l) U_g(\pi_l^{X\overline{\otimes} M}),
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue da comutatividade do diagrama abaixo para cada  $l \in H$ , que por sua vez segue do fato de  $c^g$  ser um isomorfismo

natural

$$\begin{array}{ccc}
U_g(F_l(X) \overline{\otimes} U_l(M)) & \xrightarrow{c_{F_l(X), U_l(M)}^g} & F_g(F_l(X) \overline{\otimes} U_g(U_l(M))) \\
\downarrow U_g(s_l \overline{\otimes} t_l^M) & & \downarrow F_g(s_l) \overline{\otimes} U_g(t_l^M) \\
U_g(X \overline{\otimes} (\bigoplus_{h \in H} U_h(M))) & \xrightarrow{c_{X, \bigoplus_{h \in H} U_h(M)}^g} & F_g(X \overline{\otimes} U_g((\bigoplus_{h \in H} U_h(M))))
\end{array}$$

Portanto,  $c_{(X,s),M} s_g^{X \overline{\otimes} M} = t_g U_g(c_{(X,s),M})$ . Definimos

$$c_{(X,s),M}^{-1} = \sum_{l \in H} t_l^{X \overline{\otimes} M} (c_{X,M}^l)^{-1} (s_l^{-1} \overline{\otimes} \pi_l^M).$$

Não é difícil ver que  $c_{(X,s),M}^{-1}$  é o inverso de  $c_{(X,s),M}$ . Logo, para cada  $(X, s) \in \mathcal{C}^G$  e  $M \in \mathcal{M}$ , temos  $c_{(X,s),M}$  um isomorfismo em  $\mathcal{M}^H$ .

Mostremos que  $c : L(- \overline{\otimes} -) \rightarrow - \overline{\otimes} L(-)$  definido de tal forma é um isomorfismo natural. Sejam  $f : (X, s) \rightarrow (Y, r)$  um morfismo em  $\mathcal{C}^G$  e  $g : M \rightarrow N$  um morfismo em  $\mathcal{M}$ . Mostremos que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
L((X, s) \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{c_{(X,s),M}} & (X, s) \overline{\otimes} L(M) \\
L(f \overline{\otimes} g) \downarrow & & \downarrow f \overline{\otimes} L(g) \\
L((Y, r) \overline{\otimes} N) & \xrightarrow{c_{(Y,r),N}} & (Y, r) \overline{\otimes} L(N).
\end{array}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(f \overline{\otimes} L(g)) c_{(X,s),M} &= (f \overline{\otimes} (\sum_{l \in H} t_l^N U_l(g) \pi_l^M)) \sum_{j \in H} (s_j \overline{\otimes} t_j^M) c_{X,M}^j \pi_j^{X \overline{\otimes} M} \\
&= \sum_{l,j \in H} (f s_j \overline{\otimes} t_l^N U_l(g) \pi_l^M t_j^M) c_{X,M}^j \pi_j^{X \overline{\otimes} M} \\
&= \sum_{j \in H} (f s_j \overline{\otimes} t_j^N U_j(g)) c_{X,M}^j \pi_j^{X \overline{\otimes} M}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c_{(Y,r),N} L(f \overline{\otimes} g) &= \sum_{l \in H} (r_l \overline{\otimes} t_l^N) c_{Y,N}^l \pi_l^{Y \overline{\otimes} N} \sum_{j \in H} t_j^{Y \overline{\otimes} N} U_j(f \overline{\otimes} g) \pi_j^{X \overline{\otimes} M} \\
&= \sum_{l \in H} (r_l \overline{\otimes} t_l^N) c_{Y,N}^l U_l(f \overline{\otimes} g) \pi_l^{X \overline{\otimes} M} \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{l \in H} (r_l \overline{\otimes} t_l^N) (F_l(f) \overline{\otimes} U_l(g)) c_{X,M}^l \pi_l^{X \overline{\otimes} M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l \in H} (r_l F_l(f) \otimes \bar{\iota}_l^N U_l(g)) c_{X,M}^l \pi_l^{X \otimes M} \\
&\stackrel{(1.8)}{=} \sum_{l \in H} (f s_l \otimes \bar{\iota}_l^N U_l(g)) c_{X,M}^l \pi_l^{X \otimes M},
\end{aligned}$$

em que a igualdade  $(\star)$  segue do fato de que  $c^l$  é um isomorfismo natural, para todo  $l \in H$ , isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U_l(X \otimes M) & \xrightarrow{c_{X,M}^l} & F_l(X) \otimes U_l(M) \\
U_l(f \otimes g) \downarrow & & \downarrow F_l(f) \otimes U_l(g) \\
U_l(Y \otimes N) & \xrightarrow{c_{Y,N}^l} & F_l(Y) \otimes U_l(N)
\end{array}$$

comuta. Logo,  $(f \otimes L(g)) c_{(X,s),M} = c_{(Y,r),N} L(f \otimes g)$ . Portanto,  $c$  é um isomorfismo natural.

Mostremos agora que  $c$  satisfaz a igualdade (3.3). Sejam  $(X, s), (Y, r) \in \mathcal{C}^G$  e  $M \in \mathcal{M}$ . Lembremos que  $(X \otimes Y, u) \in \mathcal{C}^G$ , em que  $u_g = (s_g \otimes r_g) (\xi_g)_{X,Y}^{-1}$ , para todo  $g \in G$ , e  $(\mathbf{1}, \phi^{-1}) \in \mathcal{C}^G$ , em que  $\phi_g$  é o isomorfismo do functor tensorial  $(F_g, \xi_g, \phi_g)$ , para todo  $g \in G$ . Temos

$$\begin{aligned}
&(I_{(X,s)} \otimes \bar{c}_{(Y,r),M}) c_{(X,s),(Y,r)} \otimes M L(m_{(X,s),(Y,r),M}) = \\
&= (I_X \otimes \sum_{l \in H} (r_l \otimes \bar{\iota}_l^M) c_{Y,M}^l \pi_l^{Y \otimes M}) (\sum_{t \in H} (s_t \otimes \bar{\iota}_t^{Y \otimes M}) c_{X,Y \otimes M}^t \pi_t^{X \otimes (Y \otimes M)}) \\
&(\sum_{j \in H} l_j^{X \otimes (Y \otimes M)} U_j(m_{X,Y,M}) \pi_j^{(X \otimes Y) \otimes M}) \\
&= \sum_{l,t \in H} (s_t \otimes (r_l \otimes \bar{\iota}_l^M) c_{Y,M}^l \pi_l^{Y \otimes M} \bar{\iota}_t^{Y \otimes M}) c_{X,Y \otimes M}^t U_t(m_{X,Y,M}) \pi_t^{(X \otimes Y) \otimes M} \\
&= \sum_{l \in H} (s_l \otimes (r_l \otimes \bar{\iota}_l^M) c_{Y,M}^l c_{X,Y \otimes M}^l U_l(m_{X,Y,M}) \pi_l^{(X \otimes Y) \otimes M}) \\
&= \sum_{l \in H} (s_l \otimes (r_l \otimes \bar{\iota}_l^M)) (I_{F_l(X)} \otimes \bar{c}_{Y,M}^l) c_{X,Y \otimes M}^l U_l(m_{X,Y,M}) \pi_l^{(X \otimes Y) \otimes M} \\
&\stackrel{(3.8)}{=} \sum_{l \in H} (s_l \otimes (r_l \otimes \bar{\iota}_l^M)) m_{F_l(X), F_l(Y), U_l(M)} ((\xi_l)_{X,Y}^{-1} \otimes \bar{I}_{U_l(M)}) c_{X \otimes Y, M}^l \\
&\pi_l^{(X \otimes Y) \otimes M} \\
&\stackrel{(**)}{=} \sum_{l \in H} m_{X,Y, \oplus_{h \in H} U_h(M)} ((s_l \otimes r_l) \otimes \bar{\iota}_l^M) ((\xi_l)_{X,Y}^{-1} \otimes \bar{I}_{U_l(M)}) c_{X \otimes Y, M}^l \\
&\pi_l^{(X \otimes Y) \otimes M} \\
&= m_{X,Y, \oplus_{h \in H} U_h(M)} \sum_{l \in H} ((s_l \otimes r_l) (\xi_l)_{X,Y}^{-1} \otimes \bar{\iota}_l^M) c_{X \otimes Y, M}^l \pi_l^{(X \otimes Y) \otimes M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_{X,Y,\oplus_{h \in H} U_h(M)} \sum_{l \in H} (u_l \bar{\otimes} l_l^M) c_{X \otimes Y, M}^l \pi_l^{(X \otimes Y) \bar{\otimes} M} \\
&= m_{(X,s),(Y,r),L(M)} c_{(X \otimes Y, u), M},
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*\*\*) segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(F_l(X) \otimes F_l(Y)) \bar{\otimes} U_l(M) & \xrightarrow{m_{F_l(X), F_l(Y), U_l(M)}} & F_l(X) \bar{\otimes} (F_l(Y) \bar{\otimes} U_l(M)) \\
(s_l \otimes r_l) \bar{\otimes} l_l^M \downarrow & & \downarrow s_l \bar{\otimes} (r_l \bar{\otimes} l_l^M) \\
(X \otimes Y) \bar{\otimes} (\oplus_{h \in H} U_h(M)) & \xrightarrow{m_{X,Y,\oplus_{h \in H} U_h(M)}} & X \bar{\otimes} (Y \bar{\otimes} (\oplus_{h \in H} U_h(M))),
\end{array}$$

devido à naturalidade de  $m$ .

Finalmente, mostremos que vale (3.4). Seja  $M \in \mathcal{M}$ . Então

$$\begin{aligned}
L(l_M) &= \sum_{j \in H} l_j^M U_j(l_M) \pi_j^{1 \bar{\otimes} M} \\
&\stackrel{(3.9)}{=} \sum_{j \in H} l_j^M l_{U_j(M)} (\phi_j^{-1} \bar{\otimes} I_{U_j(M)}) c_{1, M}^j \pi_j^{1 \bar{\otimes} M} \\
&\stackrel{(\star\star)}{=} \sum_{j \in H} l_{\oplus_{h \in H} U_h(M)} (I_1 \otimes l_j^M) (\phi_j^{-1} \bar{\otimes} I_{U_j(M)}) c_{1, M}^j \pi_j^{1 \bar{\otimes} M} \\
&= l_{\oplus_{h \in H} U_h(M)} \sum_{j \in H} (\phi_j^{-1} \bar{\otimes} l_j^M) c_{1, M}^j \pi_j^{1 \bar{\otimes} M} = l_{(\oplus_{h \in H} U_h(M), s^M)} c_{1, M},
\end{aligned}$$

em que a igualdade ( $\star\star$ ) segue da naturalidade de  $l$ , isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
1 \bar{\otimes} U_j(M) & \xrightarrow{l_{U_j(M)}} & U_j(M) \\
I_1 \bar{\otimes} l_j^M \downarrow & & \downarrow l_j^M \\
1 \bar{\otimes} (\oplus_{h \in H} U_h(M)) & \xrightarrow{l_{\oplus_{h \in H} U_h(M)}} & \oplus_{h \in H} U_h(M).
\end{array}$$

■

Antes de terminarmos essa seção, lembramos a definição de categoria módulo indecomponível, definição esta que aparece em uma das proposições abaixo e nos próximos capítulos.

Sejam  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  dois  $\mathcal{C}$ -módulos. A soma direta  $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$  é um  $\mathcal{C}$ -módulo com ação dada por  $X \bar{\otimes} (M, N) = (X \bar{\otimes} M, X \bar{\otimes} N)$ , para quaisquer  $X \in \mathcal{C}$ ,  $M \in \mathcal{M}$  e  $N \in \mathcal{N}$ .

**Definição 3.2.13** *Uma categoria módulo  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{C}$  é dita indecomponível se não é equivalente a uma soma direta de categorias módulo sobre  $\mathcal{C}$  não-nulas.*

Seja  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo localmente finita com uma quantidade finita de classes de isomorfismo de objetos simples. A categoria módulo  $\mathcal{M}$  é dita *exata* se, para todo objeto projetivo  $P \in \mathcal{C}$ , o objeto  $P \otimes M \in \mathcal{M}$  é projetivo, para todo objeto  $M \in \mathcal{M}$ .

Segundo ([9], Example 3.3 (iii)), se  $\mathcal{C}$  é uma categoria de fusão, então uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$  é exata se, e somente se, é semissimples. Nos próximos capítulos, assumimos  $\mathcal{C}$  uma categoria de fusão. Logo, os conceitos de exatidão e semissimplidade são equivalentes. Dessa forma, se  $\mathcal{C}$  é uma categoria de fusão, valem as seguintes proposições, trocando “exata” por “semissimples”.

**Proposição 3.2.14 ([9], Lemma 3.4)** *Seja  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo exata sobre  $\mathcal{C}$ . Então  $\mathcal{M}$  possui objetos projetivos suficientes, isto é, todo objeto simples em  $\mathcal{M}$  possui cobertura projetiva. Em particular, a categoria  $\mathcal{M}$  é finita.*

De acordo com a proposição acima, sob nossas condições, as categorias módulo envolvidas são finitas.

**Proposição 3.2.15 ([11], Proposition 3.4-2)** *Seja  $G$  um grupo finito que age na categoria tensorial finita  $\mathcal{C}$ . Se  $H$  é um subgrupo de  $G$  e  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo  $H$ -equivariante sobre  $\mathcal{C}$ , então  $\mathcal{M}^H$  é uma categoria módulo exata se, e somente se,  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo exata.*

Segundo ([10], Remark 1.2), uma categoria módulo semissimples sobre uma categoria de fusão é simples se, e somente se, é indecomponível. Dessa forma, por ([10], Theorem 5.13), se  $G$  é um grupo finito que age em  $\mathcal{C}$ ,  $H$  é um subgrupo de  $G$  e  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo  $H$ -equivariante sobre  $\mathcal{C}$ , então  $\mathcal{M}^H$  é uma categoria módulo indecomponível se, e somente se,  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo indecomponível.

### 3.3 Ação de $\text{vect}_{\mathbb{k}}$ em categorias abelianas finitas

É bem conhecido que  $\text{vect}_{\mathbb{k}}$ , a categoria dos espaços vetoriais de dimensão finita, é uma categoria tensorial finita sobre  $\mathbb{k}$ . No último



capítulo, faremos uso de uma ação de  $vect_{\mathbb{k}}$  em uma categoria  $\mathcal{C}$  que, dentre outras propriedades, é finita.

O objetivo desta seção é explicar tal ação e desenvolver alguns pequenos lemas para esclarecer certos passos do capítulo citado. Mais detalhes sobre esta ação são encontrados em ([21], Lemma 2.2.2).

Seja  $\mathcal{C}$  uma categoria abeliana  $\mathbb{k}$ -linear finita. Então  $\mathcal{C}$  é uma categoria módulo sobre  $vect_{\mathbb{k}}$ , com ação dada a seguir.

Para cada  $V \in vect_{\mathbb{k}}$ , fixemos uma base ordenada  $\beta_V$ . Em particular para  $\mathbb{k}$ , fixemos  $\beta_{\mathbb{k}} = \{1\}$ . Sejam  $V, W \in vect_{\mathbb{k}}$ , com  $n = \dim(V)$  e  $m = \dim(W)$  e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Definimos

$$V \overline{\otimes} X = nX = X \oplus \cdots \oplus X (n \text{ vezes}),$$

para todo  $X \in \mathcal{C}$ . Se  $[T]_{\beta_W}^{\beta_V} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  e  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , então  $T \overline{\otimes} f : V \overline{\otimes} X \rightarrow W \overline{\otimes} Y$  é dado por

$$T \overline{\otimes} f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \iota_i^Y f \pi_j^X, \quad (3.16)$$

em que  $\iota_i^Y : Y_i = Y \rightarrow mY$  e  $\pi_j^X : nX \rightarrow X_j = X$  são as inclusões e projeções da soma direta, respectivamente.

Os lemas abaixo serão utilizados no último capítulo, mais especificamente, na seção sobre representações projetivas.

**Lema 3.3.1** *Sejam  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  um functor aditivo,  $X \in \mathcal{C}$  e  $V \in vect_{\mathbb{k}}$  com  $n = \dim(V)$ . Então  $F(nX)$  é uma soma direta para  $F(X)$ ,  $n$  vezes, com inclusões  $\iota_i^{F(X)} = F(\iota_i^X)$  e projeções  $\pi_i^{F(X)} = F(\pi_i^X)$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \iota_i^{F(X)} \pi_i^{F(X)} &= \sum_{i=1}^n F(\iota_i^X) F(\pi_i^X) = \sum_{i=1}^n F(\iota_i^X \pi_i^X) \\ &= F \left( \sum_{i=1}^n \iota_i^X \pi_i^X \right) = F(I_{nX}) = I_{F(nX)}. \end{aligned}$$

Também, para qualquer  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\pi_i^{F(X)} \iota_i^{F(X)} = F(\pi_i^X) F(\iota_i^X) = F(\pi_i^X \iota_i^X) = F(I_X) = I_{F(X)}.$$

■

Pelo lema acima, podemos dizer que

$$V \overline{\otimes} F(X) = nF(X) = F(nX) = F(V \overline{\otimes} X). \quad (3.17)$$

**Lema 3.3.2** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  um functor aditivo. Sejam  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear e  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo em  $\mathcal{C}$ . Então*

$$F(T\overline{\otimes}f) = T\overline{\otimes}F(f). \quad (3.18)$$

**Demonstração:** Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz associada a  $T$ . Então,

$$\begin{aligned} F(T\overline{\otimes}f) &= F\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \iota_i^Y f \pi_j^X\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} F(\iota_i^Y) F(f) F(\pi_j^X) \\ &= T\overline{\otimes}F(f), \end{aligned}$$

pois, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  e cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $F(\iota_i^Y)$  são exatamente as inclusões de  $F(Y)$  em  $mF(Y)$  e  $F(\pi_j^X)$  são exatamente as projeções de  $nF(X)$  em  $F(X)$ . ■

**Lema 3.3.3** *Sejam  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores aditivos e  $\eta : F \rightarrow G$  uma transformação natural. Então*

$$\eta_{V\overline{\otimes}X} = I_V\overline{\otimes}\eta_X, \quad (3.19)$$

para quaisquer  $V \in \text{vect}_{\mathbb{k}}$  e  $X \in \mathcal{C}$ .

**Demonstração:** Suponhamos  $\dim(V) = n$ . Como  $\eta$  é uma transformação natural, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ \downarrow F(\iota_i^X) & & \downarrow G(\iota_i^X) \\ nF(X) = F(nX) & \xrightarrow{\eta_{nX}} & G(nX) = nG(X), \end{array}$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Logo,  $G(\iota_i^X)\eta_X = \eta_{nX}F(\iota_i^X)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n G(\iota_i^X)\eta_X F(\pi_i^X) &= \sum_{i=1}^n \eta_{nX}F(\iota_i^X)F(\pi_i^X) = \eta_{nX} \sum_{i=1}^n F(\iota_i^X)F(\pi_i^X) \\ &= \eta_{nX} = \eta_{V\overline{\otimes}X}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\eta_{V\overline{\otimes}X} = \sum_{i=1}^n G(\iota_i^X)\eta_X F(\pi_i^X).$$

Além disso,

$$I_V\overline{\otimes}\eta_X = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \iota_i^{G(X)} \eta_X \pi_j^{F(X)} = \sum_{i=1}^n G(\iota_i^X)\eta_X F(\pi_i^X).$$

Portanto,  $\eta_{V\overline{\otimes}X} = I_V\overline{\otimes}\eta_X$ . ■

## Capítulo 4

# Dimensão de Frobenius-Perron

Este capítulo tem como objetivo principal estudar a dimensão de Frobenius-Perron em categorias módulo munidas de certas propriedades sobre categorias de fusão. Tal estudo é importante para a demonstração de um dos principais teoremas deste trabalho, o mesmo encontra-se no Capítulo 5. A sequência usada para o desenvolvimento do capítulo considera primeiramente o estudo de  $\mathbb{Z}_+$ -anéis e de  $\mathbb{Z}_+$ -módulos. Tal assunto possui uma “ligação estreita” com a teoria de grupos e anéis de Grothendieck. Por exemplo, o anel de Grothendieck de uma categoria  $\mathcal{C}$  de fusão é um  $\mathbb{Z}_+$ -anel transitivo unital dotado de uma base finita, sendo a mesma constituída por classes de isomorfismos de objetos simples em  $\mathcal{C}$ .

Segundo a literatura, veja [7], a dimensão de Frobenius-Perron é definida para os elementos da base de um  $\mathbb{Z}_+$ -anel transitivo unital e estende-se ao mesmo por uma “certa” aditividade. No caso de uma categoria de fusão, a dimensão de Frobenius-Perron é definida para as classes de isomorfismos de objetos simples, que mencionamos acima, e que estende-se ao seu anel de Grothendieck. Isso culmina em outras definições e resultados bem conhecidos.

Neste sentido, a contribuição deste trabalho para o estudo de dimensões de Frobenius-Perron é mais efetiva no contexto de  $\mathbb{Z}_+$ -módulos. Desenvolvemos alguns resultados neste contexto, e como o grupo de Grothendieck de uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ , sob certas condições, é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre o anel de Grothendieck de  $\mathcal{C}$ , aplicamos os mesmos para o estudo de dimensão de Frobenius-Perron em categorias

módulo, como dissemos inicialmente. Tal assunto é desenvolvido na Seção 4.3.

## 4.1 $\mathbb{Z}_+$ -anéis e $\mathbb{Z}_+$ -módulos

Esta seção foi desenvolvida com base em [7] e [19]. Lembremos que um semi-anel  $R$  é um conjunto não-vazio munido de duas operações,  $+$  e  $\cdot$ , tais que  $(R, +)$  é um monóide comutativo com elemento neutro  $0$ ,  $(R, \cdot)$  é um monóide com elemento neutro  $1$ , valem as leis distributivas e  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ , para todo  $a \in R$ .

Consideremos  $\mathbb{Z}_+$  o semi-anel de inteiros não-negativos. No que segue, todos os anéis possuem unidade.

**Definição 4.1.1** *Seja  $A$  um anel livre como um  $\mathbb{Z}$ -módulo.*

- (1) *Uma  $\mathbb{Z}_+$ -base de  $A$  é uma  $\mathbb{Z}$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$  de  $A$  tal que  $b_i b_j = \sum_{k \in I} c_{ij}^k b_k$ , com  $c_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$ , para quaisquer  $i, j \in I$ .*
- (2) *Um  $\mathbb{Z}_+$ -anel é um anel com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base tal que a unidade  $1$  é uma combinação linear não-negativa de seus elementos.*
- (3) *Um  $\mathbb{Z}_+$ -anel unital é um  $\mathbb{Z}_+$ -anel tal que  $1$  é um elemento da  $\mathbb{Z}_+$ -base.*

Seja  $A$  um anel. Lembremos que uma involução do anel  $A$  é um anti-homomorfismo de anéis  $f : A \rightarrow A$  cujo quadrado é igual a aplicação identidade de  $A$ , isto é,  $f^2 = I_A$ .

Sejam  $A$  um  $\mathbb{Z}_+$ -anel e  $I_0$  o conjunto dos  $i$ 's tal que  $b_i$  ocorre na decomposição de  $1$ . Seja  $\tau : A \rightarrow \mathbb{Z}$  o morfismo de grupos definido por  $\tau(b_i) = 1$  se  $i \in I_0$  e  $\tau(b_i) = 0$  se  $i \notin I_0$ .

**Definição 4.1.2** *Um  $\mathbb{Z}_+$ -anel com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$  é dito anel base se existe uma involução  $i \mapsto i^*$  de  $I$  ( $i = (i^*)^*$ ) tal que a função induzida*

$$a = \sum_{i \in I} a_i b_i \mapsto a^* = \sum_{i \in I} a_i b_{i^*}, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

*é uma involução do anel  $A$  e  $\tau(b_i b_j) = 1$  se  $i = j^*$  e  $\tau(b_i b_j) = 0$  se  $i \neq j^*$ .*

Seja  $A$  um anel base. Observemos que, para quaisquer  $x, x' \in A$ , vale que

$$\tau(xx') = \tau(x'x). \quad (4.1)$$

De fato, escrevendo  $x = \sum_{i \in I} a_i b_i$  e  $x' = \sum_{j \in I} a'_j b_j$  com  $a_i, a'_j \in \mathbb{Z}$ , para quaisquer  $i, j \in I$ , temos

$$xx' = \sum_{i, j \in I} a_i a'_j b_i b_j \text{ e } x'x = \sum_{i, j \in I} a'_j a_i b_j b_i.$$

Assim, pela definição de  $\tau$ , temos que  $\tau(xx') = 0 = \tau(x'x)$ , se  $i \neq j^*$  e  $\tau(xx') = a_{j^*} a'_j = a'_j a_{j^*} = \tau(x'x)$ , se  $i = j^*$ .

**Definição 4.1.3** *Um anel multifusão é um anel base com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base finita. Um anel fusão é um anel multifusão unital.*

**Exemplo 4.1.4 ([7], Example 3.1.9 (i))** Seja  $n \in \mathbb{N}$ . O anel das matrizes de ordem  $n$  com entradas inteiras, denotado por  $Mat_n(\mathbb{Z})$ , é um anel multifusão com base formada pelas matrizes elementares  $E_{ij}$ , em que  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , e  $*$  dada pela transposição. Assim, o conjunto de índices é dado por  $I = \{(i, j) | i, j \in \{1, \dots, n\}\}$  e  $I_0$  é o conjunto dos pares  $\{(i, i) | i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Como  $|I_0| = n$ , temos que  $Mat_n(\mathbb{Z})$  é um anel fusão se, e somente se,  $n = 1$ .

**Exemplo 4.1.5 ([7], Example 3.1.9 (ii))** Seja  $G$  um grupo. O anel de grupo  $\mathbb{Z}G$  é um anel base unital, com base dada pelos elementos do grupo e  $g^* = g^{-1}$ , para todo  $g \in G$ . De fato, temos que

$$\tau(gh) = 1 \Leftrightarrow gh = 1_G \Leftrightarrow g = h^{-1} \Leftrightarrow g = h^*,$$

para quaisquer  $g, h \in G$ . Tal anel é um anel fusão se  $G$  for finito.

**Exemplo 4.1.6 ([7], Example 3.1.9 (vii))** Consideremos o  $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado por dois elementos,  $1$  e  $X$ , com multiplicação dada por  $X^2 = 1 + X$ , unidade  $1$  e involução identidade. Este anel é um anel fusão chamado anel fusão Yang-Lee.

A proposição abaixo é importante para a demonstração do Teorema 4.1.29, que é fundamental para definir a dimensão de Frobenius-Perron para elementos da base de um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo.

**Proposição 4.1.7 ([7], Proposition 3.1.8)** *Seja  $A$  um anel multifusão com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ . Então, para todo  $x \in A$ , o elemento  $z(x) = \sum_{i \in I} b_i x b_{i^*}$  é central em  $A$ , ou seja,  $z(x) \in Z(A)$ .*

A seguir enunciamos um teorema clássico da álgebra linear que desempenha um papel crucial na teoria de categorias tensoriais. Tal teorema é o que garante a boa definição da dimensão de Frobenius-Perron. Logo, a teoria dessa dimensão é uma aplicação do mesmo.

**Teorema 4.1.8 ([7], Theorem 3.2.1)** (Teorema de Frobenius-Perron)  
*Seja  $N$  uma matriz quadrada com entradas reais não-negativas.*

- (1)  *$N$  possui um autovalor real não-negativo. O maior autovalor real não-negativo  $\lambda(N)$  de  $N$  domina o valor absoluto de todos os outros autovalores  $\mu$  de  $N$ , isto é,  $\lambda(N) \geq |\mu|$ . Além disso, existe um autovetor de  $N$  com entradas não-negativas e autovalor  $\lambda(N)$ .*
- (2) *Se  $N$  tem entradas estritamente positivas então  $\lambda(N)$  é um autovalor positivo simples e o correspondente autovetor pode ser normalizado de maneira a ter entradas estritamente positivas. Além disso,  $|\mu| < \lambda(N)$  para qualquer outro autovalor  $\mu$  de  $N$ .*
- (3) *Se a matriz  $N$  com entradas não-negativas possui autovetor com entradas estritamente positivas, então o correspondente autovalor é  $\lambda(N)$ .*

**Definição 4.1.9** *Um  $\mathbb{Z}_+$ -anel  $A$  com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$  é dito transitivo se, para quaisquer  $b_i, b_k \in B$ , existem  $b_j, b_l \in B$  tais que  $b_i b_j$  e  $b_l b_i$  contêm  $b_k$ , isto é, na escrita como combinação linear dos elementos de  $B$ , o coeficiente de  $b_k$  é não-nulo.*

**Proposição 4.1.10** *Todo anel base unital é transitivo.*

**Demonstração:** Sejam  $b_j, b_k \in B$ . Mostremos que existe  $l \in I$  tal que  $b_i b_j = \sum_{r \in I} c_{ij}^r b_r$ , com  $c_{ij}^k > 0$ . Seja  $i_0 \in I$  tal que  $b_{i_0} = 1$ . Escrevemos

$$b_{j^*} b_j = \sum_{t \in I} c_{j^* j}^t b_t.$$

Aplicando o morfismo de grupos  $\tau$  na igualdade acima, temos

$$1 = \tau(b_{j^*} b_j) = \sum_{t \in I} c_{j^* j}^t \tau(b_t) = c_{j^* j}^{i_0},$$

pois como  $A$  é anel base unital,  $I_0 = \{i_0\}$ . Assim, podemos escrever

$$b_{j^*} b_j = \sum_{\substack{t \in I \\ t \neq i_0}} c_{j^* j}^t b_t + 1.$$

Consideremos

$$b_k b_{j^*} = \sum_{u \in I} c_{kj^*}^u b_u.$$

Multiplicando  $b_j$  à direita na igualdade acima, temos

$$b_k b_{j^*} b_j = b_k \left( \sum_{\substack{t \in I \\ t \neq i_0}} c_{j^*j}^t b_t + 1 \right) = \sum_{\substack{t \in I \\ t \neq i_0}} c_{j^*j}^t b_k b_t + b_k,$$

e

$$\sum_{u \in I} c_{kj^*}^u b_u b_j = \sum_{s \in I} \sum_{u \in I} c_{kj^*}^u c_{uj}^s b_s.$$

Dessa forma,

$$\sum_{\substack{t \in I \\ t \neq i_0}} c_{j^*j}^t b_k b_t + b_k = \sum_{s \in I} \sum_{u \in I} c_{kj^*}^u c_{uj}^s b_s.$$

Como o coeficiente de  $b_k$  é não-nulo do lado esquerdo da igualdade, também o será do lado direito. Assim,  $\sum_{u \in I} c_{kj^*}^u c_{uj}^k > 0$ , donde existe  $l \in I$  tal que  $c_{lj}^k > 0$ . Analogamente mostra-se que existe  $i \in I$  tal que  $c_{ji}^k > 0$ . ■

Seja  $A$  um  $\mathbb{Z}_+$ -anel transitivo unital com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base finita  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ . Escrevemos  $n = |I|$ . Denotamos os elementos de  $I$  por  $1, 2, \dots, n$ .

Fixemos  $i \in I$ . Seja  $N_{b_i}$  a matriz de multiplicação à esquerda por  $b_i$ . Para cada  $j \in I$ , temos

$$b_i b_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k b_k,$$

com  $c_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$ . Logo,  $N_{b_i} = (c_{ij}^k)_{\substack{k=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$  e, portanto, possui entradas (inteiras) não-negativas. Pelo Teorema de Frobenius-Perron  $N_{b_i}$  admite um autovalor maximal não-negativo.

Definimos  $\text{FPdim}(b_i)$  como sendo o autovalor maximal não-negativo da matriz  $N_{b_i}$ , para cada  $i \in I$ . Estende-se tal morfismo da base  $B$  para o anel  $A$  por aditividade, definindo o morfismo de grupos  $\text{FPdim}: A \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definição 4.1.11** *Seja  $x \in A$ . A dimensão de Frobenius-Perron de  $x$  é o número real  $\text{FPdim}(x)$ .*

**Proposição 4.1.12 ([7], Proposition 3.3.6)** *Seja  $A$  um  $\mathbb{Z}_+$ -anel transitivo unital com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base finita  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ . Então*

- (1) *A função  $\text{FPdim}: A \rightarrow \mathbb{C}$  é um morfismo de anéis.*
- (2) *Existe um único, a menos de escalar, elemento não-nulo  $R \in A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  tal que  $xR = \text{FPdim}(x)R$ , para todo  $x \in A$ , e tal  $R$  satisfaz a igualdade  $Ry = \text{FPdim}(y)R$ , para todo  $y \in A$ .*
- (3)  *$\text{FPdim}$  é o único caracter de  $A$  que toma valores não-negativos sobre  $B$ , esses valores são, de fato, estritamente positivos.*
- (4) *Se  $x \in A$  possui coeficientes não-negativos com respeito à base  $B$  então  $\text{FPdim}(x)$  é o maior autovalor não-negativo da matriz  $N_x$ , matriz de multiplicação à esquerda por  $x$ .*

Para que seja possível definir o morfismo de grupos  $\text{FPdim}: A \rightarrow \mathbb{C}$ , é suficiente que  $A$  possua uma  $\mathbb{Z}_+$ -base finita. No entanto, é pedido que  $A$  seja um  $\mathbb{Z}_+$ -anel transitivo unital, pois estas hipóteses garantem, pela proposição acima, que a função  $\text{FPdim}: A \rightarrow \mathbb{C}$  seja um morfismo de anéis. Mais ainda, é possível caracterizar a dimensão de Frobenius-Perron como o único caracter de  $A$  que toma valores não-negativos sobre a  $\mathbb{Z}_+$ -base.

**Definição 4.1.13** *Seja  $A$  um anel fusão. O número real*

$$\text{FPdim}(A) = \sum_{i \in I} \text{FPdim}(b_i)^2$$

*é chamado dimensão de Frobenius-Perron de  $A$ .*

Observemos que pelo item (3) da Proposição 4.1.12, para qualquer anel de fusão  $A$ , temos  $\text{FPdim}(A) > 0$ .

**Exemplo 4.1.14** De acordo com o Exemplo 4.1.4,  $\text{Mat}_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  é um anel fusão com base  $\{1\}$ . Nesse caso,  $\text{FPdim}(1) = 1$  e  $\text{FPdim}(\mathbb{Z}) = 1$ .

**Exemplo 4.1.15** Seja  $G$  um grupo finito. Pelo Exemplo 4.1.5,  $\mathbb{Z}G$  é um anel fusão. Para cada  $g \in G$ , a matriz de multiplicação à esquerda por  $g$ , denotada por  $N_g$ , é uma matriz de permutação, isto é, uma matriz cujas colunas são uma permutação das colunas da matriz identidade. Claramente,  $\lambda = 1$  é um autovalor de  $N_g$ . Além disso, se  $\lambda$  é um autovalor de  $N_g$  e  $v$  é um autovetor associado a  $\lambda$  então

$$|\lambda||v| = \|\lambda v\| = \|N_g v\| = \|v\|.$$

Assim,  $|\lambda| = 1$ , pois  $v \neq 0$ . Logo,  $\text{FPdim}(g) = 1$ . Portanto,  $\text{FPdim}(\mathbb{Z}G) = |G|$ .



**Exemplo 4.1.16** Seja  $A$  o anel fusão Yang-Lee, apresentado no Exemplo 4.1.6. Temos que as matrizes de multiplicação à esquerda por 1 e  $X$  são, respectivamente,

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } N_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Os polinômios característicos de  $N_1$  e  $N_X$  são, respectivamente,  $(X - 1)^2$  e  $X^2 - X - 1$ . Assim,  $\text{FPdim}(1) = 1$ ,  $\text{FPdim}(X) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\text{FPdim}(A) = 1^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ .

**Proposição 4.1.17 ([7], Proposition 3.3.9)** *Sejam  $A$  um  $\mathbb{Z}_+$ -anel transitivo unital com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base finita e  $*$  :  $I \rightarrow I$  uma bijeção que estende-se a uma involução de  $A$ . Então  $\text{FPdim}$  é invariante por  $*$ , isto é,  $\text{FPdim}(x) = \text{FPdim}(x^*)$ , para todo  $x \in A$ .*

Observemos que se  $A$  é um anel de fusão então a involução  $*$  :  $I \rightarrow I$  dada na definição de anel base estende-se a uma involução de  $A$ . Logo, vale a conclusão da proposição acima.

Para a proposição seguinte, sejam  $A, A'$  dois  $\mathbb{Z}_+$ -anéis transitivos unitais com bases finitas  $I_A = \{b_i\}_{i=1}^n$  e  $I_{A'} = \{b'_j\}_{j=1}^m$ , respectivamente.

**Proposição 4.1.18** *Seja  $f : A \rightarrow A'$  um morfismo de anéis tal que  $f(1) = 1$  e que a matriz de  $f$  da base  $I_A$  para a base  $I_{A'}$ , denotada por  $[f]$ , possua todas as entradas não-negativas. Então  $f$  preserva dimensão de Frobenius-Perron.*

**Demonstração:** Definimos  $\xi : A \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\xi(x) = \text{FPdim}(f(x))$ , para todo  $x \in A$ . É claro que  $\xi$  é um morfismo de anéis, pois é uma composição de morfismos de anéis. Além disso,  $\xi(1) = \text{FPdim}(f(1)) = \text{FPdim}(1) = 1$ .

Mostremos que  $\xi$  é um caracter de  $A$  que toma valores não-negativos sobre  $I_A$ . Escrevemos  $[f] = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ . Seja  $b_j \in I_A$ . Então

$$\xi(b_j) = \text{FPdim}(f(b_j)) = \text{FPdim}\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} b'_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \text{FPdim}(b'_i) \geq 0.$$

Pela Proposição 4.1.12, segue que  $\xi = \text{FPdim}$ . Logo, para todo  $x \in A$ ,  $\text{FPdim}(f(x)) = \text{FPdim}(x)$ . ■

As próximas definições e resultados são encontrados em [19]. Essa é a principal referência usada neste trabalho para o estudo de  $\mathbb{Z}_+$ -módulos. A aplicação para tais noções é desenvolvida na próxima seção, sobre grupos e anéis de Grothendieck, onde fica claro que o grupo de Grothendieck de uma categoria módulo indecomponível sobre uma categoria de fusão  $\mathcal{C}$ , sob certas condições, é um módulo base irreduzível sobre o anel de Grothendieck de  $\mathcal{C}$ . A partir daí, o leitor poderá entender a “ligação estreita” entre as duas teorias, dita no início do capítulo.

**Definição 4.1.19** *Seja  $A$  um  $\mathbb{Z}_+$ -anel com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ .*

- (1) *Um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo  $M$  sobre  $A$  é um  $A$ -módulo munido de uma  $\mathbb{Z}$ -base fixada  $I_M = \{m_j\}_{j \in L}$  tal que  $b_i m_j = \sum_{k \in L} d_{ij}^k m_k$ , com  $d_{ij}^k$  inteiro não-negativo, para quaisquer  $i \in I$  e  $j, k \in L$ .*
- (2) *Seja  $A$  um anel base. Um módulo base sobre  $A$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo  $M$  tal que  $d_{ij}^k = d_{i^*k}^j$ , em que os inteiros  $d_{ij}^k$  são os coeficientes da definição acima.*
- (3) *Dois  $\mathbb{Z}_+$ -módulos  $M$  e  $M'$  sobre  $A$  com bases  $\{m_i\}_{i \in L}$  e  $\{m'_j\}_{j \in J}$ , respectivamente, são equivalentes se existe uma bijeção  $\phi : L \rightarrow J$  tal que o morfismo induzido de grupos abelianos  $\phi' : M \rightarrow M'$  definido por  $\phi'(m_i) = m'_{\phi(i)}$  é um isomorfismo de  $A$ -módulos.*
- (4) *A soma direta de dois  $\mathbb{Z}_+$ -módulos  $M$  e  $M'$  sobre  $A$  é o módulo  $M \oplus M'$  sobre  $A$  com  $\mathbb{Z}$ -base dada pela união das  $\mathbb{Z}$ -bases de  $M$  e  $M'$ .*
- (5) *Um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A$  é indecomponível se não é equivalente a uma soma direta de dois  $\mathbb{Z}_+$ -módulos não-nulos.*
- (6) *Um  $\mathbb{Z}_+$ -submódulo de um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo  $M$  sobre  $A$  com base  $I_M = \{m_i\}_{i \in L}$  é um  $A$ -submódulo  $N$  de  $M$  que é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo cuja  $\mathbb{Z}$ -base fixada  $I_N$  é um subconjunto de  $I_M$ .*
- (7) *Um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo  $M$  sobre  $A$  é dito irreduzível se não possui  $\mathbb{Z}_+$ -submódulos próprios (em outras palavras, o  $\mathbb{Z}$ -span de qualquer subconjunto próprio da base  $I_M$  de  $M$  não é um  $A$ -submódulo).*

**Exemplo 4.1.20** *Seja  $A$  um  $\mathbb{Z}_+$ -anel com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ . Então  $A$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre si mesmo com a mesma base.*

**Exemplo 4.1.21** Seja  $A$  um anel base com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ . Então  $A$  é um módulo base sobre si mesmo. De fato, para cada  $i, j, k \in I$ , temos que

$$\tau((b_{i^*} b_k) b_{j^*}) = \tau\left(\sum_{t \in I} c_{i^* k}^t b_t b_{j^*}\right) = c_{i^* k}^j$$

e

$$\tau(b_k (b_i b_j)^*) = \tau\left(b_k \sum_{t \in I} c_{i j}^t b_{t^*}\right) = \tau\left(\sum_{t \in I} c_{i j}^t b_k b_{t^*}\right) = c_{i j}^k.$$

Além disso,

$$\tau((b_{i^*} b_k) b_{j^*}) = \tau(b_{i^*} (b_k b_{j^*})) \stackrel{(4.1)}{=} \tau((b_k b_{j^*}) b_{i^*}) = \tau(b_k (b_i b_j)^*)$$

e, portanto,  $c_{i^* k}^j = c_{i j}^k$ .

A irredutibilidade é uma das propriedades necessárias para a boa definição da dimensão de Frobenius-Perron de elementos da base de um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo. A próxima proposição traz uma condição suficiente para que um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo seja irredutível.

**Proposição 4.1.22 ([19], Lemma 1)** *Seja  $M$  um módulo base sobre um anel base  $A$ . Se  $M$  é indecomponível como  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A$  então  $M$  é irredutível como  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A$ .*

**Proposição 4.1.23** *Seja  $A$  um  $\mathbb{Z}_+$ -anel com uma  $\mathbb{Z}$ -base finita. Se  $M$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo irredutível sobre  $A$  com  $\mathbb{Z}$ -base  $I_M = \{m_l\}_{l \in L}$ , então  $L$  é um conjunto finito.*

**Demonstração:** Fixemos  $l_0 \in L$ . Observemos que existe  $i \in I$  tal que  $b_i m_{l_0} \neq 0$ . Caso contrário, escrevendo  $1_A = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$ , teríamos

$$m_{l_0} = 1_A m_{l_0} = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i b_i\right) m_{l_0} = \sum_{i \in I} \alpha_i (b_i m_{l_0}) = 0,$$

o que é um absurdo, pois  $m_{l_0}$  é um elemento da base  $I_M$ .

Seja  $J = \{i \in I : b_i m_{l_0} \neq 0\}$ . Para cada  $i \in J$ , temos

$$b_i m_{l_0} = \sum_{k \in L_i} d_{i l_0}^k m_k,$$

em que  $L_i$  é um conjunto (finito) e  $d_{i l_0}^k > 0$ , para todo  $k \in L_i$ . Como  $I$  é um conjunto finito, segue que  $\cup_{i \in J} L_i$  também o é. Seja  $X =$

$\mathbb{Z} - \text{span}\{m_k : k \in \cup_{i \in J} L_i\}$ . Mostremos que  $X$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -submódulo de  $M$ . Para isto, é suficiente mostrar que  $X$  é um  $A$ -submódulo.

Sejam  $a \in A$  e  $k \in \cup_{i \in J} L_i$ . Provemos que  $am_k \in X$ . Se  $am_k = 0$  então é claro que  $am_k \in X$ . Suponhamos  $am_k \neq 0$ . Como  $k \in \cup_{i \in J} L_i$ , existe  $i_1 \in J$  tal que  $k \in L_{i_1}$ , isto é,  $d_{i_1 l_0}^k > 0$ . Como  $a \in A$ , podemos escrever

$$a = \sum_{i \in I} a_i b_i,$$

com  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Então

$$am_k = \sum_{i \in I} a_i b_i m_k = \sum_{i \in I} a_i \sum_{l \in L} d_{ik}^l m_l = \sum_{l \in L'} \left( \sum_{i \in I} a_i d_{ik}^l \right) m_l,$$

em que  $L'$  é um subconjunto finito de  $L$  tal que  $\sum_{i \in I} a_i d_{ik}^l \neq 0$  para todo  $l \in L'$ . Seja  $l \in L'$ . Mostremos que  $l \in \cup_{i \in J} L_i$ . Como  $\sum_{i \in I} a_i d_{ik}^l \neq 0$ , existe  $i_2 \in I$  tal que  $d_{i_2 k}^l > 0$ . Assim,

$$d_{i_1 l_0}^k d_{i_2 k}^l > 0. \quad (4.2)$$

Consideremos o elemento  $b_{i_2} b_{i_1} m_{l_0}$ . Por um lado, temos

$$\begin{aligned} b_{i_2}(b_{i_1} m_{l_0}) &= b_{i_2} \sum_{t \in L_{i_1}} d_{i_1 l_0}^t m_t = \sum_{t \in L_{i_1}} d_{i_1 l_0}^t b_{i_2} m_t \\ &= \sum_{t \in L_{i_1}} d_{i_1 l_0}^t \sum_{u \in L} d_{i_2 t}^u m_u = \sum_{u \in L} \left( \sum_{t \in L_{i_1}} d_{i_1 l_0}^t d_{i_2 t}^u \right) m_u. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(b_{i_2} b_{i_1}) m_{l_0} = \sum_{j \in I} c_{i_2 i_1}^j b_j m_{l_0} = \sum_{j \in I} \sum_{r \in L} c_{i_2 i_1}^j d_{j l_0}^r m_r.$$

Dessa forma, temos

$$\sum_{u \in L} \left( \sum_{t \in L_{i_1}} d_{i_1 l_0}^t d_{i_2 t}^u \right) m_u = \sum_{r \in L} \left( \sum_{j \in I} c_{i_2 i_1}^j d_{j l_0}^r \right) m_r.$$

Por (4.2), o coeficiente de  $m_l$  do lado esquerdo da igualdade acima,  $\sum_{t \in L_{i_1}} d_{i_1 l_0}^t d_{i_2 t}^l$ , é não-nulo. Assim, o coeficiente de  $m_l$  do lado direito também o é. Logo,  $\sum_{j \in I} c_{i_2 i_1}^j d_{j l_0}^l > 0$ . Donde, existe  $j_0 \in I$  tal que  $d_{j_0 l_0}^l > 0$ , isto é,  $l \in L_{j_0}$ . Portanto,  $am_k$  é uma combinação linear de elementos  $m_l$  com  $l \in \cup_{i \in J} L_i$ , isto é,  $am_k \in X$ .

Como  $M$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo irredutível, isto implica  $X = M$ , donde  $M$  possui uma  $\mathbb{Z}$ -base finita. ■

Para o restante desta seção, consideremos  $A$  um anel fusão, isto é,  $A$  é um anel base unital com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base finita  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ . Pela Proposição 4.1.10,  $A$  é transitivo.

Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo base irredutível sobre  $A$ . Pela proposição acima o mesmo possui uma  $\mathbb{Z}$ -base finita  $I_M = \{m_i\}_{i \in L}$ . Seja  $|L| = s$ . Denotamos os elementos de  $L$  por  $1, \dots, s$ .

Segundo ([12], Corolário 5.13), o  $\mathbb{Z}$ -bimódulo  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  é um  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial com base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}} = \{m_i \otimes 1\}_{i=1}^s$ .

Seja  $x \in A$ . A transformação linear

$$T_x : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

dada por  $T_x(m_i \otimes 1) = x \cdot (m_i \otimes 1) = xm_i \otimes 1$  é chamada *operador multiplicação à esquerda por  $x$  em  $M$* . Denotamos por  $[x]_{|M}$  a matriz de tal operador na base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$ . Como  $M$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo, para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$ , podemos escrever

$$xm_j = \sum_{i=1}^s x_{ij} m_i,$$

com  $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$T_x(m_j \otimes 1) = xm_j \otimes 1 = \left( \sum_{i=1}^s x_{ij} m_i \right) \otimes 1 = \sum_{i=1}^s x_{ij} (m_i \otimes 1).$$

Portanto, as coordenadas de  $T_x(m_j \otimes 1)$  na base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$  são exatamente as coordenadas de  $xm_j$  na base  $I_M$ .

Não havendo risco de confusão, escreveremos os elementos  $m_i \otimes 1$  da base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$  simplesmente como  $m_i$ .

Para indicarmos o vetor coordenada (vetor coluna) de um elemento  $v$  de um espaço vetorial em relação a uma base fixada, usamos a notação  $[v]$ .

O lema a seguir é feito para estender morfismos de  $A$ -módulos para o contexto explicado acima.

**Lema 4.1.24** *Seja  $g : M \rightarrow N$  um morfismo de  $A$ -módulos. Então  $g$  induz uma transformação linear  $\bar{g} : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  que é também um morfismo de  $A$ -módulos.*

**Demonstração:** Definimos  $g' : M \times \mathbb{C} \rightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  por  $g'(m, \alpha) = g(m) \otimes \alpha$ . É de fácil verificação que  $g'$  é uma função  $\mathbb{Z}$ -balanceada. Logo, existe um único morfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos  $\bar{g} : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  tal que  $\bar{g}\iota = g'$ , em que  $\iota : M \times \mathbb{C} \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  é a função balanceada canônica. Portanto,  $\bar{g}(m \otimes \alpha) = g(m) \otimes \alpha$ .

Além disso,

$$\bar{g}(\beta(m \otimes \alpha)) = \bar{g}(m \otimes \alpha\beta) = g(m) \otimes \alpha\beta = \beta(g(m) \otimes \alpha) = \beta\bar{g}(m \otimes \alpha)$$

e, dado  $a \in A$ ,

$$\bar{g}(a(m \otimes \alpha)) = \bar{g}((am) \otimes \alpha) = g(am) \otimes \alpha = ag(m) \otimes \alpha = a\bar{g}(m \otimes \alpha).$$

Portanto,  $\bar{g}$  é uma transformação linear e um morfismo de  $A$ -módulos.

■

**Lema 4.1.25** *Seja  $x \in A$ . Então  $[x]_M = [x^*]_M^T$ .*

**Demonstração:** Como  $x \in A$  e  $B = \{b_i\}_{i \in I}$  é uma  $\mathbb{Z}_+$ -base de  $A$ , podemos escrever

$$x = \sum_{i \in I} a_i b_i.$$

Assim,

$$x^* = \sum_{i \in I} a_i b_{i^*}.$$

Escrevemos também  $[x]_M = (x_{kj})_{\substack{k=1, \dots, s \\ j=1, \dots, s}}$  e  $[x^*]_M = (x_{kj}^*)_{\substack{k=1, \dots, s \\ j=1, \dots, s}}$ .

Temos, para cada  $j \in L$ ,

$$x m_j = \sum_{i \in I} a_i b_i m_j = \sum_{i \in I} a_i \sum_{k \in L} d_{ij}^k m_k = \sum_{k \in L} \left( \sum_{i \in I} a_i d_{ij}^k \right) m_k$$

e

$$x^* m_j = \sum_{i \in I} a_i b_{i^*} m_j = \sum_{i \in I} a_i \sum_{k \in L} d_{i^* j}^k m_k = \sum_{k \in L} \left( \sum_{i \in I} a_i d_{i^* j}^k \right) m_k.$$

Assim, para cada  $k \in L$ , temos

$$x_{kj} = \sum_{i \in I} a_i d_{ij}^k \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in I} a_i d_{i^* j}^k = x_{jk}^*,$$

em que igualdade  $(*)$  segue do fato de  $M$  ser um módulo base. Portanto,  $[x]_M = [x^*]_M^T$ . ■

**Proposição 4.1.26** *Sejam  $x \in A$  e  $y \in Z(A)$ . Então as matrizes  $[y]|_M$  e  $[x]|_M$  comutam.*

**Demonstração:** Sejam  $[y]|_M = (y_{ij})_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}}$  e  $[x]|_M = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}}$ .  
Então

$$ym_j = \sum_{i=1}^s y_{ij}m_i \text{ e } xm_j = \sum_{i=1}^s x_{ij}m_i.$$

Temos que

$$\begin{aligned} (xy)m_j &= x(ym_j) = x\left(\sum_{i=1}^s y_{ij}m_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^s y_{ij}(xm_i) = \sum_{i=1}^s y_{ij}\left(\sum_{k=1}^s x_{ki}m_k\right) \\ &= \sum_{i,k=1}^s y_{ij}x_{ki}m_k = \sum_{k=1}^s \left(\sum_{i=1}^s y_{ij}x_{ki}\right)m_k \end{aligned}$$

Logo,

$$[xy]|_M = \left(\sum_{i=1}^s x_{ki}y_{ij}\right)_{\substack{k=1,\dots,s \\ j=1,\dots,s}} = [x]|_M[y]|_M.$$

Analogamente,  $[y]|_M[x]|_M = [yx]|_M$ . Portanto,  $[x]|_M[y]|_M = [xy]|_M = [yx]|_M = [y]|_M[x]|_M$ . ■

Pela Proposição 4.1.7, o elemento  $z = \sum_{i,j \in I} b_i b_j b_{i^*} \in Z(A)$ . Usaremos tal elemento na demonstração do próximo teorema, que é fundamental para definir a dimensão de Frobenius-Perron para elementos de um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo.

**Lema 4.1.27** *Os coeficientes de  $z$  com respeito à base  $B$  são estritamente positivos.*

**Demonstração:** Temos

$$z = \sum_{i,j \in I} b_i b_j b_{i^*} = \sum_{i,j,k \in I} c_{ij}^k b_k b_{i^*} = \sum_{i,j,k,l \in I} c_{ij}^k c_{ki^*}^l b_l.$$

Assim, fixando  $l_0$ , o coeficiente de  $b_{l_0}$  é  $\sum_{i,j,k \in I} c_{ij}^k c_{ki^*}^{l_0}$ . Fixando  $k_0$ , como  $A$  é um anel transitivo, existe  $i_0 \in I$  tal que  $c_{k_0 i_0}^{l_0} > 0$ . Como  $*$  é uma função sobrejetora,  $i_0 = i_1^*$ , para algum  $i_1 \in I$ . Assim,  $c_{k_0 i_1^*}^{l_0} > 0$ .

Novamente como  $A$  é transitivo, considerando  $i_1$  e  $k_0$ , existe um  $j_0 \in I$  tal que  $c_{i_1 j_0}^{k_0} > 0$ . Dessa forma,

$$\sum_{i,j,k \in I} c_{ij}^k c_{ki^*}^{l^0} \geq c_{i_1 j_0}^{k_0} c_{k_0 i_1^*}^{l_0} > 0.$$

■

**Lema 4.1.28** *A matriz  $[z]_M$  possui entradas estritamente positivas.*

**Demonstração:** Como  $A$  é unital, consideremos  $i_0 \in I$  tal que  $b_{i_0} = 1$ . Temos que  $1 = \tau(b_{i_0}) = \tau(b_{i_0} b_{i_0})$ . Logo, pela definição de  $\tau$ ,  $i_0^* = i_0$ .

Seja  $l \in L$ . Como

$$z = \sum_{i,j \in I} b_i b_j b_{i^*} = \sum_{\substack{i \neq i_0 \\ j \neq i_0}} b_i b_j b_{i^*} + b_{i_0} b_{i_0} b_{i_0^*} = \sum_{\substack{i \neq i_0 \\ j \neq i_0}} b_i b_j b_{i^*} + 1,$$

temos

$$zm_l = \left( \sum_{\substack{i \neq i_0 \\ j \neq i_0}} b_i b_j b_{i^*} + 1 \right) m_l = \sum_{\substack{i \neq i_0 \\ j \neq i_0}} b_i b_j b_{i^*} m_l + m_l \neq 0.$$

Pelo lema acima, podemos escrever  $z = \sum_{i \in I} a_i b_i$ , com  $a_i > 0$  para todo  $i \in I$ . Assim,

$$zm_l = \sum_{i \in I} a_i b_i m_l = \sum_{k \in L} \left( \sum_{i \in I} a_i d_{il}^k \right) m_k.$$

Seja  $K = \{k \in L : \sum_{i \in I} a_i d_{il}^k > 0\}$ . Notemos que  $K \neq \emptyset$ , pois  $zm_l \neq 0$ . Consideremos  $X = \mathbb{Z} - \text{span}\{m_j : j \in K\}$ . Mostremos que  $X$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -submódulo de  $M$ .

Sejam  $j \in K$  e  $x \in A$ . Como  $j \in K$ , temos que  $\sum_{i \in I} a_i d_{il}^j > 0$ . Assim, existe  $i_1 \in I$  tal que  $d_{i_1 l}^j > 0$ . Escrevemos  $x = \sum_{i \in I} x_i b_i$ . Se  $xm_j = 0$  então  $xm_j \in X$ . Suponhamos  $xm_j \neq 0$ . Então

$$xm_j = \sum_{i \in I} x_i b_i m_j = \sum_{t \in L'} \sum_{i \in I} x_i d_{ij}^t m_t,$$

em que  $L' \subseteq L$  é tal que  $\sum_{i \in I} x_i d_{ij}^t \neq 0$ , para todo  $t \in L'$ . Seja  $t \in L'$ . Então existe  $i_2 \in I$  tal que  $d_{i_2 j}^t > 0$ . Assim,

$$d_{i_1 l}^j d_{i_2 j}^t > 0. \tag{4.3}$$

Consideremos o elemento  $b_{i_2} b_{i_1} m_l$ . Por um lado, temos



$$\begin{aligned}
b_{i_2}(b_{i_1}m_l) &= b_{i_2} \sum_{s \in L} d_{i_1 l}^s m_s = \sum_{s \in L} d_{i_1 l}^s b_{i_2} m_s \\
&= \sum_{s \in L} d_{i_1 l}^s \sum_{w \in L} d_{i_2 s}^w m_w = \sum_{w \in L} \left( \sum_{s \in L} d_{i_1 l}^s d_{i_2 s}^w \right) m_w.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(b_{i_2}b_{i_1})m_l = \sum_{u \in I} c_{i_2 i_1}^u b_u m_l = \sum_{u \in I} \sum_{r \in L} c_{i_2 i_1}^u d_{ul}^r m_r.$$

Dessa forma, temos

$$\sum_{w \in L} \left( \sum_{s \in L} d_{i_1 l}^s d_{i_2 s}^w \right) m_w = \sum_{r \in L} \left( \sum_{u \in I} c_{i_2 i_1}^u d_{ul}^r \right) m_r.$$

Por (4.3), o coeficiente de  $m_t$  do lado esquerdo da igualdade acima,  $\sum_{s \in L} d_{i_1 l}^s d_{i_2 s}^t$ , é não-nulo. Assim, o coeficiente de  $m_t$  do lado direito também o é. Logo,  $\sum_{u \in I} c_{i_2 i_1}^u d_{ul}^t > 0$ . Donde existe  $u_0 \in I$  tal que  $d_{u_0 l}^t > 0$ . Dessa forma,  $\sum_{i \in I} a_i d_{il}^t > 0$ , pois  $a_i > 0$ , para todo  $i \in I$ . Logo,  $t \in K$ . Portanto,  $xm_j \in X$ .

Como  $M$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo irredutível, isto implica  $X = M$ , donde  $\{m_j : j \in K\}$  é uma  $\mathbb{Z}$ -base de  $M$ . Portanto,  $K = L$ , isto é, todas as entradas da matriz  $[z]_M$  são estritamente positivas. ■

O próximo teorema é vital para que possamos entender a dimensão de Frobenius-Perron em categorias módulo. Tal teorema nos mostra como surge o “elemento” tal que, a partir dele, se possa definir a dimensão de Frobenius-Perron dos elementos de uma  $\mathbb{Z}$ -base fixada de um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo.

**Teorema 4.1.29** *Seja  $M$  um módulo base irredutível sobre um anel fusão  $A$ . Existe um único, a menos de um escalar, autovetor comum  $\mathbf{m}$  de todas as matrizes  $[x]_M$ , com  $x \in A$ , que possui entradas estritamente positivas com respeito à base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$ . O correspondente autovalor de  $[x]_M$  é  $\text{FPdim}(x)$ .*

**Demonstração:** Seja

$$z = \sum_{i, j \in I} b_i b_j b_{i^*}.$$

Sabemos do Lema 4.1.28 que a matriz  $[z]_M$  possui entradas estritamente positivas. Pelo Teorema de Frobenius-Perron, item (2), a matriz

$[z]_M$  possui um autovetor  $\mathbf{m}$  com entradas estritamente positivas e autovalor associado  $\lambda$  positivo simples. Daí,  $[z]_M[\mathbf{m}] = \lambda[\mathbf{m}]$ .

Seja  $x \in A$ . Pela Proposição 4.1.26, como  $z \in Z(A)$ , segue que  $[z]_M[x]_M = [x]_M[z]_M$ . Daí,

$$\begin{aligned} [z]_M([x]_M[\mathbf{m}]) &= ([z]_M[x]_M)[\mathbf{m}] \\ &= ([x]_M[z]_M)[\mathbf{m}] \\ &= [x]_M([z]_M[\mathbf{m}]) \\ &= [x]_M(\lambda[\mathbf{m}]) \\ &= \lambda([x]_M[\mathbf{m}]). \end{aligned}$$

Logo,  $[x]_M[\mathbf{m}]$  é um autovetor de  $[z]_M$  associado ao autovalor simples  $\lambda$ . Assim,  $[x]_M[\mathbf{m}] = \lambda_x[\mathbf{m}]$ , para algum  $\lambda_x \in \mathbb{C}$ .

Mostremos que  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\lambda(x) = \lambda_x$  é uma representação de  $A$ .

Sejam  $\lambda_x$  e  $\lambda'_x$ . Então  $[x]_M[\mathbf{m}] = \lambda_x[\mathbf{m}]$  e  $[x]_M[\mathbf{m}] = \lambda'_x[\mathbf{m}]$ . Assim,  $\lambda_x[\mathbf{m}] = \lambda'_x[\mathbf{m}]$  e como  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ , isto implica que  $\lambda_x = \lambda'_x$ . Logo,  $\lambda$  está bem definida.

Sejam  $x, y \in A$ . Temos  $[x + y]_M[\mathbf{m}] = \lambda_{x+y}[\mathbf{m}]$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} [x + y]_M[\mathbf{m}] &= ([x]_M + [y]_M)[\mathbf{m}] = [x]_M[\mathbf{m}] + [y]_M[\mathbf{m}] \\ &= \lambda_x[\mathbf{m}] + \lambda_y[\mathbf{m}] = (\lambda_x + \lambda_y)[\mathbf{m}]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_{x+y}[\mathbf{m}] = (\lambda_x + \lambda_y)[\mathbf{m}]$$

e portanto  $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$ , isto é,  $\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)$ . Além disso,

$$\lambda_{xy}[\mathbf{m}] = [xy]_M[\mathbf{m}] = [x]_M[y]_M[\mathbf{m}] = [x]_M\lambda_y[\mathbf{m}] = \lambda_x\lambda_y[\mathbf{m}].$$

Donde,  $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$ . É fácil ver que  $[1]_M$  é a matriz identidade. Logo,  $[1]_M[\mathbf{m}] = 1[\mathbf{m}]$  e assim,  $\lambda(1) = \lambda_1 = 1$ .

Mostremos que  $\lambda$  é um caracter de  $A$  que toma valores não-negativos nos elementos de  $B$ . Seja  $i \in I$ . Então  $[b_i]_M[\mathbf{m}] = \lambda_{b_i}[\mathbf{m}]$ . Como  $M$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo, segue que  $[b_i]_M$  possui entradas não-negativas. Além disso,  $[\mathbf{m}]$  possui entradas estritamente positivas. Dessa forma, a última igualdade implica  $\lambda(b_i) = \lambda_{b_i}$  não-negativo. Portanto, pela Proposição 4.1.12, item (3), segue que  $\lambda = \text{FPdim}$ . Isto é,  $[x]_M[\mathbf{m}] = \text{FPdim}(x)[\mathbf{m}]$ , para todo  $x \in A$ .

Em particular,  $[z]_M[\mathbf{m}] = \text{FPdim}(z)[\mathbf{m}]$ . Logo,  $\lambda = \text{FPdim}(z)$ .

Para provarmos a unicidade de  $\mathbf{m}$ , suponhamos  $\mathbf{n} \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  com entradas estritamente positivas tal que  $[x]_M[\mathbf{n}] = \text{FPdim}(x)[\mathbf{n}]$ , para todo  $x \in A$ . Em particular,  $[z]_M[\mathbf{n}] = \text{FPdim}(z)[\mathbf{n}] = \lambda[\mathbf{n}]$ . Logo,  $[\mathbf{n}]$  é um autovetor de  $[z]_M$  com autovalor associado  $\lambda$ . Como  $\lambda$  é um autovalor simples, segue que  $\mathbf{n} = \lambda' \mathbf{m}$ , para algum  $\lambda' > 0$ . ■

**Definição 4.1.30** Um elemento  $\mathbf{m}$  como no teorema acima é chamado elemento regular de  $M$ .

Notemos que tal  $\mathbf{m}$  está definido a menos de um escalar positivo.

**Corolário 4.1.31** Seja  $\mathbf{m} \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  tal que  $[\mathbf{m}]$  possua entradas estritamente positivas com respeito à base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$ . Então  $\mathbf{m}$  é um elemento regular de  $M$  se, e somente se,

$$[\mathbf{m}]^T[x]_M = \text{FPdim}(x)[\mathbf{m}]^T, \quad (4.4)$$

para todo  $x \in A$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{m} \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  com entradas estritamente positivas com respeito à base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$ . Temos que  $[\mathbf{m}]^T[x]_M = \text{FPdim}(x)[\mathbf{m}]^T$ , para todo  $x \in A$  se, e somente se,  $[\mathbf{m}]^T[x^*]_M = \text{FPdim}(x^*)[\mathbf{m}]^T$  para todo  $x \in A$ .

Aplicando a transposta nesta última igualdade, temos  $[x^*]_M^T[\mathbf{m}] = \text{FPdim}(x^*)[\mathbf{m}]$ . Pelo Lema 4.1.25, temos  $[x^*]_M^T = [x]_M$  e pela Proposição 4.1.17,  $\text{FPdim}(x) = \text{FPdim}(x^*)$ . Assim,  $[x]_M[\mathbf{m}] = \text{FPdim}(x)[\mathbf{m}]$ , para todo  $x \in A$ . Pelo Teorema 4.1.29, segue o resultado. ■

**Definição 4.1.32** Um elemento regular  $\mathbf{m}$  de  $M$  normalizado tal que a soma dos quadrados dos seus coeficientes com respeito à base  $I_M$  é igual a  $\text{FPdim}(A)$  é chamado elemento regular canônico de  $M$ .

Seja  $I_M = \{m_i\}_{i \in L}$ . Então, para cada  $l \in L$ , temos a seguinte definição.

**Definição 4.1.33** A dimensão de Frobenius-Perron de  $m_l$  é o coeficiente de  $m_l$  do elemento regular canônico de  $M$  com respeito à base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$ . Denota-se por  $\text{FPdim}(m_l)$ , isto é,

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^s \text{FPdim}(m_i)m_i \quad e \quad \sum_{i=1}^s \text{FPdim}(m_i)^2 = \text{FPdim}(A).$$

A dimensão de Frobenius-Perron de elementos quaisquer de  $M$  é dada por aditividade. Observemos que se  $\mathbf{m}$  é o elemento regular canônico, então  $\text{FPdim}(\mathbf{m}) = \text{FPdim}(A)$ . Além disso,  $\text{FPdim}(m_i) > 0$ , para todo  $i \in L$ .

**Exemplo 4.1.34** Seja  $A$  um anel fusão com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B = \{b_i\}_{i \in I}$ . Então  $v = \sum_{k \in I} \text{FPdim}(b_k)b_k$  é o elemento regular canônico de  $A$  visto

como módulo base sobre si mesmo. De fato, consideremos  $i \in I$ . Mostremos que  $[b_i]_A[v] = \text{FPdim}(b_i)[v]$ . Para cada  $j \in I$ , escrevemos  $b_i b_j = \sum_{k \in I} c_{ij}^k b_k$ . Assim, fixado  $k \in I$ , temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} c_{ij}^k \text{FPdim}(b_j) &= \text{FPdim}\left(\sum_{j \in I} c_{ij}^k b_j\right) = \text{FPdim}\left(\sum_{j \in I} c_{i^*k}^j b_j\right) \\ &= \text{FPdim}(b_{i^*} b_k) \stackrel{(*)}{=} \text{FPdim}(b_{i^*}) \text{FPdim}(b_k) \\ &\stackrel{(**)}{=} \text{FPdim}(b_i) \text{FPdim}(b_k), \end{aligned}$$

em que as igualdades  $(*)$  e  $(**)$  seguem, respectivamente, do fato de  $\text{FPdim}$  ser morfismo de anéis e da Proposição 4.1.17. Logo,  $[b_i]_A[v] = \text{FPdim}(b_i)[v]$ , para todo  $i \in I$ , donde  $[x]_A[v] = \text{FPdim}(x)[v]$ , para todo  $x \in A$ .

Além disso, por definição,  $\text{FPdim}(A) = \sum_{i \in I} \text{FPdim}(b_i)^2$ . Portanto, a dimensão de Frobenius-Perron no módulo base  $A$  coincide com a dimensão de Frobenius-Perron no anel fusão  $A$ .

Sejam  $M$  e  $N$  dois módulos base irredutíveis sobre um anel de fusão  $A$  com  $\mathbb{Z}$ -bases  $I_M = \{m_i\}_{i=1}^s$  e  $I_N = \{n_i\}_{i=1}^t$ , respectivamente. Consideremos  $g : M \rightarrow N$  um morfismo de  $A$ -módulos. Pelo Lema 4.1.24,  $g$  induz uma transformação linear que é também um morfismo de  $A$ -módulos  $\bar{g} : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ . Denotamos por  $[g]$  a matriz de  $\bar{g}$  da base  $I_{M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$  para a base  $I_{N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$ .

**Lema 4.1.35** *Seja  $x \in A$ . Então*

$$[x]_N[g] = [g][x]_M. \quad (4.5)$$

**Demonstração:** Sejam  $[x]_M = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1, \dots, s \\ j=1, \dots, s}}$ ,  $[g] = (\beta_{ij})_{\substack{i=1, \dots, t \\ j=1, \dots, s}}$  e  $[x]_N = (\gamma_{ij})_{\substack{i=1, \dots, t \\ j=1, \dots, t}}$ . Como  $g$  é morfismo de  $A$ -módulos, para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$ , temos que  $g(xm_j) = xg(m_j)$ . Mas

$$g(xm_j) = g\left(\sum_{k=1}^s \alpha_{kj} m_k\right) = \sum_{k=1}^s \alpha_{kj} g(m_k) = \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^s \beta_{ik} \alpha_{kj} n_i$$

e

$$xg(m_j) = x\left(\sum_{k=1}^t \beta_{kj} n_k\right) = \sum_{k=1}^t \beta_{kj} (xn_k) = \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^t \gamma_{ik} \beta_{kj} n_i.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^s \beta_{ik} \alpha_{kj} n_i = \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^t \gamma_{ik} \beta_{kj} n_i.$$

Como  $I_{N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$  é uma  $\mathbb{C}$ -base, para cada  $i \in \{1, \dots, t\}$ , temos que

$$\sum_{k=1}^t \gamma_{ik} \beta_{kj} = \sum_{k=1}^s \beta_{ik} \alpha_{kj}.$$

Portanto,  $[x]_N [g] = [g][x]_M$ . ■

**Teorema 4.1.36** *Seja  $g : M \rightarrow N$  um morfismo de  $A$ -módulos. Se a matriz  $[g]$  possui todas as colunas não-nulas e entradas não-negativas, então existe um escalar positivo  $\lambda_g$  tal que*

$$\text{FPdim}(g(m_i)) = \lambda_g \text{FPdim}(m_i),$$

para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

**Demonstração:** Seja

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^s \text{FPdim}(g(m_i)) m_i.$$

Sejam  $\mathbf{n}$  o elemento regular canônico de  $N$  e  $[g] = (\beta_{ij})_{\substack{i=1, \dots, t \\ j=1, \dots, s}}$ . Então, para cada  $j \in \{1, \dots, s\}$ , temos

$$\text{FPdim}(g(m_j)) = \text{FPdim}\left(\sum_{i=1}^t \beta_{ij} n_i\right) = \sum_{i=1}^t \beta_{ij} \text{FPdim}(n_i).$$

Logo, não é difícil ver que  $[\mathbf{v}]^T = [\mathbf{n}]^T [g]$ . Assim, para todo  $x \in A$ , temos

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]^T [x]_M &= [\mathbf{n}]^T [g][x]_M \stackrel{(4.5)}{=} [\mathbf{n}]^T [x]_N [g] \\ &\stackrel{(4.4)}{=} \text{FPdim}(x) [\mathbf{n}]^T [g] = \text{FPdim}(x) [\mathbf{v}]^T. \end{aligned}$$

Vemos que  $\mathbf{v} \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  satisfaz  $[\mathbf{v}]^T [x]_M = \text{FPdim}(x) [\mathbf{v}]^T$ , para todo  $x \in A$ . Além disso, pelas hipóteses sobre a matriz  $[g]$  e pelo fato de que  $[\mathbf{n}]$  possui entradas estritamente positivas, segue que  $[\mathbf{v}]^T = [\mathbf{n}]^T [g]$  possui entradas estritamente positivas. Pelo Corolário 4.1.31,  $\mathbf{v}$  é um elemento regular de  $M$ . Logo, existe um  $\lambda_g > 0$  tal que  $\mathbf{v} = \lambda_g \mathbf{m}$ . Portanto, para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ , segue que  $\text{FPdim}(g(m_i)) = \lambda_g \text{FPdim}(m_i)$ . ■

**Corolário 4.1.37** *Se  $[g]$  é uma matriz de permutação então*

$$\text{FPdim}(g(m_l)) = \text{FPdim}(m_l),$$

para todo  $l \in \{1, \dots, s\}$ .

**Demonstração:** Mostremos que, neste caso, o elemento regular  $\mathbf{v}$  da demonstração do teorema acima é o elemento regular canônico de  $M$ . Seja  $[g] = (\beta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,t \\ j=1,\dots,t}}$ . Por hipótese, existe uma permutação  $\sigma : \{1, \dots, t\} \rightarrow \{1, \dots, t\}$  tal que  $\beta_{i\sigma(j)} = \delta_{ij}$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{j=1}^t \text{FPdim}(g(m_j))m_j = \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^t \beta_{ij} \text{FPdim}(n_i)m_j \\ &= \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^t \beta_{i\sigma(j)} \text{FPdim}(n_i)m_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^t \text{FPdim}(n_j)m_{\sigma(j)}. \end{aligned}$$

Logo, a soma dos quadrados dos coeficientes de  $\mathbf{v}$  com respeito à base  $I_M$  é

$$\sum_{j=1}^t \text{FPdim}(n_j)^2 = \text{FPdim}(A),$$

pois  $\mathbf{n}$  é o elemento regular canônico de  $N$ . Portanto,  $\mathbf{v} = \mathbf{m}$ , donde segue o resultado.  $\blacksquare$

Sejam  $A, A'$  dois  $\mathbb{Z}_+$ -anéis com bases finitas  $I_A = \{b_i\}_{i=1}^n$  e  $I_{A'} = \{b'_j\}_{j=1}^m$ , respectivamente. Seja  $f : A \rightarrow A'$  um morfismo de anéis tal que  $f(1) = 1$  e que a matriz  $[f]$  da base  $I_A$  para a base  $I_{A'}$  possua todas as entradas não-negativas.

**Proposição 4.1.38** *Seja  $M$  um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A'$  com base  $\{m_l\}_{l \in L}$ . Então  $M$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A$  com mesma  $\mathbb{Z}$ -base e ação dada por  $a \cdot m = f(a)m$ , para quaisquer  $a \in A$  e  $m \in M$ .*

**Demonstração:** Sejam  $a, b \in A$  e  $m, n \in M$ . Então

$$(a+b) \cdot m = f(a+b)m = (f(a)+f(b))m = f(a)m+f(b)m = a \cdot m + b \cdot m,$$

$$a \cdot (m+n) = f(a)(m+n) = f(a)m + f(a)n = a \cdot m + a \cdot n,$$

$$a \cdot (b \cdot m) = f(a)(f(b)m) = (f(a)f(b))m = f(ab)m = (ab) \cdot m$$

e

$$1 \cdot m = f(1)m = 1m = m.$$

Logo,  $M$  é um  $A$ -módulo. Escrevemos  $[f] = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ . Sejam  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $l \in L$ . Então

$$b_j \cdot m_l = f(b_j)m_l = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} b'_i m_l = \sum_{t \in L} \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} (d_{il}^t)' m_t.$$

Assim,  $d_{jl}^t = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} (d_{il}^t)' \in \mathbb{Z}_+$ . Portanto,  $M$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A$ . ■

No Capítulo 5 precisamos relacionar dimensão de Frobenius-Perron de uma categoria módulo sobre duas categorias de fusão que não são necessariamente equivalentes. O próximo resultado será útil nesse contexto. Sua aplicação ocorre, de fato, no final da Seção 4.3.

Sejam  $A$  e  $A'$  anéis de fusão. Suponhamos que  $M$  seja um módulo base irredutível sobre  $A'$  e, com a ação dada na proposição acima, seja também um módulo base irredutível sobre  $A$ .

Dessa forma, para cada  $l \in L$ , podemos considerar a dimensão de Frobenius-Perron dos elementos  $m_l$  para  $M$  visto como um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A$  ou como um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $A'$ . Denotamos a primeira dimensão por  $\text{FPdim}^A(m_l)$  e a segunda por  $\text{FPdim}^{A'}(m_l)$ .

**Proposição 4.1.39** *Seja  $l \in L$ . Então*

$$\text{FPdim}^A(m_l) = \sqrt{\frac{\text{FPdim}(A)}{\text{FPdim}(A')}} \text{FPdim}^{A'}(m_l).$$

**Demonstração:** Sejam  $m_A, m_{A'}$  os elementos regulares canônicos de  $M$  visto como um  $A$ -módulo e um  $A'$ -módulo, respectivamente. Mostremos que  $m_{A'}$  é um elemento regular de  $M$  visto como um  $A$ -módulo. Para todo  $y \in A'$ , temos que  $[y]_M[m_{A'}] = \text{FPdim}(y)[m_{A'}]$ .

Seja  $x \in A$ . Então  $f(x) \in A'$  e assim,

$$[f(x)]_M[m_{A'}] = \text{FPdim}(f(x))[m_{A'}]. \quad (4.6)$$

Como  $f(x)m = x \cdot m$ , para todo  $m \in M$ , temos que  $[f(x)]_M = [x]_M$ . Além disso, pela Proposição 4.1.18, segue que  $\text{FPdim}(f(x)) = \text{FPdim}(x)$ . Assim, a igualdade (4.6) torna-se

$$[x]_M[m_{A'}] = \text{FPdim}(x)[m_{A'}].$$

Como isso vale para todo  $x \in A$  e  $[m_{A'}]$  possui entradas estritamente positivas, segue que  $m_{A'}$  é um elemento regular de  $M$ , visto como um  $A$ -módulo. Logo, existe  $\lambda > 0$  tal que  $m_A = \lambda m_{A'}$ . Assim, para cada  $l \in L$ , temos que

$$\text{FPdim}^A(m_l) = \lambda \text{FPdim}^{A'}(m_l).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \text{FPdim}(A) &= \sum_{l \in L} \text{FPdim}^A(m_l)^2 = \sum_{l \in L} (\lambda \text{FPdim}^{A'}(m_l))^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{l \in L} \text{FPdim}^{A'}(m_l)^2 = \lambda^2 \text{FPdim}(A'). \end{aligned}$$

donde,  $\lambda^2 = \frac{\text{FPdim}(A)}{\text{FPdim}(A')}$ .

■



## 4.2 O grupo de Grothendieck

O anel de Grothendieck é um importante invariante categórico que permite definir e calcular “certas” dimensões de objetos em categorias. Primeiramente caracterizamos sua estrutura de grupo e, em seguida, apresentamos a estrutura de anel. Nesta seção, a menos que se diga algo contrário,  $\mathcal{C}$  é uma categoria abeliana localmente finita.

Seja  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$  o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismo de objetos em  $\mathcal{C}$ . Denotamos por  $[X]$  a classe de isomorfismo do objeto  $X \in \mathcal{C}$ . Assim,

$$\mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \langle [X] : X \in \mathcal{C} \rangle .$$

Seja  $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$  o subgrupo abeliano livre de  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$  gerado pelos elementos  $[Z] - [X] - [Y]$  tais que exista uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

em  $\mathcal{C}$ .

**Definição 4.2.1** *O grupo de Grothendieck de  $\mathcal{C}$  é definido como sendo o grupo quociente*

$$\mathbf{Gr}(\mathcal{C}) = \frac{\mathfrak{F}(\mathcal{C})}{\mathfrak{R}(\mathcal{C})} .$$

Denotamos por  $\overline{[X]}$  a classe  $[X] + \mathfrak{R}(\mathcal{C})$  no quociente  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ .

**Observação 4.2.2** No grupo  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ , não é verdade que  $[0]$  é o elemento neutro, pois faz parte da base do grupo livre. Porém, existe seqüência exata

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 ,$$

logo  $[0] - [0] - [0] \in \mathfrak{R}(\mathcal{C})$ , donde  $\overline{[0]} = \overline{[0]} + \overline{[0]}$ . Somando o oposto de  $\overline{[0]}$  em cada lado da igualdade obtemos  $0_{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})} = \overline{[0]}$ .

Para caracterizar tal grupo é importante entender como seus elementos se relacionam com os objetos da categoria dos quais são classes.

**Lema 4.2.3** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Então*

$$\overline{[X \oplus Y]} = \overline{[X]} + \overline{[Y]} .$$

**Demonstração:** É sabido que existe uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X \oplus Y \longrightarrow Y \longrightarrow 0 .$$

Logo,  $[X \oplus Y] - [X] - [Y] \in \mathfrak{R}(\mathcal{C})$  e portanto,  $\overline{[X \oplus Y]} = \overline{[X]} + \overline{[Y]}$ .

■

**Proposição 4.2.4** *Seja  $X \in \mathcal{C}$  com uma série de composição  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$ . Então*

$$\overline{[X]} = \sum_{i=1}^n \overline{[X_i/X_{i-1}]}.$$

**Demonstração:** Mostremos por indução sobre  $n$ . Se  $n = 1$  então  $X$  é simples e a igualdade segue. Suponhamos que  $n = 2$ . Seja  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 = X$  uma série de composição de  $X$ . Pelo Lema 1.1.27, a sequência

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X = X_2 \longrightarrow X_2/X_1 \longrightarrow 0$$

é exata. Logo,

$$\overline{[X]} = \overline{[X_1]} + \overline{[X_2/X_1]} = \sum_{i=1}^2 \overline{[X_i/X_{i-1}]}.$$

Consideremos como hipótese de indução que, para todo objeto  $X$  de comprimento  $n$  e série de composição  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$ , vale

$$\overline{[X]} = \sum_{i=1}^n \overline{[X_i/X_{i-1}]}.$$

Seja  $Y$  um objeto de comprimento  $n + 1$  com série de composição  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y_n \subseteq Y_{n+1} = Y$ . O objeto  $Y_n$  tem comprimento  $n$  e série de composição  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_{n-1} \subseteq Y_n$ . Por hipótese de indução, temos que

$$\overline{[Y_n]} = \sum_{i=1}^n \overline{[Y_i/Y_{i-1}]}.$$

Novamente pelo Lema 1.1.27, a sequência

$$0 \longrightarrow Y_n \longrightarrow Y = Y_{n+1} \longrightarrow Y_{n+1}/Y_n \longrightarrow 0$$

é exata. Logo,

$$\overline{[Y]} = \overline{[Y_n]} + \overline{[Y_{n+1}/Y_n]} = \sum_{i=1}^n \overline{[Y_i/Y_{i-1}]} + \overline{[Y_{n+1}/Y_n]} = \sum_{i=1}^{n+1} \overline{[Y_i/Y_{i-1}]},$$

completando a prova. ■

Sejam  $\{S_i : i \in I\}$  um conjunto de representantes das classes de objetos simples de  $\mathcal{C}$ ,  $X \in \mathcal{C}$  e  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$  uma série de composição de  $X$ . Observemos que

$$\sum_{i=1}^n \overline{[X_i/X_{i-1}]} = \sum_{i \in I} [X : S_i] \overline{[S_i]}.$$

Assim, a proposição acima nos diz que

$$\overline{[X]} = \sum_{i \in I} [X : S_i] \overline{[S_i]}.$$

Os resultados acima e a Proposição 1.3.11 são importantes para caracterizar a igualdade de classes no grupo quociente  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ .

**Proposição 4.2.5** *Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$ . São equivalentes*

- (1)  $\overline{[X]} = \overline{[Y]}$ .
- (2) *Existem  $U, V, C \in \mathcal{C}$  tais que*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow X \oplus C \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow Y \oplus C \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

*são exatas.*

- (3) *Os fatores de composição de  $X$  e de  $Y$  são exatamente os mesmos, a menos de isomorfismo.*

**Demonstração:** (1)  $\Rightarrow$  (2) Se  $\overline{[X]} = \overline{[Y]}$ , então  $[Y] - [X] \in \mathfrak{R}(\mathcal{C})$ . Pela definição de  $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ , existem  $n, m \in \mathbb{N}$  tais que, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$ , existem seqüências exatas

$$0 \longrightarrow R_i \longrightarrow Z_i \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow R'_j \longrightarrow Z'_j \longrightarrow S'_j \longrightarrow 0$$

tais que

$$[Y] - [X] = \sum_{i=1}^n ([Z_i] - [R_i] - [S_i]) - \sum_{j=1}^m ([Z'_j] - [R'_j] - [S'_j]).$$

Rearranjando os termos de maneira que fiquem com coeficientes positivos, temos

$$[Y] + \sum_{i=1}^n [R_i] + \sum_{i=1}^n [S_i] + \sum_{j=1}^m [Z'_j] = [X] + \sum_{i=1}^n [Z_i] + \sum_{j=1}^m [R'_j] + \sum_{j=1}^m [S'_j].$$

A igualdade acima é formada por elementos da base do grupo livre  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ . Esses elementos não são necessariamente distintos, mas podemos concluir que cada elemento da base que aparece no lado direito da igualdade aparece em igual quantidade de vezes no lado esquerdo.

Sendo a base deste grupo as classes de isomorfismo, isso nos diz que para cada objeto  $D$  tal que  $[D]$  é um termo de uma soma de um lado da igualdade existe um objeto  $E$  tal que  $[E] = [D]$ , isto é,  $E \cong D$  e  $[E]$  aparece como termo no outro lado da igualdade.

Chamando  $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ ,  $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ ,  $Z = \bigoplus_{i=1}^n Z_i$ ,  $R' = \bigoplus_{j=1}^m R'_j$ ,  $S' = \bigoplus_{j=1}^m S'_j$  e  $Z' = \bigoplus_{j=1}^m Z'_j$ , podemos concluir que

$$Z' \oplus R \oplus Y \oplus S \cong X \oplus S' \oplus Z \oplus R'. \quad (4.7)$$

Sejam  $U = R \oplus R'$ ,  $V = S \oplus Y \oplus X \oplus S'$  e  $C = X \oplus S' \oplus Z \oplus R'$ . Pela Proposição 1.1.23, temos que

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow Z \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

é exata. Aplicando o Lema 1.1.25 a esta sequência e ao objeto  $R'$ , temos que

$$0 \longrightarrow R \oplus R' \longrightarrow Z \oplus R' \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

é exata.

Aplicando novamente o Lema 1.1.25 a esta última sequência e ao objeto  $Y \oplus X \oplus S'$ , e definindo  $A = Z \oplus R' \oplus Y \oplus X \oplus S'$ , temos que

$$0 \longrightarrow R \oplus R' \longrightarrow A \longrightarrow S \oplus Y \oplus X \oplus S' \longrightarrow 0$$

é exata. Claramente,  $A \cong Y \oplus C$ . Assim, pelo Lema 1.1.24, segue que

$$0 \longrightarrow R \oplus R' \longrightarrow Y \oplus C \longrightarrow S \oplus Y \oplus X \oplus S' \longrightarrow 0$$

é exata, isto é,

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow Y \oplus C \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

Novamente pela Proposição 1.1.23, a seqüência

$$0 \longrightarrow R' \longrightarrow Z' \longrightarrow S' \longrightarrow 0$$

é exata. Aplicando o Lema 1.1.25 a esta seqüência e ao objeto  $R$ , temos uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow R' \oplus R \longrightarrow Z' \oplus R \longrightarrow S' \longrightarrow 0.$$

Pelo Lema 1.1.25 aplicado à esta última seqüência e ao objeto  $Y \oplus X \oplus S$ , e definindo  $A' = Z' \oplus R \oplus Y \oplus X \oplus S$  temos que

$$0 \longrightarrow R' \oplus R \longrightarrow A' \longrightarrow S' \oplus Y \oplus X \oplus S \longrightarrow 0$$

é exata. Como

$$U \cong R' \oplus R, \quad V \cong S' \oplus Y \oplus X \oplus S$$

e

$$A' = Z' \oplus R \oplus Y \oplus X \oplus S \cong X \oplus Z' \oplus R \oplus Y \oplus S \stackrel{(4.7)}{\cong} X \oplus C,$$

segue, pelo Lema 1.1.24, que existe uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow X \oplus C \longrightarrow V \longrightarrow 0.$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Se existem tais seqüências exatas os fatores de composição de  $Y \oplus C$  e de  $X \oplus C$  são os mesmos, pois pela Proposição 1.3.11, ambos possuem exatamente os mesmos fatores de composição de  $U$  e de  $V$ .

Além disso, existem seqüências exatas

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow Y \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Os fatores de composição de  $X \oplus C$  e  $Y \oplus C$  são exatamente os fatores de composição de  $X$  e de  $C$  na primeira seqüência exata; e exatamente os fatores de composição de  $Y$  e de  $C$  na segunda seqüência exata, em ambos os casos, usamos a Proposição 1.3.11. Assim, pelo Teorema de Jordan-Holder, temos que os fatores de composição de  $X$  e de  $Y$  são os mesmos, a menos de isomorfismo.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Sejam  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$  e  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_m = Y$  séries de composição de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Pela Proposição 4.2.4, temos

$$\overline{[X]} = \sum_{i=1}^n \overline{[X_i/X_{i-1}]} \text{ e } \overline{[Y]} = \sum_{j=1}^m \overline{[Y_j/Y_{j-1}]}.$$

Por (3), os fatores de composição de  $X$  e de  $Y$  são os mesmos, a menos de isomorfismo. Logo,  $m = n$  e

$$\overline{[X]} = \sum_{i=1}^n \overline{[X_i/X_{i-1}]} = \sum_{j=1}^n \overline{[Y_j/Y_{j-1}]} = \overline{[Y]}.$$

■

**Teorema 4.2.6** *O grupo de Grothendieck  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é isomorfo ao grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismo de objetos simples.*

**Demonstração:** Seja  $\mathfrak{G}$  o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismo de objetos simples em  $\mathcal{C}$ .

Definimos  $\phi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  o morfismo de grupos dado por  $\phi([X]) = \overline{[X]}$ . Notemos que  $\phi$  está bem definido, pois se  $[X] = [Y]$ , temos que  $X \cong Y$  e, pelo Corolário 1.1.18, isto implica que  $\overline{[X]} = \overline{[Y]}$ .

Seja  $X \in \mathcal{C}$  com série de composição  $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$ . Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^n [X_i/X_{i-1}] \in \mathfrak{G}$$

e

$$\phi\left(\sum_{i=1}^n [X_i/X_{i-1}]\right) = \sum_{i=1}^n \phi([X_i/X_{i-1}]) = \sum_{i=1}^n \overline{[X_i/X_{i-1}]} = \overline{[X]},$$

em que a última igualdade segue da Proposição 4.2.4.

Logo,  $\phi$  é sobrejetora.

Seja  $Y \in \mathcal{C}$  com série de composição  $0 = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_m = Y$ . Definimos  $\pi : \mathbf{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{G}$  o morfismo de grupos dado por

$$\pi(\overline{[Y]}) = \sum_{i=1}^m [Y_i/Y_{i-1}].$$

Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$  tais que  $\overline{[X]} = \overline{[Y]}$ . Pela Proposição 4.2.5,  $n = m$  e os fatores de composição de  $X$  e de  $Y$  são os mesmos, a menos de isomorfismo. Dessa forma,

$$\pi(\overline{[Y]}) = \sum_{i=1}^n [Y_{i-1}/Y_i] = \sum_{j=1}^n [X_{j-1}/X_j] = \pi(\overline{[X]}).$$

Logo,  $\pi$  está bem definido.

Seja  $X$  um objeto simples em  $\mathcal{C}$ . Então  $0 \subseteq X$  é uma série de composição de  $X$ . Assim,

$$\pi\phi([X]) = \pi(\phi(X)) = \pi(\overline{[X]}) = [X].$$

Logo,  $\pi \circ \phi = I_{\mathfrak{G}}$  e isso implica na injetividade de  $\phi$ . Portanto,  $\phi$  é um isomorfismo.  $\blacksquare$

A partir de agora consideramos  $\mathcal{C}$  uma categoria tensorial finita. Em particular,  $\mathcal{C}$  é localmente finita. Por definição,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é um grupo quociente. Para ver que tal grupo possui estrutura de anel, basta mostrarmos que  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$  é um anel e que  $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$  é um ideal de  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ .

**Proposição 4.2.7** *O grupo abeliano livre  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$  possui uma estrutura de anel com produto dado por  $[X] \cdot [Y] = [X \otimes Y]$ , para quaisquer  $X, Y \in \mathcal{C}$ , e unidade  $[1]$ , em que  $1$  é o objeto unidade da categoria monoideal  $\mathcal{C}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Definimos  $[X] \cdot [Y] = [X \otimes Y]$  e estendemos por linearidade (isto é,  $[X] \cdot ([Y] + [Z]) = [X] \cdot [Y] + [X] \cdot [Z]$ ).

Mostremos que tal produto está bem definido. Sejam  $X, Y, A, B \in \mathcal{C}$  tais que  $([X], [Y]) = ([A], [B])$ . Então  $X \cong A$  e  $Y \cong B$ , donde  $X \otimes Y \cong A \otimes B$  e portanto,  $[X] \cdot [Y] = [A] \cdot [B]$ . A distributividade segue da extensão por linearidade.

A associatividade vem do isomorfismo natural  $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$ , pois isto implica que  $[(X \otimes Y) \otimes Z] = [X \otimes (Y \otimes Z)]$ , isto é,  $([X] \cdot [Y]) \cdot [Z] = [X] \cdot ([Y] \cdot [Z])$ . Portanto,  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$  é um anel.

Os isomorfismos naturais  $l_X$  e  $r_X$  garantem ainda que  $[1 \otimes X] = [X] = [X \otimes 1]$ . Logo,  $[1] \cdot [X] = [X] = [X] \cdot [1]$  e portanto,  $[1]$  é a unidade de  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ .  $\blacksquare$

**Lema 4.2.8** *O subgrupo abeliano livre  $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$  é um ideal de  $\mathfrak{F}(\mathcal{C})$ .*

**Demonstração:** Sejam  $[R] \in \mathfrak{F}(\mathcal{C})$  e  $[X] \in \mathfrak{R}(\mathcal{C})$ . Então existem  $n, m \in \mathbb{N}$  e, para quaisquer  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{Z}$  e  $R_i, A_j, B_j, C_j \in \mathcal{C}$  tais que existam seqüências exatas

$$0 \rightarrow A_j \rightarrow B_j \rightarrow C_j \rightarrow 0$$

e

$$[R] = \sum_{i=1}^n a_i [R_i] \text{ e } [X] = \sum_{j=1}^m b_j ([B_j] - [A_j] - [C_j]).$$

Assim,

$$[R] \cdot [X] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j ([R_i \otimes B_j] - [R_i \otimes A_j] - [R_i \otimes C_j]) \in \mathfrak{R}(\mathcal{C}),$$

pois pela Proposição 2.1.12, o funtor  $\otimes$  é biexato, donde a sequência

$$0 \rightarrow R_i \otimes A_j \rightarrow R_i \otimes B_j \rightarrow R_i \otimes C_j \rightarrow 0$$

é exata.

Logo,  $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$  é um ideal à esquerda e analogamente mostra-se que é um ideal à direita. ■

**Corolário 4.2.9** *O grupo de Grothendieck  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é um anel com produto dado por  $\overline{[X]} \cdot \overline{[Y]} = \overline{[X \otimes Y]}$  e unidade  $\overline{[1]}$ .*

**Proposição 4.2.10** *Sejam  $G$  um grupo abeliano,  $A$  um anel com unidade  $1_A$  e  $f : G \rightarrow A$  um isomorfismo de grupos abelianos. Então,  $G$  possui uma estrutura de anel com unidade tal que  $f$  é um isomorfismo de anéis.*

**Demonstração:** Sejam  $x, y, z \in G$ . Definimos  $x * y = f^{-1}(f(x)f(y))$  e  $1_G = f^{-1}(1_A)$ . Temos

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= f^{-1}(f(x)f(y)) * z = f^{-1}(f(f^{-1}(f(x)f(y)))f(z)) \\ &= f^{-1}((f(x)f(y))f(z)) = f^{-1}(f(x)(f(y)f(z))) \\ &= f^{-1}(f(x)f(f^{-1}(f(y)f(z)))) = x * f^{-1}(f(y)f(z)) \\ &= x * (y * z). \end{aligned}$$

Logo,  $*$  é associativa. Além disso,

$$\begin{aligned} x * (y + z) &= f^{-1}(f(x)f(y + z)) = f^{-1}(f(x)(f(y) + f(z))) \\ &= f^{-1}(f(x)f(y) + f(x)f(z)) \\ &= f^{-1}(f(x)f(y)) + f^{-1}(f(x)f(z)) = x * y + x * z. \end{aligned}$$

Analogamente,  $(x + y) * z = x * z + y * z$ . Logo, vale a distributividade. Também,

$$1_G * x = f^{-1}(f(1_G)f(x)) = f^{-1}(1_A f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$



Analogamente,  $x * 1_G = x$ . Mostremos que  $f$  é um morfismo de anéis. Temos

$$f(x * y) = f(f^{-1}(f(x)f(y))) = f(x)f(y).$$

Portanto,  $f$  é um isomorfismo de anéis. ■

Seja  $\{S_i : i \in I\}$  um conjunto de representantes das classes de objetos simples de  $\mathcal{C}$ . Consideremos  $\phi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  o isomorfismo de grupos abelianos definido na demonstração do Teorema 4.2.6 e  $X, Y \in \mathcal{C}$  objetos simples.

A proposição acima nos diz que o grupo de Grothendieck, visto como o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismo de objetos simples, possui também uma estrutura de anel com unidade, dada por

$$\begin{aligned} [X] \cdot [Y] &= \phi^{-1}(\phi([X]) \cdot \phi([Y])) = \phi^{-1}(\overline{[X]} \cdot \overline{[Y]}) \\ &= \phi^{-1}(\overline{[X \otimes Y]}) = \sum_{i \in I} [X \otimes Y : S_i][S_i] \end{aligned}$$

e

$$1_{\mathfrak{G}} = \phi^{-1}(\overline{[1]}) = [1],$$

pois  $1$  é um objeto simples ( $\mathcal{C}$  é tensorial). Logo,  $\mathfrak{G}$  é isomorfo a  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  como anéis. Para o restante do trabalho, consideramos o anel de Grothendieck  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  como sendo o grupo abeliano gerado pelas classes de isomorfismo de objetos simples de  $\mathcal{C}$  munido com a multiplicação dada acima.

O conjunto  $B = \{[S_i]\}_{i \in I}$  gera  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  como um grupo abeliano e portanto, como um  $\mathbb{Z}$ -módulo livre. Sejam  $i, j \in I$ . Então

$$[S_i] \cdot [S_j] = \sum_{k \in I} [S_i \otimes S_j : S_k][S_k],$$

em que  $[S_i \otimes S_j : S_k]$  é a multiplicidade de  $S_k$  em qualquer série de composição de  $S_i \otimes S_j$  e é, portanto, um número inteiro não-negativo. Segue que  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -anel unital com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base  $B$  finita.

Consideremos a partir de agora que  $\mathcal{C}$  seja uma categoria de fusão.

**Proposição 4.2.11 ([7], Proposition 4.9.1)** *O anel  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é um anel fusão.*

A involução  $*$  :  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é dada pelo dual. Como  $\mathcal{C}$  é semissimples, para todo objeto  $X \in \mathcal{C}$ , não importa se usarmos dual à esquerda ou à direita, pois  ${}^*X \cong X^*$  ([8], Proposition 2.1).

O fato acima falha quando a categoria  $\mathcal{C}$  não é semissimples. Para mais detalhes sobre isso, veja ([7], Remark 4.9.2).

Seja  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ . Lembremos que  $\mathcal{M}$  é localmente finita, semissimples e possui uma quantidade finita de classes de isomorfismo de objetos simples. Seja  $\{M_j\}_{j \in L}$  um conjunto de representantes das classes de isomorfismo de objetos simples em  $\mathcal{M}$ .

Para o próximo teorema, lembramos o seguinte resultado que é útil na prova do mesmo.

**Lema 4.2.12 ([19], Lemma 2)** *Sejam  $X \in \mathcal{C}$ ,  $M, N \in \mathcal{M}$ . Então*

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(X \overline{\otimes} M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, X^* \overline{\otimes} N).$$

**Teorema 4.2.13** *O grupo de Grothendieck  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um módulo base sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  com base  $\{[M_j]\}_{j \in L}$ .*

**Demonstração:** Sabemos que  $\{[S_i]\}_{i \in I}$  gera  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  e  $\{[M_j]\}_{j \in L}$  gera  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  como grupos abelianos. Para cada  $i \in I$  e  $j \in L$ , definimos a ação

$$[S_i] \cdot [M_j] = \sum_{k \in L} [S_i \overline{\otimes} M_j : M_k] [M_k],$$

em que  $[S_i \overline{\otimes} M_j : M_k]$  é a multiplicidade de  $M_k$  em qualquer série de composição de  $S_i \overline{\otimes} M_j$ . Portanto um número inteiro não-negativo.

Notemos que tal ação está bem definida, pois se  $S_i \cong S'_i$  e  $M_j \cong M'_j$ , então  $S_i \overline{\otimes} M_j \cong S'_i \overline{\otimes} M'_j$ . Logo, tais objetos possuem os mesmos fatores de composição. Para objetos quaisquer de  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  e de  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$ , definimos a ação por aditividade.

Sejam  $i, j \in I$  e  $p \in L$ . Mostremos que  $([S_i] \cdot [S_j]) \cdot [M_p] = [S_i] \cdot ([S_j] \cdot [M_p])$ . Consideremos o funtor  $\_ \overline{\otimes} M_p : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ , o qual é exato. Pela Proposição 1.3.12, os fatores de composição de  $(S_i \otimes S_j) \overline{\otimes} M_p$  são os fatores de composição de  $S_k \overline{\otimes} M_p$ , em que  $S_k$  é fator de composição de  $S_i \otimes S_j$ . Assim, para cada  $l \in L$ , temos que

$$[(S_i \otimes S_j) \overline{\otimes} M_p : M_l] = \sum_{k \in I} [S_i \otimes S_j : S_k] [S_k \overline{\otimes} M_p : M_l].$$

Consideremos agora o funtor  $S_i \overline{\otimes} \_ : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . Novamente pela Proposição 1.3.12, temos que os fatores de composição de  $S_i \overline{\otimes} (S_j \overline{\otimes} M_p)$  são os fatores de composição de  $S_i \overline{\otimes} M_r$ , em que  $M_r$  é fator de composição de  $S_j \overline{\otimes} M_p$ . Assim, para cada  $l \in L$ , temos que

$$[S_i \overline{\otimes} (S_j \overline{\otimes} M_p) : M_l] = \sum_{r \in L} [S_j \overline{\otimes} M_p : M_r] [S_i \overline{\otimes} M_r : M_l].$$

Como  $\mathcal{M}$  é um  $\mathcal{C}$ -módulo, os objetos  $(S_i \otimes S_j) \overline{\otimes} M_p$  e  $S_i \overline{\otimes} (S_j \overline{\otimes} M_p)$  são isomorfos. Logo, possuem os mesmos fatores de composição. Portanto, para cada  $l \in L$ , temos que

$$\sum_{k \in I} [S_i \otimes S_j : S_k][S_k \overline{\otimes} M_p : M_l] \stackrel{(*)}{=} \sum_{r \in L} [S_j \overline{\otimes} M_p : M_r][S_i \overline{\otimes} M_r : M_l].$$

Mas, por definição,

$$\begin{aligned} ([S_i] \cdot [S_j]) \cdot [M_p] &= \sum_{k \in I} [S_i \otimes S_j : S_k][S_k] \cdot [M_p] \\ &= \sum_{\substack{k \in I \\ l \in L}} [S_i \otimes S_j : S_k][S_k \overline{\otimes} M_p : M_l][M_l] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [S_i] \cdot ([S_j] \cdot [M_p]) &= [S_i] \cdot \sum_{r \in L} [S_j \overline{\otimes} M_p : M_r][M_r] \\ &= \sum_{\substack{r \in L \\ l \in L}} [S_j \overline{\otimes} M_p : M_r][S_i \overline{\otimes} M_r : M_l][M_l]. \end{aligned}$$

Logo, pela igualdade (\*),  $([S_i] \cdot [S_j]) \cdot [M_p] = [S_i] \cdot ([S_j] \cdot [M_p])$ . Seja  $j \in L$ . Então

$$[\mathbf{1}] \cdot [M_j] = \sum_{k \in L} [\mathbf{1} \overline{\otimes} M_j : M_k][M_k] = [M_j],$$

pois  $\mathbf{1} \overline{\otimes} M_j \cong M_j$ . Portanto,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ .

Mostremos que  $[S_i \overline{\otimes} M_j : M_k] = [S_{i^*} \overline{\otimes} M_k : M_j]$ . Pelo Lema 4.2.12, temos

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(S_i \overline{\otimes} M_j, M_k) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M_j, S_i^* \overline{\otimes} M_k).$$

Pelo Corolário 1.3.15,  $[S_i \overline{\otimes} M_j : M_k] = \dim \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M_k, S_i \overline{\otimes} M_j)$  e  $[S_{i^*} \overline{\otimes} M_k : M_j] = \dim \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M_j, S_{i^*} \overline{\otimes} M_k)$ . Pela Proposição 1.3.17,

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}}(S_i \overline{\otimes} M_j, M_k) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M_k, S_i \overline{\otimes} M_j).$$

Lembrando que  $S_i^* = S_{i^*}$ , pois  $S_i$  é simples, temos

$$\begin{aligned} [S_i \overline{\otimes} M_j : M_k] &= \dim \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M_k, S_i \overline{\otimes} M_j) \\ &= \dim \text{Hom}_{\mathcal{M}}(M_j, S_i^* \overline{\otimes} M_k) = [S_{i^*} \overline{\otimes} M_k : M_j]. \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um módulo base sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ . ■

O seguinte resultado, embora não demonstrado, é usado na próxima seção. O mesmo é apresentado aqui, por se tratar do assunto desta seção.

**Proposição 4.2.14** ([8], p. 618) *Seja  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$  indecomponível. O grupo de Grothendieck  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um módulo base indecomponível sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  com base  $\{[M_j]\}_{j \in L}$ .*

### 4.3 Dimensão de Frobenius-Perron em categorias

Nesta seção, as categorias tensoriais  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  são consideradas de fusão e as categorias módulo  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  localmente finitas, semissimples, indecomponíveis e com uma quantidade finita de classes de isomorfismo de objetos simples. Pelo visto na seção anterior,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é um anel fusão. Em particular,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -anel transitivo unital com uma  $\mathbb{Z}_+$ -base finita.

**Definição 4.3.1** *Seja  $S \in \mathcal{C}$  um objeto simples. A dimensão de Frobenius-Perron do objeto  $S$  é o número real  $\text{FPdim}([S])$ , isto é,  $\text{FPdim}(S) = \text{FPdim}([S])$ .*

Seja  $\{S_i\}_{i \in I}$  um conjunto de representantes das classes de isomorfismo de objetos simples em  $\mathcal{C}$ . Para um objeto  $X$  qualquer em  $\mathcal{C}$ , a dimensão de Frobenius-Perron de  $X$  é dada por

$$\text{FPdim}(X) = \sum_{i \in I} [X : S_i] \text{FPdim}(S_i).$$

A próxima definição encontra-se em ([8], Seção 8.2).

**Definição 4.3.2** *A dimensão de Frobenius-Perron da categoria  $\mathcal{C}$ , denotada por  $\text{FPdim}(\mathcal{C})$ , é a dimensão de Frobenius-Perron do anel fusão  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ , isto é,*

$$\text{FPdim}(\mathcal{C}) = \sum_{i \in I} \text{FPdim}(S_i)^2.$$

**Proposição 4.3.3 ([6], Proposition 4.26)** *Seja  $G$  um grupo finito que age em  $\mathcal{C}$ . Então*

$$\text{FPdim}(\mathcal{C}^G) = |G| \text{FPdim}(\mathcal{C}).$$

**Proposição 4.3.4** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um funtor tensorial exato. Então  $F$  induz um morfismo de anéis  $f : \mathbf{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{D})$  tal que  $f([\mathbf{1}]) = [\mathbf{1}]$  e a matriz de  $f$  com relação às  $\mathbb{Z}_+$ -bases das classes de isomorfismos de objetos simples possui todas as entradas não-negativas.*

**Demonstração:** Sejam  $\{S_i\}_{i \in I}, \{S'_j\}_{j \in J}$  conjuntos de representantes das classes de isomorfismos de objetos simples de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , respectivamente. Sabemos que  $\{[S_i]\}_{i \in I}$  gera  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  e  $\{[S'_j]\}_{j \in J}$  gera  $\mathbf{Gr}(\mathcal{D})$  como grupos abelianos. Para cada  $i \in I$  definimos

$$f([S_i]) = \sum_{j \in J} [F(S_i) : S'_j] [S'_j].$$

Notemos que tal função está bem definida na base, pois se  $S_i \cong S_k$  então  $F(S_i) \cong F(S_k)$ . Logo, tais objetos possuem os mesmos fatores de composição. Para objetos quaisquer de  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ , definimos  $f$  por aditividade.

Sejam  $i, k \in I$ . Mostremos que  $f([S_i][S_j]) = f([S_i])f([S_j])$ . Consideremos o funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , que é exato. Pela Proposição 1.3.12, os fatores de composição de  $F(S_i \otimes S_k)$  são os fatores de composição de  $F(S_l)$ , em que  $S_l$  é fator de composição de  $S_i \otimes S_k$ . Dessa forma, para cada  $j \in J$ , temos que

$$[F(S_i \otimes S_k) : S'_j] = \sum_{l \in I} [S_i \otimes S_k : S_l][F(S_l) : S'_j].$$

Consideremos agora o funtor  $F(S_i) \otimes \_ : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ . Novamente pela Proposição 1.3.12, temos que os fatores de composição de  $F(S_i) \otimes F(S_k)$  são os fatores de composição de  $F(S_i) \otimes S'_s$ , em que  $S'_s$  é fator de composição de  $F(S_k)$ .

Agora, para cada  $s \in J$  em que  $S'_s$  é fator de composição de  $F(S_k)$ , consideremos o funtor exato  $\_ \otimes S'_s : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ . Temos que os fatores de composição de  $F(S_i) \otimes S'_s$  são os fatores de composição de  $S'_t \otimes S'_s$ , em que  $S'_t$  é fator de composição de  $F(S_i)$ . Assim, para cada  $j \in J$ , segue que

$$[F(S_i) \otimes F(S_k) : S'_j] = \sum_{s, t \in J} [F(S_i) : S'_t][F(S_k) : S'_s][S'_t \otimes S'_s : S'_j].$$

Como  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  é um funtor tensorial, os objetos  $F(S_i \otimes S_k)$  e  $F(S_i) \otimes F(S_k)$  são isomorfos. Logo, possuem os mesmos fatores de composição. Portanto, para cada  $j \in J$ , temos

$$\sum_{l \in I} [S_i \otimes S_k : S_l][F(S_l) : S'_j] \stackrel{(*)}{=} \sum_{s, t \in J} [F(S_i) : S'_t][F(S_k) : S'_s][S'_t \otimes S'_s : S'_j].$$

Mas, por definição,

$$\begin{aligned} f([S_i][S_k]) &= f\left(\sum_{l \in I} [S_i \otimes S_k : S_l][S_l]\right) = \sum_{l \in I} [S_i \otimes S_k : S_l]f([S_l]) \\ &= \sum_{\substack{l \in I \\ j \in J}} [S_i \otimes S_k : S_l][F(S_l) : S'_j][S'_j] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f([S_i])f([S_k]) &= \sum_{t \in J} [F(S_i) : S'_t][S'_t] \sum_{s \in J} [F(S_k) : S'_s][S'_s] \\ &= \sum_{j, s, t \in J} [F(S_i) : S'_t][F(S_k) : S'_s][S'_t \otimes S'_s : S'_j][S'_j]. \end{aligned}$$

Logo, pela igualdade (\*),  $f([S_i][S_j]) = f([S_i])f([S_j])$ .  
Além disso,

$$f([\mathbf{1}]) = \sum_{j \in J} [F(\mathbf{1}) : S'_j][S'_j] = [\mathbf{1}],$$

pois  $F(\mathbf{1}) \cong \mathbf{1}$  e  $\mathbf{1}$  é simples. A não-negatividade das entradas da matriz de  $f$  fica clara pela sua definição. ■

**Corolário 4.3.5** *Seja  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um funtor tensorial exato. Então  $F$  preserva dimensão de Frobenius-Perron.*

**Demonstração:** Segue da Proposição 4.1.18 e da proposição acima. ■

Lembremos que, sob nossas condições, (veja Proposição 4.2.14),  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um módulo base indecomponível sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ . Pela Proposição 4.1.22, segue que  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo irredutível sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ .

**Definição 4.3.6** *Seja  $M \in \mathcal{M}$  um objeto simples. A dimensão de Frobenius-Perron do objeto  $M$  é o número real  $\text{FPdim}([M])$ , isto é,  $\text{FPdim}(M) = \text{FPdim}([M])$ .*

Seja  $\{M_i\}_{i \in L}$  um conjunto de representantes das classes de isomorfismo de objetos simples em  $\mathcal{M}$ . Para um objeto qualquer  $M$  de  $\mathcal{M}$  a dimensão de Frobenius-Perron é dada por

$$\text{FPdim}(M) = \sum_{i \in L} [M : M_i] \text{FPdim}(M_i).$$

Observemos que se  $M \cong N$  então

$$\begin{aligned} \text{FPdim}(M) &= \sum_{i \in L} [M : M_i] \text{FPdim}(M_i) = \sum_{i \in L} [N : M_i] \text{FPdim}(M_i) \\ &= \text{FPdim}(N). \end{aligned}$$

Quando houver mais de uma categoria módulo envolvida, para denotar a dimensão de Frobenius-Perron do objeto  $M \in \mathcal{M}$ , escrevemos  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}}(M)$ . Havendo mais de uma categoria de fusão envolvida, para denotar a dimensão de Frobenius-Perron do objeto  $M \in \mathcal{M}$ , em que  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ , escrevemos  $\text{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M)$ .

**Proposição 4.3.7** *Sejam  $N$  e  $M$  objetos em  $\mathcal{M}$  tais que  $N$  é subobjeto simples de  $M$  e  $\text{FPdim}(N) = \text{FPdim}(M)$ . Então  $M \cong N$ .*

**Demonstração:** Como  $N$  é um subobjeto simples de  $M$ , existe  $i_0 \in L$  tal que  $[N] = [M_{i_0}]$ . Segue que

$$\begin{aligned} \text{FPdim}(M_{i_0}) &= \text{FPdim}([M_{i_0}]) = \text{FPdim}([N]) = \text{FPdim}(N) \\ &= \text{FPdim}(M) = \sum_{i \in L} [M : M_i] \text{FPdim}([M_i]) \\ &= \sum_{\substack{i \in L \\ i \neq i_0}} [M : M_i] \text{FPdim}([M_i]) + [M : M_{i_0}] \text{FPdim}([M_{i_0}]). \end{aligned}$$

Temos que  $[M : M_{i_0}] \neq 0$ , pois  $N \cong M_{i_0}$ ,  $[M : M_i] \in \mathbb{Z}_+$  e  $\text{FPdim}([M_i]) > 0$ , para todo  $i \in L$ . Logo,  $[M : M_{i_0}] = 1$  e  $[M : M_i] = 0$ , para  $i \neq i_0$ . Portanto,  $M \cong M_{i_0} \cong N$ . ■

**Proposição 4.3.8** *Seja  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um funtor exato de  $\mathcal{C}$ -módulos. Então  $G$  induz um morfismo de  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ -módulos  $g : \mathbf{Gr}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{N})$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\{M_i\}_{i \in L}$  e  $\{N_i\}_{i \in J}$  conjuntos de representantes das classes de isomorfismo de objetos simples em  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ , respectivamente. Definimos  $g : \mathbf{Gr}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{N})$  por

$$g([M_i]) = \sum_{j \in J} [G(M_i) : N_j] [N_j], \quad (4.8)$$

para cada  $i \in L$ . Claramente,  $g$  está bem definida na base de  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$ , pois se  $M_i \cong M_k$ , então  $G(M_i) \cong G(M_k)$ . Logo, os fatores de composição de  $G(M_i)$  e  $G(M_k)$  são os mesmos. Estendemos  $g$  por aditividade ao grupo  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$ .

Seja  $\{S_i : i \in I\}$  um conjunto de representantes das classes de objetos simples em  $\mathcal{C}$ . Fixemos  $i \in I$  e  $j \in L$ . Mostremos que

$$g([S_i] \cdot [M_j]) = [S_i] \cdot g([M_j]).$$

Como o funtor  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  é exato e o objeto  $S_i \bar{\otimes} M_j \in \mathcal{M}$  segue, pela Proposição 1.3.12, que os fatores de composição de  $G(S_i \bar{\otimes} M_j)$  são os fatores de composição de  $G(M_k)$ , em que  $M_k$  é fator de composição de  $S_i \bar{\otimes} M_j$ . Assim, para cada  $l \in J$ , temos que

$$[G(S_i \bar{\otimes} M_j) : N_l] = \sum_{k \in L} [S_i \bar{\otimes} M_j : M_k] [G(M_k) : N_l].$$

Analogamente, considerando o funtor exato  $S_i \bar{\otimes} \_ : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  e o objeto  $G(M_j) \in \mathcal{N}$ , temos que os fatores de composição de  $S_i \bar{\otimes} G(M_j)$  são



os fatores de composição de  $S_i \overline{\otimes} N_r$ , em que  $N_r$  é fator de composição de  $G(M_j)$ . Assim, para cada  $l \in J$ , segue que

$$[S_i \overline{\otimes} G(M_j) : N_l] = \sum_{r \in J} [G(M_j) : N_r][S_i \overline{\otimes} N_r : N_l].$$

Como  $G$  é um funtor de  $\mathbb{C}$ -módulos, temos que  $G(S_i \overline{\otimes} M_j) \cong S_i \overline{\otimes} G(M_j)$ . Logo, para cada  $l \in J$ ,

$$\sum_{k \in L} [S_i \overline{\otimes} M_j : M_k][G(M_k) : N_l] \stackrel{(*)}{=} \sum_{r \in J} [G(M_j) : N_r][S_i \overline{\otimes} N_r : N_l].$$

Daí,

$$\begin{aligned} g([S_i] \cdot [M_j]) &= g\left(\sum_{k \in L} [S_i \overline{\otimes} M_j : M_k][M_k]\right) \\ &= \sum_{\substack{k \in L \\ l \in J}} [S_i \overline{\otimes} M_j : M_k][G(M_k) : N_l][N_l] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [S_i] \cdot g([M_j]) &= [S_i] \cdot \left(\sum_{r \in J} [G(M_j) : N_r][N_r]\right) \\ &= \sum_{\substack{r \in J \\ l \in J}} [G(M_j) : N_r][S_i \overline{\otimes} N_r : N_l][N_l]. \end{aligned}$$

Segue, da igualdade (\*), que  $g([S_i] \cdot [M_j]) = [S_i] \cdot g([M_j])$ . Portanto,  $g$  é um morfismo de  $\mathbf{Gr}(\mathbb{C})$ -módulos. ■

**Corolário 4.3.9** *Seja  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um funtor exato de  $\mathbb{C}$ -módulos. Então  $G$  induz uma transformação linear  $g : \mathbf{Gr}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  que é também um morfismo de  $\mathbf{Gr}(\mathbb{C})$ -módulos.*

**Demonstração:** Segue da proposição acima e do Lema 4.1.24. ■

**Proposição 4.3.10** *Sejam  $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  um funtor exato de  $\mathbb{C}$ -módulos e  $g : \mathbf{Gr}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  a aplicação induzida do corolário acima. Se a matriz  $[g]$  da base  $I_{\mathbf{Gr}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$  para a base  $I_{\mathbf{Gr}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}$  possui todas as colunas não-nulas e entradas não-negativas, então existe um  $\lambda_G > 0$  tal que*

$$\text{FPdim}_{\mathcal{N}}(G(M)) = \lambda_G \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(M),$$

para todo  $M \in \mathcal{M}$ .

**Demonstração:** Segue do Teorema 4.1.36 que existe  $\lambda_G > 0$  tal que

$$\text{FPdim}(g([M_i])) = \lambda_G \text{FPdim}([M_i]), \quad (4.9)$$

para todo  $i \in L$ . Para cada  $M \in \mathcal{M}$ , temos  $G(M) \in \mathcal{N}$ . Como  $G$  é um funtor exato temos, pela Proposição 1.3.12,

$$[G(M) : N_j] = \sum_{i \in L} [M : M_i][G(M_i) : N_j],$$

para cada  $j \in J$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \text{FPdim}(G(M)) &= \sum_{j \in J} [G(M) : N_j] \text{FPdim}(N_j) \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in L} [M : M_i][G(M_i) : N_j] \text{FPdim}(N_j) \\ &\stackrel{(4.8)}{=} \sum_{i \in L} [M : M_i] \text{FPdim}(g(M_i)) \\ &\stackrel{(4.9)}{=} \sum_{i \in L} [M : M_i] \lambda_G \text{FPdim}(M_i) \\ &= \lambda_G \text{FPdim}(M). \end{aligned}$$

■

**Corolário 4.3.11** *Seja  $U : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  uma equivalência de categorias módulo sobre  $\mathcal{C}$ . Então  $U$  preserva dimensão de Frobenius-Perron.*

**Demonstração:** Pela Proposição 1.2.3, segue que a matriz da transformação linear  $u : \mathbf{Gr}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{N}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  induzida pelo funtor  $U$  é a matriz identidade, a menos de uma permutação nas colunas. Assim, pelo Corolário 4.1.37, para todo  $i \in L$ ,

$$\begin{aligned} \text{FPdim}(U(M_i)) &= \text{FPdim}([U(M_i)]) = \text{FPdim}(u([M_i])) \\ &= \text{FPdim}([M_i]) = \text{FPdim}(M_i). \end{aligned}$$

■

**Observação 4.3.12** Consideremos  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  um funtor tensorial exato e  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo sobre  $\mathcal{D}$ . Pela Proposição 3.1.9,  $\mathcal{M}$  é uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ , com ação dada por  $X \otimes^F M =$

$F(X)\overline{\otimes}M$ . Vimos na seção anterior que  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um  $\mathbb{Z}_+$ -módulo sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  com ação dada por

$$[S_i] \cdot [M_j] = \sum_{k \in L} [S_i \overline{\otimes}^F M_j][M_k] = \sum_{k \in L} [F(S_i) \overline{\otimes} M_j][M_k].$$

Por outro lado, pela Proposição 4.3.4, temos  $f : \mathbf{Gr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{D})$  nas condições das hipóteses da Proposição 4.1.38. Além disso,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um  $\mathbf{Gr}(\mathcal{D})$ -módulo, pois  $\mathcal{M}$  é um  $\mathcal{D}$ -módulo. Pela última proposição citada,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  um  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$ -módulo via

$$[S_i] \cdot [M_j] = f([S_i])[M_j] = \sum_{k \in L} [F(S_i) \overline{\otimes} M_j][M_k].$$

Assim,  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  é um módulo base irredutível sobre  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  cuja ação é dada por  $f$ . Pela Proposição 4.1.39, temos que

$$\mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M_j) = \sqrt{\frac{\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})}{\mathrm{FPdim}(\mathcal{D})}} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{D})}(M_j).$$

Em particular, considerando o funtor tensorial exato esquecimento  $F : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$  e  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$ , a igualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M_j) &= \sqrt{\frac{\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}^G)}{\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})}} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M_j) \\ &= \sqrt{|G|} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M_j) \end{aligned}$$

pois, pela Proposição 4.3.3, temos que  $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}^G) = |G| \mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$ .

Portanto, para qualquer  $M \in \mathcal{M}$ , temos

$$\begin{aligned} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M) &= \sum_{j \in L} [M : M_j] \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M_j) \\ &= \sum_{i \in L} [M : M_j] \sqrt{|G|} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M_j) \\ &= \sqrt{|G|} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M), \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M) = \sqrt{|G|} \mathrm{FPdim}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M). \quad (4.10)$$



## Capítulo 5

# Objetos simples em equivariantizações de categorias módulo

Sejam  $\mathcal{C}$  uma categoria de fusão e  $G$  um grupo finito que age em  $\mathcal{C}$ . Pela Proposição 2.2.4, a equivariantização  $\mathcal{C}^G$  é uma categoria de fusão.

Sejam  $H$  um subgrupo de  $G$  e  $\mathcal{M}$  uma categoria módulo sobre  $\mathcal{C}$  indecomponível semissimples. Então  $\mathcal{M}^H$  também o é. Dessa forma, tanto  $\mathcal{M}$  quanto  $\mathcal{M}^H$  são categorias módulo indecomponíveis semissimples, nas quais a dimensão de Frobenius-Perron está bem definida, conforme visto no capítulo anterior.

Neste capítulo, basicamente generalizamos as ideias de classificação de objetos simples em equivariantizações de categorias de fusão, encontradas em ([2], Seção 2), para o contexto de categorias módulo. Como a dimensão de Frobenius-Perron é essencial para este objetivo, iniciamos relacionando as dimensões de Frobenius-Perron de objetos simples em  $\mathcal{M}^H$  com a dimensão de Frobenius-Perron de seus somandos diretos simples em  $\mathcal{M}$ , veja Corolário 5.1.5.

A seguir, na Seção 5.2, mostramos o principal teorema deste trabalho. Tal teorema caracteriza os objetos simples em  $\mathcal{M}^H$  através de uma correspondência bijetiva com os objetos simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$ , em que  $H_N$  é o subgrupo de  $H$  conhecido por estabilizador de  $N$ , desde que  $N$  seja somando direto simples de um certo objeto em  $\mathcal{M}$ .

Finalmente, apresentamos uma correspondência bijetiva entre obje-

tos simples em equivariantizações  $\mathcal{M}^{H_N}$  que contêm  $N$  como somando direto simples em  $\mathcal{M}$  e as  $\sigma_N$ -representações projetivas irredutíveis de  $H_N$ , em que  $\sigma_N$  é um 2-cociclo que depende de  $N$ .

Sejam  $M, N \in \mathcal{M}$ . Neste capítulo denotaremos  $\text{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N)$  simplesmente por  $\text{Hom}(M, N)$ .

## 5.1 Dimensão de Frobenius-Perron de objetos simples em $\mathcal{M}^H$

Nesta seção, é estudada a relação entre a dimensão de Frobenius-Perron de objetos simples em  $\mathcal{M}^H$  e seus somandos diretos simples, quando os mesmos são vistos como objetos em  $\mathcal{M}$ .

A dimensão de Frobenius-Perron em  $\mathcal{M}$  e em  $\mathcal{M}^H$  é definida considerando a estrutura dos módulos base  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M})$  e  $\mathbf{Gr}(\mathcal{M}^H)$  sobre os anéis de fusão  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C})$  e  $\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)$ , respectivamente. A seguinte proposição relaciona tais dimensões através do funtor esquecimento.

**Proposição 5.1.1** *Existe  $\lambda > 0$  tal que*

$$\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M, \nu) = \lambda \text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C})}(M), \quad (5.1)$$

para todo objeto  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ .

**Demonstração:** Pela Proposição 3.2.11, o funtor esquecimento  $F : \mathcal{M}^H \rightarrow \mathcal{M}$  é um funtor exato de  $\mathcal{C}^G$ -módulos. Seja  $f : \mathbf{Gr}(\mathcal{M}^H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{Gr}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$  a aplicação induzida pelo funtor  $F$ , apresentada na Proposição 4.3.8. Dado um objeto simples  $(M, \nu)$  em  $\mathcal{M}^H$ , certamente  $F(M, \nu) = M$  não é o objeto zero em  $\mathcal{M}$ . Assim,

$$f([(M, \nu)]) = \sum_{i \in L} [F(M, \nu) : M_i][M_i] = \sum_{i \in L} [M : M_i][M_i],$$

em que  $[M : M_i] \geq 0$ , para todo  $i \in L$ , e pelo menos um  $i_0 \in L$  é tal que  $[M : M_{i_0}] > 0$ . Logo, a matriz  $[f]$  possui todas as colunas não-nulas e também entradas não-negativas. Portanto, pela Proposição 4.3.10, existe  $\lambda' > 0$  tal que  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)} F(M, \nu) = \lambda' \text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M, \nu)$ , para todo  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ , isto é,

$$\text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M) = \lambda' \text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M, \nu).$$

Definimos  $\lambda'' := \frac{1}{\lambda'}$  e assim,

$$\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M, \nu) = \lambda'' \text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\mathbf{Gr}(\mathcal{C}^G)}(M).$$

Além disso, pela igualdade (4.10), temos que  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\text{Gr}(e^G)}(M) = \sqrt{|G|}\text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\text{Gr}(e)}(M)$ . Portanto, definindo  $\lambda := \lambda'' \sqrt{|G|}$ , temos

$$\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}^{\text{Gr}(e^G)}(M, \nu) = \lambda \text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\text{Gr}(e)}(M).$$

■

Feito o esclarecimento acima, no que segue escrevemos  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}}(M)$  e  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(M)$  para denotar  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}}^{\text{Gr}(e)}(M)$  e  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}^{\text{Gr}(e^G)}(M)$ , respectivamente.

Seja  $N$  um objeto simples em  $\mathcal{M}$ . Consideremos o subconjunto  $H_N$  de  $H$  dado por

$$H_N = \{g \in H : U_g(N) \cong N\}.$$

**Lema 5.1.2** *O conjunto  $H_N$  é um subgrupo de  $H$ .*

**Demonstração:** Como  $U_1(N) = N$ , temos que  $1 \in H_N$ . Sejam  $g, h \in H_N$ . Então existem isomorfismos  $j : U_g(N) \rightarrow N$  e  $l : U_h(N) \rightarrow N$ . Assim, a composição

$$N \xrightarrow{(\mu_{g^{-1}, g})_N^{-1}} U_{g^{-1}}(U_g(N)) \xrightarrow{U_{g^{-1}}(j)} U_{g^{-1}}(N) \xrightarrow{U_{g^{-1}}(l^{-1})} U_{g^{-1}}(U_h(N)) \xrightarrow{(\mu_{g^{-1}, h})_N} U_{g^{-1}h}(N)$$

é um isomorfismo. Logo,  $g^{-1}h \in H_N$ . Portanto,  $H_N$  é um subgrupo de  $H$ . ■

O subgrupo  $H_N$  de  $H$  é chamado subgrupo estável de  $N$ . Sejam  $n = [H : H_N]$  e  $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_n\}$  um conjunto completo de representantes de classes laterais à esquerda de  $H_N$  em  $H$ .

**Lema 5.1.3** *O objeto  $N$  tem exatamente  $n$   $H$ -conjugados não isomorfos entre si.*

**Demonstração:** Seja  $\{U_g(N) : g \in H\}$  o conjunto das  $H$ -conjugações de  $N$ . Definimos  $\varphi : \{g_i\}_{i=1}^n \rightarrow \{[U_g(N)] : g \in H\}$  por  $\varphi(g_i) = [U_{g_i}(N)]$ . Mostremos que  $\varphi$  é uma bijeção.

Seja  $g \in H$ . Então  $g = g_i h$ , para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$  e algum  $h \in H_N$ . Como  $h \in H_N$ , existe um isomorfismo  $j : U_h(N) \rightarrow N$ . Assim, a composição

$$U_g(N) = U_{g_i h}(N) \xrightarrow{(\mu_{g_i, h})_N^{-1}} U_{g_i}(U_h(N)) \xrightarrow{U_{g_i}(j)} U_{g_i}(N)$$

é um isomorfismo, ou seja,  $[U_g(N)] = [U_{g_i}(N)] = \varphi(g_i)$ . Portanto,  $\varphi$  é sobrejetora.

Sejam  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tais que  $[U_{g_i}(N)] = [U_{g_j}(N)]$ . Então existe um isomorfismo  $l : U_{g_j}(N) \rightarrow U_{g_i}(N)$ . Assim, a composição

$$N \xrightarrow{(\mu_{g_j^{-1}, g_j})_N^{-1}} U_{g_j^{-1}}(U_{g_j}(N)) \xrightarrow{U_{g_j^{-1}}(l)} U_{g_j^{-1}}(U_{g_i}(N)) \xrightarrow{(\mu_{g_j^{-1}, g_i})_N} U_{g_j^{-1}g_i}(N)$$

é um isomorfismo. Logo,  $g_j^{-1}g_i \in H_N$  e assim,  $\overline{g_i} = \overline{g_j}$ . Mas como o conjunto de representantes de classes laterais de  $H_N$  em  $H$  possui exatamente  $n$  representantes, segue que  $i = j$ . Portanto,  $\varphi$  é injetora. Disso, concluímos que há exatamente  $n$  classes de isomorfismo de  $H$ -conjugados de  $N$  não isomorfos entre si, a saber,  $\{U_{g_i}(N)\}_{i=1}^n$ . ■

Os  $n$   $H$ -conjugados acima são denotados por  $N = N_1, N_2, \dots, N_n$ , em que  $N_j \cong U_{g_j}(N)$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Proposição 5.1.4** *Seja  $X = (M, \nu)$  um objeto simples de  $\mathcal{M}^H$  e seja  $N$  um somando direto simples de  $M$  em  $\mathcal{M}$ . Sejam  $N = N_1, \dots, N_n$ , com  $n = [H : H_N]$ , os  $H$ -conjugados de  $N$  não isomorfos entre si. Então,  $M \cong m \oplus_{i=1}^n N_i$ , em que  $m = \dim \text{Hom}(M, N)$ .*

**Demonstração:** Lembremos dos funtores

$$F : \mathcal{M}^H \rightarrow \mathcal{M} \quad \text{e} \quad L : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^H,$$

em que  $F$  é o funtor esquecimento e  $L$  é dado por

$$L(M) = (\oplus_{g \in H} U_g(M), \nu^M)$$

que é adjunto à esquerda à direita de  $F$ , veja Proposição 1.4.9. Consideremos o objeto  $T(N) = FL(N) = \oplus_{g \in H} U_g(N)$ .

Como  $N$  é simples e  $U_g$  é uma equivalência de categorias para todo  $g \in H$ , segue que  $N_i \cong U_{g_i}(N)$  é simples, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Como  $\mathcal{M}$  é semissimples,  $M$  pode ser escrito como soma direta de objetos simples. Mostremos que tais simples são exatamente os  $H$ -conjugados de  $N$ . Seja  $Z$  um objeto simples em  $\mathcal{M}$  tal que  $Z \not\cong N_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Então temos

$$\text{Hom}(Z, T(N)) \cong \oplus_{g \in H} \text{Hom}(Z, U_g(N)) = 0,$$

pois para cada  $g \in H$ ,  $U_g(N)$  é isomorfo a algum  $N_j$ , que é simples e não isomorfo a  $Z$ .



Por adjunção, temos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L(N), X) \cong \text{Hom}(N, M)$$

e como  $N$  é um somando direto de  $M$ ,  $\text{Hom}(N, M) \neq 0$ . Logo,  $\text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L(N), X) \neq 0$ , donde  $X$  é um somando direto simples de  $L(N)$ . Assim, existe  $X' \in \mathcal{M}^H$  tal que  $L(N) \cong X \oplus X'$  e, sendo  $F$  um funtor aditivo,  $T(N) \cong F(X) \oplus F(X') = M \oplus F(X')$ . Daí,

$$0 = \text{Hom}(Z, T(N)) \cong \text{Hom}(Z, M) \oplus \text{Hom}(Z, F(X')).$$

Logo,  $\text{Hom}(Z, M) = 0$ , donde  $Z$  não é um somando direto de  $M$ . Segue que  $M \cong \bigoplus_{i=1}^n m_i N_i$ , em que  $m_i = \dim \text{Hom}(M, N_i)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}(M, N_i) &= \dim \text{Hom}(\bigoplus_{j=1}^n m_j N_j, N_i) \\ &= \sum_{j=1}^n m_j \dim \text{Hom}(N_j, N_i) \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^n m_j \delta_{ij} = m_i, \end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue da Proposição 1.3.10. Além disso, usando o Lema 3.2.8,

$$m_i = \dim \text{Hom}(M, U_{g_i}(N)) = \dim \text{Hom}(M, N) = m_1.$$

Portanto, chamando  $m := m_1$ , temos que  $M \cong m \bigoplus_{i=1}^n N_i$ . ■

Na notação da proposição acima, cada  $U_{g_i}$  é uma equivalência de categorias módulo sobre  $\mathcal{C}$ . Como visto no Corolário 4.3.11, cada  $U_{g_i}$  preserva dimensão de Frobenius-Perron. Esse fato é usado no corolário a seguir.

**Corolário 5.1.5** *Sejam  $X = (M, \nu)$  um objeto simples em  $\mathcal{M}^H$  e  $N$  um somando direto simples de  $M$  em  $\mathcal{M}$ . Então existe  $\lambda > 0$  tal que*

$$\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(X) = \lambda[H : H_N] m \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(N), \quad (5.2)$$

em que  $m = \dim \text{Hom}(M, N)$ .

**Demonstração:** Temos que

$$\begin{aligned} \text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(X) &\stackrel{(5.1)}{=} \lambda \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(M) = \lambda \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(m \bigoplus_{i=1}^n N_i) \\ &= \lambda m \sum_{i=1}^n \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(U_{g_i}(N)) \\ &\stackrel{(*)}{=} (\lambda m) n \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(N) \\ &= \lambda[H : H_N] m \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(N), \end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue do Corolário 4.3.11. ■

## 5.2 Caracterização de objetos simples em $\mathcal{M}^H$

Uma das ferramentas fundamentais usadas na demonstração do principal teorema deste capítulo é a existência de um adjunto à esquerda de um certo funtor esquecimento. A seguir são discutidos este funtor esquecimento e seu adjunto à esquerda.

Seja  $N$  um objeto simples em  $\mathcal{M}$ . Consideremos as equivariantizações  $\mathcal{M}^H$  e  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Se  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ , podemos considerar o objeto  $M$  com a família de isomorfismos  $\{\nu_g : U_g(M) \rightarrow M\}_{g \in H_N}$  e isso nos permite enxergar  $(M, \nu)$  em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Assim, fica definido um funtor esquecimento  $F_N : \mathcal{M}^H \rightarrow \mathcal{M}^{H_N}$ .

Para definir seu adjunto à esquerda, fixemos um conjunto completo  $R$  de representantes das classes laterais à esquerda de  $H_N$  em  $H$ . Suponhamos ainda que  $1 \in R$ . Então

$$H = \bigcup_{t \in R} tH_N.$$

Assim, para qualquer  $g \in H$ , existem únicos  $s(g) \in R$  e  $h(g) \in H_N$  tais que  $g = s(g)h(g)$ .

Seja  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^{H_N}$ . Consideremos os morfismos

$$\iota_j^M : U_j(M) \rightarrow \bigoplus_{t \in R} U_t(M) \text{ e } \pi_j^M : \bigoplus_{t \in R} U_t(M) \rightarrow U_j(M),$$

que são as inclusões e projeções canônicas da soma direta dos objetos  $U_t(M)$  com  $t \in R$ , para todo  $j \in R$ . Definimos  $L_N : \mathcal{M}^{H_N} \rightarrow \mathcal{M}^H$  por

$$L_N(M, \nu) = (\bigoplus_{t \in R} U_t(M), \nu),$$

em que

$$v_g = \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1} (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M), \quad (5.3)$$

para todo  $g \in H$ . Notemos que  $gj = s(gj)h(gj)$ , com  $s(gj) \in R$  e  $h(gj) \in H_N$ . Isso justifica a composição  $(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1} (\mu_{g,j})_M$ , bem como a existência de  $\nu_{h(gj)}$  e  $\iota_{s(gj)}^M$  na definição de  $v_g$ .

Seja  $f : (M, \nu) \rightarrow (M', \nu')$  um morfismo em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Definimos

$$L_N(f) = \sum_{j \in R} \iota_j^{M'} U_j(f) \pi_j^M.$$

Abaixo, apresentamos o diagrama da composição acima

$$\bigoplus_{t \in R} U_t(M) \xrightarrow{\pi_j^M} U_j(M) \xrightarrow{U_j(f)} U_j(M') \xrightarrow{\iota_j^{M'}} \bigoplus_{t \in R} U_t(M').$$

A verificação de que  $L_N$  está bem definido e cumpre as condições para ser um funtor são mostradas no próximo lema.

**Lema 5.2.1**  $L_N : \mathcal{M}^{H_N} \rightarrow \mathcal{M}^H$  é um funtor.

**Demonstração:** Primeiramente, provemos que  $v_g$  é um isomorfismo para todo  $g \in H$ . Definimos

$$v_g^{-1} = \sum_{l \in R} U_g(\iota_l^M)(\mu_{g,l})_M^{-1}(\mu_{s(gl),h(gl)})_M U_{s(gl)}(\nu_{h(gl)}^{-1})\pi_{s(gl)}^M.$$

De fato,

$$v_g v_g^{-1} = \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^M \pi_{s(gj)}^M = I_{\bigoplus_{t \in R} U_t(M)}.$$

Observemos que se  $s(gl) = s(gj)$ , então  $gl = s(gj)h(gl)$ , isto é,  $s(gj) = glh(gl)^{-1}$ . Portanto,  $gj = s(gj)h(gj) = glh(gl)^{-1}h(gj)$ . Logo,  $j1 = lh(gl)^{-1}h(gj)$  e como  $h(gl)^{-1}h(gj) \in H_N$ , isso implica que  $j$  e  $l$  representam a mesma classe e como ambos pertencem a  $R$ , segue que  $j = l$ . Daí,

$$v_g^{-1} v_g = \sum_{j \in R} U_g(\iota_j^M) U_g(\pi_j^M) = U_g(I_{\bigoplus_{t \in R} U_t(M)}) = I_{U_g(\bigoplus_{t \in R} U_t(M))}.$$

Portanto,  $v_g$  é um isomorfismo.

Mostremos agora que  $L_N(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ , isto é, que vale a igualdade (3.14), para quaisquer  $a, b \in H$ . Para isto, observemos que dados  $a, b \in H$  e  $j \in R$ , temos  $abj = as(bj)h(bj) = s(as(bj))h(as(bj))h(bj)$  em que  $s(as(bj)) \in R$  e  $h(as(bj))h(bj) \in H_N$ . Por outro lado,  $abj = s(abj)h(abj)$  em que  $s(abj) \in R$  e  $h(abj) \in H_N$ . Seguem as igualdades

$$s(abj) = s(as(bj)) \text{ e } h(abj) = h(as(bj))h(bj). \quad (5.4)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
v_a U_a(v_b) &= \sum_{j,l \in R} \iota_{s(al)}^M U_{s(al)}(\nu_{h(al)}) (\mu_{s(al),h(al)})_M^{-1} (\mu_{a,l})_M U_a(\pi_l^M) \\
&U_a(\iota_{s(bj)}^M) U_a(U_{s(bj)}(\nu_{h(bj)})) U_a((\mu_{s(bj),h(bj)})_M^{-1}) U_a((\mu_{b,j})_M) \\
&U_a(U_b(\pi_j^M)) \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(as(bj))}^M U_{s(as(bj))}(\nu_{h(as(bj))}) (\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))})_M^{-1} \\
&(\mu_{a,s(bj)})_M U_a(U_{s(bj)}(\nu_{h(bj)})) U_a((\mu_{s(bj),h(bj)})_M^{-1}) \\
&U_a((\mu_{b,j})_M) U_a(U_b(\pi_j^M)) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(as(bj))}^M U_{s(as(bj))}(\nu_{h(as(bj))}) (\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))})_M^{-1} \\
&U_{as(bj)}(\nu_{h(bj)}) (\mu_{a,s(bj)})_{U_{h(bj)}(M)} U_a((\mu_{s(bj),h(bj)})_M^{-1}) \\
&U_a((\mu_{b,j})_M) U_a(U_b(\pi_j^M)) \\
&\stackrel{(3.12)^*}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(as(bj))}^M U_{s(as(bj))}(\nu_{h(as(bj))}) (\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))})_M^{-1} \\
&U_{as(bj)}(\nu_{h(bj)}) (\mu_{as(bj),h(bj)})_M^{-1} (\mu_{a,bj})_M U_a((\mu_{b,j})_M) U_a(U_b(\pi_j^M)),
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue da naturalidade de  $\mu_{a,s(bj)}$ , isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U_a(U_{s(bj)}(U_{h(bj)}(M))) & \xrightarrow{(\mu_{a,s(bj)})_{U_{h(bj)}(M)}} & U_{as(bj)}(U_{h(bj)}(M)) \\
\downarrow U_a(U_{s(bj)}(\nu_{h(bj)})) & & \downarrow U_{as(bj)}(\nu_{h(bj)}) \\
U_a(U_{s(bj)}(M)) & \xrightarrow{(\mu_{a,s(bj)})_M} & U_{as(bj)}(M),
\end{array}$$

e a igualdade (3.12)\* segue das igualdades (3.12) e  $bj = s(bj)h(bj)$ . Além disso,

$$\begin{aligned}
v_a b(\mu_{a,b})_{\oplus_{t \in R} U_t(M)} &= \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(abj)}^M U_{s(abj)}(\nu_{h(abj)}) (\mu_{s(abj),h(abj)})_M^{-1} (\mu_{ab,j})_M U_{ab}(\pi_j^M) \\
&(\mu_{a,b})_{\oplus_{t \in R} U_t(M)} \\
&\stackrel{(**)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(abj)}^M U_{s(abj)}(\nu_{h(abj)}) (\mu_{s(abj),h(abj)})_M^{-1} (\mu_{ab,j})_M (\mu_{a,b})_{U_j(M)} \\
&U_a(U_b(\pi_j^M)) \\
&\stackrel{(3.12)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(abj)}^M U_{s(abj)}(\nu_{h(abj)}) (\mu_{s(abj),h(abj)})_M^{-1} (\mu_{a,bj})_M U_a((\mu_{b,j})_M) \\
&U_a(U_b(\pi_j^M))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.4)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(as(bj))}^M U_{s(as(bj))} (\nu_{h(as(bj))h(bj)}) (\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))h(bj)})_M^{-1} \\
& (\mu_{a,bj})_M U_a ((\mu_{b,j})_M U_b (\pi_j^M)) \\
& \stackrel{(3.14)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(as(bj))}^M U_{s(as(bj))} (\nu_{h(as(bj))}) U_{s(as(bj))} (U_{h(as(bj))} (\nu_{h(bj)})) \\
& U_{s(as(bj))} ((\mu_{h(as(bj)),h(bj)})_M^{-1}) (\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))h(bj)})_M^{-1} (\mu_{a,bj})_M \\
& U_a ((\mu_{b,j})_M U_b (\pi_j^M)) \\
& \stackrel{(3.12)^*}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(as(bj))}^M U_{s(as(bj))} (\nu_{h(as(bj))}) U_{s(as(bj))} (U_{h(as(bj))} (\nu_{h(bj)})) \\
& (\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))})_{U_{h(bj)}(M)}^{-1} (\mu_{as(bj),h(bj)})_M^{-1} (\mu_{a,bj})_M U_a ((\mu_{b,j})_M U_b (\pi_j^M)) \\
& \stackrel{(***)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(as(bj))}^M U_{s(as(bj))} (\nu_{h(as(bj))}) (\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))})_M^{-1} \\
& U_{as(bj)} (\nu_{h(bj)}) (\mu_{as(bj),h(bj)})_M^{-1} (\mu_{a,bj})_M U_a ((\mu_{b,j})_M U_b (\pi_j^M)),
\end{aligned}$$

em que as igualdades (\*\*\*) e (\*\*\*) seguem da comutatividade dos diagramas

$$\begin{array}{ccc}
U_a(U_b(\bigoplus_{t \in R} U_t(M))) & \xrightarrow{(\mu_{a,b})_{\bigoplus_{t \in R} U_t(M)}} & U_{ab}(\bigoplus_{t \in R} U_t(M)) \\
U_a(U_b(\pi_j^M)) \downarrow & & \downarrow U_{ab}(\pi_j^M) \\
U_a(U_b(U_j(M))) & \xrightarrow{(\mu_{a,b})_{U_j(M)}} & U_{ab}(U_j(M))
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}
U_{s(as(bj))} (U_{h(as(bj))} (U_{h(bj)}(M))) & \xrightarrow{(\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))})_{U_{h(bj)}(M)}} & U_{as(bj)} (U_{h(bj)}(M)) \\
\downarrow U_{s(as(bj))} (U_{h(as(bj))} (\nu_{h(bj)})) & & \downarrow U_{as(bj)} (\nu_{h(bj)}) \\
U_{s(as(bj))} (U_{h(s(bj))}(M)) & \xrightarrow{(\mu_{s(as(bj)),h(as(bj))})_M} & U_{as(bj)}(M),
\end{array}$$

respectivamente. A igualdade (3.12)\* segue das igualdades (3.12) e  $as(bj) = s(as(bj))h(as(bj))$ .

Portanto,  $v_a U_a(v_b) = v_{ab}(\mu_{a,b})_{\bigoplus_{t \in R} U_t(M)}$ . Logo,  $L_N$  está bem definido para objetos. Falta mostrar sua boa definição para morfismos, isto é, mostrar que vale a igualdade (3.15), para todo  $g \in H$  e todo morfismo  $f : (M, \nu) \rightarrow (M', \nu')$  em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Temos que

$$\begin{aligned}
v'_g U_g(L_N(f)) &= \sum_{j,l \in R} \iota_{s(gj)}^{M'} U_{s(gj)}(\nu'_{h(gj)})(\mu_{s(gj),h(gj)})_{M'}^{-1}(\mu_{g,j})_{M'} \\
&U_g(\pi_j^{M'}) U_g(\iota_l^{M'}) U_g(U_l(f)) U_g(\pi_l^M) \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{M'} U_{s(gj)}(\nu'_{h(gj)})(\mu_{s(gj),h(gj)})_{M'}^{-1}(\mu_{g,j})_{M'} \\
&U_g(U_j(f)) U_g(\pi_j^M).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
L_N(f)v_g &= \sum_{j,l \in R} \iota_l^{M'} U_l(f) \pi_l^M \iota_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} \\
&(\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{M'} U_{s(gj)}(f \nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \\
&\stackrel{(3.15)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{M'} U_{s(gj)}(\nu'_{h(gj)} U_{h(gj)}(f))(\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M \\
&U_g(\pi_j^M) \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{M'} U_{s(gj)}(\nu'_{h(gj)}) U_{s(gj)}(U_{h(gj)}(f))(\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} \\
&(\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \\
&\stackrel{(\square)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{M'} U_{s(gj)}(\nu'_{h(gj)})(\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} U_{gj}(f)(\mu_{g,j})_M \\
&U_g(\pi_j^M) \\
&\stackrel{(\bullet)}{=} \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{M'} U_{s(gj)}(\nu'_{h(gj)})(\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_{M'} U_g(U_j(f)) \\
&U_g(\pi_j^M),
\end{aligned}$$

em que as igualdades  $(\square)$  e  $(\bullet)$  seguem da naturalidade de  $\mu_{s(gj),h(gj)}$  e  $\mu_{gj}$ , respectivamente, ou seja, da comutatividade dos diagramas

$$\begin{array}{ccc}
U_{s(gj)}(U_{h(gj)}M) & \xrightarrow{(\mu_{s(gj),h(gj)})_M} & U_{s(gj)h(gj)}(M) \\
\downarrow U_{s(gj)}(U_{h(gj)}(f)) & & \downarrow U_{s(gj)h(gj)}(f)=U_{gj}(f) \\
U_{s(gj)}(U_{h(gj)}M') & \xrightarrow{(\mu_{s(gj),h(gj)})_{M'}} & U_{s(gj)h(gj)}(M')
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}
 U_g(U_j(M)) & \xrightarrow{(\mu_{g,j})_M} & U_{gj}(M) \\
 U_g(U_j(f)) \downarrow & & \downarrow U_{gj}(f) \\
 U_g(U_j(M')) & \xrightarrow{(\mu_{g,j})_{M'}} & U_{gj}(M).
 \end{array}$$

Portanto,  $v'_g U_g(L_N(f)) = L_N(f)v_g$ .

Mostremos que  $L_N$  é, de fato, um funtor. Sejam  $f : (M, \nu) \rightarrow (M', \nu')$  e  $g : (M', \nu') \rightarrow (M'', \nu'')$  morfismos em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Então

$$\begin{aligned}
 L_N(g)L_N(f) &= \sum_{j,l \in R} \iota_j^{M''} U_j(g) \pi_j^{M'} \iota_l^{M'} U_l(f) \pi_l^M \\
 &= \sum_{j \in R} \iota_j^{M''} U_j(g) U_j(f) \pi_j^M \\
 &= L_N(gf)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 L_N(I_{(M,\nu)}) &= \sum_{j \in R} \iota_j^M U_j(I_M) \pi_j^M \\
 &= \sum_{j \in R} \iota_j^M \pi_j^M \\
 &= I_{\oplus_{t \in R} U_t(M)} = I_{L_N(M,\nu)}.
 \end{aligned}$$

■

**Proposição 5.2.2** *O funtor definido acima  $L_N : \mathcal{M}^{H_N} \rightarrow \mathcal{M}^H$  é um funtor de  $\mathcal{C}^G$ -módulos.*

**Demonstração:** Sejam  $(X, s) \in \mathcal{C}^G$  e  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^{H_N}$ . Então

$$(X, s) \overline{\otimes} (M, \nu) = (X \overline{\otimes} M, t),$$

em que  $t_g = (s_g \overline{\otimes} \nu_g) c_{X,M}^g$ , para todo  $g \in H_N$ .

Assim,

$$L_N((X, s) \overline{\otimes} (M, \nu)) = (\oplus_{t \in R} U_t(X \overline{\otimes} M), u)$$

em que, para cada  $g \in H$ ,

$$\begin{aligned}
 u_g &= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X \overline{\otimes} M} U_{s(gj)}(t_{h(gj)}) (\mu_{s(gj), h(gj)})_{X \overline{\otimes} M}^{-1} (\mu_{g,j})_{X \overline{\otimes} M} U_g(\pi_j^{X \overline{\otimes} M}) \\
 &= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X \overline{\otimes} M} U_{s(gj)}((s_{h(gj)} \overline{\otimes} \nu_{h(gj)}) c_{X,M}^{h(gj)}) (\mu_{s(gj), h(gj)})_{X \overline{\otimes} M}^{-1} (\mu_{g,j})_{X \overline{\otimes} M}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}) \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X\overline{\otimes}M} U_{s(gj)}(s_{h(gj)} \overline{\otimes} \nu_{h(gj)}) U_{s(gj)}(c_{X,M}^{h(gj)}) (\mu_{s(gj),h(gj)})_{X\overline{\otimes}M}^{-1} \\
& (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes}M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}) \\
(3.13) \quad &= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X\overline{\otimes}M} U_{s(gj)}(s_{h(gj)} \overline{\otimes} \nu_{h(gj)}) (c_{F_{h(gj)}(X), U_{h(gj)}(M)}^{s(gj)})^{-1} \\
& ((\gamma_{s(gj),h(gj)})_{X\overline{\otimes}(\mu_{s(gj),h(gj)})_M})^{-1} c_{X,M}^{s(gj)h(gj)} (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes}M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}) \\
(*) \quad &= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X\overline{\otimes}M} (c_{X,M}^{s(gj)})^{-1} (F_{s(gj)}(s_{h(gj)} \overline{\otimes} U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})) \\
& ((\gamma_{s(gj),h(gj)})_{X\overline{\otimes}(\mu_{s(gj),h(gj)})_M})^{-1} c_{X,M}^{s(gj)h(gj)} (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes}M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}) \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X\overline{\otimes}M} (c_{X,M}^{s(gj)})^{-1} (F_{s(gj)}(s_{h(gj)})(\gamma_{s(gj),h(gj)})_X^{-1} \overline{\otimes} U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})) \\
& (\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} c_{X,M}^{s(gj)h(gj)} (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes}M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}) \\
(1.6) \quad &= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X\overline{\otimes}M} (c_{X,M}^{s(gj)})^{-1} (s_{s(gj)}^{-1} s_{s(gj)h(gj)} \overline{\otimes} U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})) (\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} \\
& c_{X,M}^{s(gj)h(gj)} (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes}M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}) \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X\overline{\otimes}M} (c_{X,M}^{s(gj)})^{-1} (s_{s(gj)}^{-1} s_{gj} \overline{\otimes} U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})) (\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} c_{X,M}^{gj} \\
& (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes}M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}),
\end{aligned}$$

em que a igualdade (\*) segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U_{s(gj)}(F_{h(gj)}(X) \overline{\otimes} U_{h(gj)}(M)) & \xrightarrow{c_{F_{h(gj)}(X), U_{h(gj)}(M)}^{F_{s(gj)}}} & F_{h(gj)}(X) \overline{\otimes}^{F_{s(gj)}} U_{s(gj)}(U_{h(gj)}(M)) \\
\downarrow U_{s(gj)}(s_{h(gj)} \overline{\otimes} \nu_{h(gj)}) & & s_{h(gj)} \overline{\otimes}^{F_{s(gj)}} U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)}) \\
U_{s(gj)}(X \overline{\otimes} M) & \xrightarrow{c_{X,M}^{s(gj)}} & X \overline{\otimes}^{F_{s(gj)}} U_{s(gj)}(M),
\end{array}$$

devido à naturalidade de  $c^{s(gj)}$ , para cada  $j \in R$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
u_g &= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X\overline{\otimes}M} (c_{X,M}^{s(gj)})^{-1} (s_{s(gj)}^{-1} s_{gj} \overline{\otimes} U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})) (\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} \\
& c_{X,M}^{gj} (\mu_{g,j})_{X\overline{\otimes}M} U_g(\pi_j^{X\overline{\otimes}M}).
\end{aligned}$$

Temos também que

$$(X, s) \overline{\otimes} L_N(M, \nu) = (X, s) \overline{\otimes} (\oplus_{t \in R} U_t(M), \nu) = (X \overline{\otimes} (\oplus_{t \in R} U_t(M)), z),$$



em que, para cada  $g \in H$ ,

$$\begin{aligned}
z_g &= (s_g \bar{\otimes} v_g) c_{X, \oplus_{t \in R} U_t(M)}^g \\
&= (s_g \bar{\otimes} \sum_{j \in R} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M)) \\
&= c_{X, \oplus_{t \in R} U_t(M)}^g \\
&= \sum_{j \in R} (s_g \bar{\otimes} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M) \\
&= (I_{F_g(X)} \bar{\otimes} U_g(\pi_j^M)) c_{X, \oplus_{t \in R} U_t(M)}^g.
\end{aligned}$$

Definimos  $c_{(X,s),(M,\nu)} : L_N((X,s) \bar{\otimes} (M,\nu)) \rightarrow (X,s) \bar{\otimes} L_N(M,\nu)$  por

$$c_{(X,s),(M,\nu)} = \sum_{j \in R} (s_j \bar{\otimes} l_j^M) c_{X,M}^j \pi_j^{X \bar{\otimes} M}.$$

Mostremos que  $c_{(X,s),(M,\nu)}$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ . Seja  $g \in H$ . Então

$$\begin{aligned}
z_g U_g(c_{(X,s),(M,\nu)}) &= \\
&= \sum_{j \in R} (s_g \bar{\otimes} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M) \\
&= (I_{F_g(X)} \bar{\otimes} U_g(\pi_j^M)) c_{X, \oplus_{t \in R} U_t(M)}^g U_g \left( \sum_{k \in R} (s_k \bar{\otimes} l_k^M) c_{X,M}^k \pi_k^{X \bar{\otimes} M} \right) \\
&= \sum_{j,k \in R} (s_g \bar{\otimes} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M) \\
&= (I_{F_g(X)} \bar{\otimes} U_g(\pi_j^M)) c_{X, \oplus_{t \in R} U_t(M)}^g U_g(s_k \bar{\otimes} l_k^M) U_g(c_{X,M}^k) U_g(\pi_k^{X \bar{\otimes} M}) \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{j,k \in R} (s_g \bar{\otimes} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M) \\
&= (I_{F_g(X)} \bar{\otimes} U_g(\pi_j^M)) (F_g(s_k) \bar{\otimes} U_g(l_k^M)) c_{F_k(X), U_k(M)}^g U_g(c_{X,M}^k) U_g(\pi_k^{X \bar{\otimes} M}) \\
&= \sum_{j \in R} (s_g \bar{\otimes} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M) \\
&= (F_g(s_j) \bar{\otimes} I_{U_g(U_j(M))}) c_{F_j(X), U_j(M)}^g U_g(c_{X,M}^j) U_g(\pi_j^{X \bar{\otimes} M}) \\
&= \sum_{j \in R} (s_g F_g(s_j) \bar{\otimes} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M) \\
&= c_{F_j(X), U_j(M)}^g U_g(c_{X,M}^j) U_g(\pi_j^{X \bar{\otimes} M}) \\
&\stackrel{(1.6)}{=} \sum_{j \in R} (s_{gj}(\gamma_{g,j}) \bar{\otimes} l_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M) \\
&= c_{F_j(X), U_j(M)}^g U_g(c_{X,M}^j) U_g(\pi_j^{X \bar{\otimes} M})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \in R} (s_{gj} \bar{\otimes} \iota_{s(gj)}^M U_{s(gj)} (\nu_{h(gj)}) (\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}) \\
&((\gamma_{g,j})_X \bar{\otimes} (\mu_{g,j})_M) c_{F_j(X), U_j(M)}^g U_g (c_{X,M}^j) U_g (\pi_j^{X \bar{\otimes} M}) \\
&\stackrel{(3.13)}{=} \sum_{j \in R} (s_{gj} \bar{\otimes} \iota_{s(gj)}^M U_{s(gj)} (\nu_{h(gj)}) (\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}) c_{X,M}^{gj} (\mu_{g,j})_{X \bar{\otimes} M} \\
&U_g (\pi_j^{X \bar{\otimes} M}),
\end{aligned}$$

em que a igualdade  $(\star)$  segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U_g (F_k(X) \bar{\otimes} U_k(M)) & \xrightarrow{c_{F_k(X), U_k(M)}^g} & F_g (F_k(X)) \bar{\otimes} U_g (U_k(M)) \\
U_g (s_k \bar{\otimes} \iota_k^M) \downarrow & & \downarrow F_g (s_k \bar{\otimes} U_g (\iota_k^M)) \\
U_g (X \bar{\otimes} \oplus_{t \in R} U_t(M)) & \xrightarrow{c_{X, \oplus_{t \in R} U_t(M)}^g} & F_g (X) \bar{\otimes} U_g (\oplus_{t \in R} U_t(M)),
\end{array}$$

devido à naturalidade de  $c^g$ .

Além disso,

$$\begin{aligned}
c_{(X,s),(M,\nu)} u_g &= \sum_{k \in R} (s_k \bar{\otimes} \iota_k^M) c_{X,M}^k \pi_k^{X \bar{\otimes} M} \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^{X \bar{\otimes} M} (c_{X,M}^{s(gj)})^{-1} \\
&(s_{s(gj)}^{-1} s_{gj} \bar{\otimes} U_{s(gj)} (\nu_{h(gj)}) (\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}) c_{X,M}^{gj} (\mu_{g,j})_{X \bar{\otimes} M} U_g (\pi_j^{X \bar{\otimes} M}) \\
&= \sum_{j \in R} (s_{s(gj)} \bar{\otimes} \iota_{s(gj)}^M) c_{X,M}^{s(gj)} (c_{X,M}^{s(gj)})^{-1} \\
&(s_{s(gj)}^{-1} s_{gj} \bar{\otimes} U_{s(gj)} (\nu_{h(gj)}) (\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}) c_{X,M}^{gj} (\mu_{g,j})_{X \bar{\otimes} M} U_g (\pi_j^{X \bar{\otimes} M}) \\
&= \sum_{j \in R} (s_{gj} \bar{\otimes} \iota_{s(gj)}^M U_{s(gj)} (\nu_{h(gj)}) (\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}) c_{X,M}^{gj} (\mu_{g,j})_{X \bar{\otimes} M} \\
&U_g (\pi_j^{X \bar{\otimes} M}).
\end{aligned}$$

Portanto,  $z_g U_g (c_{(X,s),(M,\nu)}) = c_{(X,s),(M,\nu)} u_g$ . Logo,  $c_{(X,s),(M,\nu)}$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ .

Definimos

$$c_{(X,s),(M,\nu)}^{-1} = \sum_{k \in R} \iota_k^{X \bar{\otimes} M} (c_{X,M}^k)^{-1} (s_k^{-1} \bar{\otimes} \pi_k^M).$$

Mostrar que  $c$  é um isomorfismo natural e que satisfaz (3.3) e (3.4) é análogo ao feito para o funtor  $L$  na Proposição 3.2.12.  $\blacksquare$

**Proposição 5.2.3** *O funtor  $L_N$  é adjunto à esquerda do funtor  $F_N$ .*

**Demonstração:** Para provar tal adjunção, usamos a equivalência dada no Teorema 1.2.5. Definimos  $\eta : Id_{\mathcal{M}^{H_N}} \rightarrow F_N L_N$  por

$$\eta_{(M,\nu)} = \iota_1^M : (M, \nu) \rightarrow F_N(L_N(M, \nu)) = (\oplus_{t \in R} U_t(M), \nu).$$

Mostremos que  $\eta_{(M,\nu)}$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Seja  $g \in H_N$ . Então  $g = 1g = s(g)h(g)$ . Logo,

$$s(g) = 1 \text{ e } h(g) = g. \quad (5.5)$$

Assim,

$$\begin{aligned} v_g U_g(\iota_1^M) &= \sum_{j \in R} \iota_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\nu_{h(gj)})(\mu_{s(gj), h(gj)})_M^{-1}(\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \\ &= U_g(\iota_1^M) \\ &= \iota_{s(g)}^M U_{s(g)}(\nu_{h(g)})(\mu_{s(g), h(g)})_M^{-1}(\mu_{g,1})_M \\ &\stackrel{(5.5)}{=} \iota_1^M U_1(\nu_g)(\mu_{1,g})_M^{-1} \\ &= \iota_1^M \nu_g. \end{aligned}$$

Logo, vale a igualdade (3.15). Provemos que  $\eta$  é uma transformação natural. Seja  $f : (M, \nu) \rightarrow (M', \nu')$  um morfismo em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Então

$$\begin{aligned} F_N(L_N(f))\eta_{(M,\nu)} &= \sum_{l \in R} \iota_l^{M'} U_l(f)\pi_l^M \iota_1^M \\ &= \iota_1^{M'} U_1(f) = \iota_1^{M'} f = \eta_{(M',\nu')} f. \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (M, \nu) & \xrightarrow{\eta_{(M,\nu)}} & F_N(L_N(M, \nu)) \\ f \downarrow & & \downarrow F_N(L_N(f)) \\ (M', \nu') & \xrightarrow{\eta_{(M',\nu')}} & F_N(L_N(M', \nu')) \end{array}$$

comuta.

Agora, definimos  $\varepsilon : L_N F_N \rightarrow Id_{\mathcal{M}^H}$  por

$$\varepsilon_{(M,\alpha)} = \sum_{j \in R} \alpha_j \pi_j^M : L_N F_N(M, \alpha) = (\oplus_{t \in R} U_t(M), \nu) \rightarrow (M, \alpha).$$

Mostremos que  $\varepsilon_{(M,\alpha)}$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ . Seja  $g \in H$ . Então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(M,\alpha)}v_g &= \sum_{l,j \in R} \alpha_l \pi_l^M \iota_{s(gj)}^M U_{s(gj)}(\alpha_{h(gj)}) (\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} (\mu_{g,j})_M \\
&U_g(\pi_j^M) \\
&= \sum_{j \in R} \alpha_{s(gj)} U_{s(gj)}(\alpha_{h(gj)}) (\mu_{s(gj),h(gj)})_M^{-1} (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \\
&\stackrel{(3.14)}{=} \sum_{j \in R} \alpha_{s(gj)h(gj)} (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \\
&= \sum_{j \in R} \alpha_{gj} (\mu_{g,j})_M U_g(\pi_j^M) \\
&\stackrel{(3.14)}{=} \sum_{j \in R} \alpha_g U_g(\alpha_j) U_g(\pi_j^M) \\
&= \alpha_g U_g \left( \sum_{j \in R} \alpha_j \pi_j^M \right) \\
&= \alpha_g U_g(\varepsilon_{(M,\alpha)}).
\end{aligned}$$

Portanto, vale a igualdade (3.15). Provemos que  $\varepsilon$  é uma transformação natural. Seja  $f : (M, \alpha) \rightarrow (M', \alpha')$  um morfismo em  $\mathcal{M}^H$ . Então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(M',\alpha')} L_N(F_N(f)) &= \sum_{l \in R} \alpha'_l \pi_l^{M'} \sum_{j \in R} \iota_j^{M'} U_j(f) \pi_j^M \\
&= \sum_{j \in R} \alpha'_j U_j(f) \pi_j^M \\
&\stackrel{(3.15)}{=} \sum_{j \in R} f \alpha_j \pi_j^M \\
&= f \varepsilon_{(M,\alpha)}.
\end{aligned}$$

Portanto, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
L_N F_N(M, \alpha) & \xrightarrow{\varepsilon_{(M,\alpha)}} & (M, \alpha) \\
L_N(F_N(f)) \downarrow & & \downarrow f \\
L_N F_N(M', \alpha') & \xrightarrow{\varepsilon_{(M',\alpha')}} & (M', \alpha')
\end{array}$$

comuta.

Para mostrar que é uma adjunção, mostremos que valem as igualdades (1.1) e (1.2). Seja  $(M, \alpha) \in \mathcal{M}^H$ . Então

$$F_N(\varepsilon_{(M,\alpha)}) \eta_{F_N(M,\alpha)} = \sum_{j \in R} \alpha_j \pi_j^M \iota_1^M = \alpha_1 = I_M = I_{F_N(M,\alpha)}.$$

Logo,  $F_N(\varepsilon_{(M,\alpha)})\eta_{F_N(M,\alpha)} = I_{F_N(M,\alpha)}$ . Sejam  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^{H_N}$  e  $L_N(M, \nu) = (\oplus_{t \in R} U_t(M), \nu)$ . Então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{L_N(M,\nu)} L_N(\eta_{(M,\nu)}) &= \sum_{j,l \in R} v_j \pi_j^{\oplus_{t \in R} U_t(M)} \iota_l^{\oplus_{t \in R} U_t(M)} U_l(\eta_{(M,\nu)}) \pi_l^M \\
&= \sum_{j \in R} v_j U_j(\eta_{(M,\nu)}) \pi_j^M \\
&\stackrel{(5.3)}{=} \sum_{j,z \in R} \iota_{s(jz)}^M U_{s(jz)}(\nu_{h(jz)}) (\mu_{s(jz),h(jz)})_M^{-1} \\
&\quad (\mu_{j,z})_M U_j(\pi_z^M) U_j(\iota_1^M) \pi_j^M \\
&= \sum_{j \in R} \iota_{s(j)} U_{s(j)}(\nu_{h(j)}) (\mu_{s(j),h(j)})_M^{-1} (\mu_{j,1})_M \pi_j^M \\
&\stackrel{(\star)}{=} \sum_{j \in R} \iota_j^M U_j(\nu_1) (\mu_{j,1})_M^{-1} (\mu_{j,1})_M \pi_j^M \\
&= \sum_{j \in R} \iota_j^M \pi_j^M \\
&= I_{\oplus_{t \in R} U_t(M)} = I_{L_N(M,\nu)}
\end{aligned}$$

e como  $j = j1 = s(j)h(j)$  e  $j \in R$ , temos que  $s(j) = j$  e  $h(j) = 1$ , o que justifica a igualdade  $(\star)$ .

Logo,  $\varepsilon_{L_N(M,\nu)} L_N(\eta_{(M,\nu)}) = I_{L_N(M,\nu)}$ . Portanto  $L_N$  é adjunto à esquerda de  $F_N$ .  $\blacksquare$

Sabemos da literatura ([17], Lema 2.6.21) que funtores adjuntos à direita ou à esquerda de um dado functor são únicos, a menos de equivalência. Assim, se  $(L_N, F_N, \phi)$  e  $(L_N^{R'}, F_N, \phi')$  são adjunções, em que  $R'$  é um outro conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de  $H_N$  em  $H$ , então  $L_N$  e  $L_N^{R'}$  são equivalentes, ou seja, o functor  $L_N$  (estudado acima) não depende do conjunto de representantes considerado.

Notemos que a proposição acima implica que, para quaisquer  $(Y, \mu) \in \mathcal{M}^{H_N}$  e  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ , temos que

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y, \mu), (M, \nu)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y, \mu), F_N(M, \nu)).$$

A seguir provamos o principal teorema deste trabalho. Tal teorema caracteriza os objetos simples em  $\mathcal{M}^H$  que contêm como somando direto um dado objeto simples em  $\mathcal{M}$ . Lembramos que  $\{1 = g_1, g_2, \dots, g_n\}$  é um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de  $H_N$  em  $H$ .

**Teorema 5.2.4** *Seja  $N \in \mathcal{M}$  um objeto simples. Então, o funtor  $L_N : \mathcal{M}^{H_N} \rightarrow \mathcal{M}^H$  induz uma correspondência bijetiva entre as classes de isomorfismos de*

- (1) *Objetos simples  $(Y, \mu) \in \mathcal{M}^{H_N}$  tais que  $\text{Hom}(N, Y) \neq 0$ ,*
- (2) *Objetos simples  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$  tais que  $\text{Hom}(N, M) \neq 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $(Y, \mu)$  um objeto simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$  tal que  $\text{Hom}(N, Y) \neq 0$ . Mostremos que  $L_N(Y, \mu)$  não é o objeto zero. Seja  $f \in \text{Hom}(N, Y)$  tal que  $f \neq 0$ . Como  $N$  é simples, segue que  $\text{Ker}(f) = 0$ . Logo,  $f$  é um monomorfismo e portanto,  $N$  é um subobjeto de  $Y$ . Também,  $Y$  é um subobjeto de  $\bigoplus_{i=1}^n U_{g_i}(Y)$ , pois  $U_1(Y) = Y$ . Daí,  $N$  é um subobjeto de  $\bigoplus_{i=1}^n U_{g_i}(Y)$ . Logo,  $FL_N(Y, \mu) = \bigoplus_{i=1}^n U_{g_i}(Y)$  não é o objeto zero, em que  $F : \mathcal{M}^H \rightarrow \mathcal{M}$  é o funtor esquecimento. Portanto,  $L_N(Y, \mu)$  não é o objeto zero.

Seja  $(P, \gamma)$  um somando direto simples de  $L_N(Y, \mu)$ . Para mostrar a boa definição de tal correspondência, mostremos que  $\text{Hom}(N, P) \neq 0$  e que  $L_N(Y, \mu) \cong (P, \gamma)$ , isto é,  $L_N(Y, \mu)$  satisfaz (2).

Temos que  $\text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y, \mu), (P, \gamma)) \neq 0$ . Pela Proposição 5.2.3, o funtor  $L_N$  é adjunto à esquerda do funtor  $F_N$ . Logo,

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y, \mu), (P, \gamma)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y, \mu), F_N(P, \gamma)).$$

Portanto,  $\text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y, \mu), F_N(P, \gamma)) \neq 0$ . Sendo  $(Y, \mu)$  um objeto simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$ , segue que  $(Y, \mu)$  é um subobjeto de  $F_N(P, \gamma)$ . (★) Aplicando o funtor esquecimento  $F' : \mathcal{M}^{H_N} \rightarrow \mathcal{M}$ , segue que  $Y$  é um subobjeto de  $P$  em  $\mathcal{M}$ . Portanto,  $\text{Hom}(Y, P) \cong \text{Hom}(P, Y) \neq 0$ . Agora, como  $(Y, \mu)$  é simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$  e  $N$  é um somando direto simples de  $Y$  em  $\mathcal{M}$ , pela Proposição 5.1.4, para o subgrupo  $H_N$ , segue que  $Y \cong mN$  em  $\mathcal{M}$ , em que  $m = \dim \text{Hom}(Y, N)$ . Dessa forma,

$$m\text{Hom}(P, N) \cong \text{Hom}(P, mN) \cong \text{Hom}(P, Y) \neq 0.$$

Logo,  $\text{Hom}(P, N) \cong \text{Hom}(N, P) \neq 0$ . Como  $N$  é simples em  $\mathcal{M}$ , isto implica que  $N$  é um somando direto simples de  $P$  em  $\mathcal{M}$ . Assim, novamente pela Proposição 5.1.4, temos que  $P \cong m' \bigoplus_{i=1}^n N_i$ , em que  $N_i \cong U_{g_i}(N)$  e  $m' = \dim \text{Hom}(P, N)$ .

Como  $Y$  é subobjeto de  $P$ , segue das Proposições 1.3.9 e 1.3.17 que  $\dim \text{Hom}(Y, N) \leq \dim \text{Hom}(P, N)$ , isto é,  $m \leq m'$ . Além disso, como

$P$  é um subobjeto de  $\oplus_{i=1}^n U_{g_i}(Y)$ , temos

$$\begin{aligned} m' &= \dim \text{Hom}(N, P) \leq \dim \text{Hom}(N, \oplus_{i=1}^n U_{g_i}(Y)) \\ &= \dim \oplus_{i=1}^n \text{Hom}(N, U_{g_i}(Y)) = \sum_{i=1}^n \dim \text{Hom}(N, U_{g_i}(mN)) \\ &= m \sum_{i=1}^n \dim \text{Hom}(N, U_{g_i}(N)) = m, \end{aligned}$$

pois  $\dim \text{Hom}(N, U_{g_i}(N)) = 0$  para  $i \neq 1$  e  $\dim \text{Hom}(N, U_{g_1}(N)) = 1$ , pela Proposição 1.3.10 e Lema 5.1.3.

Portanto,  $m = m'$ . Agora, calculemos a dimensão de Frobenius-Perron de  $(P, \gamma)$  e de  $L_N(Y, \mu)$ . Pelo Corolário 5.1.5,

$$\begin{aligned} \text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(P, \gamma) &= \lambda[H : H_N] m' \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(N) \\ &= \lambda[H : H_N] m \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(N). \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y, \mu)) &\stackrel{(5.1)}{=} \lambda \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(\oplus_{i=1}^n U_{g_i}(Y)) \\ &= \lambda \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(\oplus_{i=1}^n U_{g_i}(mN)) \\ &= \lambda m \sum_{i=1}^n \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(U_{g_i}(N)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lambda m [H : H_N] \text{FPdim}_{\mathcal{M}}(N), \end{aligned}$$

em que a igualdade  $(*)$  segue do Corolário 4.3.11.

Portanto,

$$\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(P, \gamma) = \text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y, \mu)).$$

Como  $(P, \gamma)$  é um subobjeto simples de  $L_N(Y, \mu)$  segue, pela Proposição 4.3.7, que  $L_N(Y, \mu) \cong (P, \gamma)$ .

Mostremos que a correspondência é sobrejetiva. Seja  $(M, \nu)$  um objeto simples em  $\mathcal{M}^H$  tal que  $\text{Hom}(N, M) \neq 0$ . Como  $F_N(M, \nu)$  é um objeto em  $\mathcal{M}^{H_N}$  que é uma categoria semissimples, podemos escrever  $F_N(M, \nu) = \oplus_{j=1}^s (Y_j, \mu^j)$ , em que  $(Y_j, \mu^j)$  é simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$ , para todo  $j \in \{1, \dots, s\}$ . Assim,

$$\sum_{j=1}^s \text{Hom}(N, Y_j) \cong \text{Hom}(N, \oplus_{j=1}^s Y_j) \cong \text{Hom}(N, M) \neq 0.$$

Portanto, existe  $j_0 \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $\text{Hom}(N, Y_{j_0}) \neq 0$ . Definimos  $(Y, \mu) := (Y_{j_0}, \mu^{j_0})$  e obviamente temos que  $\text{Hom}(N, Y) \neq 0$ .

Mostremos que  $L_N(Y, \mu) \cong (M, \nu)$ . Notemos que  $(Y, \mu)$  é um somando direto simples de  $F_N(M, \nu)$  em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Assim, por adjunção,

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y, \mu), (M, \nu)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y, \mu), F_N(M, \nu)) \neq 0.$$

Como  $(M, \nu)$  é um objeto simples em  $\mathcal{M}^H$  segue, da adjunção acima, que  $(M, \nu)$  é um somando direto de  $L_N(Y, \mu)$ . Com um raciocínio análogo ao que foi desenvolvido acima a partir de  $(\star)$ , concluímos que  $\text{FPdim}_{\mathcal{M}^H}(M, \nu) = \text{FPdim}_{\mathcal{M}^H} L_N(Y, \mu)$ , segue que  $L_N(Y, \mu) \cong (M, \nu)$ .

Mostremos que a correspondência é injetiva. Sejam  $(Y, \mu)$  e  $(Y', \mu')$  objetos simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$  tais que  $\text{Hom}(N, Y) \neq 0$ ,  $\text{Hom}(N, Y') \neq 0$  e  $L_N(Y, \mu) \cong L_N(Y', \mu') \cong (P, \gamma)$ . Então, por adjunção,

$$0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y, \mu), (P, \gamma)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y, \mu), F_N(P, \gamma))$$

e

$$0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{M}^H}(L_N(Y', \mu'), (P, \gamma)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y', \mu'), F_N(P, \gamma)).$$

Logo,

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y, \mu), F_N(P, \gamma)) \neq 0 \text{ e } \text{Hom}_{\mathcal{M}^{H_N}}((Y', \mu'), F_N(P, \gamma)) \neq 0.$$

Como  $(Y, \mu)$  e  $(Y', \mu')$  são objetos simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$ , isto implica que ambos são somandos diretos de  $F_N(P, \gamma)$ . Desse fato, seguindo raciocínio análogo ao que foi desenvolvido a partir de  $(\star)$ , concluímos que  $\dim \text{Hom}(Y, N) = \dim \text{Hom}(P, N)$ .

Supondo, por absurdo, que  $(Y, \mu)$  e  $(Y', \mu')$  não sejam isomorfos, teríamos pelo Corolário 1.3.16 que  $(Y, \mu) \oplus (Y', \mu')$  é um subobjeto de  $F_N(P, \gamma)$ . Aplicando o funtor esquecimento  $F' : \mathcal{M}^{H_N} \rightarrow \mathcal{M}$ , temos que  $Y \oplus Y'$  é um subobjeto de  $P$  em  $\mathcal{M}$ . Daí,

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}(P, N) &\geq \dim \text{Hom}(Y \oplus Y', N) \\ &= \dim \text{Hom}(Y, N) + \dim \text{Hom}(Y', N), \end{aligned}$$

e como  $\dim \text{Hom}(Y, N) = \dim \text{Hom}(P, N)$ , isto implica que a dimensão de  $\text{Hom}(Y', N)$  é igual a zero, o que é um absurdo, por hipótese.

Portanto,  $(Y, \mu) \cong (Y', \mu')$  e a aplicação é injetiva. ■

Dessa forma, os objetos simples em  $\mathcal{M}^H$  que contêm como somando direto um objeto simples  $N \in \mathcal{M}$  estão em correspondência bijetiva com os objetos simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$  que contêm tal simples como somando direto.



### 5.3 Equivariantização e representações projetivas de grupos

Nesta seção apresentamos a categorias das  $\sigma$ -representações projetivas de um grupo finito  $G$ , em que  $\sigma$  é um 2-cociclo em  $G$ , e relacionamos tal categoria com equivariantizações de categorias módulo  $\mathcal{M}$  por um subgrupo estável de um objeto simples em  $\mathcal{M}$ .

**Definição 5.3.1** *Sejam  $G$  um grupo finito e  $\mathbb{k}$  um corpo. Um 2-cociclo em  $G$  é uma função  $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{k}^*$  que satisfaz as condições abaixo, para quaisquer  $g, h, l \in G$*

$$\sigma(g, h)\sigma(gh, l) = \sigma(g, hl)\sigma(h, l) \tag{5.6}$$

$$\sigma(g, 1) = \sigma(1, g) = 1. \tag{5.7}$$

**Definição 5.3.2** *Seja  $\sigma$  um 2-cociclo em  $G$ . Um par  $(V, \pi)$  é dito uma  $\sigma$ -representação projetiva de  $G$  se  $V$  é um  $\mathbb{k}$ -espaço vetorial de dimensão finita e  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  é uma função tal que*

$$\pi(g)\pi(h) = \sigma(g, h)\pi(gh), \tag{5.8}$$

para quaisquer  $g, h \in G$ .

Fixado um 2-cociclo  $\sigma$  em  $G$ , denotamos  $RepProj(G)$  a categoria cujos objetos são as  $\sigma$ -representações projetivas  $(V, \pi)$  e os morfismos entre  $(V, \pi)$  e  $(W, \rho)$  são todas as transformações lineares  $T : V \rightarrow W$  que comutam o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \pi(g) \downarrow & & \downarrow \rho(g) \\ V & \xrightarrow{T} & W \end{array}$$

para todo  $g \in G$ , isto é,

$$\rho(g)T = T\pi(g). \tag{5.9}$$

De fato a composição de morfismos está bem definida, pois se  $T : (V, \pi) \rightarrow (W, \rho)$  e  $S : (W, \rho) \rightarrow (U, \alpha)$  são morfismos como definido acima, então  $ST : V \rightarrow U$  é transformação linear e

$$\alpha(g)ST = S\rho(g)T = ST\pi(g).$$

Para cada objeto  $(V, \pi)$  em  $\text{RepProj}(G)$ ,  $I_{(V, \pi)}$  é a transformação linear identidade, que é claramente um morfismo em  $\text{RepProj}(G)$ .

Seja  $N$  um objeto simples em  $\mathcal{M}$ . A ação de  $H$  em  $\mathcal{M}$  induz uma ação de  $H_N$  em  $\mathcal{M}$  e então podemos considerar  $\mathcal{M}^{H_N}$ . A seguir é definido um 2-cociclo em  $H_N$  e ao final desta seção relacionamos os objetos simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$  com os objetos simples em  $\text{RepProj}(H_N)$  que são exatamente as representações projetivas irredutíveis nesta categoria. Para isso, lembramos que o par  $(V, \pi)$  é dito uma *representação projetiva irredutível* de  $G$  se não possui subespaços não triviais  $W$  de  $V$  tal que  $\pi(g)(W) \subseteq W$ , para todo  $g \in G$ . Para mais detalhes sobre representações projetivas veja ([3], [5], [14]).

Por definição de  $H_N$ , existem isomorfismos  $d^g : U_g(N) \rightarrow N$ , para cada  $g \in H_N$ . Suponhamos que  $d^1 = I_N$ . Dessa forma, para cada  $g, h \in H_N$  fixados, a composição abaixo é um isomorfismo de  $N$  em  $N$

$$N \xrightarrow{(d^{gh})^{-1}} U_{gh}(N) \xrightarrow{(\mu_{g,h})_N^{-1}} U_g(U_h(N)) \xrightarrow{U_g(d^h)} U_g(N) \xrightarrow{d^g} N.$$

Logo,  $d^g U_g(d^h)(\mu_{g,h})_N^{-1}(d^{gh})^{-1}$  é um morfismo não-nulo que pertence à  $\text{Hom}(N, N) = \mathbb{k}I_N$ . Assim, existe  $\sigma_N(g, h) \in \mathbb{k}^*$  tal que

$$\sigma_N(g, h)^{-1} I_N = d^g U_g(d^h)(\mu_{g,h})_N^{-1}(d^{gh})^{-1}. \quad (5.10)$$

Fica assim definida uma função  $\sigma_N : H_N \times H_N \rightarrow \mathbb{k}^*$ .

**Lema 5.3.3** *A função  $\sigma_N : H_N \times H_N \rightarrow \mathbb{k}^*$  definida acima é um 2-cociclo em  $H_N$ .*

**Demonstração:** Sejam  $g, h, l \in H_N$ . Então

$$\begin{aligned} & \sigma_N(g, h)^{-1} \sigma_N(gh, l)^{-1} I_N = \\ & = \sigma_N(g, h)^{-1} I_N \sigma_N(gh, l)^{-1} I_N \\ & = d^g U_g(d^h)(\mu_{g,h})_N^{-1}(d^{gh})^{-1} d^{gh} U_{gh}(d^l)(\mu_{gh,l})_N^{-1}(d^{ghl})^{-1} \\ & = d^g U_g(d^h)(\mu_{g,h})_N^{-1} U_{gh}(d^l)(\mu_{gh,l})_N^{-1}(d^{ghl})^{-1} \\ & \stackrel{(*)}{=} d^g U_g(d^h) U_g(U_h(d^l))(\mu_{g,h})_{U_l(N)}^{-1} (\mu_{gh,l})_N^{-1} (d^{ghl})^{-1} \\ & \stackrel{(3.12)}{=} d^g U_g(d^h) U_g(U_h(d^l)) U_g((\mu_{h,l})_N^{-1})(\mu_{g,hl})_N^{-1} (d^{ghl})^{-1} \\ & = d^g U_g(d^h U_h(d^l)(\mu_{h,l})_N^{-1})(\mu_{g,hl})_N^{-1} (d^{ghl})^{-1} \\ & = d^g U_g(\sigma_N(h, l)^{-1} I_N d^{hl})(\mu_{g,hl})_N^{-1} (d^{ghl})^{-1} \\ & = \sigma_N(h, l)^{-1} d^g U_g(d^{hl})(\mu_{g,hl})_N^{-1} (d^{ghl})^{-1} \\ & = \sigma_N(h, l)^{-1} \sigma_N(g, hl)^{-1} I_N, \end{aligned}$$

em que igualdade (\*) segue da naturalidade de  $\mu_{g,h}$ , isto é, da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_g(U_h(U_l(N))) & \xrightarrow{(\mu_{g,h})_{U_l(N)}} & U_{gh}(U_l(N)) \\ U_g(U_h(d^l)) \downarrow & & \downarrow U_{gh}(d^l) \\ U_g(U_h(N)) & \xrightarrow{(\mu_{g,h})_N} & U_{gh}(N). \end{array}$$

Logo,  $\sigma_N(g, h)^{-1} \sigma_N(gh, l)^{-1} I_N = \sigma_N(g, hl)^{-1} \sigma_N(h, l)^{-1} I_N$ , donde

$$\sigma_N(g, h) \sigma_N(gh, l) = \sigma_N(g, hl) \sigma_N(h, l).$$

Além disso,

$$\sigma_N(1, g)^{-1} I_N = d^1 U_1(d^g) (\mu_{1,g})_N^{-1} (d^g)^{-1} = d^1 d^g (d^g)^{-1} = I_N$$

e

$$\sigma_N(g, 1)^{-1} I_N = d^g U_g(d^1) (\mu_{g,1})_N^{-1} (d^g)^{-1} = I_N.$$

Logo,  $\sigma_N(1, g) = 1 = \sigma_N(g, 1)$ . Portanto,  $\sigma_N$  é um 2-cociclo. ■

**Lema 5.3.4** *Sejam  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^H$ ,  $N$  um objeto simples em  $\mathcal{M}$  e  $\sigma_N$  como acima. Seja  $\pi : H_N \rightarrow GL(\text{Hom}(N, M))$  dada por*

$$\pi(g)(f) = \nu_g U_g(f) (d^g)^{-1}.$$

*Então  $(\text{Hom}(N, M), \pi)$  é uma  $\sigma_N$ -representação projetiva de  $H_N$ .*

**Demonstração:** Mostremos que vale (5.8). Sejam  $g, h \in H_N$  e  $f \in \text{Hom}(N, M)$ . Temos

$$\begin{aligned} & \sigma_N(g, h)^{-1} (\pi(g) \pi(h)(f)) \\ &= \sigma_N(g, h)^{-1} \pi(g) (\nu_h U_h(f) (d^h)^{-1}) \\ &= \nu_g U_g(\nu_h U_h(f) (d^h)^{-1}) (d^g)^{-1} \sigma_N(g, h)^{-1} I_N \\ &\stackrel{(5.10)}{=} \nu_g U_g(\nu_h) U_g(U_h(f)) U_g((d^h)^{-1}) U_g(d^h) (\mu_{g,h})_N^{-1} (d^{gh})^{-1} \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \nu_{gh} (\mu_{g,h})_M U_g(U_h(f)) (\mu_{g,h})_N^{-1} (d^{gh})^{-1} \\ &\stackrel{(**)}{=} \nu_{gh} U_{gh}(f) (d^{gh})^{-1} = \pi(gh)(f), \end{aligned}$$

em que a igualdade (\*\*) segue da comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_g(U_h(N)) & \xrightarrow{(\mu_{g,h})_N} & U_{gh}(N) \\ U_g(U_h(f)) \downarrow & & \downarrow U_{gh}(f) \\ U_g(U_h(M)) & \xrightarrow{(\mu_{g,h})_M} & U_{gh}(M). \end{array}$$

Logo,  $\pi(g)\pi(h) = \sigma_N(g, h)\pi(gh)$ .

Mostremos que  $\pi(g) \in GL(Hom(N, M))$ . Definimos  $\pi(g)^{-1} = \sigma_N(g, g^{-1})^{-1}\pi(g^{-1})$ . Seja  $f \in Hom(N, M)$ . Então

$$\begin{aligned} (\pi(g)\pi(g)^{-1})(f) &= \pi(g)(\sigma_N(g, g^{-1})^{-1}\pi(g^{-1})(f)) \\ &= \sigma_N(g, g^{-1})^{-1}\sigma_N(g, g^{-1})\pi(1)(f) \\ &= \nu_1 U_1(f)(d^1)^{-1} = f \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\pi(g)^{-1}\pi(g))(f) &= (\sigma_N(g, g^{-1})^{-1}\pi(g^{-1})\pi(g))(f) \\ &= \sigma_N(g, g^{-1})^{-1}\sigma_N(g^{-1}, g)\pi(g^{-1}g)(f) \\ &\stackrel{(\star)}{=} \sigma_N(g, g^{-1})^{-1}\sigma_N(g, g^{-1})\pi(1)(f) = f, \end{aligned}$$

pois usando os elementos  $g, g^{-1}$  e  $g$  em (5.6) temos  $\sigma_N(g, g^{-1})\sigma_N(1, g) = \sigma_N(g, 1)\sigma_N(g^{-1}, g)$  e isto implica que  $\sigma_N(g, g^{-1}) = \sigma_N(g^{-1}, g)$ , justificando a igualdade  $(\star)$ .

Logo,  $\pi(g)\pi(g)^{-1} = \pi(g)^{-1}\pi(g) = I_{Hom(N, M)}$ . Portanto,  $\pi$  está bem definida. ■

Seja  $N$  um objeto simples em  $\mathcal{M}$ . Consideremos a subcategoria plena  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}^{H_N}$  cujos objetos são todos os  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^{H_N}$  tais que  $M \cong Hom(N, M) \otimes N$ . Nosso próximo resultado traz uma equivalência entre as categorias  $\mathcal{N}$  e  $RepProj(H_N)$ . Para provar tal equivalência, usaremos o lema abaixo.

**Lema 5.3.5** *Seja  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 0$ . O conjunto  $B = \{\iota_i^N\}_{i=1}^p$  é uma base para o espaço vetorial  $Hom(N, pN)$ , em que  $\iota_i^N : N \rightarrow pN$  é a inclusão da soma direta.*

**Demonstração:** Mostremos que  $B$  é LI. Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{k}$  tais que

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \iota_i^N.$$

Fixado  $j \in \{1, \dots, p\}$  e compondo  $\pi_j^N$  à esquerda da igualdade acima, temos

$$0 = \sum_{i=1}^p \pi_j^N \alpha_i \iota_i^N = \alpha_j \pi_j^N \iota_j^N = \alpha_j I_N$$

e assim  $\alpha_j = 0$ , para todo  $j \in \{1, \dots, p\}$ .

Além disso, como  $N$  é simples, temos que  $Hom(N, pN) \cong p\mathbb{k}$ . Assim, o conjunto  $B$  é LI e possui cardinalidade igual à dimensão de  $Hom(N, pN)$ . Portanto,  $B$  é uma base. ■

**Proposição 5.3.6** *Seja  $N$  um objeto simples em  $\mathcal{M}$ . Então existe uma equivalência entre as categorias  $\mathcal{N}$  e  $RepProj(H_N)$ .*

**Demonstração:** Seja  $d^g : U_g(N) \rightarrow N$ ,  $g \in H_N$ , uma escolha fixada de isomorfismos (com  $d^1 = I_N$ ) e seja  $\sigma_N$  o 2-cociclo associado.

Sejam  $(V, \pi), (W, \rho)$  objetos e  $T : (V, \pi) \rightarrow (W, \rho)$  um morfismo em  $RepProj(H_N)$ . Definimos  $\Phi : RepProj(H_N) \rightarrow \mathcal{N}$  por

$$\Phi(V, \pi) = (V \overline{\otimes} N, \nu),$$

em que

$$\nu_g = \pi(g) \overline{\otimes} d^g : U_g(V \overline{\otimes} N) \stackrel{(3.17)}{=} V \overline{\otimes} U_g(N) \rightarrow V \overline{\otimes} N.$$

Definimos  $\Phi(T) : (V \overline{\otimes} N, \nu) \rightarrow (W \overline{\otimes} N, v)$  por  $\Phi(T) = T \overline{\otimes} I_N$ . Mostremos que  $(V \overline{\otimes} N, \nu) \in \mathcal{M}^{H_N}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \nu_g U_g(\nu_h) &= (\pi(g) \overline{\otimes} d^g) U_g(\pi(h) \overline{\otimes} d^h) \\ &\stackrel{(3.18)}{=} (\pi(g) \overline{\otimes} d^g)(\pi(h) \overline{\otimes} U_g(d^h)) \\ &= \pi(g) \pi(h) \overline{\otimes} d^g U_g(d^h) \\ &\stackrel{(5.8)}{=} \sigma_N(g, h) \pi(gh) \overline{\otimes} d^g U_g(d^h) \\ &\stackrel{(5.10)}{=} \sigma_N(g, h) \pi(gh) \overline{\otimes} \sigma_N(g, h)^{-1} d^{gh}(\mu_{g,h})_N \\ &= \pi(gh) \overline{\otimes} d^{gh}(\mu_{g,h})_N \\ &= (\pi(gh) \overline{\otimes} d^{gh})(I_V \overline{\otimes}(\mu_{g,h})_N) \\ &\stackrel{(3.19)}{=} (\pi(gh) \overline{\otimes} d^{gh})(\mu_{g,h})_{V \overline{\otimes} N} \\ &= \nu_{gh}(\mu_{g,h})_{V \overline{\otimes} N}. \end{aligned}$$

Seja  $p = \dim(V)$ . Então  $Hom(pN, N) \cong p\mathbb{k}$  e assim,

$$V \overline{\otimes} N = pN \cong Hom(pN, N) \overline{\otimes} N.$$

Logo,  $\Phi(V, \pi) \in \mathcal{N}$ . Mostremos que  $\Phi(T)$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . De fato,

$$\begin{aligned} (T \overline{\otimes} I_N) \nu_g &= (T \overline{\otimes} I_N)(\pi(g) \overline{\otimes} d^g) \\ &= T \pi(g) \overline{\otimes} d^g \\ &= \rho(g) T \overline{\otimes} d^g \\ &= (\rho(g) \overline{\otimes} d^g)(T \overline{\otimes} U_g(I_N)) \\ &\stackrel{(3.18)}{=} v_g U_g(T \overline{\otimes} I_N). \end{aligned}$$

Definimos agora  $\Phi' : \mathcal{N} \rightarrow RepProj(H_N)$  por

$$\Phi'(M, s) = (Hom(N, M), \pi),$$

em que  $\pi(g)(f) = s_g U_g(f)(d^g)^{-1}$ , para quaisquer  $f \in \text{Hom}(N, M)$  e  $g \in H_N$ . Exatamente como foi feito no Lema 5.3.4, segue que  $(\text{Hom}(N, M), \pi)$  é uma  $\sigma_N$ -representação projetiva de  $H_N$ .

Seja  $\phi : (M, s) \rightarrow (M', s')$  um morfismo em  $\mathcal{M}^{H_N}$ . Definimos

$$\Phi'(\phi) : (\text{Hom}(N, M), \pi) \rightarrow (\text{Hom}(N, M'), \pi')$$

por  $\Phi'(\phi)(f) = \phi f$ , para qualquer  $f \in \text{Hom}(N, M)$ . É claro que  $\Phi'(\phi)$  é uma transformação linear, pois os morfismos são  $\mathbb{k}$ -bilineares. Além disso, dado  $f \in \text{Hom}(N, M)$ , temos

$$\begin{aligned} (\pi'(g)\Phi'(\phi))(f) &= \pi'(g)(\phi f) = s'_g U_g(\phi f)(d^g)^{-1} \\ &= s'_g U_g(\phi)U_g(f)(d^g)^{-1} \\ &\stackrel{(3.15)}{=} \phi s_g U_g(f)(d^g)^{-1} \\ &= \Phi'(\phi)(\pi(g)(f)) \\ &= (\Phi'(\phi)\pi(g))(f). \end{aligned}$$

Portanto,  $\Phi'(\phi)$  é um morfismo em  $\text{RepProj}(H_N)$ . Assim,  $\Phi$  e  $\Phi'$  estão bem definidos. Não é difícil verificar que os mesmos são funtores.

Mostremos que  $\text{Id}_{\text{RepProj}(H_N)} \sim \Phi'\Phi$ . Sejam  $(V, \pi) \in \text{RepProj}(H_N)$  com  $\dim(V) = n$  e  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  uma base fixada de  $V$ . Primeiramente, notemos que

$$\Phi'\Phi(V, \pi) = \Phi'(V \overline{\otimes} N, \nu) = \Phi'(nN, \nu) = (\text{Hom}(N, nN), \pi'),$$

em que  $\nu_g = \pi(g) \overline{\otimes} d^g$  e

$$\pi'(g)(f) = \nu_g U_g(f)(d^g)^{-1} = (\pi(g) \overline{\otimes} d^g) U_g(f)(d^g)^{-1}.$$

Definimos  $\gamma_V : (V, \pi) \rightarrow \Phi'\Phi(V, \pi) = (\text{Hom}(N, nN), \pi')$  por

$$\gamma_V(v_i) = \iota_{i,n}^N : N \rightarrow N^n$$

nos elementos da base de  $V$  e estendemos linearmente, se  $n \neq 0$ . Se  $n = 0$ ,  $\gamma_V = 0$ . Pelo lema acima, segue que  $\{\gamma_V(v_i)\}_{i=1}^n$  é uma base de  $\text{Hom}(N, nN)$ . Logo,  $\gamma_V$  leva base em base, donde é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Mostremos que  $\gamma_V$  é um morfismo em  $RepProj(H_N)$ . Para cada  $g \in H_N$ , seja  $[\pi(g)]_\beta^\beta = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ . Então

$$\begin{aligned}
(\pi'(g)\gamma_V)(v_l) &= \pi'(g)(\iota_{l,n}^N) = (\pi(g) \otimes d^g)U_g(\iota_{l,n}^N)(d^g)^{-1} \\
&\stackrel{(3.16)}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \iota_{i,n}^N d^g \pi_{j,n}^{U_g(N)} U_g(\iota_{l,n}^N)(d^g)^{-1} \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \iota_{i,n}^N d^g U_g(\pi_{j,n}^N) U_g(\iota_{l,n}^N)(d^g)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^n a_{il} \iota_{i,n}^N d^g (d^g)^{-1} = \sum_{i=1}^n a_{il} \gamma_V(v_i) \\
&= \gamma_V\left(\sum_{i=1}^n a_{il} v_i\right) = \gamma_V(\pi(g)(v_l)) = (\gamma_V \pi(g))(v_l),
\end{aligned}$$

para todo  $l \in \{1, \dots, n\}$  e a igualdade  $(*)$  segue da definição da projeção dada no Lema 3.3.1. Logo,  $\pi'(g)\gamma_V = \gamma_V \pi(g)$ .

Mostremos agora que  $\gamma$  é uma transformação natural. Sejam  $(W, \rho) \in RepProj(H_N)$  com  $\dim(W) = m$ ,  $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$  uma base de  $W$  fixada,  $T : V \rightarrow W$  um morfismo em  $RepProj(H_N)$  e  $[T]_{\beta'}^\beta = (b_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ . Vejamos que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\gamma_V} & Hom(N, nN) \\
T \downarrow & & \downarrow (\Phi' \Phi)(T) \\
W & \xrightarrow{\gamma_W} & Hom(N, mN).
\end{array}$$

Temos, para cada  $l \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned}
(\Phi' \Phi)(T)\gamma_V(v_l) &= \Phi'(T \otimes I_N)(\iota_{l,n}^N) = (T \otimes I_N)\iota_{l,n}^N \\
&\stackrel{(3.16)}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} \iota_{i,m}^N I_N \pi_{j,n}^N \iota_{l,n}^N \\
&= \sum_{i=1}^m b_{il} \gamma_W(w_i) = \gamma_W\left(\sum_{i=1}^m b_{il} w_i\right) = \gamma_W T(v_l).
\end{aligned}$$

Portanto,  $\gamma : Id_{RepProj(H_N)} \rightarrow \Phi' \Phi$  é um isomorfismo natural.

Mostremos agora que existe um isomorfismo natural entre os funtores  $\Phi \Phi'$  e  $Id_N$ .

Seja  $(M, s) \in \mathcal{N}$  com  $p = \dim Hom(N, M)$ . Assim,

$$M \cong Hom(N, M) \otimes N = pN.$$

Seja  $\beta : pN \rightarrow M$  um isomorfismo. Se  $p \neq 0$ , por um análogo ao lema acima, o conjunto  $B = \{\beta\iota_{1,p}^N, \dots, \beta\iota_{p,p}^N\}$  é uma base de  $\text{Hom}(N, M)$ . Se  $p = 0$ , então  $M \cong 0$ . Temos que

$$\Phi\Phi'(M, s) = \Phi(\text{Hom}(N, M), \omega) = (\text{Hom}(N, M) \overline{\otimes} N, t) = (pN, t),$$

em que  $\omega(g)(f) = s_g U_g(f)(d^g)^{-1}$  e  $t_g = \omega(g) \overline{\otimes} d^g$ , para quaisquer  $f \in \text{Hom}(N, M)$  e  $g \in H_N$ .

Definimos  $\eta_M := \beta : (pN, t) \rightarrow (M, s)$ . Observemos que  $\eta_M$  é, por definição, um isomorfismo. Mostremos que  $\eta_M$  é um morfismo em  $\mathcal{M}^{HN}$ . Sejam  $g \in H_N$  e  $[\omega(g)]_B^B = (c_{ij})_{i,j=1, \dots, p}$ . Assim,

$$\omega(g)(\beta\iota_{j,p}^N) = \sum_{i=1}^p c_{ij} \beta\iota_{i,p}^N,$$

para todo  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Lembremos que  $I_{pN} = \sum_{i=1}^p \iota_{i,p}^N \pi_{i,p}^N$  e daí, temos que

$$\begin{aligned} \eta_M t_g &= \beta(\omega(g) \overline{\otimes} d^g) = \left( \sum_{i=1}^p \beta\iota_{i,p}^N \pi_{i,p}^N \right) (\omega(g) \overline{\otimes} d^g) \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \left( \sum_{i=1}^p \beta\iota_{i,p}^N \pi_{i,p}^N \right) \left( \sum_{l,j=1}^p c_{lj} \iota_{l,p}^N d^g \pi_{j,p}^{U_g(N)} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^p c_{ij} \beta\iota_{i,p}^N d^g \pi_{j,p}^{U_g(N)} = \sum_{j=1}^p \omega(g)(\beta\iota_{j,p}^N) d^g \pi_{j,p}^{U_g(N)} \\ &= \sum_{j=1}^p s_g U_g(\beta\iota_{j,p}^N)(d^g)^{-1} d^g \pi_{j,p}^{U_g(N)} \stackrel{(*)}{=} s_g \sum_{j=1}^p U_g(\beta\iota_{j,p}^N) U_g(\pi_{j,p}^N) \\ &= s_g \sum_{j=1}^p U_g(\beta\iota_{j,p}^N \pi_{j,p}^N) = s_g U_g\left(\beta \sum_{j=1}^p \iota_{j,p}^N \pi_{j,p}^N\right) = s_g U_g(\eta_M), \end{aligned}$$

em que a igualdade  $(*)$  segue da definição da projeção dada no Lema 3.3.1.

Mostremos agora que  $\eta$  é uma transformação natural. Sejam  $(M', s') \in \mathcal{N}$  com  $q = \dim(\text{Hom}(N, M'))$ ,  $\beta' : qN \rightarrow M'$  um isomorfismo,  $B' = \{\beta'\iota_{1,q}^N, \dots, \beta'\iota_{q,q}^N\}$  base de  $\text{Hom}(N, M')$ ,  $\phi : (M, s) \rightarrow (M', s')$  um morfismo em  $\mathcal{M}^{HN}$  e  $[\Phi'(\phi)]_{B'}^B = (d_{ij})_{i=1, \dots, q, j=1, \dots, p}$ . Vejamos que o diagrama



abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} \Phi\Phi'(M, s) & \xrightarrow{\eta_M} & (M, s) \\ \Phi\Phi'(\phi) \downarrow & & \downarrow \phi \\ \Phi\Phi'(M', s') & \xrightarrow{\eta_{M'}} & (M', s'). \end{array}$$

Temos

$$\begin{aligned} \eta_{M'}(\Phi\Phi')(\phi) &= \beta'(\Phi'(\phi)\overline{\otimes}I_N) \\ &\stackrel{(3.16)}{=} \left(\sum_{i=1}^q \beta' \iota_{i,q}^N \pi_{i,q}^N\right) \left(\sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^p d_{lj} \iota_{l,q}^N I_N \pi_{j,p}^N\right) \\ &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p d_{ij} \beta' \iota_{i,q}^N \pi_{j,p}^N \stackrel{(\star)}{=} \sum_{j=1}^p \Phi'(\phi)(\beta \iota_{j,p}^N) \pi_{j,p}^N \\ &= \sum_{j=1}^p \phi \beta \iota_{j,p}^N \pi_{j,p}^N = \phi \eta_M, \end{aligned}$$

em que na igualdade  $(\star)$  usamos que  $\Phi'(\phi)(\beta \iota_{j,p}^N) = \sum_{i=1}^q d_{ij} \beta' \iota_{i,q}^N$ . ■

Como equivalências de categorias levam objetos simples em objetos simples, o resultado acima nos garante que existe uma bijeção entre classes de isomorfismo de objetos simples de  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^{H_N}$  tais que  $M \cong \text{Hom}(N, M)\overline{\otimes}N$  e classes de equivalência de representações projetivas irredutíveis em  $\text{RepProj}(H_N)$ .

Sejam  $(M', \nu')$  um objeto simples em  $\mathcal{M}^H$  e  $N$  um somando direto simples de  $M'$  em  $\mathcal{M}$ . Consideremos o objeto simples  $(M, \nu) \in \mathcal{M}^{H_N}$  tal que  $L_N(M, \nu) \cong (M', \nu')$ , cuja existência é mostrada no Teorema 5.2.4. Tal objeto também possui  $N$  como componente simples. Observemos que  $M \cong \text{Hom}(N, M)\overline{\otimes}N$ , pois pela Proposição 5.1.4,  $M \cong mN$ , em que  $m = \dim \text{Hom}(N, M)$ .

Desta forma, os objetos simples em  $\mathcal{M}^H$  que contêm como somando direto um objeto simples  $N \in \mathcal{M}$  estão em correspondência bijetiva com os objetos simples em  $\mathcal{M}^{H_N}$  que contêm tal objeto simples como somando direto. Os simples de  $\mathcal{M}^{H_N}$  desta forma, por sua vez, estão em correspondência bijetiva com as representações projetivas irredutíveis de  $H_N$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] BERNSTEIN, Joseph. **Sackler lectures**. arXiv:q-alg/9501032v1, 1995.
- [2] BURCIU, Sebastian; NATALE, Sonia. Fusion rules of equivariantizations of fusion categories. **Journal of Mathematical Physics**, v. 54, n. 1, p. 013511, 2013.
- [3] COSTACHE, Tania-Luminita. On irreducible projective representations of finite groups. **Surveys in Mathematics and its applications**, v. 4, p. 191-214, 2009.
- [4] CRANE, Louis; FRENKEL, Igor B. Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases. **Journal of Mathematical Physics**, v. 35, n. 10, p. 5136-5154, 1994.
- [5] CURTIS, Charles W.; REINER, Irving. **Representation theory of finite groups and associative algebras**. American Mathematical Soc., 1966.
- [6] DRINFELD, Vladimir et al. On braided fusion categories I. **Selecta Mathematica**, v. 16, n. 1, p. 1-119, 2010.
- [7] ETINGOF, Pavel I. et al. Tensor categories. **American Mathematical Society**, 2015.
- [8] ETINGOF, Pavel; NIKSHYCH, Dmitri; OSTRIK, Viktor. On fusion categories. **Annals of Mathematics**, p. 581-642, 2005.
- [9] ETINGOF, Pavel; OSTRIK, Viktor. Finite tensor categories. **Mosc. Math. J**, v. 4, n. 3, p. 627-654, 2004.
- [10] GALINDO, César. Clifford theory for tensor categories. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 83, p. 57-78, 2011.

- [11] GALINDO, César; MOMBELLI, Martín. Module categories over finite pointed tensor categories. **Selecta Mathematica, New Series**, v. 18, n. 2, p. 357-389, 2012.
- [12] HUNGERFORD, Thomas. **Algebra**. Springer-Verlag, 2000.
- [13] MITCHELL, Barry. **Theory of categories**. Academic Press, 1965.
- [14] KIRILLOV, Alexander A. **Representation theory and Non-commutative harmonic analysis I: fundamental concepts, representations of Virasoro and affine algebras**. 1994.
- [15] MAC LANE, Saunders. **Categories for the working mathematician**. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] MAC LANE, Saunders. Natural associativity and commutativity. **Rice Univ. Studies**, v. 49, n. 4, p. 28-46, 1963.
- [17] MOMBELLI, J. M. **Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones**, Notas de aula. Disponível em: <<http://www.famaf.unc.edu.ar/~mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>>. Acesso em 23 de abril de 2017.
- [18] ULIANA, L. **Equivariantização de categorias k-lineares**. 03/2015. 128p. Dissertação (Mestrado). UFSC.
- [19] OSTRIK, Victor. Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants. **Transformation Groups**, v. 8, n. 2, p. 177-206, 2003.
- [20] SAAVEDRA RIVANO, Neantro. Catégories tannakiennes. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 100, p. 417-430, 1972.
- [21] SCHAUBURG, Peter. Tannaka duality for arbitrary Hopf algebras. **Algebra Berichte**, v.66, 1992.
- [22] TAMBARA, Daisuke. Invariants and semi-direct products for finite group actions on tensor categories. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, v. 53, n. 2, p. 429-456, 2001.