Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Ações de grupos e semigrupos inversos sobre bicategorias de C*-álgebras

Celso Carvalho Antunes Junior
Orientador: Prof. Dr. Alcides Buss

Florianópolis
Fevereiro de 2017

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Ações de grupos e semigrupos inversos sobre bicategorias de C*-álgebras

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Celso Carvalho Antunes Junior
Florianópolis
Fevereiro de 2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Antunes Junior, Celso Carvalho
Ações de grupos e semigrupos inversos em bicategorias de C*-álgebras / Celso Carvalho Antunes Junior ; orientador, Alcides Buss - SC, 2017.
129 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. C*-álgebras. 3. Bicategorias. 4. Ações torcidas. 5. Semigrupos inversos. I. Buss, Alcides. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Ações de grupos e semigrupos inversos sobre bicategorias de C*-álgebras

por

Celso Carvalho Antunes Junior[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre",
Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Alcides Buss
(Orientador - UFSC)

Virgínia Silva Rodrigues
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Gilles Gonçalves de Castro
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Ralf Meyer
(Georg-August-Universität Göttingen)

Giuliano Boava
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2017.

[1] Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

À minha mãe

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo fazer um estudo de ações de grupos e semigrupos inversos sobre bicategorias de C*-álgebras com diferentes formas de morfismos, como $*$-homomorfismos não degenerados, correspondências e bimódulos de Hilbert regulares ou não. Mostramos que ações de grupo através de $*$-homomorfismos não degenerados dão origem a ações torcidas de grupo. Mostramos também que ações de grupo através de correspondências dão origem a fibrados de Fell saturados sobre o mesmo grupo. Além disto, mostramos que ações de semigrupo inverso através de bimódulos de Hilbert dão origem a fibrados de Fell saturados sobre o mesmo semigrupo inverso. Finalmente, mostramos que ações de semigrupo inverso através de bimódulos de Hilbert regulares dão origem a fibrados de Fell regulares, os quais foram mostrados em *Twisted Actions and Regular Fell Bundles over Inverse Semigroups* de Alcides Buss e Ruy Exel serem isomorfos a fibrados de Fell construídos a partir de ações torcidas de semigrupo inverso.

As referências principais desta dissertação são *A Higher Category Approach to Twisted Actions on C*-Algebras* de Alcides Buss, Ralf Meyer e Chenchang Zhu, e *Inverse Semigroup Actions on Groupoids* de Alcides Buss e Ralf Meyer.

Palavras-chave: Bicategorias, C*-álgebras. Ações torcidas. Fibrados de Fell. Semigrupos inversos. Bimódulos de Hilbert.

Abstract

The present work aims to study group and inverse semigroup actions on bicategories of C*-algebras with different forms of morphisms, like non-degenerate $*$-homomorphisms, correspondences and regular and non-regular Hilbert bimodules. We prove that group actions through non-degenerate $*$-homomorphisms give rise to twisted group actions. We also show that group actions through correspondences yield saturated Fell bundles over the same group. Furthermore, we prove that inverse semigroup actions through Hilbert bimodules yield saturated Fell bundles over the same inverse semigroup. Finally, we show that inverse semigroup actions through regular Hilbert bimodules give rise to regular satured Fell Bundles, which was shown on *Twisted Actions and Regular Fell Bundles over Inverse Semigroups* by Alcides Buss and Ruy Exel to be isomorphic Fell bundles built from twisted inverse semigroup actions.

The main references for this dissertation are *A Higher Category Approach to Twisted Actions on C*-Algebras* by Alcides Buss, Ralf Meyer and Chenchang Zhu, and *Inverse Semigroup Actions on Groupoids* by Alcides Buss and Ralf Meyer.

Keywords: Bicategories. C*-algebras. Twisted actions. Fell bundles. Inverse semigroups. Hilbert bimodules.

Sumário

Introdução

No contexto de C*-álgebras, a forma mais comum de morfismos são os $\ast$-homomorfismos, que preservam as propriedades algébricas de uma C*-álgebra. Esta noção dá origem a uma categoria de C*-álgebras que é usada quando tratamos de ações de grupo sobre C*-álgebras de maneira funtorial. Neste caso, vemos um grupo como uma categoria com apenas um objeto e a ação se torna um funtor $\alpha : G \to C^*$.

Foi mostrado em [11] que ações parciais de um grupo G são equivalentes a ações do semigrupo inverso associado ao grupo G, denotado por $\mathcal{S}(G)$. Com isto, podemos estudar ações parciais de grupo através do estudo de ações de semigrupo inverso.

No caso de semigrupos inversos com unidade não podemos nos utilizar da mesma construção, pois mesmo aqui, os morfismos associados à ação são isomorfismos entre ideais da C*-álgebra, que não são codificados através do ponto de vista categórico através de um funtor como no caso de grupos. Para isto precisamos de outras formas de morfismos.

Outra forma conhecida de morfismos entre C*-álgebras A e B são $\ast$-representações. Uma $\ast$-representação é um $\ast$-homomorfismo não degenerado de A para a álgebra dos multiplicadores de B, denotada por $M(B)$. É conhecido que isto forma uma outra categoria de C*-álgebras, em que a composição de morfismos neste caso se dá através da identificação dos $\ast$-homomorfismos não degenerados de A para $M(B)$ com os $\ast$-homomorfismos estritamente contínuos e unitais de $M(A)$ para $M(B)$. Quando nos restringimos a C*-álgebras abelianas temos o famoso resultado de C*-álgebras que dá uma equivalência entre a categoria que consiste dos espaços localmente compactos Hausdorff como objetos e funções contínuas como morfismos e a categoria das C*-álgebras com $\ast$-representações, que são *-homomorfismos não degenerados da C*-álgebra para a álgebra dos multiplicadores, como morfismos. Este resultado inspira a noção de que o estudo de C*-álgebras é o estudo de topologia não comutativa.

A álgebra de multiplicadores de B pode ser construída via o estudo de representações em módulos de Hilbert. Vemos que a álgebra de multiplicadores de B é isomorfa à C*-álgebra dos operadores adjuntáveis de B, denotada por $L(B)$, considerando B como um B-módulo de Hilbert. Com isto, uma $*$-representação de A para B pode ser interpretada como um $*$-homomorfismo não degenerado de A para $L(B)$, o que faz com que B se torne um A-módulo à esquerda. No caso mais geral em que assumimos $\mathcal{H}$ como sendo um B-módulo de Hilbert, podemos ainda considerar $*$-homomorfismos não degenerados de A para $L(\mathcal{H})$ e isto dá origem a uma correspondência de A para B. Quando temos acesso as correspondências, podemos fazer produtos tensoriais interiores entre elas, obtendo uma nova correspondência como resultado e com isto podemos interpretar o produto tensorial como uma operação entre as correspondências. O problema é que esta operação não é associativa e nem tem unidade, implicando que não existe uma categoria de C*-álgebras com morfismos sendo correspondências. Apesar disto, se enfraquecermos a noção de igualdade para isomorfismos, o produto tensorial interior é associativo através de um isomorfismo implementado por um unitário. Além disto, existem correspondências que agem como identidade à esquerda e à direita, novamente a menos de um isomorfismo implementado por um unitário. Isto nos inspira a usar uma noção enfraquecida de categorias, que nos dê uma noção de morfismos entre morfismos.

O estudo de bicategorias nos dá exatamente isto. Uma bicategoria, além dos objetos e morfismos de uma categoria usual, também tem 2-morfismos, os quais fazem o papel de morfismos entre morfismos como mencionamos acima. Quando tratamos de 2-morfismos inversíveis entre dois morfismos f e g, dizemos que f e g são isomorfos e isto implica que eles são muito parecidos e que mesmo sendo diferentes, acabam se comportando de maneira similar, bem como num isomorfismo entre objetos numa categoria usual. Com isto, construímos uma bicategoria, ou 2-categoria fraca, de C*-álgebras, $\mathfrak{Corr}(2)$ com morfismos sendo as correspondências mencionadas acima e os 2-morfismos sendo unitários. Voltando à nossa analogia com $*$-representações, quando nos restringimos ao caso de que a correspondência de A para B é dada sobre B como um B-módulo de Hilbert, ainda temos os unitários de B, que são na verdade implementados pelos unitários multiplicadores de $M(B)$. Com isto, podemos também estender a categoria construída anteriormente para uma 2-categoria, estrita neste caso, com 2-morfismos sendo unitários multiplicadores, denotada por $\mathfrak{C}^*(2)$.

Podemos então pensar uma bicategoria como uma noção enfraquecida de categoria. Como no caso de categorias, um funtor age como um morfismo entre categorias, podemos pensar num análogo para bicategorias. Estes são chamados de funtores fracos, ou homomorfismos na literatura, e agem como funtores enfraquecidos, no sentido de que eles não preservam a composição e a unidade através de igualdades e sim através de 2-isomorfismos.

Vemos um grupo G como uma bicategoria com um único objeto em que os 2-morfismos são apenas as identidades e usamos funtores fracos de G para $\mathfrak{C}^*(2)$ e $\mathfrak{Corr}(2)$ para fazer um análogo às ações de grupo através de funtores. Estas são chamadas de ações fracas de grupos e nos dão resultados importantes. O primeiro resultado neste sentido deste trabalho estabelece que uma ação fraca de grupo sobre $\mathfrak{C}^*(2)$ é equivalente a uma ação torcida de G no sentido de Busby-Smith, veja [3].

O segundo resultado deste trabalho nesta direção estabelece que uma ação fraca de grupo sobre $\mathfrak{Corr}(2)$ é equivalente a um fibrado de Fell saturado sobre o mesmo grupo, em que a fibra sobre a unidade é isomorfa à C*-álgebra de base da ação. Este resultado foi mostrado em [7]. Fibrados de Fell podem então ser entendidos como uma noção mais geral de ações de grupo sobre C*-álgebras.

Existe uma noção de equivalência entre C*-álgebras que age como um $*$-isomorfismo enfraquecido. Esta equivalência é implementada por um bimódulo de imprimitividade entre as C*-álgebras e este preserva várias propriedades das C*-álgebras, como uma correspondência entre os ideais das mesmas que é dado pela famigerada correspondência de Rieffel ([19]: Prop. 3.24). Na bicategoria $\mathfrak{Corr}(2)$, os morfismos inversíveis, ou seja, as correspondências inversíveis são exatamente os bimódulos de imprimitividade, como foi mostrado em [8]. Ainda neste estudo, vemos que bimódulos de Hilbert são bimódulos de imprimitividade entre ideais das C*-álgebras, sendo assim uma forma de $*$-isomorfismo enfraquecido entre os ideais. Além disto, o produto tensorial entre bimódulos de Hilbert é novamente um bimódulo de Hilbert, implicando que a restrição das correspondências aos bimódulos de Hilbert dá origem a uma nova bicategoria, com os mesmos objetos e 2-morfismos de $\mathfrak{Corr}(2)$, chamada $\mathfrak{Bim}(2)$.

Isto nos ajuda a contornar o problema que tivemos antes tentando repetir o processo funtorial para um semigrupo inverso, já que bimódulos de Hilbert codificam naturalmente $*$-isomorfismos enfraquecidos entre ideais das C*-álgebras. Isto nos inspira a estudar ações fracas de semigrupo inverso sobre a bicategoria $\mathfrak{Bim}(2)$. Mostramos que estas são equivalentes a fibrados de Fell saturados sobre o mesmo semigrupo inverso, um resultado análogo ao conseguido no caso de grupos para a $\mathfrak{Corr}(2)$ reforçando a ideia de que fibrados de Fell podem ser vistos como ações de semigrupo inverso, neste caso, sobre C*-álgebras.

No artigo [5] foi mostrado que fibrados de Fell saturados e regulares sobre um semigrupo inverso são equivalentes a ações torcidas de semigrupo inverso sobre uma C*-álgebra. Com isto em mente, restringiremos novamente os morfismos da nossa bicategoria $\mathfrak{Bim}(2)$ para bimódulos de Hilbert regulares (um bimódulo de Hilbert é dito regular se ele é isomorfo a um A-B-bimódulo de Hilbert dado por uma tripla (I, J, φ), em que I é um ideal de A, J é um ideal de B e φ é um $*$-isomorfismo entre I e J, tornando J um A-B-bimódulo de Hilbert). Mostramos que o produto tensorial de dois bimódulos de Hilbert regulares é novamente regular, donde segue que esta restrição dá origem a uma nova bicategoria denotada por $\mathfrak{Reg}(2)$.

Por fim, mostramos que uma ação fraca de semigrupo inverso sobre $\mathfrak{Bim}(2)$ é equivalente a um fibrado de Fell saturado sobre o semigrupo inverso, generalizando o resultado anterior de ações de grupo sobre $\mathfrak{Corr}(2)$.

No primeiro capítulo fazemos um estudo preliminar que será necessário para a leitura desta dissertação, começando com uma introdução a semigrupos inversos a qual indicamos [15] para um desenvolvimento maior do estudo, uma revisão rápida da teoria de C*-álgebras a qual indicamos [18] para um estudo mais aprofundado, definimos categorias e funtores, juntamente com alguns exemplos baseados em [1], e finalmente abordamos fibrados de Fell sobre grupos e semigrupos inversos o qual indicamos [12] e [10] para mais informações sobre o assunto.

No segundo capítulo abordamos outro pré-requisito para os resultados principais deste trabalho com o estudo de módulos de Hilbert. Também fazemos uma construção da álgebra de multiplicadores de uma C*-álgebra e demonstramos o teorema de Cohen-Hewitt. Como referências para este capítulo usamos [14] e [19].

No terceiro capítulo começamos com a definição de bicategorias, junto com alguns exemplos de bicategorias de C*-álgebras e sub-bicategorias.

No último capítulo definimos a noção de funtores fracos e com isto a ideia de uma ação fraca de um grupo, ou um semigrupo inverso com unidade, em uma bicategoria de C*-álgebras, alcançando os resultados principais deste trabalho. Para este e o capítulo anterior, nos baseamos em [2] para as definições e teoria de bicategorias e funtores fracos. Outra referência para este estudo é [9].

Assumimos que o leitor tenha um conhecimento básico sobre álgebra de operadores. Apesar disto, fazemos uma revisão rápida de conceitos básicos de C*-álgebras no início deste trabalho. Além disto, tentamos deixar o texto autocontido.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Semigrupos Inversos

Para um estudo mais aprofundado do conteúdo desta seção sugerimos [15].

Seja X um conjunto. Uma operação em X é uma função $f : X \times X \to X$. Dizemos que esta função é associativa se o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "f \times id"] \arrow[d, "id \times f"'] & X \times X \arrow[d, "f"] \\ X \times X \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

comuta, em que id denota a função identidade e $g \times h$ denota a função que leva $X \times X \ni (x, y) \mapsto (g(x), h(y)) \in X \times X$ para funções $g, h : X \to X$.

Um conjunto com uma operação associativa é chamado um semigrupo.

Em geral, denotaremos nossa operação por $\cdot$ e escreveremos $x \cdot y$, ou xy, para denotar $\cdot(x, y)$. Por esta razão, nos referiremos a um semigrupo apenas por seu conjunto subjacente ficando sua operação subentendida.

Exemplo 1.1.1. O conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ com a adição como operação é um semigrupo.

Exemplo 1.1.2. Todo grupo é um semigrupo.

Exemplo 1.1.3. Seja X um conjunto. Considere $Fun(X)$ o conjunto de todas as funções de X para X. Então $Fun(X)$ é um semigrupo com a operação de composição.

Sejam X, Y semigrupos. Uma função $f : X \to Y$ é dita ser um homomorfismo (de semigrupos) se $f(xy) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in X$.

Definição 1.1.4. Um semigrupo X é chamado regular se, para todo $x \in X$, existe $y \in X$ tal que

$$xyx = x \text{ e } yxy = y.$$

Este elemento y é chamado um inverso de x.

É claro que se y é um inverso de x, então x é um inverso de y.

Exemplo 1.1.5. Seja X um conjunto. Considere $\mathbb{P}(X)$ o conjunto das partes de X. Dados $Y, Z \in \mathbb{P}(X)$, considere o conjunto de todas as bijeções de Y para Z, denotado por $Bij(Y, Z)$. A união de todos os conjuntos $Bij(Y, Z)$, em que $Y, Z \in \mathbb{P}(X)$ é denotado por $PBij(X)$ e é chamado de bijeções parciais de X. Observe que não podemos compor quaisquer duas funções deste conjunto, já que existem funções claramente não componíveis no sentido usual. Entretanto, existe um outro sentido de composição, chamado de composição parcial de funções. Este outro sentido nos permite compor quaisquer duas funções acima, desde que restrinjamos seus domínios e contradomínios de maneira conveniente.

Sejam $f : Y \to Z$ e $g : V \to W$ duas funções em que V, W, Y, Z são subconjuntos de X. Então podemos fazer a composição $g \circ f$ se o contradomínio de f está contido ou igual ao domínio de g. Considere então o conjunto $f^{-1}(V \cap Z)$, em que f^{-1} denota a imagem inversa do conjunto em questão. Sobre este conjunto, potencialmente vazio, podemos aplicar $g \circ f$. De fato,

$$g \circ f(f^{-1}(V \cap Z)) \subset g(V \cap Z) \subset W.$$

Podemos então definir novas funções f', g', restrições de f e g, respectivamente, de forma que $f' : f^{-1}(V \cap Z) \to V \cap Z$ e $g' : V \cap Z \to g(V \cap Z)$. Estas funções são componíveis no sentido usual. Definiremos a composição parcial de g com f como sendo a composição de g' com f'. Note que esta composição pode resultar na função vazia.

No caso que f e g são bijetoras, segue que f' e g' definidas acima também são bijeções. Esta composição parcial então nos permite compor quaisquer duas bijeções.

Segue que o conjunto das bijeções parciais de X com a operação de composição definida acima é um semigrupo regular, em que uma inversa para cada $f : Y \to Z \in PBij(X)$ é da forma $f^{-1} : Z \to Y$, dada pela função inversa de f.

Mais ainda, note que se $f : Y \to Z$ é uma bijeção parcial de X, então $f^{-1} \circ f = id_Y$ e $f \circ f^{-1} = id_Z$. Com isto,

$$f = f \circ id_Y = f \circ f^{-1} \circ f$$

e

$$f^{-1} = f^{-1} \circ id_Z = f^{-1} \circ f \circ f^{-1}.$$

Logo $PBij(X)$ é um semigrupo regular.

Seja X um semigrupo. Um elemento $x \in X$ é chamado um *idempotente* se $xx = x$. O conjunto de todos os idempotentes de um semigrupo X é denotado por $E(X)$.

Se X é um semigrupo regular e $x, y \in X$ de forma que y seja um inverso para x, então xy e yx são idempotentes. De fato,

$$xyxy = (xyx)y = xy$$

e similarmente $yxyx = yx$.

Uma questão importante é quando $E(X)$ é um subsemigrupo de X, ou seja, quando $E(X)$ é fechado pela operação de X. Para que isto aconteça, precisamos avaliar quando o produto de dois idempotentes é novamente um idempotente. Dados $e, f \in E(X)$, temos que se e comuta com f, então

$$efef = eeff = ef.$$

Vemos então que para $E(X)$ ser um subsemigrupo, uma condição suficiente é que $E(X)$ seja comutativo.

Definição 1.1.6. Um semigrupo regular S é chamado um semigrupo inverso se $E(S)$ é comutativo.

O próximo teorema nos dá uma equivalência para um semigrupo regular ser inverso.

Teorema 1.1.7. *Seja S um semigrupo regular. Então S é inverso se, e somente se, existe um único inverso para cada elemento de S.*

Demonstração: Suponha que S seja inverso e que $u, v \in S$ sejam inversos de $s \in S$. Então us e vs são idempotentes, e logo

$$u = usu = (us)(vs)u = v(sus)u = vsu = v(sv)(su) = v(sus)v = vsv = v.$$

Suponha agora que exista um único inverso para cada elemento de S. Sejam $e, f \in E(S)$. Temos que existe um único inverso de ef, digamos $x \in S$. Note que

$$(fxe)^2 = f(xefx)e = fxe$$

e portanto, $fxe \in E(S)$. Mais ainda,

$$ef(fxe)ef = efxef = ef$$

e

$$(fxe)ef(fxe) = f(xefx)e = fxe.$$

Logo $fxe = x$, pela unicidade do inverso de ef. Isto mostra que o inverso do produto de dois idempotentes é também idempotente. Porém, todo idempotente é inverso de si mesmo, e logo como ef é inverso de x, segue que $ef = x$. Isto mostra que ef é idempotente. Similarmente, fe é idempotente. O cálculo anterior então mostra que $ef = x = fxe$. Portanto,

$$ef = fxe = fefe = fe.$$

■

Então em um semigrupo inverso, todo elemento tem um único inverso. Por conta deste resultado, vamos denotar o inverso de um elemento $s \in S$ por s^{-1}.

Sejam S, T semigrupos inversos. Um homomorfismo de semigrupos $f : S \to T$ preserva inversos. De fato,

$$f(s^{-1}) = f(s^{-1}ss^{-1}) = f(s^{-1})f(s)f(s^{-1})$$

e

$$f(s) = f(ss^{-1}s) = f(s)f(s^{-1})f(s),$$

donde segue que $f(s^{-1})$ é um inverso para $f(s)$. Logo, $f(s^{-1}) = f(s)^{-1}$.

Vamos mostrar agora que o semigrupo do Exemplo 1.1.5 também é um semigrupo inverso. Já sabemos que ele é um semigrupo regular. Seja $e : Y \to Z \in Bij(X)$ um idempotente. Temos que

$$e = e^{-1} : Z \to Y$$

e

$$e = e \circ e = id_Y$$

e por outro lado,

$$e = e \circ e = id_Z,$$

o que implica que $Z = Y$ e que e é a função identidade de algum subconjunto de X. Por outro lado, se $Y \in \mathbb{P}(X)$ então id_Y é claramente um idempotente, o que implica que todo idempotente de $PBij(X)$ é da forma descrita acima. Sejam agora $Y, Z \in \mathbb{P}(X)$. Temos, usando as noções de domínio de composição parcial definidas no outro exemplo, que $id_Y \circ id_Z : Z \cap Y \to Z \cap Y$, e $id_Y \circ id_Z = id_{Z \cap Y}$, donde segue que os idempotentes comutam, e logo $PBij(X)$ é um semigrupo inverso.

Este é o exemplo mais importante da teoria, já que todo semigrupo inverso se imerge num da forma descrita acima, para algum conjunto X específico. Note que neste exemplo, os idempotentes $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ se comportam como identidades à esquerda e à direita de f. É fácil ver que este também é o caso para um semigrupo inverso qualquer.

Se S é um semigrupo inverso e $s \in S$, denotamos por $d(s) = s^{-1}s$ e $r(s) = ss^{-1}$, em que o primeiro é chamado de domínio de s e o segundo chamado de imagem de s.

Iremos mostrar agora algumas propriedades de semigrupos inversos em geral. Algumas destas propriedades já foram mostradas durante o texto, mas serão relatadas novamente aqui para fins de referência.

Proposição 1.1.8. *Seja S um semigrupo inverso. Então*

1. *Para todo $s \in S$, $s^{-1}s$ e ss^{-1} são idempotentes.*
2. $(s^{-1})^{-1} = s$.
3. *Para todo $s \in S$ e todo $e \in E(S)$, $s^{-1}es$ é idempotente.*
4. *Se $e \in E(S)$ então $e^{-1} = e$.*
5. *Para quaisquer $s_1, s_2 \in S$, $(s_1 s_2)^{-1} = s_2^{-1} s_1^{-1}$.*

Demonstração:

1. $(s^{-1}s)(s^{-1}s) = (s^{-1}ss^{-1})s = s^{-1}s$, e similarmente para ss^{-1}.
2. Direto da definição.
3. $s^{-1}e(ss^{-1})es = (s^{-1}ss^{-1})ees = s^{-1}es$.
4. Direto da definição.
5. $(s_1 s_2)s_2^{-1}s_1^{-1}(s_1 s_2) = (s_1 s_1^{-1} s_1)(s_2 s_2^{-1} s_2) = s_1 s_2$ e
   $(s_2^{-1}s_1^{-1})s_1 s_2(s_2^{-1}s_1^{-1}) = (s_2^{-1}s_2 s_2^{-1})(s_1^{-1}s_1 s_1^{-1}) = s_2^{-1}s_1^{-1}$.

■

A propriedade 3 da proposição anterior nos traz um resultado técnico importante.

Lema 1.1.9. *Seja S um semigrupo inverso. Dados $s \in S$ e $e \in E(S)$, existem idempotentes f_1 e f_2 de forma que $se = f_1 s$ e $es = sf_2$.*

Demonstração: Para se considere $f_1 = ses^{-1}$. A proposição anterior nos diz que f_1 é idempotente. Além disso, temos

$$f_1 s = ses^{-1}s = ss^{-1}se = se.$$

A outra parte é análoga usando o idempotente $f_2 = s^{-1}es$. ■

Veremos agora a relação entre grupos e semigrupos inversos.

Proposição 1.1.10. *Um semigrupo inverso S é um grupo se, e somente se, $E(S)$ contém apenas um elemento.*

Demonstração: Suponha que S seja um grupo. Sejam $e, f \in E(S)$. Então

$$e = ee = ee^{-1} = 1 = ff^{-1} = ff = f.$$

Por outro lado, suponha que $E(S)$ contenha apenas um elemento, digamos e. Para quaisquer $s \in S$, $ss^{-1}, s^{-1}s \in E(S)$, e logo, $ss^{-1} = e = s^{-1}s$. Note que para todo $s \in S$, $se = ss^{-1}s = s$ e $es = ss^{-1}s = s$, e portanto e age como a unidade de S, e logo S é um grupo. ■

Iremos agora descrever a ordem parcial natural em um semigrupo inverso. Voltemos ao exemplo de $PBij(X)$ (Exemplo 1.1.5). Lembre que $d(f) = f^{-1} \circ f$ e, a partir daqui, identificaremos a função identidade $d(f)$ com seu domínio. Temos uma ordem natural em $PBij(X)$, em que $f \leq g$ se, e somente se, $d(f) \subset d(g)$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in d(f)$. Afirmamos que esta condição é equivalente a igualdade $f = g \circ f^{-1} \circ f$. De fato, como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in d(f)$, e $d(f) = f^{-1} \circ f$ temos, em particular, que $f(x) = f \circ f^{-1} \circ f(x) = g \circ f^{-1} \circ f(x)$, para todo $x \in d(f)$. Como o domínio de $g \circ f^{-1} \circ f$ é igual a $d(f)$, segue que podemos descrever a igualdade como $f = g \circ f^{-1} \circ f$. Mais ainda, note que este é o único idempotente que faria com que esta igualdade funcionasse. Por outro lado, se $f = g \circ f^{-1} \circ f$, temos que, em particular, $d(f) \subset d(g)$, pois caso contrário a composição restringiria o domínio de g para um domínio menor que o de f. Além disso, segue que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in d(f)$. Com isso, podemos definir que $f \leq g$ se, e somente se, $f = g \circ f^{-1} \circ f$. Vamos usar esta ideia para uma relação de ordem num semigrupo inverso qualquer.

Seja S um semigrupo inverso. Dados $s, t \in S$, dizemos que $s \leq t$ se existe $e \in E(S)$ tal que $s = te$. Isto define uma relação de ordem parcial para S, mas para mostrarmos isto, vamos primeiro ver algumas equivalências desta definição.

Proposição 1.1.11. *Sejam S um semigrupo inverso e $s, t \in S$. Então são equivalentes:*

1. $s \leq t$;
2. $s = ft$ *para algum* $f \in E(S)$;
3. $s^{-1} \leq t^{-1}$;
4. $s = ss^{-1}t$;
5. $s = ts^{-1}s$.

Demonstração: $(1) \Rightarrow (2)$: Segue diretamente do Lema 1.1.9, aplicado à t.

$(2) \Rightarrow (3)$: Usando a Proposição 1.1.8, temos que $s^{-1} = t^{-1}f^{-1} = t^{-1}f$. Logo, $s^{-1} \leq t^{-1}$.

$(3) \Rightarrow (4)$: Existe $e \in E(S)$ tal que $s^{-1} = t^{-1}e$, então $s = et$, e logo $s = et = eet = es$, o que implica $ess^{-1} = ss^{-1}$. Daí, $s = ss^{-1}s = ss^{-1}et = ess^{-1}t = ss^{-1}t$.

$(4) \Rightarrow (5)$: Como $s = ss^{-1}t$, segue do Lema 1.1.9 que existe $e \in E(S)$ de forma que $s = te$. Disto, $s = se$, e logo $s^{-1}s = s^{-1}se$. Daí, $s = ss^{-1}s = tes^{-1}s = ts^{-1}se = ts^{-1}s$.

$(5) \Rightarrow (1)$: Direto da definição. ■

Observe que a inversão no semigrupo inverso preserva a ordem.

Com estas equivalências podemos agora mostrar que a relação definida acima é uma ordem parcial.

Proposição 1.1.12. *Seja S um semigrupo inverso. A relação $\leq$ é uma ordem parcial.*

Demonstração: Como $s = ss^{-1}s$, para todo $s \in S$, segue que a relação é reflexiva.

Se $s \leq t$ e $t \leq s$, então $s = ts^{-1}s$ e $t = st^{-1}t$. Disto,

$$s = ts^{-1}s = st^{-1}ts^{-1}s = st^{-1}t = t,$$

donde segue a antissimetria.

Por fim, se $s \leq t$ e $t \leq u$, então $s = ts^{-1}s$ e $t = ut^{-1}t$, logo $s = ut^{-1}ts^{-1}s$, donde segue a transitividade. ■

Esta ordem é chamada de ordem parcial natural do semigrupo inverso.

Se S, T são semigrupos inversos e $f : S \to T$ é um homomorfismo, então f preserva a ordem parcial natural dos semigrupos inversos. De fato, se $s, t \in S$ são tais que $s \leq t$, então, existe $e \in E(S)$ de forma que $s = te$, temos

$$f(s) = f(te) = f(t)f(e),$$

donde segue que $f(s) \leq f(t)$, já que $f(e)$ é idempotente.

Esta relação se comporta bem com o produto. De fato, se $s \leq t$ e $u \leq v$, então $s = ss^{-1}t$ e $u = vu^{-1}u$, donde $su = ss^{-1}tvu^{-1}u$. Usando o Lema 1.1.9, segue que existe $e \in E(S)$ de forma que $ss^{-1}tvu^{-1}u = tvu^{-1}ue$, provando que $su \leq tv$.

Uma consequência disto é que se $s \leq t$, então $d(s) \leq d(t)$ e $r(s) \leq r(t)$.

Podemos também ver esta ordem parcial natural sobre o subsemigrupo inverso $E(S)$. Temos que se $e, f \in E(S)$, então $e \leq f$ se, e somente se, $e = ef = fe$, como consequência direta da Proposição 1.1.11, item (4).

Definiremos agora uma estrutura que descreverá melhor as propriedades da ordem parcial natural do subsemigrupo $E(S)$ de um semigrupo inverso S.

Definição 1.1.13. Um semirreticulado inferior é um conjunto X com uma ordem parcial $\leq$ tal que para quaisquer $x, y \in X$, existe $z \in X$ de forma que $z \leq x, y$ e para todo $w \in X$, que satisfaz $w \leq x, y$, tem-se que $w \leq z$. Este z é chamado de ínfimo de x, y e denotado por $x \wedge y$. Similarmente, um semirreticulado superior é um conjunto X com uma ordem parcial $\leq$ de forma que para todo $x, y \in X$, existe um $z \in X$ que satisfaz $x, y \leq z$ e para todo outro $w \in X$ de forma que $x, y \leq w$, temos que $z \leq w$. Este z é chamado de supremo de x, y e denotado por $x \vee y$. Um reticulado é um semirreticulado inferior e superior.

Note que $x \wedge y$ é único, pois caso existam $w, z \in X$ satisfazendo o enunciado, segue que $w \leq z$ e $z \leq w$, donde $z = w$. Analogamente $x \vee y$ é único. Além disso, é claro que $x \wedge x = x$.

Lembre que estudando os idempotentes do semigrupo inverso do Exemplo 1.1.5, vimos que eles são funções identidade em subconjuntos de um conjunto X. Por isso, podemos identificá-los com o próprio subconjunto. A operação do semigrupo inverso é identificada com a operação $\cap$ nos subconjuntos de X e a relação de ordem proveniente é dada por continência. Note que $\mathbb{P}(X)$, com a operação $\cap$ define um semigrupo comutativo. Mais ainda, dado $Y \in \mathbb{P}(X)$, $Y \cap Y = Y$, e logo todo elemento de $\mathbb{P}(X)$ é idempotente e logo $(\mathbb{P}(X), \cap)$ é um semigrupo inverso em que todos os seus elementos são idempotentes.

Por outro lado, note que $\mathbb{P}(X)$ com a relação de ordem parcial dada por $\subset$ é um semirreticulado inferior, em que $Y \wedge Z = Y \cap Z$. Com isso, segue que os idempotentes de $PBij(X)$ formam um semirreticulado inferior.

Isto é algo que acontece num semigrupo inverso qualquer.

Proposição 1.1.14. *Se S é um semigrupo inverso, $E(S)$ com a ordem parcial natural é um semirreticulado inferior.*

Demonstração: Dados $e, f \in E(S)$, note que $efe = fee = fe$, donde segue que $fe \leq e$, e similarmente, $fe \leq f$. Suponha agora que $h \in E(S)$ é tal que $h \leq e, f$. Usando a estrutura de ordem parcial nos idempotentes de um semigrupo inverso, temos que $he = h$ e $hf = h$, donde segue que $hef = h$ e portanto $h \leq ef$. Logo, $e \wedge f = ef$. ∎

Por isso, geralmente nos referimos a $E(S)$ como sendo o semirreticulado dos idempotentes de S.

Seja agora $(P, \leq)$ um semirreticulado inferior. Temos que $(P, \wedge)$ gera um semigrupo inverso em que todos os elementos são idempotentes. Vamos mostrar primeiro a associatividade. Sejam $p, q, r \in P$. Note que $(p \wedge q) \wedge r \leq p, q, r$, donde segue que $(p \wedge q) \wedge r \leq p, q \wedge r$ e logo $(p \wedge q) \wedge r \leq p \wedge (q \wedge r)$. Similarmente, mostra-se a outra desigualdade. Mostraremos agora que a operação $\wedge$ é comutativa e que todos os elementos de P são idempotentes. Sejam $p, q \in P$, temos que $q \wedge p = p \wedge q \in P$, pois P é um semirreticulado inferior. Além disto $p \wedge p = p$ e logo p é idempotente, donde segue que $(P, \wedge)$ é um semigrupo inverso em que todos os elementos são idempotentes. Disto, temos uma relação biunívoca entre semigrupos inversos formados apenas por idempotentes e semirreticulados inferiores.

Observe que, pela proposição 1.1.10, um grupo é um semigrupo inverso com apenas um idempotente. Disto, a relação de ordem parcial natural passa a ser uma igualdade, já que $s \leq t$ se, e somente se, $s = t$, para s, t no grupo. Por outro lado, se a ordem parcial natural de um semigrupo inverso S é dada pela igualdade, segue que se $e, f \in E(S)$, então $ef \leq e, f$, donde segue que $e = f$, e portanto S é um grupo.

Um semigrupo inverso S é dito *unital* se existe um elemento $1 \in S$ de forma que $s1 = 1s = s$ para todo $s \in S$. Em particular, 1 é um idempotente. Caso S seja um semigrupo inverso sem unidade, podemos torná-lo unital adicionando um novo elemento 1 a S e formando o conjunto $S \cup \{1\}$, de forma que $s1 = 1s = s$ para todo $s \in S \cup \{1\}$.

A teoria continua seu desenvolvimento com o estudo de ideais em semigrupos inversos. Estes são de suma importância na teoria e nos permitem demonstrar o famigerado teorema de Wagner-Preston.

Teorema 1.1.15. *Seja S um semigrupo inverso. Então existe um conjunto X e um homomorfismo injetivo $\theta : S \to PBij(X)$ que preserva* *a ordem parcial natural.*

Para ver a demonstração deste teorema, bem como um maior desenvolvimento da teoria de semigrupos inversos, indicamos [15].

1.2 C*-álgebras

Para um estudo mais aprofundado do conteúdo desta seção recomendamos ver [18].

Seja A um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Dizemos que A é uma álgebra se existe uma operação em A, a qual chamaremos de multiplicação, ou produto, e denotaremos por $(a,b) \mapsto ab$ que é bilinear e associativa.

Uma álgebra A é chamada uma $*$-álgebra se existe uma função $* : A \to A$, a qual chamaremos de involução e denotaremos por $a \mapsto a^*$, satisfazendo:

1. $(a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*$;

2. $(a^*)^* = a$;

3. $(ab)^* = b^* a^*$

para quaisquer $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Um subconjunto $S \subset A$ é chamado auto-adjunto se $S^* := \{a^* : a \in S\}$ é igual a S.

Uma $*$-álgebra A é chamada normada se existe uma norma $\|\cdot\|$ em A de forma que, para $a, b \in A$, tenhamos

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \text{ e } \|a^*\| = \|a\|.$$

Similarmente uma álgebra A é chamada normada se $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para todo $a, b \in A$.

Lembre que a norma de um espaço vetorial é uma função do espaço para os elementos positivos de $\mathbb{R}$ que torna contínuas as operações de soma e de multiplicação por escalar. No caso de uma norma em uma $*$-álgebra, estamos pedindo que a continuidade se mantenha para as duas novas operações que criamos, ou seja, o produto e a involução, sendo que a involução se torna isométrica.

Uma $*$-álgebra normada A é chamada uma $*$-álgebra de Banach se A é completo com relação à sua norma.

Definição 1.2.1. Uma $*$-álgebra de Banach A é chamada uma C*-álgebra se, para todo $a \in A$,

$$\|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Esta igualdade é chamada C*-identidade.

Observe que, em particular, toda C*-álgebra é uma álgebra de Banach.

Uma C*-álgebra A é dita unital se existe um elemento $1 \in A$ de forma que para todo $a \in A$, $1a = a1 = a$.

Observe que como A é uma $*$-álgebra de Banach, segue que para todo $a \in A$, $\|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\| = \|a\|^2$ e, portanto, para verificar a C*-identidade basta mostrar que $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$ para todo $a \in A$.

Uma $*$-subálgebra de A é um subconjunto $B \subset A$ em que as operações de A, quando restritas a B, tem como imagem um subconjunto de B. Se, além disso, B for fechado em A, então B será também uma C*-álgebra.

Exemplo 1.2.2. Considere $\mathbb{C}$ com a involução dada pela conjugação e a norma é dada pelo módulo. Com esta norma e esta involução, $\mathbb{C}$ é uma C*-álgebra. Isto é direto da definição do módulo.

Exemplo 1.2.3. Seja X um conjunto. Considere as funções f de X para $\mathbb{C}$ que são limitadas, no sentido que existe um $L > 0$ de forma que $|f(x)| \leq L$ para todo $x \in X$. Denotaremos este conjunto por $\ell^\infty(X)$. Tornamos $\ell^\infty(X)$ numa $*$-álgebra através das operações:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$f^*(x) = \overline{f(x)},$$

em que $f, g \in \ell^\infty(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Definimos a norma de $\ell^\infty(X)$ por

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

É fácil ver que $\ell^\infty(X)$ é completo com esta norma e portanto, esta é uma $*$-álgebra de Banach. Para a C*-identidade, seja $f \in \ell^\infty(X)$. Note que

$$\|f^*f\| = \sup_{x \in X} |\overline{f(x)}f(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)|^2 = \|f\|^2,$$

donde segue que $\ell^\infty(X)$ é uma C*-álgebra. Esta C*-álgebra é unital sendo a função constante igual a 1 a sua unidade.

Exemplo 1.2.4. Seja X um espaço topológico. Considere as funções contínuas de X para $\mathbb{C}$ que são limitadas, no mesmo sentido do exemplo anterior. Denotaremos este conjunto por $C_b(X)$. Podemos ver $C_b(X)$ como uma $*$-subálgebra de $\ell^\infty(X)$. Mais ainda, note que $C_b(X)$ é fechado em $\ell^\infty(X)$ e logo também é uma C*-álgebra. Além disso, note que a unidade de $\ell^\infty(X)$ também está em $C_b(X)$, donde segue que $C_b(X)$ é unital.

Observe que se X é um espaço compacto, então $C_b(X) = C(X)$, em que $C(X)$ denota o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.2.5. Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff. Considere as funções contínuas de X para $\mathbb{C}$. Dizemos que uma função $f\colon X \to \mathbb{C}$ se anula no infinito se, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto. O conjunto de todas as funções contínuas de X para $\mathbb{C}$ que se anulam no infinito é denotado por $C_0(X)$. Podemos ver $C_0(X)$ como uma $*$-subálgebra de $C_b(X)$. Além disso, note que $C_0(X)$ é fechado em $C_b(X)$, donde segue que $C_0(X)$ é uma C*-álgebra.

Exemplo 1.2.6. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Considere os operadores limitados de $\mathcal{H}$, denotado por $\mathbb{B}(\mathcal{H})$. As operações de soma e produto por escalar pontual, o produto sendo a composição e a involução sendo a adjunão de operador faz com que $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ seja uma $*$-álgebra. Mais ainda, com a norma de operador

$$\|T\| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x,y \in X\setminus\{0\}} \frac{|\langle T(x), y\rangle|}{\|x\|\|y\|}$$

faz com que $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ seja uma $*$-álgebra de Banach. Para a C*-identidade, considere $T \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Temos

$$\begin{aligned}\sup_{x,y \in X\setminus\{0\}} |\langle T^*T(x), y\rangle| \quad &\geq \quad \sup_{x \in X\setminus\{0\}} |\langle T^*T(x), x\rangle| = \\ &= \quad \sup_{x \in X\setminus\{0\}} |\langle T(x), T(X)\rangle| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \|T(x)\|^2,\end{aligned}$$

donde segue que $\|T^*T\| \geq \|T\|^2$ e pela observação feita após a definição de C*-álgebras, segue que $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ é uma C*-álgebra. Além disso, o operador identidade é a unidade desta C*-álgebra.

Exemplo 1.2.7. Seja $M_n := M_n(\mathbb{C})$ as matrizes quadradas de ordem n com valores em $\mathbb{C}$. Dados $i, j \in \{1, \dots n\}$, definimos por $(m_{ij})_{i,j}$ a matriz que tem m_{ij} como elemento da linha i coluna j. Podemos ver M_n como uma $*$-álgebra usando o produto de matrizes e a involução de uma matriz $M = (m_{ij})_{i,j}$ sendo a transposta conjugada desta, ou seja, a matriz $M^* = (\overline{m_{ij}})_{j,i}$. A norma em M_n é dada por:

$$\|M\| = \sup\left\{\frac{\|Mx\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}\right\},$$

em que $\mathbb{C}^n$ denota o espaço vetorial formado pela soma direta de n cópias de $\mathbb{C}$ com a norma 2, ou seja $\|(x_1, \dots, x_n)\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_1|^2)^{1/2}$. Mais ainda, note que M_n é completo, pois tem dimensão finita e logo, M_n é uma $*$-álgebra de Banach. Agora, lembre que $\mathbb{C}^n$ com a norma definida acima é um espaço de Hilbert, e que as matrizes, como descritas acima, podem ser identificados com $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$, donde segue, pelo exemplo anterior, que M_n é uma C*-álgebra.

Dada uma C*-álgebra unital A e um elemento $a \in A$, dizemos que a é invertível se existe $b \in A$ de forma que $ab = ba = 1$. Observe que, caso exista, este elemento é único. Neste caso, diremos que b é o inverso de a e o denotaremos por a^{-1}. Denotamos o conjunto de todos os inversíveis de A por $\mathrm{Inv}(A)$.

Agora vamos definir alguns elementos importantes em C*-álgebras. Um elemento $a \in A$ é chamado:

1. *autoadjunto* se $a^* = a$,
2. *normal* se $a^*a = aa^*$,
3. *projeção* se $a^2 = a = a^*$,
4. *isometria* se $a^*a = 1$,
5. *unitário* se $a^* = a^{-1}$.

Observe que os dois últimos itens exigem que a C*-álgebra seja unital. É claro que todo unitário é uma isometria. Também, todo autoadjunto é normal. Denotamos o conjunto de todos os elementos auto-adjuntos por A_{sa}. Todo elemento a de uma C*-álgebra pode ser escrito de maneira única como $b + ic$, em que $b, c \in A_{sa}$. De fato, tome $b = \frac{1}{2}(a + a^*)$ e $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$. É claro que $b, c \in A_{sa}$ e que $a = b + ic$. Suponha agora que $a = d + ie$, para $d, e \in A_{sa}$. Então $a^* = d - ie$ e $b = \frac{1}{2}(a + a^*) = d$. Similarmente $c = e$, donde segue a unicidade.

Seja $S \subset A$ um subconjunto qualquer. Dizemos que S é autoadjunto se $S^* := \{x^* : x \in S\} = S$.

Definição 1.2.8. Seja A uma C*-álgebra unital. Dado $a \in A$, definimos o espectro de a por $\sigma(a) := \{\lambda \notin \mathbb{C} : \lambda - a \in Inv(A)\}$[1]. O raio espectral de a é definido por $r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$.

Exemplo 1.2.9. Vimos pelo exemplo 1.2.2 que $\mathbb{C}$ é uma C*-álgebra. Dado $z \in \mathbb{C}$, temos $\sigma(z) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - z \notin \text{Inv}(\mathbb{C})\}$. Porém, o único elemento não inversível de $\mathbb{C}$ é o 0 e portanto, $\sigma(z) = \{z\}$.

Exemplo 1.2.10. No exemplo 1.2.3 vimos que $\ell^\infty(X)$ é uma C*-álgebra, em que X é um conjunto qualquer. Dado $f \in \ell^\infty(X)$, primeiro note que, caso f seja inversível, sua inversa será a função $\frac{1}{f}$ definida por $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$. Com isso, temos que os elementos da imagem de f, a qual denotaremos por $im(f)$, estão em $\sigma(f)$. Além disso, note que se $y \in \overline{im(f)}$, então existe uma sequência $\{y_n\}_n \subset im(f)$ convergindo para y, em que $y_n = f(x_n)$, para algum $x_n \in X$. Afirmamos que a função $y - f$ não é inversível em $\ell^\infty(X)$. De fato, pela observação feita acima, se houvesse uma inversa para esta função, esta seria da forma $\frac{1}{y-f}$. Porém, esta função não é limitada, já que para todo $L > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $n \geq N$, $\frac{1}{|y-f(x_n)|} > L$, pois $f(x_n) \to y$, donde segue que $y \in \sigma(f)$.

Por outro lado, considere $y \in \mathbb{C} \backslash \overline{im(f)}$. Como f é limitada, o fecho de sua imagem é compacto em $\mathbb{C}$ e logo a distância de y para $\overline{im(f)}$ é positiva, digamos d. Disso, a função $\frac{1}{y-f}$ é limitada, por exemplo por $\frac{1}{d}$, e é a inversa de $y - f$, donde segue que $y \notin \sigma(f)$. Com isso, provamos que $\sigma(f) = \overline{im(f)}$.

Note que este mesmo resultado vale para o exemplo 1.2.4. Caso X seja um espaço compacto Hausdorff, então a imagem de uma função contínua já será fechada, donde segue que $\sigma(f) = im(f)$, para $f \in C(X)$.

Exemplo 1.2.11. No exemplo 1.2.6 vimos que $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ é uma C*-álgebra, em que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Note que o espectro de um elemento corresponde exatamente ao espectro de um operador, como definido em ([16]: cap. 7).

Exemplo 1.2.12. Vimos no exemplo 1.2.7 que $M_n(\mathbb{C})$ é uma C*-álgebra, como um caso particular do exemplo 1.2.6. Neste caso, note que um elemento $\lambda \in \mathbb{C}$ está no espectro de uma matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ se $\lambda - M$ não for inversível. Porém, isto é o mesmo que dizer que o determinante da matriz $\lambda - M$ é igual a 0, donde segue que λ deve ser

[1] Aqui estamos denotando $\lambda 1$ por λ.

um autovalor de M. Por outro lado, é claro que se λ é um autovalor de M então λ está no espectro de M, e logo o espectro de uma matriz corresponde aos seus autovalores.

Teorema 1.2.13. *Seja A uma C*-álgebra unital. Dado $a \in A$, $\sigma(a)$ é compacto e não vazio.*

Para a demonstração do teorema acima, veja [18].

Um $*$-*homomorfismo* entre duas C*-álgebras A e B é uma função $\varphi : A \to B$ que satisfaz:

1. $\varphi(a + \lambda b) = \varphi(a) + \lambda\varphi(b)$,
2. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$,
3. $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$.

Se as C*-álgebras são unitais e $\varphi(1) = 1$, dizemos que φ é *unital*.

Observe que não exigimos, explicitamente, nenhum tipo de continuidade para *-homomorfismos entre C*-álgebras. A razão para isso é que a estrutura algébrica das C*-álgebras codifica a continuidade, tornando todos os *-homomorfismos contrativos, e portanto em particular contínuos ([18] : pg. 40).

Pela estrutura algébrica ser tão rígida, também temos que existe no máximo uma norma em uma $*$-álgebra de Banach que a torna uma C*-álgebra ([18]: pg. 37).

Se A é uma C*-álgebra, podemos criar uma álgebra unital fazendo a soma direta, como espaço vetorial, com $\mathbb{C}$, em que A é identificado com $(a, 0)$. Defina o produto por $(a, \lambda)(b, \mu) := (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)$ e a involução por $(a, \lambda)^* := (a^*, \overline{\lambda})$. A aplicação $a \mapsto (a, 0)$ é um $*$-homomorfismo injetivo, assim A pode ser identificada como $*$-subálgebra de $A \oplus \mathbb{C}$. Iremos mostrar a seguir que existe uma norma, necessariamente única, que torna esta $*$-álgebra em uma C*-álgebra.

Defina $\|(a, \lambda)\| := \sup\{\|ab + \lambda b\| : b \in A, \|b\| \le 1\}$. É fácil ver que isto é uma norma. Além disso,

$$\begin{aligned}
&\|(a, \lambda)(b, \mu)\| = \\
&= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| = \\
&= \sup\{\|abc + \lambda bc + \mu ac + \lambda\mu c\| : c \in A, \|c\| \le 1\} = \\
&= \sup\{\|dabc + \lambda dbc + \mu dac + \lambda\mu dc\| : c, d \in A, \|c\|, \|d\| \le 1\} = \\
&= \sup\{\|(da + \lambda d)(bc + \mu c)\| : c, d \in A, \|c\|, \|d\| \le 1\} \le \\
&\le \sup\{\|da + \lambda d\| : d \in A, \|d\| \le 1\|\} \sup\{bc + \mu c\| : c \in A, \|c\| \le 1\} = \\
&= \|(a, \lambda)\|\|(b, \mu)\|
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\|(a,\lambda)^*\| &= \|(a^*,\overline{\lambda})\| = \\
&= \sup\{\|a^*b+\overline{\lambda}b\| : b\in A, \|b\|\le 1\} = \\
&= \sup\{\|(a^*b+\overline{\lambda}b)^*\| : b\in A, \|b\|\le 1\} = \\
&= \sup\{\|b^*a+\lambda b^*\| : b\in A, \|b\|\le 1\} = \|(a,\lambda)\|.
\end{aligned}
$$

Finalmente, se $b\in A$, com $\|b\|\le 1$, então

$$
\begin{aligned}
\|ab+\lambda b\|^2 &= \|(ab+\lambda b)^*(ab+\lambda b)\| = \\
&= \|b^*(a^*ab+\overline{\lambda}ab+\lambda a^*b+|\lambda|^2 b)\| \le \\
&\le \|a^*ab+\overline{\lambda}ab+\lambda a^*b+|\lambda|^2 b\|.
\end{aligned}
$$

Disto, temos $\|(a,\lambda)\|^2 \le \|(a,\lambda)^*(a,\lambda)\| = \|(a^*a+\overline{\lambda}a+\lambda a, |\lambda|^2)\|$, e portanto esta norma satisfaz a C*-identidade e portanto $\tilde{A} := A\oplus\mathbb{C}$, com este produto, involução e norma, é uma C*-álgebra.

Definição 1.2.14. Seja A uma C*-álgebra não unital. Dado $a\in A$, definimos o espectro de a como sendo o espectro de $(a,0)$ na unitização $\tilde{A}$ de A.

Observe que caso A não seja unital, o espectro de um elemento sempre contém o 0. Além disso, temos que o espectro de qualquer elemento de uma C*-álgebra é compacto ([18]: pg. 8).

Definição 1.2.15. Seja A uma C*-álgebra comutativa. Um funcional linear não nulo $f : A\to\mathbb{C}$ é chamado um *caracter* se, para todo $a,b\in A$, $f(a)f(b) = f(ab)$. O conjunto de todos os caracteres de A é denotado por $\Omega(A)$.

Todo caracter em uma C*-álgebra automaticamente preserva a involução, ou seja, é um $*$-homomorfismo não nulo e portanto é contínuo ([18]: pg.40).

Para cada $a\in A$, defina $\hat{a}\colon A^*\to\mathbb{C}$ por $\tau\mapsto\tau(a)$, em que A^* denota o dual de A. Lembre que a topologia fraca* está definida em qualquer espaço dual de um espaço de Banach sendo a menor topologia que torna funções como acima contínuas, ou seja, a topologia inicial da família de funções $\{\hat{a}\}_{a\in A}$. Observe que $\Omega(A)\subset A^*$. Disso, definimos a topologia em $\Omega(A)$ como sendo a topologia $*$-fraca induzida de A^*.

Proposição 1.2.16. *Seja A uma C*-álgebra comutativa. Temos*

1. *Se A não é unital, então $\Omega(A)$ é localmente compacto e Hausdorff e para todo $a\in A$,*

$$\{\tau(a) : \tau\in\Omega(A)\}\cup\{0\} = \sigma(a).$$

2. *Se A é unital, então $\Omega(A)$ é compacto e para todo $a \in A$,*

$$\{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\} = \sigma(a).$$

Para a demonstração do teorema acima, veja ([18]: pg.14-15).

Teorema 1.2.17. *Seja $A \neq 0$ uma C*-álgebra comutativa. Então existe um $*$-isomorfismo isométrico $\varphi : A \to C_0(\Omega(A))$ definido por $a \mapsto \hat{a}$, em que $\hat{a}$ é dado por $\hat{a}(\tau) = \tau(a)$.*

Para a demonstração do teorema acima, veja ([18]: pg.46).

Seja A uma C*-álgebra. Dado $S \subset A$ qualquer, podemos definir a C*-subálgebra de A gerada por S como sendo a intersecção de todas as C*-álgebras que contém S, denotada por $C^*(S)$.

Em particular, se $a \in A$ e $S = \{a\}$, denotamos a C*-subálgebra gerada por S por $C^*(a)$ e a chamaremos de C*-álgebra gerada por a.

Caso A seja unital, podemos gerar a C*-álgebra $C^*(\{a, 1\})$, a qual será uma C*-álgebra unital. Observe que caso a seja um elemento normal, esta C*-álgebra será comutativa, e logo podemos usar o teorema 1.2.13 para encontrarmos um isomorfismo entre $C^*(\{a, 1\})$ e $C_0(\Omega(C^*(\{a, 1\})))$. Usando a Proposição 1.2.16 acima, mostra-se que a aplicação $\tau \mapsto \tau(a)$ nos dá um homeomorfismo entre $\Omega(C * (a, 1))$ e $\sigma(a)$, donde se obtém o seguinte resultado.

Teorema 1.2.18. *Seja A uma C*-álgebra unital e $a \in A$ normal. Existe um único $*$-homomorfismo isométrico $\varphi : C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\varphi(id|_{\sigma(a)}) = a$. Além disso, a imagem de φ é a C*-álgebra $C^*(\{a, 1\})$.*

Para a demonstração do teorema acima, veja ([18]: pg.48).

O resultado acima é chamado do cálculo funcional contínuo de a. Com isso, dado $f \in C(\sigma(a))$, denotaremos $f(a)$ como sendo a imagem de f através do $*$-homomorfismo acima. Caso A não seja unital ainda temos um resultado análogo. Primeiro lembre que se A não tem unidade, então para todo $a \in A$, $0 \in \sigma(a)$. Defina então $I_0 := \{f \in C(\sigma(a)) | f(0) = 0\}$. Este é uma C*-subálgebra de $C(\sigma(a))$.

Teorema 1.2.19. *Nas condições acima, existe um $*$-isomorfismo isométrico $\varphi : I_0 \to C^*(a)$.*

Este resultado é chamado de cálculo funcional (não unital) de a. Com isso, dado $f \in I_0$, denotaremos $f(a)$ como sendo a imagem de f através do $*$-isomorfismo acima.

Iremos agora definir uma classe de elementos muito importante em uma C*-álgebra. Estes são chamados de positivos, e imitam os números reais positivos dentro de $\mathbb{C}$.

Definição 1.2.20. Seja A uma C*-álgebra. Dado $a \in A_{sa}$, dizemos que a é positivo e escrevemos $a \geq 0$, se $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+$. Denotamos o conjunto de todos os elementos positivos de A por A^+.

Definimos uma relação de ordem em A_{sa} por $a \leq b$ se, e somente se, $b - a \geq 0$.

Listaremos agora algumas propriedades de elementos positivos de uma C*-álgebra.

Proposição 1.2.21. *Seja A uma C*-álgebra. Então:*

1. *Dado $a \in A^+$, existe um único $c \in A^+$ de forma que $c^2 = a$, denotado por $a^{1/2}$.*

2. *Se $a, b \in A^+$ então $a + b \in A^+$.*

3. *Dado $a \in A$, $a^*a \in A^+$.*

4. *$A^+ = \{a^*a : a \in A\}$.*

5. *Se $a, b \in A_{sa}$ e $a \leq b$, então $c^*ac \leq c^*bc$, para todo $c \in A$.*

6. *Dados $a, b \in A$, $0 \leq a \leq b \Rightarrow \|a\| \leq \|b\|$.*

7. *Se A é unital e a, b são elementos positivos e inversíveis, então $a \leq b \Rightarrow 0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.*

8. *Se $a, b \in A^+$, então $a \leq b \Rightarrow a^{1/2} \leq b^{1/2}$.*

Para a demonstração da proposição acima, veja ([18]: pg.45-48).

Em geral $0 \leq a \leq b$ não implica $a^2 \leq b^2$. Por exemplo, se $A = M_2(\mathbb{C})$, tome $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $b = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Então $a, b \in A^+$ e, além disto, temos $a \leq a + b$, porém $(a+b)^2 - a^2$ não é positivo, pois a matriz $b^2 + ab + ba = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ possui um autovalor negativo.

Definição 1.2.22. Seja A uma C*-álgebra. Uma net $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset A^+$ é chamada uma unidade aproximada para A se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\|e_\lambda\| \leq 1$, para todo $\lambda \in \Lambda$,

2. $\{e_\lambda\}_\lambda$ é crescente,

3. $\lim\limits_{\lambda} e_\lambda a = a$, $\forall a \in A$.

É conhecido que toda C*-álgebra A tem uma unidade aproximada a saber $(\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em que $\Lambda := \{a \in A^+ : \|a\| < 1\}$. Para uma demonstração, veja ([18]: 3.1.1).

A importância de unidades aproximadas é que nem sempre é suficiente tomar a unitização da C*-álgebra para resolver o problema em questão.

Dadas A, B C*-álgebras e $\varphi : A \to B$ um $*$-homomorfismo, defina $\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0)$, chamado de núcleo ou kernel do $*$-homomorfismo φ. Como conhecido da teoria de anéis, o núcleo de um homomorfismo é um ideal e todo ideal é núcleo de um homomorfismo. Estudaremos então propriedades do kernel de um $*$-homomorfismo entre C*-álgebras para motivarmos a ideia de ideais em C*-álgebras.

Observe que o kernel de φ é claramente uma $*$-subálgebra de A. Além disso, como φ é contínuo segue que o kernel é fechado, implicando que este é, por si só, uma C*-subálgebra de A. Além disso, caso $n \in \ker(\varphi)$ e $a \in A$, então

$$\varphi(an) = \varphi(a)\varphi(n) = 0$$

e similarmente, $\varphi(na) = 0$, donde segue que $an, na \in \ker(\varphi)$. Isto mostra que o kernel de um $*$-homomorfismo tem a mesma propriedade de um ideal de um anel.

Definição 1.2.23. Sejam A uma C*-álgebra e I um subespaço vetorial de A de forma que, para todo $n \in I$ e $a \in A$, $an \in I$ e $na \in I$. Então I é chamado um *ideal* (bilateral) de A. Se I for fechado em A, então I é chamado um *ideal fechado* de A.

Observe que não exigimos explicitamente que I seja autoadjunto. Não é verdade que todo ideal é auto-adjunto, porém ideais fechados em C*-álgebras são sempre auto-adjuntos ([18]: pg. 79). Isto implica, em particular, que um ideal fechado de uma C*-álgebra A é uma C*-subálgebra de A.

O seguinte resultado é especial para C*-álgebras; ele não vale para ideais em anéis gerais.

Proposição 1.2.24. *Sejam A uma C*-álgebra e I, J ideais fechados de A. Então $I \cap J = IJ$, em que $IJ := \overline{span}\{nm : n \in I, m \in J\}$.*

Demonstração: É claro que se $n \in IJ$, então $n \in I$ e $n \in J$, já que ambos são ideais, e portanto $n \in I \cap J$.

Por outro lado, $I \cap J$ é uma C*-álgebra, e portanto pelo teorema **??** segue que existe uma unidade aproximada $\{e_i\}_i$ para $I \cap J$. Disso, dado $n \in I \cap J$,

$$n = \lim_i ne_i \in IJ.$$

■

Proposição 1.2.25. *Sejam A, B C*-álgebras. Se $\varphi : A \to B$ é um $*$-homomorfismo injetivo, então φ é isométrico.*

Para a demonstração da proposição acima, veja ([18]: pg.80).

Proposição 1.2.26. *Sejam A, B C*-álgebras. Se $\varphi : A \to B$ é um $*$-homomorfismo, então $\varphi(A)$ é uma C*-subálgebra de B.*

Para a demonstração da proposição acima, veja ([18]: pg.81).

Definição 1.2.27. Sejam A uma C*-álgebra e I um ideal fechado de A. Dizemos que I é um ideal essencial de A se dado $a \in A$, de forma que $an = 0$, para todo $n \in I$, então $a = 0$.

Note que A é sempre essencial em si mesmo, já que se $ab = 0$ para todo $b \in A$, então em particular $aa^* = 0$, donde segue que $\|a\|^2 = 0$ e assim $a = 0$.

Podemos então definir formalmente uma unitização de uma C*-álgebra.

Definição 1.2.28. Seja A uma C*-álgebra. Dada uma C*-álgebra unital C, dizemos que C é uma unitização de A se existe um $*$-homomorfismo injetor $\varphi : A \to C$ de forma que $\varphi(A)$ é um ideal essencial de C.

Observe que se A é unital, então não existe uma C*-álgebra unital C contendo A como um ideal essencial próprio. De fato, se 1_C denota a unidade de C e 1_A denota a unidade de A, então $1_C - 1_A \in C$. Além disso,

$$(1_C - 1_A)a = 1_C a - 1_A a = 0.$$

Porém, $1_C - 1_A \neq 0$, já que caso contrário $A = C$, e portanto A não é um ideal essencial de C.

Em particular, $\tilde{A}$ que construímos anteriormente só é unitização no sentido acima se A não é unital. Isto também inspira o fato de que pode haver outras unitizações para uma C*-álgebra não unital, diferentes de $\tilde{A}$. Isto de fato é verdade e iremos mostrar um exemplo a seguir. A unitização $\tilde{A}$ é a menor unitização possível de A, no sentido de que o quociente de $\tilde{A}$ por A é isomorfo aos complexos. Podemos nos perguntar então se existe uma maior unitização de A. Tal unitização existe e é chamada de álgebra dos multiplicadores de A e denotada por $M(A)$. A existência desta C*-álgebra pode ser feita de diversas maneiras e será abordada neste trabalho mais adiante. O seguinte resultado formaliza mais precisamente de que forma $M(A)$ é a "maior" unitização.

Proposição 1.2.29. *Seja A uma C*-álgebra. Dada qualquer unitização C de A, existe um único $*$-homomorfismo injetor $\varphi : C \to M(A)$ de forma que o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & M(A) \\
& C \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta.

Esta proposição será demonstrada adiante neste trabalho, quando fizermos a construção da álgebra de multiplicadores.

Por esta propriedade universal, segue que $M(A)$ é única a menos de isomorfismos. Vamos mostrar adiante que esta C*-álgebra sempre existe.

Definição 1.2.30. Sejam A,B C*-álgebras. Um $*$-homomorfismo $f : A \to B$ é chamado *não degenerado* se $span\{f(a)b | a \in A \text{ e } b \in B\}$ é denso em B.

É possível mostrar que um $*$-homomorfismo $f : A \to B$ é não degenerado se, e somente se, dada uma unidade aproximada $\{e_i\}_{i\in I}$ para A, $\{f(e_i)\}_{i\in I}$ é uma unidade aproximada para B.

Veremos mais a frente neste trabalho que os $*$-homomorfismos não degenerados serão de particular interesse. Eles serão os morfismos para certas (bi)categorias de C*-álgebras.

1.3 Categorias

Um estudo mais aprofundado deste assunto pode ser feito através de [1]. Em uma categoria uma coleção de objetos e de morfismos não precisam ser conjuntos. Por esta razão, evitaremos usar as notações de conjunto para expressar o que é necessário, quando não soubermos que as coleções em questão de fato se tratam de conjuntos. Usaremos a noção de aplicação para o correspondente a uma função entre coleções. Uma aplicação ainda precisa estar definida em todos os elementos da coleção inicial e não pode levar um mesmo elemento em dois elementos diferentes da coleção final. Na literatura, pode-se encontrar a noção de classes para se referir ao que chamamos de coleções.

Definição 1.3.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de

1. Uma coleção de objetos $Ob(\mathcal{C})$.

2. Para cada par X, Y em $Ob(\mathcal{C})$, existe uma coleção de morfismos $Hom(X, Y)$.

3. Para cada X em $Ob(\mathcal{C})$, existe um morfismo Id_X em $Hom(X, X)$ chamado de morfismo identidade de X.

4. Para cada X, Y, Z em $Ob(\mathcal{C})$, existe uma aplicação $Hom(Y, Z) \times Hom(X, Y) \to Hom(X, Z)$ denotada por $(g, f) \mapsto g \circ f$, chamada composição de morfismos. Esta aplicação satisfaz as seguintes condições:

   (a) Dados X, Y em $Ob(\mathcal{C})$ então para todo f em $Hom(X, Y)$, temos que $f \circ Id_X = f$ e $Id_Y \circ f = f$.

   (b) Dados X, Y, W, Z em $Ob(\mathcal{C})$ e morfismos f em $Hom(X, Y)$, g em $Hom(Y, W)$ e h em $Hom(W, Z)$, temos

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Denotaremos um elemento f de $Hom(X, Y)$ por $f : X \to Y$. Diremos que X é seu domínio e Y é seu contradomínio, ou codomínio. Em alguns momentos também chamaremos morfismos de flechas, denotando-os apenas por $X \to Y$.

Observe que podemos identificar os objetos com os morfismos identidade. Isto indica que podemos definir uma categoria apenas do ponto de vista de morfismos, tornando os objetos implícitos. Não adotamos esta convenção neste trabalho pois queremos evidenciar os objetos das categorias que faremos uso.

Exemplo 1.3.2. Todo conjunto pode ser visto como uma categoria, acrescentando apenas os morfismos identidade para cada elemento do conjunto. Em particular, um conjunto com um só ponto é visto como uma categoria, denotado por 1.

Exemplo 1.3.3. A categoria Set tem como objetos a coleção de todos os conjuntos e como morfismos a coleção de todas as funções entre conjuntos.

Os morfismos identidade são as funções identidade e a composição de morfismos é dada pela composição de funções. Os dados definidos acima formam uma categoria, denominada de Set.

Todos os nossos próximos exemplos terão a mesma estrutura de identidades e composição de morfismos, a menos que seja mencionado algo diferente.

Exemplo 1.3.4. A categoria *Grp* tem como objetos os grupos e morfismos os homomorfismos de grupos.

Exemplo 1.3.5. A categoria $InvSG$ tem como objetos os semigrupos inversos e morfismos os homomorfismos de semigrupos.

Exemplo 1.3.6. A categoria Top tem como objetos os espaços topológicos e morfismos as funções contínuas.

Exemplo 1.3.7. A categoria C^* tem como objetos C*-álgebras e morfismos os $\star$-homomorfismos entre C*-álgebras.

Observe que em todos os exemplos acima os morfismos são funções entre conjuntos, por isso faz sentido falar de identidades e composição no sentido de funções como no primeiro exemplo. Apesar disto, identidades e composições também são termos usados no estudo de categorias quaisquer.

Definição 1.3.8. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, um morfismo $f : X \to Y$ de $Hom(X, Y)$ é chamado *inversível* se existe um outro morfismo $g : Y \to X$ em $Hom(Y, X)$ de forma que $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$. Tal morfismo também é chamado de *isomorfismo*.

Caso exista um morfismo inversível $f : X \to Y$, dizemos que X e Y são isomorfos. Isto indica que X e Y são objetos similares dentro da nossa categoria, e que o estudo de um é equivalente ao estudo do outro.

Note que, caso exista, g como acima será único. Então g é denotado por f^{-1} e chamado de inversa de f.

Observe que todo morfismo identidade é automaticamente inversível, sendo sua própria inversa.

Exemplo 1.3.9. Na categoria *Set* os morfismos inversíveis são precisamente as funções inversíveis, ou seja, as funções bijetivas. Similarmente, na categoria *Grp*, os morfismos inversíveis são os isomorfismos de grupos e analogamente para os outros exemplos que mencionamos acima.

Definição 1.3.10. Uma categoria é chamada pequena se as coleções de objetos e morfismos são conjuntos.

Definição 1.3.11. Um grupoide $\mathcal{G}$ é uma categoria pequena em que todos os morfismos são inversíveis.

Observe que caso um grupoide $\mathcal{G}$ tenha apenas um objeto, então o conjunto dos seus morfismos forma um grupo. Quando este for o caso, diremos que o grupoide em si é um grupo e o denotaremos por G.

Equivalentemente, um grupo pode ser visto como um grupoide, em que os elementos do grupo correspondem aos morfismos do grupoide com um só objeto e a composição corresponde ao produto do grupo. Similarmente, se S é um semigrupo inverso com unidade, podemos considerá-lo uma categoria da mesma forma, identificando a unidade como seu único objeto e os morfismos sendo os elementos do semigrupo inverso. Denotaremos esta categoria também por S.

Exemplo 1.3.12. Considere um conjunto qualquer de objetos. Defina como morfismos apenas os morfismos identidade. Esta categoria será um grupoide.

Observe que se f está em $Hom(X,Y)$ e g está em $Hom(Y,Z)$ de forma que f e g são inversíveis, então $g \circ f$ é inversível. De fato, é fácil ver que $f^{-1} \circ g^{-1}$ é a inversa de $g \circ f$.

Veremos agora algumas equivalências para o fato de uma função ser inversível.

Proposição 1.3.13. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dado f em $Hom(X,Y)$ temos que são equivalentes:*

1. *f é inversível.*

2. *Existem g,h em $Hom(Y,X)$ de forma que $g \circ f = Id_X$ e $f \circ h = Id_Y$.*

3. *Existem g em $Hom(Y,Z)$ e h em $Hom(W,X)$ tais que $g \circ f$ e $f \circ h$ são inversíveis.*

Demonstração: É claro que 1 implica 2 e 3. Para $2 \Rightarrow 1$, sejam g e h como em 2. Temos

$$g = g \circ Id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = h,$$

donde $g = h = f^{-1}$.

Para $3 \Rightarrow 2$, sejam g e h como em 3. Sejam $k = (g \circ f)^{-1}$ e $l = (f \circ h)^{-1}$. Temos

$$Id_X = k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f,$$

donde $k \circ g$ está em $Hom(Y,X)$ e é uma inversa à esquerda de f. Similarmente, $h \circ l$ está em $Hom(Y,X)$ e é uma inversa à direita de f, como queríamos demonstrar. ■

Definição 1.3.14. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dizemos que $\mathcal{D}$ é uma subcategoria de $\mathcal{C}$ se todo objeto de $\mathcal{D}$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e, para quaisquer X, Y em $Ob(\mathcal{D})$, os morfismos $Hom(X,Y)$ em $\mathcal{D}$ também são morfismos de $Hom(X,Y)$ em $\mathcal{C}$. Além disso, a composição em $\mathcal{D}$ é a mesma composição de $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.3.15. Os exemplos 1.3.4 – 1.3.7 são subcategorias do exemplo 1.3.3.

Exemplo 1.3.16. Na categoria *Grp*, podemos considerar apenas os grupos abelianos. Isto nos dá uma subcategoria de *Grp*, denotada por *Ab*.

Exemplo 1.3.17. Na categoria Top, podemos nos restringir apenas aos espaços topológicos Hausdorff localmente compactos. Podemos ainda restringir os morfismos às funções contínuas próprias[2]. Esta será uma subcategoria de Top, denotada por LCH.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, podemos definir outra categoria, chamada de categoria oposta e denotada por $\mathcal{C}^{op}$, em que $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$ e para todo X, Y em $Ob(\mathcal{C}^{op})$, $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Em outras palavras estamos invertendo as flechas, já que se $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, temos $f : Y \to X$ em $\mathcal{C}^{op}$. Para morfismos f em $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$ e g em $Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$, definimos a composição $\circ_{op}$ por $g \circ_{op} f := f \circ g$, em que $\circ$ denota a composição de $\mathcal{C}$, g está em $Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ e f está em $Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

Definição 1.3.18. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um *funtor covariante* F de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é um par de aplicações, (F_{Ob}, F_{Hom}) de forma que F_{Ob} leva objetos de $\mathcal{C}$ em objetos de $\mathcal{D}$, e F_{Hom} leva um morfismo f de $Hom(A,B)$ de $\mathcal{C}$ para um morfismo $F(f)$ de $Hom(F(A),F(B))$ de $\mathcal{D}$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $F_{Hom}(Id_X) = Id_{F_{Ob}(X)}$, para todo X em $Ob(\mathcal{C})$.

2. $F_{Hom}(g \circ f) = F_{Hom}(g) \circ F_{Hom}(f)$, para todo f em $Hom(X,Y)$ e g em $Hom(Y,Z)$.

Escrevemos $F{:}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ para indicar que temos um funtor de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$. Além disso, a fim de simplificar as notações, vamos usar a mesma notação F para ambas as aplicações F_{Ob} e F_{Hom}. Por exemplo, a primeira condição se torna $F(Id_X) = Id_{F(X)}$ e a segunda condição se

[2] Uma função é dita ser própria se a imagem inversa de um compacto é também compacto.

torna $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Além disto, para cada X em $Ob(\mathcal{C})$, denotaremos por $F(X)$ sua imagem pelo funtor F em $Ob(\mathcal{D})$. Similarmente, se X, Y estão em $Ob(\mathcal{C})$ e $f : X \to Y$ está em $Hom(X, Y)$, denotaremos por $F(f) : F(X) \to F(Y)$ sua imagem pelo funtor F em $Hom(F(X), F(Y))$.

Observe que se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor, então a coleção de todos os objetos Y de $\mathcal{D}$ de forma que $Y = F(X)$, para algum X em $Ob(\mathcal{C})$ e a coleção de todos os morfismos $g : F(A) \to F(B)$ de $\mathcal{D}$ de forma que $g = F(f)$, para algum f em $Hom(A, B)$ não precisa ser uma categoria. Por exemplo, considere as seguintes categorias:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "g"] & B & C \arrow[r, bend left, "f"] & D \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[rr, bend right, "h \circ k"'] & Q \arrow[r, bend left, "h"] & R, \end{tikzcd}$$

em que as letras maiúsculas simbolizam os objetos e as letras minúsculas os morfismos diferentes da identidade. Considere então o funtor $F(A) = P$, $F(B) = Q = F(C)$, $F(D) = R$, $F(g) = k$ e $F(f) = h$. Note que o conjunto gerado por esses elementos não é uma categoria, pois $h \circ k$ não está nele.

Definição 1.3.19. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um *funtor contravariante* F de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$ é um par de aplicações, (F_{Ob}, F_{Hom}) de forma que F_{Ob} leva objetos de $\mathcal{C}$ em objetos de $\mathcal{D}$, e F_{Hom} leva um morfismo f de $Hom(A, B)$ de $\mathcal{C}$ para um morfismo $F(f)$ de $Hom(F(B), F(A))$ de $\mathcal{D}$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $F_{Hom}(Id_X) = Id_{F_{Ob}(X)}$, para todo X em $Ob(\mathcal{C})$.

2. $F_{Hom}(g \circ f) = F_{Hom}(f) \circ F_{Hom}(g)$, para todo f em $Hom(X, Y)$ e g em $Hom(Y, Z)$.

Observe que se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor, então $F_{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ definida da mesma maneira que F é um funtor contravariante. De fato, como F é um funtor, segue que $F_{op}(Id_X) = Id_{F(X)}$. Além disto, pela composição da categoria oposta, temos

$$F_{op}(f \circ_{op} g) = F_{op}(g \circ f) = F_{op}(g) \circ F_{op}(f).$$

Similarmente, $F^{op} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ e $F_{op}^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ definidos da mesma maneira que F serão um funtor contravariante e um funtor covariante, respectivamente.

Exemplo 1.3.20. Dadas as categorias Grp e Set, existe um funtor $U : Grp \to Set$ que "esquece" as propriedades de grupo, lembrando apenas do conjunto subjacente. Por esta razão, este funtor é chamado de funtor *esquecimento*, ou funtor *subjacente*. Podemos fazer o mesmo com as categorias $InvSG$ e C^* para Set. Dada uma C*-álgebra, podemos também criar um funtor esquecimento $T : C^* \to Ab$ mandando C*-álgebras no grupo aditivo abeliano subjacente.

Note que um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ leva morfismos inversíveis em morfismos inversíveis e que, dados X, Y, W, Z em $Ob(\mathcal{C})$ e f em $Hom(X, Y)$, g em $Hom(Y, Z)$, h em $Hom(X, W)$ e k em $Hom(W, Z)$, temos que se o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ W \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

comuta, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(h)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ F(W) \arrow[r, "F(k)"'] & F(Z) \end{tikzcd}$$

também comuta. Em outras palavras, F leva diagramas comutativos em diagramas comutativos.

Faremos agora um estudo do ponto de vista categórico de ações de grupos e semigrupos inversos.

Definição 1.3.21. Uma ação de grupos em uma categoria $\mathcal{C}$ é um funtor $\alpha : G \to \mathcal{C}$, em que G é um grupo.

Aqui estamos considerando o grupo G como uma categoria vendo sua unidade e como o único objeto da categoria e cada elemento do grupo como um morfismo. A composição desta categoria é dada pela multiplicação do grupo.

Note que alteramos a notação de funtores usual para que fique evidenciado que estamos falando de ações, além do fato de que esta é uma notação padrão para este tipo de estudo.

No caso acima, chamaremos α da ação de G sobre o objeto $\alpha(e)$, em que $e \in G$ é a unidade do grupo.

Exemplo 1.3.22. Seja G um grupo qualquer. Na categoria Set, um funtor α de G para Set associa à unidade do grupo um conjunto X. Neste caso, diremos que a ação do grupo é sobre X. Os morfismos serão funções bijetoras, denotadas por α_g de X em X, para todo $g \in G$. Como α é um funtor, $\alpha_e = Id_X$ e $\alpha_g \alpha_h := \alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$. Note que esta coincide com a definição clássica de ações de grupos sobre conjuntos.

Considere agora o caso de um semigrupo inverso S com unidade. Podemos considerá-lo como uma categoria da mesma forma que fizemos com um grupo, fazendo com que sua unidade seja o único objeto da categoria e que seus elementos sejam os morfismos. Podemos então tentar codificar a noção de uma ação de semigrupo inverso sobre uma categoria como um funtor, como feito no caso de grupos, porém isto tem alguns problemas que serão abordados a seguir.

Seja α um funtor de um semigrupo inverso S com unidade para Set. Este não dá origem a uma ação de semigrupos inversos sobre um conjunto X. Os morfismos são funções, denotadas por α_s de X para X para todo $s \in S$. Similarmente, $\alpha_1 = Id_X$ e $\alpha_s \alpha_t := \alpha_s \circ \alpha_t = \alpha_{st}$. Usando as propriedades de semigrupos inversos, temos que $\alpha_e \alpha_e = \alpha_e$, para todo $e \in E(S)$. Daí, $\alpha_e(X) := \{x \in X : \exists y \in X \text{ com } \alpha_e(y) = x\} \subset X$ é da forma que $\alpha_e|_{\alpha_e(X)} = Id_{\alpha_e(X)}$. Porém, não temos controle de como α_e é fora deste subconjunto. Isto implica que esta função não é necessariamente uma bijeção, bem como cada α_s com $s \in S$. Com isto, não podemos codificar a noção de uma ação de semigrupos inversos, como definida em [11], através de funtores. Adiante em nosso trabalho, vamos contornar isto com o uso de *bicategorias* e *funtores fracos*.

Exemplo 1.3.23. Considere a categoria C^*. Dado G um grupo, $\alpha : G \to C^*$ age sobre uma C*-álgebra A. Os morfismos são $*$-automorfismos de A. As mesmas propriedades como no exemplo anterior são obtidas, gerando uma ação de grupos sobre C*-álgebras no sentido clássico.

Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias. Dados funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, podemos compor estes funtores de maneira canônica. Esta composição ainda será um funtor, como pode ser facilmente verificado, e será denotado por $G \circ F$. É claro que esta composição é associativa.

Além disso, para cada categoria $\mathcal{C}$, existe o funtor identidade de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{C}$, denotado por $Id_{\mathcal{C}}$, que mantém a categoria igual. Quando a categoria em questão não for relevante, vamos denotar este funtor apenas como Id ou 1. Com isso temos mais um exemplo de categorias:

Exemplo 1.3.24. A categoria Cat tem como objetos as categorias pequenas e como morfismos os funtores. Pelo que foi discutido acima, esta é, de fato, uma categoria.

Motivados por isto, vemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são isomorfas se existe um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ inversível. Em geral, não temos isomorfismos entre categorias. Apesar disso, duas categorias ainda podem ser muito parecidas sem serem isomorfas. Esta noção é chamada de equivalência entre categorias. São como isomorfismos enfraquecidos. Para formalizar isso, primeiro definiremos uma noção de transformações entre funtores.

Definição 1.3.25. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Dados $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores, uma transformação natural η de F para G, denotada por $\eta : F \to G$ é uma coleção de morfismos $\{\eta_X\}_{X \text{ em } Ob(\mathcal{C})}$ em $\mathcal{D}$, com $\eta_X : F(X) \to G(X)$ de forma que, para todo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

comuta.

Uma transformação natural η é chamada um *isomorfismo natural* se a coleção de morfismos $\{\eta_X\}_{X \text{ em } Ob(\mathcal{C})}$ for composta de morfismos inversíveis. Um isomorfismo natural η de F para G será denotado por $\eta : F \xrightarrow{\sim} G$.

Podemos interpretar uma transformação natural como uma "translação", através da coleção de morfismos, de diagramas comutativos provenientes de um funtor, para diagramas comutativos provenientes de outro funtor.

Uma transformação natural é geralmente chamada um morfismo entre funtores.

Definição 1.3.26. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Dizemos que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais $\eta : G \circ F \xrightarrow{\sim} Id_{\mathcal{C}}$ e $\mu : F \circ G \xrightarrow{\sim} Id_{\mathcal{D}}$.

Caso os funtores em questão sejam contravariantes e mesmo assim existirem os isomorfismos naturais como definidos acima, então dizemos que existe uma dualidade entre as categorias. Observe que uma dualidade entre categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é o mesmo que uma equivalência entre as categorias $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{D}$.

Já vimos que podemos compor funtores, quando a categoria de base de um é igual a categoria sobre a qual a imagem do outro funtor está. Vamos fazer algo similar para transformações naturais. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Dados $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores de forma que existam transformações naturais $\eta : F \to G$ e $\mu : G \to H$. Podemos então construir uma transformação natural $\mu \circ \eta$ de F para H, em que $(\mu \circ \eta)_X := (\mu_X \circ \eta_X)_X$, sendo X um objeto de $\mathcal{C}$. Para ver que esta de fato é uma transformação natural, seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$ e considere os diagramas,

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & H(Y).
\end{tikzcd}$$

Observe que cada quadrado comuta, pelas propriedades naturais de η e μ, e portanto o retângulo exterior comuta, provando que $\mu \circ \eta$ como definida acima é uma transformação natural.

Iremos discutir agora mais alguns aspéctos técnicos sobre a criação de novos funtores e transformações naturais a partir de já existentes.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Podemos formar uma nova categoria, denotada por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ em que os objetos são da forma (X, Y), em que X está em $Ob(\mathcal{C})$ e Y está em $Ob(\mathcal{D})$, e os morfismos são da forma (f, g), em que f é um morfismo de $\mathcal{C}$ e g é um morfismo de $\mathcal{D}$. O morfismo identidade de um objeto (X, Y) é o morfismo da forma (Id_X, Id_Y). Dados $(f_1, g_1) : (X_1, Y_1) \to (W_1, Z_1)$ e $(f_2, g_2) : (W_1, Z_1) \to (X_2, Y_2)$, definimos a composição deles como sendo a aplicação que manda $((f_2, g_2), (f_1, g_1))$ em $(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$, em que as composições usadas são de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente. Esta é de fato uma categoria, e é chamada de produto das categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ ou de categoria produto, quando as categorias subjacentes estão claras.

Dados $F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ e $F_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ funtores, podemos criar o funtor $F_1 \times F_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, que leva um objeto (X, Y) no objeto $(F_1(X), F_2(Y))$ e um morfismo (f, g) no morfismo $(F_1(f), F_2(g))$. Usando as propriedades funtoriais de F_1 e F_2 e a definição da categoria produto, segue que $F_1 \times F_2$ é um funtor.

Considere agora $F_1, G_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ e $F_2, G_2 : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$ funtores. Suponha também que existam transformações naturais $\eta_1 : F_1 \to G_1$ e $\eta_2 : F_2 \to G_2$. Podemos então criar uma transformação natural $\eta_1 * \eta_2 : F_1 \times F_2 \to$

$G_1 \times G_2$, de forma que cada morfismo de $(\eta_1 * \eta_2)_{(X,Y)} \coloneqq (\eta_{1_X}, \eta_{2_Y})$, que é um morfismo em $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$, para cada (X, Y) objetos de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Usando acomutatividade dos diagramas das transformações η_1 e η_2, segue que $\eta_1 * \eta_2$ é uma transformação natural. Além disso, se η_1 e η_2 forem isomorfismos naturais, então $\eta_1 * \eta_2$ será um isomorfismo natural.

Por fim, se η é uma transformação natural entre os funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, então $H(\eta) : H \circ F \to H \circ G$, em que $(H(\eta))_X \coloneqq H(\eta_X)$, sendo X um objeto de $\mathcal{C}$, é uma transformação natural, como pode ser visto usando as propriedades funtoriais de H e o diagrama da comutatividade de η.

Estas ideias serão usadas adiante no trabalho.

1.4 Fibrados de Fell

Para um estudo mais aprofundado deste assunto, recomendamos [12].

Iniciaremos com um estudo de fibrados de Fell sobre um grupo G.

Fixe, por toda esta seção, G como sendo um grupo.

Definição 1.4.1. Um fibrado de Fell sobre G é uma tripla $(\mathcal{B}, \cdot, *)$ em que $\mathcal{B}$ é a união disjunta de uma coleção de espaços de Banach $\{B_g\}_{g \in G}$ e

$$\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \text{ é uma função que chamaremos de produto,}$$

e

$$* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \text{ é uma função que chamaremos de involução,}$$

de forma que, para todo $g, h, k \in G$ e $b, c \in \mathcal{B}$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $B_g \cdot B_h \subseteq B_{gh}$.

(ii) O produto é bilinear quando restrito a $B_g \times B_h$.

(iii) O produto é associativo.

(iv) $\|b \cdot c\| \le \|b\| \|c\|$.

(v) $(B_g)^* \subseteq B_{g^{-1}}$.

(vi) A involução é conjugado-linear quando restrita a B_g.

(vii) $(b \cdot c)^* = c^* \cdot b^*$.

(viii) $(b^*)^* = b$.

(ix) $\|b^*\| = \|b\|$.

(x) $\|b^* \cdot b\| = \|b\|^2$.

(xi) $b^* \cdot b \geq 0$.

Um fibrado de Fell é dito saturado se, para quaisquer $g, h \in G$, $\overline{span}\{b \cdot c : b \in B_g, c \in B_h\} = B_{gh}$.

Observe que o item (xi) faz sentido pois $b^* \cdot b \in B_e$ e os itens anteriores implicam que B_e é uma C*-álgebra. Nos referiremos a uma tripla da forma $(\mathcal{B}, \cdot, *)$ apenas como $\mathcal{B}$ quando o produto e a involução estiverem claros.

Exemplo 1.4.2. Seja A uma C*-álgebra. Tome $B_e = A$ e $B_g = 0$ para todo $g \in G \backslash \{e\}$ e defina o produto e a involução como em A. Esta tripla dá origem a um fibrado de Fell de maneira trivial.

Exemplo 1.4.3. Tome $B_g = \mathbb{C}$ para todo $g \in G$. Denotaremos os elementos de B_g por $a\delta_g$, em que $a \in \mathbb{C}$. Uma interpretação para esta notação é pensar que elementos do fibrado são funções de G para $\mathbb{C}$. Neste caso δ_g corresponde à função característica do elemento g. Defina o produto por

$$(a\delta_g) \cdot (b\delta_h) = ab\delta_{gh},$$

e a involução por

$$(a\delta_g)^* = \overline{a}\delta_g^{-1}.$$

Esta tripla dá origem a um fibrado de Fell.

Exemplo 1.4.4. Seja A uma C*-álgebra e suponha que exista uma ação α de G para A. Tome $B_g = A$ para todo $g \in G$. Usaremos novamente a mesma notação do exemplo anterior, denotando por $a\delta_g$, em que $a \in A$, um elemento de B_g. Dados $a\delta_g \in B_g$ e $b\delta_h \in B_h$, defina o produto e a involução da seguinte forma:

$$(a\delta_g) \cdot (b\delta_h) := a\alpha_g(b)\delta_{gh},$$

e

$$(a\delta_g)^* := \alpha_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}}.$$

Mostraremos que esta tripla dá origem a um fibrado de Fell. Note que as propriedades (i) e (v) são triviais, porém observe que isso é importante ser notado pela definição do produto.

Dados $a\delta_g, a_1\delta_g, a_2\delta_g \in B_g$, $b\delta_h, b_1\delta_h, b_2\delta_h \in B_h$, $c\delta_k \in B_k$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

(ii)

$$\begin{aligned} a\delta_g \cdot (b_1 + \lambda b_2)\delta_h &= a\alpha_g(b_1 + \lambda b_2)\delta_{gh} = \\ &= a\alpha_g(b_1)\delta_{gh} + \lambda a\alpha_g(b_2)\delta_{gh} = \\ &= a\delta_g \cdot b_1\delta_h + \lambda a\delta_g \cdot b_2\delta_h. \end{aligned}$$

Analogamente temos a linearidade na primeira entrada.
(iii)

$$\begin{aligned} (a\delta_g \cdot b\delta_h) \cdot c\delta_k &= (a\alpha_g(b)\delta_{gh}) \cdot c\delta_k = \\ &= a\alpha_g(b)\alpha_{gh}(c)\delta_{ghk} = \\ &= a\alpha_g(b\alpha_h(c))\delta_{ghk} = \\ &= a\delta_g \cdot (b\alpha_h(c))\delta_{hk} = a\delta_g \cdot (b\delta_h \cdot c\delta_k). \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \|a\delta_g \cdot b\delta_h\| &= \|a\alpha_g(b)\delta_{gh}\| \leq \\ &\leq \|a\delta_g\|\|\alpha_g(b)\delta_h\| = \|a\delta_g\|\|b\delta_h\|. \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} ((a_1 + \lambda a_2)\delta_g)^* &= \alpha_{g^{-1}}((a_1 + \lambda a_2)^*)\delta_{g^{-1}} = \\ &= \alpha_{g^{-1}}(a_1^* + \overline{\lambda} a_2^*)\delta_{g^{-1}} = \\ &= (\alpha_{g^{-1}}(a_1^*) + \overline{\lambda}\alpha_{g^{-1}}(a_2^*))\delta_{g^{-1}} = (a_1^* + \overline{\lambda} a_2^*)\delta_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} (a\delta_g \cdot b\delta_h)^* &= (a\alpha_g(b)\delta_{gh})^* = \\ &= \alpha_{h^{-1}g^{-1}}((a\alpha_g(b))^*)\delta_{h^{-1}g^{-1}} = \\ &= \alpha_{h^{-1}g^{-1}}(\alpha_g(b^*)a^*)\delta_{h^{-1}g^{-1}} = \\ &= \alpha_{h-1}(b^*)\alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(a^*))\delta_{h^{-1}g^{-1}} = (b\delta_h)^* \cdot (a\delta_g)^*. \end{aligned}$$

$(viii)$

$$\begin{aligned} (a\delta_g)^{**} &= (\alpha_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}})^* = \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a^*)^*)\delta_g = \\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a))\delta_g = a\delta_g. \end{aligned}$$

(ix)

$$\|(a\delta_g)^*\| = \|\alpha_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}}\| = \|a\delta_g\|.$$

(x)

$$\begin{aligned}
\|(a\delta_g)^* \cdot a\delta_g\| &= \|\alpha_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}} \cdot a\delta_g\| = \\
&= \|\alpha_{g^{-1}}(a^*)\alpha_{g^{-1}}(a)\delta_e\| = \\
&= \|\alpha_{g^{-1}}(a^*a)\delta_e\| = \\
&= \|a^*a\delta_e\| = \|a\delta_g\|^2.
\end{aligned}$$

(xi)

$$\begin{aligned}
(a\delta_g)^* \cdot a\delta_g &= \alpha_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}} \cdot a\delta_g = \\
&= (\alpha_{g^{-1}}(a))^*\alpha_{g^{-1}}(a)\delta_e \geq 0.
\end{aligned}$$

Com isso concluímos que a tripla definida acima é de fato um fibrado de Fell.

O leitor mais atento pode notar que a estrutura de produto e involução do fibrado definido acima se parece muito com a estrutura de produto e involução do produto cruzado de A pela ação α de G. Esta similaridade não é um mero acaso, veremos a seguir que podemos construir uma C*-álgebra a partir de um fibrado de Fell e, neste último exemplo, tal C*-álgebra é isomorfa ao produto cruzado cheio $A \rtimes_\alpha G$, como pode ser visto em [12].

Fixe a partir de agora um fibrado de Fell $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$.

Definição 1.4.5. Uma seção de $\mathcal{B}$ é uma função $f : G \to \mathcal{B}$ tal que $f(g) \in B_g$ para todo g em G.

Os δ_g construídos no exemplo (2) podem ser vistos como seções do fibrado de Fell do exemplo em questão. No caso geral, se $a \in B_g$, então $a\delta_g$ pode ser visto como uma seção do fibrado que vale a em g e 0 em $G\backslash\{g\}$.

Neste trabalho, nos importaremos apenas com as seções de suporte finito[3], as quais denotaremos por $C_c(\mathcal{B})$. Observe que $C_c(\mathcal{B})$ tem a estrutura de espaço vetorial dada pela soma e produto por escalar pontuais. Nosso objetivo é transformá-lo em uma $*$-álgebra. Para tal, precisamos definir um produto e uma involução em $C_c(\mathcal{B})$. Note que um elemento y de $C_c(\mathcal{B})$ pode ser escrito como

$$\sum_{g\in G} y(g)\delta_g$$

[3]Uma função f é dita ter suporte finito se existe apenas uma quantidade finita de elementos em seu domínio tal que $f \neq 0$.

em que apenas uma quantidade finita de termos é diferente de zero.

Dadas duas seções, $y, z \in C_c(\mathcal{B})$, podemos fazer o produto formal das seções vistas como acima. Note que nosso objetivo é saber que elemento estará na"posição g" da soma. Para tanto, note que um tal elemento deve ser

$$\sum_{h \in G} y(h) \cdot z(h^{-1}g).$$

Portanto, o produto $y * z$ pode ser visto como a soma formal

$$\sum_{g \in G} \sum_{h \in G} y(h) \cdot z(h^{-1}g)\delta_g.$$

Esta soma descreve o produto de convolução das duas seções. Este produto está bem definido porque, novamente, apenas uma quantidade finita de termos é diferente de zero em cada soma, por y e z terem esta propriedade.

Mais ainda, podemos definir a involução da seguinte forma:

$$y^* = \sum_{g \in G} y(g^{-1})^* \delta_g,$$

em que a involução nos elementos dentro da soma é a involução dada pelo fibrado.

Queremos então verificar que este produto é bilinear e associativo, e a involução é conjugado-linear, anti-multiplicativa e idempotente. Comecemos pelo produto.

Dados $x, x_1, x_2, y, z \in C_c(\mathcal{B})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $g \in G$.

$$\begin{aligned}
((x_1 + \lambda x_2) * y)(g) &= \sum_{h \in G} (x_1 + \lambda x_2)(h) \cdot y(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h \in G} (x_1(h) + \lambda x_2(h)) \cdot y(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h \in G} x_1(h) \cdot y(h^{-1}g) + \lambda x_2(h) \cdot y(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h \in G} x_1(h) \cdot y(h^{-1}g) + \lambda \sum_{h \in G} x_2(h) \cdot y(h^{-1}g) = \\
&= (x_1 * y + \lambda x_2 * y)(g).
\end{aligned}$$

A linearidade na segunda entrada é análogo.

$$\begin{aligned}
((x*y)*z)(g) &= \sum_{h\in G}(x*y)(h)\cdot z(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{h\in G}\sum_{k\in G} x(k)\cdot y(k^{-1}h)\cdot z(h^{-1}g) = \\
&= \sum_{k\in G} x(k)\cdot(\sum_{h\in G} y(k^{-1}h)\cdot z(h^{-1}g)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(x*(y*z))(g) &= \sum_{k\in G} x(k)\cdot(y*z)(k^{-1}g) = \\
&= \sum_{k\in G} x(k)\cdot(\sum_{h\in G} y(h)\cdot z(h^{-1}k^{-1}g)) =^{(kh\leftrightarrow h)} \\
&= \sum_{k\in G} x(k)\cdot(\sum_{h\in G} y(k^{-1}h)\cdot z(h^{-1}g)).
\end{aligned}$$

Logo, o produto é bilinear e associativo. Para a involução

$$\begin{aligned}
(x_1+\lambda x_2)^*(g) &= (x_1+\lambda x_2)(g^{-1})^* = \\
&= x_1(g^{-1})^* + \overline{\lambda}x_2(g^{-1})^* = x_1^*(g) + \overline{\lambda}x_2^*(g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x*y)^*(g) &= (x*y)(g^{-1})^* = \\
&= (\sum_{h\in G} x(h)\cdot y(h^{-1}g^{-1}))^* = \\
&= \sum_{h\in G} y(h^{-1}g^{-1})^*\cdot x(h)^* = \\
&= \sum_{h\in G} y^*(gh)\cdot x^*(h^{-1}) =^{(gh\leftrightarrow h)} \\
&= \sum_{h\in G} y^*(h)\cdot x^*(h^{-1}g) = (y^* * x^*)(g).
\end{aligned}$$

Isto mostra que com este produto e involução, $C_c(\mathcal{B})$ é uma $*$-álgebra. O próximo passo da construção de uma C*-álgebra a partir do nosso fibrado $\mathcal{B}$ é tratar do que seria uma $*$-representação dele.

Definição 1.4.6. Uma $*$-representação de um fibrado de Fell $\mathcal{B}$ em uma $*$-álgebra C é uma coleção de transformações lineares $\{\pi_g\}_{g\in G}$, $\pi_g : B_g \to C$, tais que para quaisquer $g, h \in G$, $b \in B_g$ e $c \in B_h$ temos

(i) $\pi_g(b)\pi_h(c) = \pi_{gh}(b\cdot c)$,

(ii) $\pi_g(b)^* = \pi_{g^{-1}}(b^*)$.

Dado um fibrado de Fell $\mathcal{B}$, sempre temos uma $*$-representação canônica em $C_c(\mathcal{B})$. Esta é dada pelos operadores de "inclusão" de B_g em $C_c(\mathcal{B})$, para todo $g \in G$. Em outras palavras, operadores lineares

$$j_g : B_g \to C_c(\mathcal{B})$$

definidos por

$$j_g(b) = b\delta_g$$

O fato de que estes operadores de fato formam uma $*$-representação segue da definição das operações em $C_c(\mathcal{B})$.

Nosso próximo objetivo é considerar a C*-álgebra envolvente, veja [4], de $C_c(\mathcal{B})$ porém, para isto precisamos mostrar que o conjunto formado pelas C*-seminormas[4] de $C_c(\mathcal{B})$ é uniformemente limitado. Para tanto, precisaremos de um lema auxiliar.

Lema 1.4.7. *Dadas uma C*-álgebra A e uma C*-seminorma p de A, temos que $p(a) \leq \|a\|$, para todo a em A, em que $\|.\|$ é a norma que faz de A uma C*-álgebra.*

Demonstração: Defina $N := \{a \in A : p(a) = 0\}$. É rotineiro mostrar que N é um ideal involutivo de A e que a C*-seminorma p induz uma C*-norma sobre A/N por $\tilde{p}(a + N) := p(a)$. Podemos então tomar o completamento de A/N com respeito a esta C*-norma, o que dá origem a uma C*-álgebra a qual chamaremos de B.

Defina agora a função $\varphi : A \to B$ por $\varphi(a) = a + N$. É claro que φ é um $*$-homomorfismo, por construção, e como este é sobre duas C*-álgebras, segue que $p(a) = \tilde{p}(\varphi(a)) \leq \|a\|$. ∎

Nosso próximo resultado nos dá uma limitação para as C*-seminormas de $C_c(\mathcal{B})$.

Proposição 1.4.8. *Seja p uma C*-seminorma de $C_c(\mathcal{B})$. Para cada $y \in C_c(\mathcal{B})$, temos*

$$p(y) = p\left(\sum_{g \in G} y(g)\delta_g\right) \leq \sum_{g \in G} \|y(g)\|.$$

Demonstração: Primeiramente, note que

$$p(j_g(b))^2 = p(j_g(b)^* * j_g(b)) = p(j_{g^{-1}}(b^*) * j_g(b)) = p(j_1(b^*b)).$$

[4]Uma C*-seminorma é uma C*-norma de forma sem o axioma de que $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Se substituirmos g por 1 na equação acima, teremos que $p \circ j_1$ é uma C*-seminorma de B_1. Pelo lema provado acima, temos $p \circ j_1(a) \leq \|a\|$ para todo $a \in B_1$, o que mostra, usando novamente a equação acima, que $p(j_g(b)) \leq \|b\|$ para todo $b \in B_g$.

Dado então $y \in C_c(\mathcal{B})$, escreva $y = \sum_{g \in G} y(g)\delta_g$. Temos que

$$p(y) \leq \sum_{g \in G} p(y(g)\delta_g) = \sum_{g \in G} p(j_g(y(g))) \leq \sum_{g \in G} \|y(g)\|,$$

como queríamos mostrar. ■

Com isso podemos definir a C*-seminorma universal de $C_c(\mathcal{B})$ por

$$\|y\|_u := \sup\{p(y) : p \text{ é C*-seminorma.}\}.$$

Como mencionado acima, $\|\cdot\|_u$ é, a princípio, apenas uma seminorma e portanto, ainda precisamos quocientar pelo núcleo dela para termos uma norma sobre o espaço quociente.

Defina $\mathcal{N} := \{y \in C_c(\mathcal{B}) : \|y\|_u = 0\}$. Temos que $\mathcal{N}$ é um ideal de $C_c(\mathcal{B})$ e que $\|.\|_u$ induz uma norma sobre $C_c(\mathcal{B})/\mathcal{N}$ ainda denotada por $\|\cdot\|_u$. Definimos a C*-álgebra seccional cheia do fibrado de Fell $\mathcal{B}$ como sendo o completamento $\overline{C_c(\mathcal{B})/\mathcal{N}}^{\|\cdot\|_u}$. A C*-álgebra seccional cheia de $\mathcal{B}$ será denotada por $C^*(\mathcal{B})$. Na verdade, pode-se mostrar que $\|\cdot\|_u$ é uma norma, ou seja, $\mathcal{N} = 0$. Isto segue da existência de um $*$-homomorfismo fiel de $C_c(\mathcal{B})$ em uma C*-álgebra, o qual pode ser construído através da chamada *representação regular* de $\mathcal{B}$; veja [12] para mais detalhes.

Exemplo 1.4.9. No Exemplo 1.4.2 a C*-álgebra seccional cheia do fibrado de Fell acaba sendo degenerada, já que todas as suas seções estão em bijeção com os elementos de A, temos que $C_c(\mathcal{B})$ é $*$-isomorfo a A, o que implica que a C*-álgebra seccional cheia do fibrado é isomorfa a A.

Exemplo 1.4.10. O fibrado de Fell do Exemplo 1.4.3 tem como C*-álgebra seccional cheia a C*-álgebra cheia do grupo G. Isto pode ser visto seguindo a construção que foi feita, já que $C_c(\mathcal{B})$ neste caso é exatamente a álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$. Também, a C*-álgebra cheia do grupo é exatamente a C*-álgebra envolvente da álgebra do grupo, exatamente como no nosso caso. Para o leitor não familiarizado com C*-álgebras de grupo e C*-álgebras envolventes indicamos [4].

Como $\|.\|_u$ é de fato uma norma, existe uma inclusão canônica de $C_c(\mathcal{B})$ em $C^*(\mathcal{B})$. Iremos nos referir à imagem desta inclusão também como $C_c(\mathcal{B})$ por abuso de notação.

Mostraremos agora uma maneira de construir $*$-homomorfismos de $C^*(\mathcal{B})$ a partir de $*$-representações do fibrado de Fell.

Proposição 1.4.11. *Seja $\pi = \{\pi_g\}_{g\in G}$ uma $*$-representação do fibrado de Fell $\mathcal{B}$ em uma C^*-álgebra C. Então existe um único $*$-homomorfismo*

$$\varphi : C^*(\mathcal{B}) \to C,$$

tal que

$$\varphi(j_g(b)) = \pi_g(b), \quad \forall g \in G, \quad \forall b \in B_g.$$

Este φ será chamado da forma integrada de π.

Demonstração: Dada π uma $*$-representação, defina $\varphi_0 : C_c(\mathcal{B}) \to C$ por

$$\varphi_0(y) = \sum_{g\in G} \pi_g(y(g)), \quad \forall y \in C_c(\mathcal{B}).$$

Segue que φ_0 é um $*$-homomorfismo pelo fato de π ser uma $*$-representação. É claro que φ_0 satisfaz $\varphi_0(j_g(b)) = \pi_g(b)$, para todo $g \in G$ e $b \in B_g$.

Defina agora $p(y) = \|\varphi_0(y)\|$. Temos que p é uma C*-seminorma de $C_c(\mathcal{B})$, e por definição, $p(y) \leq \|y\|_u$. Isto mostra que φ_0 é contínua com relação à norma universal, e com isso podemos estender nosso homomorfismo φ_0 para um homomorfismo φ de $C^*(\mathcal{B})$ para C que ainda satisfaz a propriedade requerida. ∎

Observe que, reciprocamente, todo $*$-homomorfismo de $C^*(\mathcal{B})$ dá origem, através da composição com os j_g's, a uma representação de $\mathcal{B}$ e portanto de $C_c(\mathcal{B})$, implicando que há uma bijeção entre representações do fibrado e $*$-homomorfismos da C*-álgebra seccional cheia do mesmo. Mais ainda, se A é uma C*-álgebra e ${\pi_g}_{g\in G}$ é uma representação de $\mathcal{B}$ em A de forma que toda outra representação se fatora por ela, segue que A é isomorfa à $C^*(\mathcal{B})$, caracterizando $C^*(\mathcal{B})$ por esta propriedade universal.

Estudaremos agora fibrados de Fell sobre um semigrupo inverso S. Para um estudo mais aprofundado deste assunto indicamos [10].

Fixe pelo resto desta seção S um semigrupo inverso.

Definição 1.4.12. Um fibrado de Fell sobre S é uma tripla $(\mathcal{B}, \cdot, *)$ em que $\mathcal{B}$ é a união disjunta de uma coleção de espaços de Banach $\{B_s\}_{s\in S}$,

$$\cdot : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \text{ é uma função que chamaremos de produto,}$$

e

$$* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \text{ é uma função que chamaremos de involução,}$$

juntamente com uma coleção de operadores lineares isométricos $j_{t,s} : B_s \to B_t$ sempre que $s \leq t$, de forma que, para todo $s, t, u \in S$ e $b, c \in \mathcal{B}$, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $B_s \cdot B_t \subseteq B_{st}$.

(ii) O produto é bilinear quando restrito a $B_s \times B_t$.

(iii) O produto é associativo.

(iv) $\|b \cdot c\| \leq \|b\| \|c\|$.

(v) $(B_s)^* \subseteq B_{s^{-1}}$.

(vi) A involução é conjugado-linear quando restrita a B_s.

(vii) $(b \cdot c)^* = c^* \cdot b^*$.

(viii) $(b^*)^* = b$.

(ix) $\|b^*\| = \|b\|$.

(x) $\|b^* \cdot b\| = \|b\|^2$.

(xi) $b^* \cdot b \geq 0$.

(xii) Se $s \leq t \leq u$, então $j_{u,s} = j_{u,t} \circ j_{t,s}$.

(xiii) Se $s \leq t$ e $u \leq v$, então $j_{t,s}(b) \cdot j_{v,u}(c) = j_{tv,su}(b \cdot c)$.

(xiv) Se $s \leq t$, então $j_{t,s}(b)^* = j_{t^{-1},s^{-1}}(b^*)$.

Se para todo $s, t \in S$ o produto $B_s \cdot B_t = B_{st}$, diremos que o fibrado é saturado.

Iremos nos referir a um fibrado de Fell sobre um semigrupo inverso S por $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in S}$.

Observe que para todo $e \in E(S)$, B_e é uma C*-álgebra com o produto e involução induzidas do fibrado. Isto explica o item (xi) da definição acima. Além disto, os itens $(xiii), (xiv)$ fazem sentido já que $s \leq t$ e $u \leq v$ implicam que $s^{-1} \leq t^{-1}$ e $su \leq tv$.

Se $s \leq t$, então $j_{t,s}$ identifica, isometricamente, B_s como um subespaço de B_t e as operações são preservadas por causa dos itens $(xiii)$ e (xiv) da definição acima.

Veremos agora uma proposição mostrando como os operadores lineares isométricos $j_{t,s}$, com $s, t \in S$, se comportam em casos particulares.

Proposição 1.4.13. *Seja $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s\in S}$ um fibrado de Fell. As seguintes propriedades são válidas:*

1. *Se $s \in S$, então $j_{s,s} = id_{B_s}$.*
2. *Se $e, f \in E(S)$, e $e \leq f$, então $j_{f,e}(B_e)$ é um ideal bilateral fechado de B_f.*

Demonstração: Primeiro note que $j_{s,s} \circ j_{s,s} = j_{s,s}$, por (xii), e como $j_{s,s}$ é isométrico, e portanto injetor, segue que este é inversível quando correstrito à sua imagem. Assim, compondo a equação acima à esquerda com esta inversa, segue que $j_{s,s} = id_{B_s}$.

Para a segunda parte, sejam $b \in B_e$ e $c \in B_f$. Temos, usando o lema anterior,

$$j_{f,e}(b) \cdot c = j_{ff,ef}(b \cdot c) = j_{f,e}(b \cdot c) \in j_{f,e}(B_e),$$

donde segue que $j_{f,e}(B_e)$ é um ideal à direita de B_f. Similarmente, mostra-se que este é um ideal à esquerda. Por fim, como $j_{f,e}$ é uma isometria, sua imagem é fechada, concluindo a demonstração. ■

Vamos mostrar a seguir uma equivalência para um dos itens da definição de fibrados de Fell sobre semigrupos inversos.

Lema 1.4.14. *Seja $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s\in S}$ uma coleção de espaços de Banach satisfazendo todos os itens da Definição* 1.4.12 *com exceção, possivelmente, do item $(xiii)$. São equivalentes:*

1. *O item $(xiii)$ é válido.*
2. *Para todo $s, t, u \in S$ com $s \leq t$, $j_{t,s}(b) \cdot c = j_{tu,su}(b \cdot c)$ para $b \in B_s$ e $c \in B_u$.*
3. *Para todo $s, t, u \in S$ com $s \leq t$, $b \cdot j_{t,s}(c) = j_{ut,us}(b \cdot c)$ para $b \in B_u$ e $c \in B_s$.*

Demonstração: É claro que (1) implica (2) e (3). Além disso, dados $s, t, u \in S$ com $s \leq t$, temos que $us \leq ut$ e portanto, usando os itens $(viii)$ e (xiv) da Definição 1.4.12, (2) e (3) são equivalentes. Basta então mostrar que assumindo que (2) é verdadeiro, e portanto também (3), (1) também é verdadeiro. Para isto, note que (1) é equivalente a dizer que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} B_s \times B_u \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "j_{t,s} \times j_{v,u}"'] & B_{su} \arrow[d, "j_{tv,su}"] \\ B_t \times B_v \arrow[r, "\cdot"'] & B_{tv}. \end{tikzcd}$$

Caracterizando (2) e (3) como diagramas comutativos, temos

$$\begin{tikzcd} B_s \times B_u \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "j_{t,s} \times id"'] & B_{su} \arrow[d, "j_{tu,su}"] \\ B_t \times B_u \arrow[r, "\cdot"'] & B_{tu} \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} B_t \times B_u \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "id \times j_{v,u}"'] & B_{tu} \arrow[d, "j_{tv,tu}"] \\ B_t \times B_v \arrow[r, "\cdot"'] & B_{tv}, \end{tikzcd}$$

respectivamente.

Colando os dois diagramas, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} B_s \times B_u \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "j_{t,s} \times id"'] & B_{su} \arrow[d, "j_{tu,su}"] \\ B_t \times B_u \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "id \times j_{v,u}"'] & B_{tu} \arrow[d, "j_{tv,tu}"] \\ B_t \times B_v \arrow[r, "\cdot"'] & B_{tv}. \end{tikzcd}$$

Além disso, como $(id \times j_{v,u}) \circ (j_{t,s} \times id) = j_{t,s} \times j_{v,u}$ e $j_{tv,tu} \circ j_{tu,su} = j_{tv,su}$ pelo item (xii), donde segue que o diagrama comutativo acima é igual ao diagrama que caracteriza (1), como queríamos demonstrar. ∎

Existe uma construção análoga à feita no caso de grupos, para a C*-álgebra seccional cheia de um fibrado de Fell sobre um semigrupo inverso, denotada por $C^*(\mathcal{B})$, como pode ser visto em [10].

Capítulo 2

Módulos de Hilbert

2.1 Definições

Para um estudo mais aprofundado deste assunto indicamos [14] ou [19]. Fixe por este capítulo A uma C*-álgebra.

Definição 2.1.1. Um espaço vetorial $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$ é chamado um *A-módulo (à direita) com produto interno* se temos um mapa bilinear de $\mathcal{H} \times A$ para $\mathcal{H}$, $(x,a) \mapsto xa$ e um mapa de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ para A, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$, de forma que dados $x,y,z \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $a \in A$, temos

1. $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x,y \rangle + \beta \langle x,z \rangle$,
2. $\langle x, ya \rangle = \langle x,y \rangle a$,
3. $\langle y,x \rangle = \langle x,y \rangle^*$,
4. $\langle x,x \rangle \geq 0$,
5. $\langle x,x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

O mapa bilinear $\mathcal{H} \times A \to \mathcal{H}$ é chamado a ação de A sobre $\mathcal{H}$ (à direita). O mapa $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to A$ é chamado o produto interno (à direita) de $\mathcal{H}$.

Observações:

1) As condições (1) e (3) implicam que o produto interno é conjugado linear na primeira variável.

2) As condições (2) e (3) implicam que

$$\langle xa, y \rangle = a^* \langle x,y \rangle.$$

Segue que $\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle := \overline{span}\{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathcal{H}\}$ é um ideal (fechado) de A. Apesar disso, note que este não precisa ser todo A. Quando for o caso, diremos que $\mathcal{H}$ é um A-módulo (à direita) com produto interno cheio.

3) A condição (4) deve ser entendida como um elemento positivo da C*-álgebra A.

4) A condição (5) implica que se $x \in \mathcal{H}$ é tal que $\langle x, y \rangle = 0$, para todo $y \in \mathcal{H}$, então $x = 0$.

4) Se a condição (5) for retirada, dizemos que $\mathcal{H}$ é um A-módulo com semiproduto interno.

Exemplo 2.1.2. Um espaço vetorial complexo com produto interno pode ser visto como um $\mathbb{C}$-módulo com produto interno se convencionando que o produto é linear na segunda variável.

Exemplo 2.1.3. Uma C*-álgebra A é um A-módulo com produto interno com a ação de A como sendo a multiplicação e o produto interno definido por:

$$\langle a, b \rangle = a^* b.$$

Neste caso, todas as condições se verificam diretamente, por exemplo a condição (5):

$$\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a^* a = 0 \Leftrightarrow \|a^* a\| = 0 \Leftrightarrow \|a\|^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Note que a fórmula

$$\|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$$

define uma função de um A-módulo com produto interno $\mathcal{H}$ para $\mathbb{R}$. Esta função usa a norma de A para associar um escalar positivo para cada elemento do módulo. Se levarmos em conta o último exemplo de A como um A-módulo com produto interno, temos que esta função nos dá a norma de x, e portanto esta define uma norma no módulo. Veremos a seguir que este é o caso para qualquer módulo com produto interno, porém para isso, precisamos mostrar um lema que nos dá um resultado análogo à desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 2.1.4. *Seja $\mathcal{H}$ um A-módulo com semiproduto interno. Dados $x, y \in \mathcal{H}$, temos*

$$\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle \leq \|\langle x, x \rangle\| \langle y, y \rangle,$$

como elementos da C-álgebra A.*

Demonstração: Claramente o resultado é verdadeiro para $x = 0$. Se $x \neq 0$ podemos supor que $\|\langle x, x \rangle\| = 1$, pois podemos substituir x por

$\frac{x}{\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}}$. Dados $a \in A$ e $x, y \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle xa - y, xa - y\rangle = \\ &= \langle xa, xa\rangle + \langle y, y\rangle - \langle xa, y\rangle - \langle y, xa\rangle = \\ &= a^*\langle x, x\rangle a + \langle y, y\rangle - a^*\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle a \leq \\ &\leq a^* a + \langle y, y\rangle - a^*\langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle a, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do fato de que para qualquer elemento positivo c de uma C*-álgebra vale a seguinte desigualdade:

$$a^* ca \leq \|c\| a^* a.$$

As outras igualdades seguem das condições impostas ao A-módulo com produto semiproduto interno. Substituindo então $a = \langle x, y\rangle$ temos o resultado. ■

Proposição 2.1.5. *Dado $\mathcal{H}$ um A-módulo com produto interno, temos que a função dada por $x \mapsto \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}$ é uma norma.*

Demonstração: É claro que esta função associa a cada $x \in \mathcal{H}$ um escalar positivo de $\mathbb{R}$, e a condição (6) da definição de módulos com produtos internos implica que esta função é positiva definida.

Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathcal{H}$, temos

$$\|\langle \lambda x, \lambda x\rangle\| = \|\overline{\lambda}\lambda\langle x, x\rangle\| = |\lambda|^2\|\langle x, x\rangle\|.$$

Por fim, dados $x, y \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} \|\langle x + y, x + y\rangle\| &\leq \|\langle x, x\rangle\| + \|\langle y, y\rangle\| + 2\|\langle x, y\rangle\| \leq \\ &\leq \|\langle x, x\rangle\| + \|\langle y, y\rangle\| + 2(\|\langle x, x\rangle\|\|\langle y, y\rangle\|)^{1/2} = \\ &= (\|\langle x, x\rangle\|^{1/2} + \|\langle y, y\rangle\|^{1/2})^2, \end{aligned}$$

provando que a função é de fato uma norma. ■

O próximo lema nos dá uma outra maneira de calcular a norma de um elemento.

Lema 2.1.6. *Seja $\mathcal{H}$ um A-módulo com produto interno. Então $\|x\| = \sup\{\|\langle x, y\rangle\| : y \in \mathcal{H}$ e $\|y\| = 1\}$.*

Demonstração: Podemos supor que $x \neq 0$, pois caso contrário o resultado é claro.

O lema 2.1.4 nos diz que

$$\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|,$$

e logo, segue que $\sup\{\|\langle x,y\rangle\| : y \in \mathcal{H} \text{ e } \|y\| = 1\} \leq \|x\|$.

Por outro lado note que $\frac{x}{\|x\|}$ tem norma 1 e

$$\|\langle x, \frac{x}{\|x\|}\rangle\| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|.$$

■

Definição 2.1.7. Um A-módulo com produto interno $\mathcal{H}$ é chamado um A-módulo de Hilbert se é completo com relação à norma definida acima.

Ambos os exemplos dados anteriormente também são módulos de Hilbert. Dado um A-módulo com produto interno, podemos completá-lo para formar um A-módulo de Hilbert, veja ([14]: pag.4).

Fixe a partir de agora um A-módulo de Hilbert $\mathcal{H}$.

Proposição 2.1.8. *O produto interno de um módulo de Hilbert é contínuo.*

Demonstração: Seja $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}\times\mathcal{H}$ uma sequência convergindo para $(x,y) \subset \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, e como a sequência é convergente, temos em particular que $\|x_n\| \leq L$, para algum $L > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\|\langle x,y\rangle - \langle x_n,y_n\rangle\| &\leq \|\langle x,y\rangle\langle x_n,y\rangle\| + \|\langle x_n,y\rangle - \langle x_n,y_n\rangle\| = \\
&= \|\langle x - x_n, y\rangle\| + \|\langle x_n, y - y_n\rangle\| \leq \\
&\leq \|x - x_n\|^{1/2}\|y\|^{1/2} + L^{1/2}\|y - y_n\|^{1/2},
\end{aligned}$$

o que implica na convergência e, portanto, na continuidade do produto interno. ■

Já vimos que $\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle$ é um ideal de A. Mostraremos que uma unidade aproximada para esse ideal também "serve" como uma unidade aproximada para $\mathcal{H}$.

Proposição 2.1.9. *Seja $\{e_i\}_i \subset \langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle$ uma unidade aproximada para $\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle$. Temos que $xe_i \to x$, para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Demonstração: O resultado segue da seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\|\langle x - xe_i, x - xe_i\rangle\| &= \|\langle x,x\rangle - \langle xe_i,x\rangle - \langle x,xe_i\rangle + \langle xe_i,xe_i\rangle\| = \\
&= \|\langle x,x\rangle - e_i\langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle e_i + e_i\langle x,x\rangle e_i\| \leq \\
&\leq \|\langle x,x\rangle - e_i\langle x,x\rangle\| + \|e_i\langle x,x\rangle - \langle x,x\rangle\|\|e_i\|.
\end{aligned}$$

■

Em particular, isto mostra que $\mathcal{H}\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle$ é denso em $\mathcal{H}$. Observe que $\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle$ pode ser um ideal próprio de A, por exemplo se $\mathcal{H} = 0$, este ideal é nulo. Veremos a seguir mais exemplos deste fenômeno.

Exemplo 2.1.10. Seja $I \lhd A$ um ideal. Então I pode ser visto como um A-módulo de Hilbert. A ação de A em I é dada pela multiplicação e está bem definida pois I é um ideal. O produto interno é dado por

$$\langle a, b\rangle = a^* b,$$

em que $a, b \in I$.

Isto nos dá uma classe grande de exemplos, a qual usaremos mais a frente neste trabalho.

Vamos agora tratar de somas diretas de módulos de Hilbert.

Considere $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ uma família de A-módulos de Hilbert. Defina $\bigoplus_{i\in I}^{alg}\mathcal{H}_i$ a soma direta de $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ como espaços vetoriais. Defina a ação de A sobre $\bigoplus_{i\in I}^{alg}\mathcal{H}_i$ por $\{x_i\}_{i\in I}a = \{x_i a\}_{i\in I}$. Para o produto interno, defina $\langle\cdot,\cdot\rangle : \bigoplus_{i\in I}^{alg}\mathcal{H}_i \times \bigoplus_{i\in I}^{alg}\mathcal{H}_i \to A$ por $(\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}) \mapsto \sum_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle$. Observe que apenas uma quantidade de termos finita da soma acima é não nula e portanto está bem definida. As condições $1, 2, 3$ e 4 da definição 2.1.1 seguem diretamente das mesmas propriedades para cada $\mathcal{H}_i$. A condição 5 segue do fato de que a soma de elementos positivos em uma C*-álgebra também é positivo e a ultima condição segue do fato de que se uma soma de elementos positivos em uma C*-álgebra é 0, então cada elemento é igual a 0.

Com isso, $\bigoplus_{i\in I}^{alg}\mathcal{H}_i$ é um A-módulo com produto intero. Completando este temos um A-módulo de Hilbert, ao qual denotaremos por $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i$. Caso a família de A-módulos de Hilbert seja finita, com digamos n módulos, escrevemos esta soma como $\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{H}_n$ e neste caso a soma algébrica já é automaticamente completa. Para mais detalhes neste assunto, veja ([14]: pag.6).

Exemplo 2.1.11. Seja A uma C*-álgebra. Vendo A como um A-módulo de Hilbert, podemos tomar 2 cópias de A e fazer a soma direta como acima. Disso, vamos ter um A-módulo de Hilbert $A^2 := A \oplus A$. Similarmente, se $\mathcal{H}$ é um A-módulo de Hilbert, então $\bigoplus_{k=1}^{n}\mathcal{H}_k$, em que cada $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}$, será denotado por $\mathcal{H}^n$.

Exemplo 2.1.12. Como no outro exemplo, seja A uma C*-álgebra vista como A-módulo de Hilbert. Podemos tomar $\mathbb{N}$ cópias de A e fazer a soma direta como anteriormente. Denotaremos por A^∞ esta soma direta.

2.2 Operadores adjuntáveis

Nosso próximo objetivo é estudar funções entre módulos de Hilbert. Geralmente quando estudamos funções entre objetos de uma categoria, procuramos pela condição de que seus morfismos preservem as propriedades desses objetos. No nosso caso, isso implicaria que nossas funções precisariam ser A-lineares e contínuas. Além disso, quando estudamos espaços de Hilbert, vemos que grande parte dos resultados está ligado a uma função ser *adjuntável*, no sentido de que se h e k pertencem a espaços de Hilbert X e Y, respectivamente, e f é uma função de X para Y, então

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle,$$

em que f^* é uma outra função de Y para X, chamada de adjunto de f.

Podemos definir de maneira análoga o que seria uma função ser adjuntável no caso de módulos de Hilbert, ou seja, se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ são módulos de Hilbert e f é uma função de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{K}$, então

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle,$$

para $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{K}$ e alguma função f^* de $\mathcal{K}$ para $\mathcal{H}$. Segue que se uma função é adjuntável, então todas as propriedades que precisamos são preservadas, como veremos a seguir.

Proposição 2.2.1. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ dois A-módulos de Hilbert e $f : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ uma função adjuntável. Então f é A-linear e contínua.*

Demonstração: Para a A-linearidade, sejam $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{K}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $a \in A$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle f(x_1 a + \lambda x_2), y\rangle &= \langle x_1 a + \lambda x_2, f^*(y)\rangle = \\
&= a^*\langle x_1, f^*(y)\rangle + \overline{\lambda}\langle x_2, f^*(y)\rangle = \\
&= a^*\langle f(x_1), y\rangle + \overline{\lambda}\langle f(x_2), y\rangle = \\
&= \langle f(x_1)a + \lambda f(x_2), y\rangle.
\end{aligned}$$

Para a continuidade usaremos o teorema do gráfico fechado. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ uma sequência convergente para $x \in \mathcal{H}$ de forma que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $y \in \mathcal{K}$. Vamos mostrar que $y = f(x)$.

Temos

$$\begin{aligned}\langle y, z\rangle &= \langle\lim_n f(x_n), z\rangle = \\ &= \lim_n\langle f(x_n), z\rangle = \\ &= \lim_n\langle x_n, f^*(z)\rangle = \\ &= \langle x, f^*(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle,\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathcal{K}$. ∎

O conjunto de todos os operadores adjuntáveis entre dois módulos de Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ será denotado por $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ dois A-módulos de Hilbert. Dada f uma função A-linear, dizemos que f é uma isometria se $\|f(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$. É claro que toda isometria é limitada. Em particular, se $f \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ é tal que $f^* \circ f = Id_{\mathcal{H}}$, então

$$\|f(x)\|^2 = \|\langle f(x), f(x)\rangle\| = \|\langle f^* f(x), x\rangle\| = \|\langle x, x\rangle\| = \|x\|^2,$$

e logo f é uma isometria. Veremos adiante que mesmo f sendo uma isometria, f não precisa ser adjuntável.

Um isomorfismo entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ é um operador $f \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ inversível, de forma que $f^{-1} \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

Proposição 2.2.2. *Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ dois A-módulos de Hilbert. Então $L(\mathcal{H}^n, \mathcal{K}^m)$ pode ser identificado com matrizes $m \times n$ em que os coeficientes estão em $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

Demonstração: Dados $f_{i,j} \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $i = \{1, \ldots, m\}$, $j = \{1, \ldots, n\}$, defina

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{m,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Se $(x_1, \ldots x_n) \in \mathcal{H}^n$, então

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{m,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{m,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n f_{1,k}(x_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n f_{m,k}(x_k) \end{pmatrix}.$$

Disso, para $(y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{K}^m$, temos

$$
\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right\rangle &= \\
= \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n f_{1,k}(x_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n f_{m,k}(x_k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right\rangle &= \\
= \left\langle \begin{pmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m f_{k,1}^*(y_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m f_{k,n}^*(y_k) \end{pmatrix} \right\rangle &= \\
= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{1,1}^* & f_{2,1}^* & \dots & f_{m,1}^* \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{1,n}^* & f_{2,n}^* & \dots & f_{m,n}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right\rangle&,
\end{aligned}
$$

E logo $\left(\begin{smallmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{m,1} & f_{n,2} & \dots & f_{m,n} \end{smallmatrix}\right)$ é adjuntável e

$$
\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{m,1} & f_{n,2} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} f_{1,1}^* & f_{2,1}^* & \dots & f_{m,1}^* \\ \vdots & \vdots & & \\ f_{1,n}^* & f_{2,n}^* & \dots & f_{m,n}^* \end{pmatrix}.
$$

Por outro lado, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, considere o mapa $p_j : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$, isto é, a projeção na j-ésima coordenada de $\mathcal{H}^n$. Temos

$$
\langle p_j((x_1, \dots, x_n), y\rangle = \langle x_j, y\rangle = \sum_{k=1}^n \langle x_k, \iota_j(y)\rangle,
$$

em que $\iota_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^n$, $y \mapsto (0, \dots, \underbrace{y}_{j}, \dots, 0)$ é a função inclusão na j-ésima coordenada. Com isso, p_j é adjuntável para cada j e seu adjunto é ι_j. Similarmente, temos as projeções q_i nas coordenadas de $\mathcal{K}^m$. Daí, dado $f \in L(\mathcal{H}^n, \mathcal{K}^m)$, defina a matriz em que a entrada (i,j) é igual a $q_i f \iota_j$. Note que esta matriz é $m \times n$ e dado $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$, temos

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_1 f \iota_1 & q_1 f \iota_2 & \dots & q_1 f \iota_n \\ \vdots & \vdots & & \\ q_m f \iota_1 & q_m f \iota_2 & \dots & q_m f \iota_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n q_1 f \iota_k(x_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n q_m f \iota_k(x_k) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} q_1 f(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ q_m f(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \\
&= f(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}
$$

Logo, f é representada pela matriz $\begin{pmatrix} q_1 f \iota_1 & q_1 f \iota_2 & \dots & q_1 f \iota_n \\ \vdots & \vdots & & \\ q_m f \iota_1 & q_m f \iota_2 & \dots & q_m f \iota_n \end{pmatrix}$. ■

Lembre que no caso de espaços de Hilbert, os operadores adjuntáveis coincidem com os operadores limitados. Isto não acontece aqui, temos operadores limitados, mesmo isometrias, que não são adjuntáveis.

Exemplo 2.2.3. Sejam X um espaço compacto Hausdorff sem pontos isolados e $\{y\} = Y \subset X$. Considere $\mathcal{H} = A = C(X)$ e $\mathcal{K} = \{f \in A : f(Y) = 0\}$, ou seja o ideal das funções contínuas que se anulam em Y. Considere $i : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ a função inclusão. Esta função é claramente uma isometria, porém não adjuntável. De fato, seja 1 a função constante igual a 1 em $\mathcal{H}$. Temos, para todo $f \in \mathcal{K}$,

$$\langle i(f), 1 \rangle = i(f)^* 1 = f^*$$

e

$$\langle f, i^*(1) \rangle = f^* i^*(1).$$

Isto implica que para i ser adjuntável, $i^*(1)$ precisa ser a função constante igual a 1 em todo o conjunto $X \backslash Y$, o que implica que $i^*(1) = 1$ já que as funções são contínuas. Porém, $1 \notin \mathcal{K}$ e logo i^* não pode existir.

O mesmo exemplo acima serve para mostrar outra diferença fundamental entre espaços de Hilbert e módulos de Hilbert. É sabido que em um espaço de Hilbert X, um subespaço fechado Y é sempre complementável, no sentido de que se definirmos $Y^\perp := \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in Y\}$, então $X = Y \oplus Y^\perp$. Este não é o caso com módulos de Hilbert.

Dados um módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ e um submódulo fechado de $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, defina $\mathcal{K}^\perp := \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{K}\}$.

Usando o mesmo exemplo anterior, note que $\mathcal{K}$ é um submódulo fechado de $\mathcal{H}$, e que $\mathcal{K}^\perp = \{0\}$, já que Y tem complementar denso em X. Logo, $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp = \mathcal{K} \neq \mathcal{H}$.

Lema 2.2.4. *Dados $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ A-módulos de Hilbert e $f \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $g \in L(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. Então $g \circ f \in L(\mathcal{H}, \mathcal{L})$.*

Demonstração: Sejam $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{L}$. Temos

$$\langle g \circ f(x), y \rangle = \langle f(x), g^*(y) \rangle = \langle x, f^* \circ g^*(y) \rangle.$$

Donde $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. ■

Com isso, $L(\mathcal{H}) := L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ é uma $\star$-álgebra, já que a proposição anterior mostra que a composição está bem definida como a multiplicação da nossa álgebra, e a involução é dada pela adjunção, dado que se $f \in L(\mathcal{H})$, então $f^* \in L(\mathcal{H})$, já que $(f^*)^* = f$.

Nosso próximo objetivo é ver que $L(\mathcal{H})$ é uma C*-álgebra. A norma dada em $L(\mathcal{H})$ é a norma de operador ou seja, dado $f \in L(\mathcal{H})$,

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

Segue que $\|f(x)\| \leq \|f\|\|x\|$.

Lembre que se $h : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathcal{A}$ é uma aplicação sesquilinear, definimos sua norma por

$$\|h\| = \sup_{x,y\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|h(x,y)\|}{\|x\|\|y\|}.$$

Segue que $\|h(x,y)\| \leq \|h\|\|x\|\|y\|$.

Se $f \in L(\mathcal{H})$, então $h : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{A}$, definida por $h(x,y) = \langle f(x), y\rangle$ é uma forma sesquilinear. Mais ainda, usando o Lema 2.1.4, temos

$$\|h(x,y)\| \leq \|f(x)\|\|y\| \leq \|f\|\|x\|\|y\|,$$

implicando que $\|h\| \leq \|f\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|h\| &= \sup_{x,y\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|h(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} \geq \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|h(x,f(x))\|}{\|x\|\|f(x)\|} = \\
&= \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|\langle f(x), f(x)\rangle\|}{\|x\|\|f(x)\|} = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|f\|,
\end{aligned}$$

o que implica que $\|f\| = \|h\|$. Como f é adjuntável, segue que $\langle x, f^*(y)\rangle = h(x,y)$ e com isso temos, seguindo os mesmos passos do que foi feito acima, que $\|f\| = \|h\| = \|f^*\|$. Portanto $L(\mathcal{H})$ é uma $*$-álgebra normada.

Acima acabamos mostrando que $\|f\| = \sup_{x,y\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|\langle f(x),y\rangle\|}{\|x\|\|y\|}$.

Proposição 2.2.5. *$L(\mathcal{H})$ é uma C*-álgebra.*

Demonstração: Note que $L(\mathcal{H})$ é fechado no espaço $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ de todos os operadores lineares limitados $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, o qual é um espaço de Banach ver ([16]: 2.10-2). De fato, dada uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(\mathcal{H})$ convergindo para $f \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$, temos,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle \lim_n f_n(x), y\rangle = \lim_n \langle f_n(x), y\rangle = \lim_n \langle x, f_n^*(y)\rangle.$$

Primeiro vamos mostrar que $\lim_n f_n^*(y)$ existe. Temos

$$\|f_n^*(y) - f_m^*(y)\| = \|(f_n^* - f_m^*)(y)\| \leq \|f_n^* - f_m^*\|\|(y)\| = \|f_n - f_m\|\|y\|,$$

implicando que $\{f_n^*(y)\}_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$, e portanto convergente.

Com isto, podemos definir uma função $f^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $y \mapsto \lim_n f_n^*(y)$. Pelas contas feitas acima, temos que esta função é adjuntável e seu adjunto é igual a f, portanto $f \in L(\mathcal{H})$.

Para a C*-identidade, dado $f \in L(\mathcal{H})$, temos

$$\begin{aligned} \|f^* f\| &= \sup_{x,y \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|\langle f^* f(x), y\rangle\|}{\|x\|\|y\|} = \\ &= \sup_{x,y \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|\langle f(x), f(y)\rangle\|}{\|x\|\|y\|} \geq \\ &\geq \sup_{x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|\langle f(x), f(x)\rangle\|}{\|x\|\|x\|} = \\ &= \sup_{x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos $\|f^* f(x)\| \leq \|f^*\|\|f\|\|x\| = \|f\|^2\|x\|$, e portanto

$$\|f^* f\| = \sup_{x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|f^* f(x)\|}{\|x\|} \leq \|f\|^2.$$

■

Já vimos que uma isometria na C*-álgebra $L(\mathcal{H})$ é uma isometria como definimos no início desta seção. Similarmente, podemos definir operadores unitários como sendo os unitários de $L(\mathcal{H})$. No caso geral, em que temos dois módulos de Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$, dizemos que $f \in L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ é unitário se f é inversível e $f^* = f^{-1}$. Estes operadores estabelecem uma noção de isomorfismo entre módulos de Hilbert, o qual chamamos de *equivalência unitária*, que será importante no decorrer deste trabalho. Entretanto, observe que nem todo isomorfismo entre módulos de Hilbert é unitário. De fato, observe que $\mathbb{C}$ é um espaço de Hilbert, e logo um $\mathbb{C}$-módulo de Hilbert e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definido por $x \mapsto 2x$ é um isomorfismo entre espaços de Hilbert. Este é autoadjunto, porém f^{-1} é o morfismo definido por $x \mapsto \frac{x}{2}$, donde segue que $f = f^* \neq f^{-1}$.

Em espaços de Hilbert sabemos que uma isometria f é um unitário se, e somente se, f é sobrejetor. Este resultado se mantém no caso de módulos de Hilbert, ou seja, uma isometria sobrejetiva A-linear $f\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ é automaticamente adjuntável com $f^* = f^{-1}$ ([14]: Theo. 3.5). Observe que aqui estamos tratando f como uma isometria no sentido de função, ou seja, que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo x em $\mathcal{H}$, que em princípio é diferente de dizer que f é uma isometria na C*-álgebra

$L(\mathcal{H})$, que significa dizer que $f^* \circ f = id$, porém o início da demonstração do teorema citado acima em [14] mostra que estes conceitos são iguais. Além disto, como a imagem de uma isometria é sempre fechada, uma isometria é sobrejetiva se, e somente se, ela tem imagem densa.

Vamos estudar agora os elementos positivos da C*-álgebra $L(\mathcal{H})$.

Lema 2.2.6. *Seja $\mathcal{H}$ um A-módulo de Hilbert. Dado $f \in L(\mathcal{H})$, $f \geq 0$, temos*

$$\|f\| = \sup\{\|\langle f(x), x\rangle\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\}.$$

Mais ainda, se f é um operador linear de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{H}$, temos que f é um elemento positivo de $L(\mathcal{H})$ se, e somente se, $\langle f(x), x\rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demonstração: Se f é positivo, então existe um elemento $g \in L(\mathcal{H})$ de forma que $f = g^* g$. Disso,

$$\|\langle f(x), x\rangle\| = \|\langle g(x), g(x)\rangle\| = \|g(x)\|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sup\{\|\langle f(x), x\rangle\| : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} = \\ = \sup\{\|g(x)\|^2 : x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} = \\ = \|g\|^2 = \|g^* g\| = \|f\|. \end{aligned}$$

Para a segunda parte, considere $f \geq 0$ em $L(\mathcal{H})$. Então $f = g^* g$ para algum $g \in L(\mathcal{H})$. Disto,

$$\langle f(x), x\rangle = \langle g^* g(x), x\rangle = \langle g(x), g(x)\rangle \geq 0,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$.

Por outro lado, se $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ então em particular,

$$\langle f(x), x\rangle = \langle f(x), x\rangle^* = \langle x, f(x)\rangle.$$

A identidade de polarização nos dá:

$$4\langle x, f(y)\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x + i^k y, f(x + i^k y)\rangle,$$

implicando que $f = f^*$.

Com isto, lembre que podemos escrever f como a diferença de dois positivos, digamos $g, h \in L(\mathcal{H})$, de forma que $f = g - h$ e $gh = hg = 0$. Disto,

$$0 \leq \langle f(h(x)), h(x)\rangle = \langle -h^2(x), h(x)\rangle = \langle -h^3(x), x\rangle,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$, o que implica que $-h^3$ é positivo. Por outro lado, como h é positivo, segue que h^3 também o é e portanto $h^3 = 0$ donde $h = 0$. Disto, $f = g$ e portanto f é positivo. ∎

As similaridades do estudo de módulos de Hilbert com o estudo de espaços de Hilbert é grande, apesar disso, algumas diferenças são notórias, como o fato dos operadores limitados não serem necessariamente adjuntáveis em um módulo de Hilbert. Em espaços de Hilbert podemos falar de operadores compactos, que são operadores que levam conjuntos limitados em conjuntos pré-compactos. É conhecido que se X é um espaço de Hilbert, para $x, y \in X$, os operadores da forma $\theta_{x,y} : X \to X$ definidos por $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle$ formam um subconjunto cujo span é denso no conjunto dos operadores compactos[1] ([18]: 2.4.5) ou ([19]: 1.1).

Podemos considerar o mesmo tipo de operadores para o caso de módulos de Hilbert. Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ são A-módulos de Hilbert, com $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$, defina $\theta_{x,y} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ por $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle$.

Proposição 2.2.7. *Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{L}$ A-módulos de Hilbert. Dados $x, w \in \mathcal{H}$, $y, z \in \mathcal{K}$, $f \in L(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ e $g \in L(\mathcal{L}, \mathcal{K})$, temos*

1. $\theta_{x,y} \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ *e* $\theta^*_{x,y} = \theta_{y,x}$.

2. $\theta_{x,y} \circ \theta_{z,w} = \theta_{x\langle y,z\rangle,w} = \theta_{x,w\langle z,y\rangle}$.

3. $f \circ \theta_{x,y} = \theta_{f(x),y}$.

4. $\theta_{x,y} \circ g = \theta_{x,g^*(y)}$.

Demonstração:

1. Dados $h \in \mathcal{H}$ e $k \in \mathcal{K}$, temos

$$\langle \theta_{x,y}(k), h\rangle = \langle x\langle y, k\rangle, h\rangle = \langle k, y\rangle\langle x, h\rangle = \langle k, y\langle x, h\rangle\rangle = \langle k, \theta_{y,x}h\rangle,$$

   e portanto $\theta^*_{x,y} = \theta_{y,x}$ e $\theta_{x,y} \in L(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

2. Dado $h \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} \theta_{x,y} \circ \theta_{z,w}(h) &= \theta_{x,y}(z\langle w, h\rangle) = \\ &= x\langle y, z\langle w, h\rangle\rangle = \\ &= x\langle y, z\rangle\langle w, h\rangle = \theta_{x\langle y,z\rangle,w}(h). \end{aligned}$$

[1] Aqui estamos considerando que o produto interno num espaço de Hilbert é linear na segunda variável.

Por outro lado,

$$x\langle y,z\rangle\langle w,h\rangle = x\langle w\langle z,y\rangle ,h\rangle = \theta_{x,w\langle z,y\rangle}(h),$$

logo $\theta_{x,y}\circ\theta_{z,w} = \theta_{x\langle y,z\rangle ,w} = \theta_{x,w\langle z,y\rangle}$.

3. Dado $k \in \mathcal{K}$, temos

$$f\circ\theta_{x,y}(k) = f(x\langle y,k\rangle) = f(x)\langle y,k\rangle = \theta_{f(x),y}(k).$$

4. Dado $l \in \mathcal{L}$, temos

$$\theta_{x,y}\circ g(l) = x\langle y,g(l)\rangle = x\langle g^*(y),l\rangle = \theta_{x,g^*(y)}(l).$$

■

Denotaremos por $K(\mathcal{K},\mathcal{H})$ o fecho do span linear dos operadores $\theta_{x,y}$ como acima. Esta última proposição nos diz, em particular, que $K(\mathcal{H})$ é um ideal da C*-álgebra $L(\mathcal{H})$. $K(\mathcal{H})$ é chamado o *ideal dos operadores compactos* de $\mathcal{H}$. Apesar disso, note que os elementos de $K(\mathcal{H})$ não precisam ser operadores compactos quando considerados como operadores entre espaços de Banach. Por exemplo, se considerarmos A uma C*-álgebra unital de dimensão infinita como A-módulo de Hilbert, temos que $\theta_{1,1} = id$, e portanto o operador identidade está em $K(A)$, apesar de não ser compacto no sentido de operadores entre espaços de Banach, já que A tem dimensão infinita ([16]: pg.80). Observe que isto implica também que neste caso, $K(A) = L(A)$.

Proposição 2.2.8. *Seja A uma C*-álgebra qualquer. Temos que A é isomorfa a $K(A)$.*

Demonstração: Defina $\varphi : A \to L(A)$ por $\varphi(a)b = ab$. Dados $a,b,c \in A$, temos

$$\langle\varphi(a)b,c\rangle = b^*a^*c = \langle b,a^*c\rangle = \langle b,\varphi(a^*)c\rangle,$$

provando que φ está bem definida e que $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$. Mais ainda, dado $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi(a+\lambda b)c = (a+\lambda b)c = ac+\lambda bc = \varphi(a)c+\lambda\varphi(b)c$$

e

$$\varphi(ab)c = abc = \varphi(a)\varphi(b)c,$$

donde segue que φ é um $*$-homomorfismo.

Dado $a \in \ker(\varphi)$, temos $\varphi(a)b = 0$ para todo $b \in A$. Em particular,

$$\varphi(a)a^* = aa^* = 0,$$

donde segue que $a = 0$ e portanto φ é injetor. Usando a Proposição 1.2.25, temos que φ é isométrico.

Por fim, usando unidades aproximadas, temos que o conjunto $A^2 = \{ab : a, b \in A\}$ é denso em A. Além disso, $\varphi(ab^*) = \theta_{a,b}$, donde segue que a imagem de φ é igual a $K(A)$, provando o resultado. ■

Proposição 2.2.9. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ A-módulos de Hilbert. Então $K(\mathcal{H}^n, \mathcal{K}^m)$ pode ser identificado com matrizes $m \times n$ em que os coeficientes estão em $K(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.*

Demonstração: Primeiro note que dados $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^n$ e $(y_1, \ldots y_m) \in \mathcal{K}^m$, temos, para quaisquer $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{H}^m$ e $i = \{1, \ldots, m\}$,

$$\theta_{y_i,(x_1,\ldots,x_n)}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^{n} \theta_{y_i,x_k}(z_k),$$

e além disto,

$$\begin{aligned} \theta_{(y_1,\ldots y_m),(x_1,\ldots,x_n)}(z_1, \ldots, z_m) &= \\ = (y_1, \ldots y_m)\langle (x_1, \ldots, x_n), (z_1, \ldots, z_m)\rangle &= \\ = (y_1, \ldots y_m)(\sum_{k=1}^{n} \langle x_k, z_k\rangle) &= \\ = (\theta_{y_1,(x_1,\ldots,x_n)}(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \theta_{y_m,(x_1,\ldots,x_n)}(z_1, \ldots, z_n)). \end{aligned}$$

Logo $\theta_{(y_1,\ldots y_m),(x_1,\ldots,x_n)}$ é composto por somas de operadores de $\mathcal{K}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Mais ainda, note que

$$\theta_{(y_1,\ldots y_m),(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{pmatrix} \theta_{y_1,x_1} & \theta_{y_1,x_2} & \ldots & \theta_{y_1,x_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \theta_{y_m,x_1} & \theta_{y_m,x_2} & \ldots & \theta_{y_m,x_n} \end{pmatrix},$$

e portanto matrizes com valores em $K(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ são[2] operadores de $K(\mathcal{H}^n, \mathcal{K}^m)$. Usando então as Proposições 2.2.2 e 2.2.7 segue o resultado. ■

Lema 2.2.10. *Seja $\mathcal{H}$ um A-módulo de Hilbert. Se $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$, então a matriz cuja entrada (i, j) é o elemento $\langle x_i, x_j\rangle$ é um elemento positivo da C*-álgebra $M_n(A)$.*

[2] Aqui estamos confundindo um operador com a sua matriz associada através da identificação mencionada anteriormente.

Demonstração: Denote a matriz do enunciado por M. Temos que M pertence a $M_n(A)$, ou seja, às matrizes $n \times n$ com valores em A. Usando as Proposições 2.2.8 e 2.2.9, segue que $M_n(A)$ pode ser identificada como $K(A^n)$. Daí, para todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, temos

$$\begin{aligned} \langle a, Ma \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_i, \langle x_i, x_j \rangle a_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i^* \langle x_i, x_j \rangle a_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i a_i, x_j a_j \rangle = \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Usando então o Lema 2.2.6, segue o resultado. ∎

Daqui para frente confundiremos operadores adjuntáveis na soma direta de espaços de Hilbert com matrizes a valores em operadores adjuntáveis nestes espaços.

Definição 2.2.11. Um A-módulo de Hilbert à esquerda é um espaço vetorial $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$ que possui uma aplicação bilinear de $A \times \mathcal{H}$ para $\mathcal{H}$ e um produto interno $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ com valores em A satisfazendo, para $x, y, z \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $a \in A$, as seguintes condições:

1. $\langle\!\langle \alpha x + \beta y, z \rangle\!\rangle = \alpha \langle\!\langle x, z \rangle\!\rangle + \beta \langle\!\langle y, z \rangle\!\rangle$,
2. $\langle\!\langle ax, y \rangle\!\rangle = a \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle$.
3. $\langle\!\langle y, x \rangle\!\rangle = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle^*$,
4. $\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle \geq 0$,
5. $\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$,

e que é completo com relação à norma $\|x\| := \|\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle\|^{1/2}$.

Quando não for especificado a lateralidade do módulo de Hilbert que estejamos falando, sempre se assumirá que é à direita.

Proposição 2.2.12. *Se $\mathcal{H}$ é um A-módulo de Hilbert então $\mathcal{H}$ é um $K(\mathcal{H})$-módulo de Hilbert cheio à esquerda, em que a ação de $K(\mathcal{H})$ sobre $\mathcal{H}$ é dada por $Tx = T(x)$ e o produto interno é dado por $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle = \theta_{x,y}$, em que $T \in K(\mathcal{H})$ e $x, y \in \mathcal{H}$. Mais ainda, as normas $\|x\|_A = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$ e $\|x\|_{K(\mathcal{H})} = \|\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle\|^{1/2}$ são iguais.*

Demonstração: A condição de bilinearidade da ação à esquerda é verificada, pois operadores compactos são lineares. Dados $x, y, z, w \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $T \in K(\mathcal{H})$, temos

$$
\begin{aligned}
(1) \quad \langle\!\langle \alpha x + \beta y, z \rangle\!\rangle(w) &= \theta_{\alpha x + \beta y, z}(w) = \\
&= (\alpha x + \beta y)\langle z, w\rangle = \\
&= \alpha x\langle z, w\rangle + \beta y\langle z, w\rangle = \\
&= (\alpha\theta_{x,y} + \beta\theta_{y,z})(w) = \\
&= (\alpha\langle\!\langle x, z\rangle\!\rangle + \beta\langle\!\langle y, z\rangle\!\rangle)(z).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) \quad \langle\!\langle T(x), y\rangle\!\rangle(w) &= \theta_{T(x),y}(w) = \\
&= T(x)\langle y, w\rangle = \\
&= T(x\langle y, w\rangle) = T\theta_{x,y}(w).
\end{aligned}
$$

$$
(3) \quad \langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle^* = \theta_{x,y}^* = \theta_{y,x} = \langle\!\langle y, x\rangle\!\rangle.
$$

$$
(4) \quad \langle \langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle(y), y\rangle = \langle \theta_{x,x}(y), y\rangle = \langle x\langle x, y\rangle, y\rangle = \langle y, x\rangle\langle x, y\rangle \geq 0,
$$

para todo $y \in \mathcal{H}$, implicando, pelo Lema 2, que $\langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle \geq 0$.

Agora, se $\langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle = 0$, então para todo $y \in \mathcal{H}$, $\langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle(y) = 0$ e logo, usando a mesma conta feita acima, temos que

$$
0 = \|\langle \langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle(y), y\rangle\| = \|\langle y, x\rangle\langle x, y\rangle\| = \|\langle x, y\rangle\|^2
$$

e logo $\langle x, y\rangle = 0$, o que implica $x = 0$.

Por fim para ver a igualdade de normas, usando novamente o calculo feito para provar (5), temos

$$
\|\langle \langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle(y), y\rangle\| = \|\langle x, y\rangle\|^2.
$$

Usando então os Lemas 2.1.6 e 2.2.6 segue que $\|x\|_{K(\mathcal{H})}^2 = \|\langle\!\langle x, x\rangle\!\rangle\| = \|x\|_A^2$. ■

Nosso próximo objetivo é provar alguns resultados técnicos, que facilitam muito nosso trabalho daqui pra frente. Vamos provar um resultado similar ao teorema da fatoração de Cohen-Hewitt, dando uma forma explícita para a fatoração, mas para isso vamos mostrar um lema antes.

Considere $\mathcal{H}$ um A-módulo de Hilbert. Dado $x \in \mathcal{H}$, defina $D_x : \mathcal{H} \to A$ por $D_x(y) = \langle x, y\rangle$ e $L_x : A \to \mathcal{H}$ por $L_x(a) = xa$.

Lema 2.2.13. *Nas condições acima, $D_x \in K(\mathcal{H}, A)$, para todo $x \in \mathcal{H}$, $D_x^* = L_x$, $L_x \in K(A, \mathcal{H})$, o mapa $D : \mathcal{H} \to K(\mathcal{H}, A)$ definido por $D(x) = D_x$ é isométrico, conjugado linear e sobrejetor e o mapa $L : \mathcal{H} \to K(A, \mathcal{H})$ é isométrico, linear e sobrejetor.*

Demonstração: Primeiro, note que

$$\langle D_x(y), a\rangle = \langle\langle x, y\rangle, a\rangle = \langle x, y\rangle^* a = \langle y, x\rangle a = \langle y, xa\rangle = \langle y, L_x(a)\rangle,$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$ e $a \in A$. Com isso, $D_x \in L(\mathcal{H}, A)$ e $L_x \in L(A, \mathcal{H})$, com $D_x^* = L_x$.

Para ver que D é isométrico[3] lembre que

$$\|D_x\| = \sup_{y \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|D_x(y)\|}{\|y\|} = \sup_{y \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|\langle x, y\rangle\|}{\|y\|} \leq \sup_{y \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \|x\|.$$

Por outro lado, se $y = x$, segue que $\frac{\|\langle x,x\rangle\|}{\|x\|} = \|x\|$.

Com isto, a imagem de D é fechada. É claro que D é conjugado linear, já que o produto interno é conjugado linear na primeira coordenada. Como D é contínuo e *span*$\mathcal{H}A$ é denso em $\mathcal{H}$, basta verificar que $D_x \in K(\mathcal{H}, A)$ para elementos da forma $x = ya$. Porém, para estes elementos,

$$D_{ya}(z) = \langle ya, z\rangle = a^*\langle y, z\rangle = \theta_{a^*,y}(z).$$

Isto também mostra que a imagem de D contém todos os compactos da forma $\theta_{a,x}$ e portanto, como sua imagem é fechada, D é sobrejetor.

Para L usamos que $L_x = D_x^*$ e assim, usando o que já foi feito, segue o resultado. ■

Proposição 2.2.14. *Seja $\mathcal{H}$ um A-módulo de Hilbert. Para cada $x \in \mathcal{H}$ existe um $y \in \mathcal{H}$ de forma que $x = y\langle y, y\rangle$.*

Demonstração: Primeiro note que se $f \in K(\mathcal{H}, A)$, $g \in K(A, \mathcal{H})$, $h \in K(\mathcal{H})$ e $a \in A$, temos

$$\begin{pmatrix} a & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + f(x) \\ g(b) + h(x) \end{pmatrix},$$

que é um operador no A-módulo de Hilbert $A \oplus \mathcal{H}$. Como na Proposição 2.2.2, verifica-se que

$$\begin{pmatrix} a & f \\ g & h \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a^* & g^* \\ f^* & h^* \end{pmatrix}.$$

[3]Aqui estamos, temporariamente, considerando que D seja um mapa de $\mathcal{H}$ para $L(\mathcal{H}, A)$, já que ainda não sabemos que sua imagem cai nos compactos.

Usando a Proposição 2.2.9 temos $\left(\begin{smallmatrix} a & f \\ g & h \end{smallmatrix}\right) \in K(A \oplus \mathcal{H})$.

Dado $x \in \mathcal{H}$, temos, pelo lema anterior, que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right) \in K(A \oplus \mathcal{H})$ é auto-adjunto. Além disso,

$$\begin{pmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{pmatrix}$$

Mais ainda, se $k \in K(A \oplus \mathcal{H})$, então sua forma matricial é dada por

$$\begin{pmatrix} p_1 k \iota_1 & p_1 k \iota_2 \\ p_2 k \iota_1 & p_2 k \iota_2 \end{pmatrix},$$

como vimos na Proposição 2.2.2, lembrando que neste caso $p_i = q_i$. Se $k = k^*$ e se k anti-comuta com $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ então k é da forma $\left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right)$, para algum $x \in \mathcal{H}$. De fato,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 k \iota_1 & p_1 k \iota_2 \\ p_2 k \iota_1 & p_2 k \iota_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 k \iota_1 & p_1 k \iota_2 \\ -p_2 k \iota_1 & -p_2 k \iota_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} p_1 k \iota_1 & p_1 k \iota_2 \\ p_2 k \iota_1 & p_2 k \iota_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 k \iota_1 & -p_1 k \iota_2 \\ p_2 k \iota_1 & -p_2 k \iota_2 \end{pmatrix},$$

logo $p_1 k \iota_1 = p_2 k \iota_2 = 0$ e $(p_1 k \iota_2)^* = p_2 k \iota_1$. Daí, pelo Lema 2.2.13, segue que existe um $x \in \mathcal{H}$ de forma que $D_x = p_1 k \iota_2$ e $L_x = p_2 k \iota_1$.

Considere a função l definida por $x \mapsto x^{1/3}$. Usando o cálculo funcional da C*-álgebra $K(A \oplus \mathcal{H})$ para o elemento $\left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right)$, temos que, como $\left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right)$ anti-comuta com $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, então $l(\left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right))$ também anti-comuta com $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Disto, $l(\left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & D_y \\ L_y & 0 \end{smallmatrix}\right)$, para algum $y \in \mathcal{H}$. Agora, como $g(\left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right))^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{smallmatrix}\right)$, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & D_y \\ L_y & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & D_y L_y D_y \\ L_y D_y L_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ L_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Disto, para todo $a \in \mathcal{A}$,

$$xa = L_x(a) = L_y D_y L_y(a) = L_y D_y(ya) = L_y(\langle y, ya \rangle) = y\langle y, y \rangle a$$

e portanto $x = y\langle y, y \rangle$. ■

Note que isto já nos dá que todo elemento x de $\mathcal{H}$ pode ser escrito como $y\langle y, y \rangle$ para algum y em $\mathcal{H}$. Isto é uma manifestação do Teorema de Fatorização de Cohen-Hewitt, que trata de A-módulos de Banach, que são um pouco mais gerais que módulos de Hilbert. Este teorema ainda vale no contexto mais geral de álgebras de Banach com unidade aproximada. Abaixo iremos dar uma demonstração alternativa deste resultado quando A é uma C*-álgebra, usando a teoria de módulos de Hilbert já desenvolvida.

Definição 2.2.15. Um A-módulo de Banach (à esquerda) é um espaço de Banach X com uma ação à esquerda de A em X, de forma que $\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$, para todo $a \in A$ e $x \in X$. Tal espaço é dito não degenerado se $span\{ax : a \in A, x \in X\}$ é denso em X.

O fato de um A-módulo de Banach (à esquerda) ser não degenerado é equivalente a dizer que se $\{e_i\}_i$ é uma unidade aproximada para A então $e_i x \to x$, para todo $x \in X$.

Proposição 2.2.16. *Sejam A uma C*-álgebra e X um A-módulo de Banach não degenerado. Então todo elemento de X é da forma ax, para algum $a \in A$ e $x \in X$.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Como $e_i x \to x$, em que $\{e_i\}_i$ é uma unidade aproximada para A, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $a \in A$ de forma que $\|a\| \leq 1$ e $\|x - ax\| \leq \varepsilon$.

Vamos construir duas sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ de forma que $\|a_n\| \leq 1$, para todo n e $\|x_n\| \leq 2^{-2n}$. Seja $x_0 = x$. Tome a_0 de forma que $\|a_0\| \leq 1$ e $\|x_0 - a_0 x_0\| \leq 2^{-2}$. Defina $x_1 = x_0 - a_0 x_0$. Indutivamente, tome a_n de forma que $\|a_n\| \leq 1$ e $\|x_n - a_n x_n\| \leq 2^{-2(n+1)}$. Defina $x_{n+1} = x_n - a_n x_n$.

Agora, lembre que no Exemplo 2.1.12 vimos que A^∞ é um A módulo de Hilbert. Nosso objetivo é fazer com que nossa sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esteja em A^∞. Para tanto, primeiro note que, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\| \sum_{k=0}^{N} a_k^* a_k \| \leq \sum_{k=0}^{N} \|a_k\|^2,$$

e assim, segue que $\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2$.

Para conseguirmos isto, vamos renormalizar as sequências $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, para que elas continuem tendo propriedades similares e para que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, renormalizada, esteja em A^∞. Defina $b_n := 2^{-n} a_n$ e $y_n := 2^n x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso, $\|b_n\| \leq 2^{-n}$ e $\|y_n\| \leq 2^{-n}$. Note então que $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in A^\infty$, já que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$$

e que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n y_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - x_{n+1},$$

que é uma série telescópica, que se for convergente, seu limite será $x = x_0$. Porém, como para cada $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=0}^{N} x_n - x_{n+1} = x_0 - x_N$$

e

$$\|x_N\| \leq 2^{-2N},$$

donde $\sum_{n=0}^{\infty} b_n y_n = x$.

Usando agora a Proposição 2.2.14, temos que, para $b := \{b_n\}_n \in A^\infty$, existe um $c \in A^\infty$, de forma que $b^* = c\langle c, c\rangle$, em que $b^* = \{b_n^*\} \in A^\infty$. Daí, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n^* y_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|c_n\| \|y_n\| \leq \|c\| \sum_{n=0}^{\infty} \|y_n\| \leq \|c\| \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2\|c\|,$$

segue que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^* y_n$ converge absolutamente, e portanto converge para um elemento $y \in \mathcal{H}$. Defina $a := \langle c, c\rangle$. Temos

$$\begin{aligned} ay &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle c, c\rangle (c_n^* y_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \langle c, c\rangle)^* y_n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n y_n = x, \end{aligned}$$

provando o resultado. ■

Para finalizar esta seção vamos falar sobre outra topologia usada em operadores sobre módulos de Hilbert, além da topologia da norma. No caso de operadores entre espaços de Hilbert, temos a topologia forte, a qual está associada à convergência pontual de operadores. Aqui vamos tratar de uma topologia similar a esta, levando em conta a adjunção dos operadores sobre módulos de Hilbert. A topologia estrita sobre $L(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ é a topologia induzida pelas seminormas

$$f \mapsto \|f(x)\|, \quad \text{e} \quad f \mapsto \|f^*(y)\|,$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$.

Proposição 2.2.17. *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ são módulos de Hilbert. Então $K(\mathcal{H},\mathcal{K})$ é estritamente denso em $L(\mathcal{H},\mathcal{K})$.*

Demonstração: Vamos mostrar que se $\{e_i\}_i \subset K(\mathcal{H})$ é uma unidade aproximada, então $e_i(x) \to x$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Como cada e_i é contínuo e $\mathcal{H}\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle$ é denso em $\mathcal{H}$, basta mostrar isto para elementos de $\mathcal{H}$ da forma $x\langle y,z\rangle$, em que $x,y,z \in \mathcal{H}$.

Disto, temos

$$\|e_i(x\langle y,z\rangle) - x\langle y,z\rangle\| = \|e_i\theta_{x,y}(z) - \theta_{x,y}(z)\| \to 0,$$

lembrando que $\theta_{x,y} \in K(\mathcal{H})$.

Com isto, mostraremos que dado $f \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $\{f \circ e_i\}_i$ converge estritamente para f.

A desigualdade

$$\|(f \circ e_i - f)(x)\| = \|f(e_i(x)) - f(x)\| \le \|f\|\|e_i(x) - x\|$$

implica que $f \circ e_i(x) \to f(x)$. Para o outro lado, como $f^*(y) \in \mathcal{H}$, segue que $e_i(f^*(y)) \to f^*(y)$. ■

2.3 Representações e a álgebra dos multiplicadores

Definição 2.3.1. Sejam A, B C*-álgebras e $\mathcal{H}$ um B-módulo de Hilbert. Uma representação de A em $\mathcal{H}$ é um $*$-homomorfismo $\pi : A \to L(\mathcal{H})$. Dizemos que a representação é não degenerada se $\pi(A)(\mathcal{H}) := \{\pi(a)(x) : a \in A \text{ e } x \in \mathcal{H}\}$ é denso em $\mathcal{H}$. A representação é *fiel* se o $*$-homomorfismo é injetivo.

Exemplo 2.3.2. Seja A uma C*-álgebra. Considere A como um A-módulo de Hilbert. Defina $\pi : A \to L(A)$ por $\pi(a)(b) = ab$, em que $a, b \in A$. É claro que π está bem definida e é um $*$-homomorfismo. Mais ainda, pelo uso de unidades aproximadas, segue que π é não degenerada. Além disso, π é injetivo. O leitor atento deve ter percebido que esta aplicação é a mesma do isomorfismo criado entre A e $K(A)$. Isto não é um caso isolado, veremos adiante que existe uma classe de módulos de Hilbert em que há um isomorfismo entre a C*-álgebra a ser representada e o ideal dos compactos do módulo de Hilbert.

Definição 2.3.3. Sejam A, B C*-álgebras, $\mathcal{H}$ um B-módulo de Hilbert e π uma representação de A em $\mathcal{H}$. Definimos o idealizador de A em $L(\mathcal{H})$ por

$$\mathcal{ID}(A) := \{f \in L(\mathcal{H}) : f\pi(a) \in \pi(A) \text{ e } \pi(a)f \in \pi(A), \text{ para todo } a \in A\}.$$

Lema 2.3.4. *Sejam A, B C*-álgebras, $\mathcal{H}$ um B-módulo de Hilbert e π uma representação fiel de A em $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{ID}(A)$ é uma $*$-subálgebra fechada e unital de $L(\mathcal{H})$ que contém $\pi(A)$ como um ideal.*

Demonstração: Usando que A é uma C*-álgebra, e portanto fechada por somas, multiplicação por escalar, produto e involução, segue que $\mathcal{ID}(A)$ é uma $*$-subálgebra de $L(\mathcal{H})$. Mais ainda, como $id\pi(a) = \pi(a)id = \pi(a) \in A$, segue que $id \in \mathcal{ID}(A)$, e portanto $\mathcal{ID}(A)$ é unital.

Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{ID}(A)$ é uma sequência convergindo para $f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, então $f\pi(a) = \lim_n f_n\pi(a) \in \pi(A)$, já que $\pi(A)$ é fechado em $L(\mathcal{H})$. Similarmente, $\pi(a)f \in \pi(A)$, e logo $\mathcal{ID}(A)$ é fechado. Por fim, é claro que $\pi(A)$ é um ideal em $\mathcal{ID}(A)$ por definição. ■

Lema 2.3.5. *Sejam A, B C*-álgebras, I um ideal de A, $\mathcal{H}$ um B-módulo de Hilbert e π uma representação não degenerada de I em $\mathcal{H}$. Então existe uma única representação $\tilde{\pi}$ de A para $\mathcal{H}$ estendendo π, que será também não degenerada. Se A é unital, então $\tilde{\pi}$ é unital. Além disso, $\tilde{\pi}(A) \subset \mathcal{ID}(I)$. Mais ainda, se π é fiel e $I^\perp := \{a \in A : ab = 0, \forall b \in I\}$, então $\ker(\tilde{\pi}) = I^\perp$.*

Demonstração: Primeiro note que $\mathcal{H}$ é um I-módulo de Banach à esquerda, com a ação de I dada por π, ou seja, dados $n \in I$ e $x \in \mathcal{H}$, temos que $n \cdot x = \pi(n)x$. Como a representação é não degenerada, segue pela Proposição 2.2.16 que todo elemento de $\mathcal{H}$ é escrito da forma $\pi(n)x$ para algum $n \in I$ e $x \in \mathcal{H}$. Usando isto, defina $\tilde{\pi} : A \to L(\mathcal{H})$ por $\tilde{\pi}(a)$ como sendo a função $\pi(n)x \mapsto \pi(an)x$. Note que a expressão faz sentido, já que I é um ideal de A.

Vamos mostrar que esta função está bem definida. Seja $\pi(n)x = \pi(m)y \in \mathcal{H}$ quaisquer. Considere também $\{e_i\}_i \subset I$ uma unidade aproximada para I. Temos

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(a)\pi(n)x &= \pi(an)x = \\
&= \lim_i \pi(ae_in)x = \\
&= \lim_i \pi(ae_i)\pi(n)x = \\
&= \lim_i \pi(ae_i)\pi(m)y = \tilde{\pi}(a)\pi(m)y.
\end{aligned}$$

Nosso próximo passo é ver que $\tilde{\pi}$ é um $*$-homomorfismo. É claro que $\tilde{\pi}$ é linear, por definição de soma e multiplicação por escalar de operadores. Verificaremos então o produto e a involução. Dados $a, b \in A$, $n, m \in I$ e $x, y \in \mathcal{H}$, temos

$$\tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)\pi(n)x = \tilde{\pi}(a)\pi(bn)x = \pi(abn)x = \tilde{\pi}(ab)\pi(n)x,$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\pi}(a^*)\pi(n)x,\pi(m)y\rangle &= \langle\pi(a^*n)x,\pi(m)y\rangle = \\
&= \langle x,\pi(a^*n)^*\pi(m)y\rangle = \\
&= \langle x,\pi(n^*am)y\rangle = \\
&= \langle\pi(n)x,\pi(am)y\rangle = \langle\pi(n)x,\tilde{\pi}(a)\pi(m)y\rangle,
\end{aligned}$$

provando que $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)$ e $\tilde{\pi}(a)^* = \tilde{\pi}(a^*)$ e, consequentemente, que $\tilde{\pi}$ é uma representação de A em $L(\mathcal{H})$.

Suponha agora que σ seja outra representação de A em $L(\mathcal{H})$ que estenda π. Então

$$\sigma(a)\pi(n)x = \sigma(a)\sigma(n)x = \sigma(an)x = \pi(an)x = \tilde{\pi}(a)\pi(n)x,$$

e logo $\sigma(a) = \tilde{\pi}(a)$ para todo $a \in A$, já que π é não degenerada.

Como π é não degenerada, é claro que $\tilde{\pi}$ também o é. Se A é unital e 1 denota a unidade de A, então

$$\tilde{\pi}(1)\pi(n)x = \pi(1n)x = \pi(n)x.$$

Vamos mostrar agora que $\tilde{\pi}(A) \subset \mathcal{ID}(I)$. Sejam $a \in A$, $n,m \in I$ e $x \in \mathcal{H}$, temos

$$\pi(n)\tilde{\pi}(a)\pi(m)x = \pi(n)\pi(am)x = \pi(nam)x = \pi(na)\pi(m)x$$

e

$$\tilde{\pi}(a)\pi(n)\pi(m)x = \pi(an)\pi(m)x,$$

provando que $\pi(n)\tilde{\pi}(a) = \pi(na)$ e que $\tilde{\pi}(a)\pi(n) = \pi(an)$, e consequentemente a afirmação.

Suponha agora que π seja fiel. Então o $*$-homomorfismo π é injetivo. Considere então $a \in \ker(\tilde{\pi})$. Temos, pelo conta feita acima, que $\pi(an) = 0$, para todo $n \in I$, e logo $an = 0$, para todo $n \in I$, provando que $a \in I^\perp$. A outra continência é direta. ∎

O lema acima mostra, em particular, que se π é injetor, então $\tilde{\pi}$ é injetor se, e somente se, I é um ideal essencial de A, ou seja, $I^\perp = 0$.

Dada uma C*-álgebra A podemos agora mostrar a existência da álgebra dos multiplicadores $M(A)$ de A. Lembrando que a álgebra dos multiplicadores de A é uma C*-álgebra $M(A)$ que contém A como um ideal essencial e que tem a propriedade universal de que se C é qualquer outra C*-álgebra de forma que A é um ideal essencial em C, então existe um único $*$-homomorfismo φ de C para $M(A)$ de forma que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & M(A) \\ & C \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

comuta.

Proposição 2.3.6. *Sejam A, B C*-álgebras e $\mathcal{H}$ um B-módulo de Hilbert. Considere $\pi : A \to L(\mathcal{H})$ uma representação fiel e não degenerada de A. Então $\mathcal{ID}(\pi(A))$ é uma álgebra de multiplicadores de A, em que vemos $A \subset \mathcal{ID}(\pi(A))$ via π.*

Demonstração: O Lema 2.3.4 mostra que $\mathcal{ID}(\pi(A))$ é uma $*$-subálgebra fechada e unital de $L(\mathcal{H})$ que contém $\pi(A)$ como um ideal, e portanto $\mathcal{ID}(\pi(A))$ é uma C*-álgebra. Segue do Lema 2.3.5, usando $I = A$, que A é essencial em $\mathcal{ID}(\pi(A))$ pois π é fiel.

Se C é uma C*-álgebra de forma que A é ideal essencial em A, então o Lema 2.3.5 mostra que existe um único $*$-homomorfismo $\tilde{\pi} : C \to \mathcal{ID}(\pi(A))$ que estende π, donde segue que $\mathcal{ID}(\pi(A))$ é uma álgebra de multiplicadores de A. ■

Denotaremos por $M(A)$ a álgebra de multiplicadores de A. Vimos nesta demonstração que $M(A)$ é unital.

Lembre que podemos ver A como um A-módulo de Hilbert. A Proposição 2.2.8 mostra que A é isomorfa à $K(A)$, e como $K(A)$ é um ideal de $L(A)$, segue que $\mathcal{ID}(A) \cong L(A)$, e portanto $M(A) \cong L(A)$. Vimos também que caso A seja unital, então $K(A)$ é unital e, portanto, $A \cong K(A) = L(A) \cong M(A)$. Mais geralmente se $\mathcal{H}$ é um módulo de Hilbert, então $M(K(\mathcal{H})) \cong L(\mathcal{H})$.

Corolário 2.3.7. *Sejam A e B C*-álgebras, de forma que A é um ideal de B. Então existe um único $*$-homomorfismo $\pi : B \to M(A)$ de forma que π é igual à identidade em A. Mais ainda, π é injetivo se, e somente se, A é essencial em B.*

Demonstração: Segue diretamente do comentário acima e do Lema 2.3.5. ■

Corolário 2.3.8. *Sejam A, B C*-álgebras e $\mathcal{H}$ um B-módulo de Hilbert. Suponha que exista uma representação π não degenerada de A em $\mathcal{H}$, ou seja, um *-homomorfismo não degenerado de A para $L(\mathcal{H})$. Então existe um único *-homomorfismo $\tilde{\pi}$ unital e estritamente contínuo de $M(A)$ para $L(\mathcal{H})$ que estende π.*

Demonstração: A existência e a unicidade seguem do Lema 2.3.5. Basta então mostrar que este $*$-homomorfismo é estritamente contínuo. Seja $\{m_i\}_i \subset M(A)$ uma net convergindo na topologia estrita para m, ou seja, para todo $a \in A$, $m_i a \to ma$ e $am_i \to am$. Vamos mostrar que $\{\tilde{\pi}(m_i)\}_i$ converge estritamente para $\tilde{\pi}(m)$.

Dados $a \in A$ e $x \in \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}\lim_i \tilde{\pi}(m_i)\pi(a)x &= \lim_i \pi(m_i a)x = \\ &= \pi(\lim_i m_i a)x = \\ &= \pi(ma)x = \tilde{\pi}(m)\pi(a)x\end{aligned}$$

e similarmente

$$\lim_i \tilde{\pi}(m_i)^* \pi(a)x = \tilde{\pi}(m)\pi(a)x,$$

provando o resultado. ∎

2.4 Correspondências e produtos tensoriais

Definição 2.4.1. Sejam A, B C*-álgebras. Um B-módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ é chamado uma A-B correspondência se o mesmo é munido de uma representação não degenerada de A em $\mathcal{H}$. Se π é o $*$-homomorfismo associado à representação de A em $\mathcal{H}$, então denotamos a correspondência por $(\mathcal{H}, \pi)$.

Observe que em uma correspondência $(\mathcal{H}, \pi)$ como acima, π induz uma estrutura de A-módulo (de Banach) sobre $\mathcal{H}$ e por esta razão, denotamos $\pi(a)x = a \cdot x = ax$, para $a \in A$ e $x \in \mathcal{H}$.

Exemplo 2.4.2. Sejam A e B C*-álgebras. Considere B como um B-módulo de Hilbert. Suponha que exista um $*$-homomorfismo não degenerado f de A para $M(B)$. Então (B, f) é uma A-B correspondência.

Um morfismo entre duas A-B correspondências $(\mathcal{H}, \pi)$ e $(\mathcal{K}, \sigma)$ é uma função adjuntável $f : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ de forma que $f(ax) = f(\pi(a)x) = \sigma(a)f(x) = af(x)$, para todo $a \in A$ e $x \in \mathcal{H}$.

Um isomorfismo f entre duas correspondências $(\mathcal{H}, \pi)$ e $(\mathcal{K}, \sigma)$ de A para B é chamado unitário se este é unitário com respeito ao produto interno, ou seja, se $f^* = f^{-1}$.

Vamos agora discutir um aspécto técnico sobre a positividade de uma aplicação linear entre duas C*-álgebras. Lembre que, dadas C*-álgebras A e B, uma aplicação linear $t : A \to B$ é chamada positiva se para todo elemento positivo $a \in A$, temos $t(a) \geq 0$ em B.

Considere agora uma aplicação linear $t : A \to B$ qualquer, em que A e B são C*-álgebras. Podemos construir uma aplicação $t^{(n)} : M_n(A) \to M_n(B)$ em que se uma matriz M em $M_n(A)$ é dada por $(a_{i,j})$ na entrada (i,j), que no caso denotaremos por $M = (a_{i,j})_{i,j}$, então $t^{(n)}(M) = (t(a_{i,j}))_{i,j}$. Mesmo que t seja positiva, podemos ter que $t^{(n)}$ não é positiva. Isso inspira a definição de um novo tipo de positividade.

Definição 2.4.3. Uma aplicação linear positiva $t : A \to B$ é chamada completamente positiva se, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $t^{(n)}$ é positivo.

Exemplo 2.4.4. Todo $*$-homomorfismo é completamente positivo. De fato, sejam $t : A \to B$ um $*$-homomorfismo entre C*-álgebras e $n \in \mathbb{N}$. Dado $M \in M_n(A)$ positivo, existe $N \in M_n(A)$ tal que $M = N^*N$. Escreva $N = (a_{ij})_{i,j}$, onde $a_{ij} \in A$ para todo $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Disto, $N^* = (a_{ij}^*)_{j,i}$ e com isso, $N^*N = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* a_{kj})_{i,j}$. Disto,

$$\begin{aligned} t^{(n)}(N^*N) &= (t(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* a_{kj}))_{i,j} = \\ &= (\sum_{k=1}^{n} t(a_{ki})^* t(a_{kj}))_{i,j} = t^{(n)}(N)^* t^{(n)}(N) \geq 0 \end{aligned}$$

e portanto t é completamente positivo.

Nosso próximo passo é construir o produto tensorial interior entre dois módulos de Hilbert. Para isto precisamos de uma função de ligação entre eles. Esta função é o $*$-homomorfismo dado por uma representação, ou seja, um dos módulos de Hilbert precisa ser uma correspondência.

Sejam A e B C*-álgebras. Considere $\mathcal{H}$ um A-módulo de Hilbert e $(\mathcal{K},\pi)$ uma A-B correspondência. Então, em particular, $\mathcal{H}$ é um A módulo e $\mathcal{K}$ é um A-B bimódulo. Daí, podemos tomar o produto tensorial de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{K}$ como módulos. Este será denotado por $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$. Aqui estamos fazendo o produto tensorial de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ como módulos sobre A. Poderíamos também fazer o produto tensorial de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{K}$ como módulos sobre $\mathbb{C}$, o qual denotamos por $\mathcal{H} \otimes^{alg} \mathcal{K}$. Neste caso, precisaríamos "balancear" também a ação de A, o que corresponde a quocientar $\mathcal{H} \otimes^{alg} \mathcal{K}$ pelo subespaço gerado por $\{xa \otimes y - x \otimes ay =$

$xa\otimes y - x\otimes\pi(a)y = 0 : x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$ e $a \in A\}$. Com isso, também teríamos como resultado $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$, donde segue que $xa \otimes y = x \otimes ay = x \otimes \pi(a)y$ em $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$, para todo $x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$ e $a \in A$.

Note que assim, para usarmos a propriedade universal de produtos tensoriais para $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$, precisamos verificar que além da função f ser bilinear, precisamos que ela também seja balanceada sobre A, ou seja, que $f(xa, y) = f(x, ay)$.

Proposição 2.4.5. *Nas condições acima, $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ é um B-módulo com produto interno.*

Demonstração: Vamos definir um semiproduto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$. Fixe $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$. Defina uma função $T^0_{x,y}$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ para B por $(w, z) \mapsto \langle y, \pi(\langle x, w\rangle)z\rangle$. Esta função é claramente bilinear, e além disso,

$$(wa, z) \mapsto \langle y, \pi(\langle x, wa\rangle)z\rangle = \langle y, \pi(\langle x, w\rangle)\pi(a)z\rangle \leftarrow\!\shortmid (w, az)$$

e portanto dá origem a uma função linear $T_{x,y}$ de $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ para B.

Defina agora $T^*_{x,y}(w \otimes z) := T_{x,y}(w \otimes z)^*$. Esta função é conjugado linear de $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ para B. Note que a função $(x, y) \mapsto T^*_{x,y}$ é bilinear. De fato, tome $x, x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, $y, y_1, y_2 \in \mathcal{K}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos

$$\begin{aligned}
T^*_{x_1+\lambda x_2,y}(w \otimes z) &= \langle y, \pi(\langle x_1 + \lambda x_2, w\rangle)z\rangle^* = \\
&= \langle \pi(\langle x_1 + \lambda x_2, w\rangle)z, y\rangle = \\
&= \langle \pi(\langle x_1, w\rangle)z, y\rangle + \lambda\langle \pi(\langle x_2, w)z, y\rangle = \\
&= \langle y, \pi(\langle x_1, w\rangle)z\rangle^* + \lambda\langle y, \pi(\langle x_2, w)z\rangle^* = \\
&= T^*_{x_1,y}(w \otimes z) + \lambda T^*_{x_2,y}(w \otimes z).
\end{aligned}$$

Similarmente, temos que $T^*_{x,y_1+\lambda y_2} = T^*_{x,y_1} + \lambda T^*_{x,y_2}$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
T^*_{xa,y}(w \otimes z) &= \langle y, \pi(\langle xa, w\rangle)z\rangle^* = \\
&= \langle y, \pi(a)^*\pi(\langle x, w\rangle)z\rangle^* = \\
&= \langle \pi(\langle x, w\rangle)z, \pi(a)y\rangle = T^*_{x,ay}(w \otimes z).
\end{aligned}$$

Logo, esta função dá origem a uma função linear $x \otimes y \mapsto T^*_{x,y}$. Com isso, defina $\langle x \otimes y, w \otimes z\rangle := T_{x,y}(w \otimes z)$. Esta função é conjugado-linear na primeira variável e linear na segunda, por construção.

Vamos construir agora a ação de B sobre $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$. Para cada $b \in B$, defina uma função de $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ para $\mathcal{H} \otimes^{alg} \mathcal{K}$ por $(x, y) \mapsto x \otimes (yb)$. Está função é claramente bilinear e A-balanceada e portanto dá origem à uma função de $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ para si mesmo. Vamos mostrar que $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ é um B-módulo com semiproduto interno.

É claro que a condição (1) da Definição 2.1.1 é válida.

A condição (2) foi mostrada na construção do produto interno.

Para a condição (3), sejam $x \otimes y, w \otimes z \in \mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ e $b \in B$. Temos

$$\begin{aligned} \langle x \otimes y, w \otimes (zb) \rangle &= \langle y, \pi(\langle x, w \rangle) zb \rangle = \\ &= \langle y, \pi(\langle x, w \rangle) z \rangle b = \langle x \otimes y, w \otimes z \rangle b. \end{aligned}$$

Na condição (4) temos,

$$\begin{aligned} \langle x \otimes y, w \otimes z \rangle^* &= \langle y, \pi(\langle x, w \rangle) z \rangle^* = \\ &= \langle \pi(\langle x, w \rangle) z, y \rangle = \\ &= \langle z, \pi(\langle x, w \rangle)^* y \rangle = \\ &= \langle z, \pi(\langle w, x \rangle) y \rangle = \langle w \otimes z, x \otimes y \rangle. \end{aligned}$$

Para a condição (5), tome $z = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. Temos

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i \otimes y_i, x_j \otimes y_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i, \pi(\langle x_i, x_j \rangle) y_j \rangle = \\ &= \langle \{y_i\}_{i=1}^n, \pi^{(n)}((\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}) \{y_i\}_{i=1}^n \rangle \end{aligned}$$

Em que estamos vendo a última igualdade em $\mathcal{K}^n$, com $\pi^{(n)}((\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j})$ sendo a matriz cuja entrada (i, j) é igual a $\pi(\langle x_i, x_j \rangle)$. Usando o Lema 2.2.10, segue que a matriz $(\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j}$ é positiva. Além disso, como π é um $*$-homomorfismo segue que este é completamente positivo, $(\pi(\langle x_i, x_j \rangle))_{i,j} \geq 0$ e, pelo Lema 2.2.6, segue que $\langle z, z \rangle \geq 0$.

Com isso, $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ é um B-módulo com semiproduto interno.

Lembre que dado um módulo com semiproduto interno, podemos gerar um módulo com produto interno quocientando pelo núcleo do produto interno, ou seja, pelo subespaço gerado por $N = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, x \rangle = 0\}$. Porém, N é igual ao subespaço gerado pelos elementos da forma $\{xa \otimes y - x \otimes \pi(a) y = 0 : x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K} \text{ e } a \in A\}$, como pode ser visto em [14].

Logo, segue que $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ é um B-módulo com produto interno. ■

Definição 2.4.6. Sejam A e B C*-álgebras. Considere $\mathcal{H}$ um A-módulo de Hilbert e $(\mathcal{K}, \pi)$ uma A-B correspondência. Definimos o produto tensorial (interior) de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{K}$ como sendo o completamento de $\mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K}$ construído acima, denotado por $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K}$.

Caso $\mathcal{H}$ seja uma A-B correspondência com $*$-homomorfismo associado π e $\mathcal{K}$ seja uma B-C correspondência, então o produto tensorial $\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}$ pode ser tornado em uma A-C correspondência, usando o $*$-homomorfismo $\pi \otimes id$ em que para cada $a \in A$, $\pi(a) \otimes id$ é definido por $x \otimes y \mapsto \pi(a)x \otimes y$.

Exemplo 2.4.7. Considere $\mathcal{H}$ uma A-B correspondência. Temos que A é uma A-A correspondência, e B é uma B-B correspondência. Vamos mostrar que $A \otimes_A \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$. Primeiro note que a função $(a, x) \mapsto a \cdot x$ é bilinear e A-balanceada, e portanto dá origem a um operador A-linear φ de $A \otimes_A^{alg} \mathcal{H}$. Dado $z = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in$, temos

$$\begin{aligned}
\langle z, z \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle a_i \otimes x_i, a_j \otimes x_j \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x_i, (a_i^* a_j) \cdot x_j \rangle = \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i, \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \rangle = \langle \varphi(z), \varphi(z) \rangle
\end{aligned}$$

e logo φ é uma isometria. Com isso, podemos estendê-lo para o completamento de $A \otimes_A^{alg} \mathcal{H}$, de maneira isométrica. Por fim, como $\mathcal{H}$ é uma correspondência, em particular é um A-módulo não degenerado e logo a isometria construída acima é sobrejetora, implicando que φ é um unitário e provando o que afirmamos.

Similarmente, temos que $\mathcal{H} \otimes_B B \cong \mathcal{H}$.

Podemos ver o produto tensorial como uma operação dentro das correspondências. Já vimos que o produto tensorial de duas correspondências é novamente uma correspondência. O último exemplo mostrou que as C*-álgebras correspondentes funcionam como "unidades", a menos de isomorfismo, para o produto tensorial. Uma pergunta natural que surge é se esta operação é associativa, novamente a menos de isomorfismo. Isto será mostrado na próxima proposição.

Proposição 2.4.8. *Sejam $\mathcal{H}$ um A módulo de Hilbert, $\mathcal{K}$ uma A-B correspondência e $\mathcal{L}$ uma B-C correspondência. Então existe um unitário $a : (\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K}) \otimes_B \mathcal{L} \to \mathcal{H} \otimes_A (\mathcal{K} \otimes_B \mathcal{L})$.*

Demonstração: Fixe $z \in \mathcal{L}$. Para cada z, a função $(x, y) \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ é bilinear e usando que o produto tensorial sobre A é A-balanceado e que a estrutura de A-C correspondência sobre $\mathcal{K} \otimes_B \mathcal{L}$, temos que esta função também é A-balanceada, donde segue que ela dá origem a uma função linear $\varphi_z : \mathcal{H} \otimes_A^{alg} \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes_A (\mathcal{K} \otimes_B \mathcal{L})$. Dado $w = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, temos

$$
\begin{aligned}
\|\langle \varphi_z(w), \varphi_z(w) \rangle\| &= \|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi_z(x_i \otimes y_i), \varphi_z(x_j \otimes y_j) \rangle\| = \\
&= \|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i \otimes (y_i \otimes z), x_j \otimes (y_j \otimes z) \rangle\| = \\
&= \|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle y_i \otimes z, (\langle x_i, x_j \rangle \cdot y_j) \otimes z \rangle\| = \\
&= \|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle z, \langle y_i, \langle x_i, x_j \rangle \cdot y_j \rangle \cdot z \rangle\| = \\
&= \|\langle z, \langle w, w \rangle \cdot z \rangle\| \le \|\langle w, w \rangle\| \|\langle z, z \rangle\|,
\end{aligned}
$$

donde segue que φ_z é limitada por $\|z\|$. Com isso, para cada $z \in \mathcal{L}$, temos uma função linear $\varphi_z : \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes_A (\mathcal{K} \otimes_B \mathcal{L})$.

Dado $(w, z)(\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K}) \times \mathcal{L}$, temos que a função $(w, z) \mapsto \varphi_z(w)$ é bilinear. Como φ_z é bilinear e contínua, basta verificarmos para tensores elementares $x \otimes y \in \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K}$. Disto,

$$
\begin{aligned}
\varphi_{z_1 + \lambda z_2}(x \otimes y) &= x \otimes (y \otimes (z_1 + \lambda z_2)) = \\
&= x \otimes (y \otimes z_1) + \lambda x \otimes (y \otimes z_2) = \\
&= \varphi_{z_1}(x \otimes y) + \lambda \varphi_{z_2}(x \otimes y).
\end{aligned}
$$

A linearidade na outra variável decorre do fato de que φ_z é linear. Mais ainda, temos

$$
\varphi_z((x \otimes y) \cdot b) = x \otimes (y \cdot b \otimes z) = x \otimes (y \otimes b \cdot z) = \varphi_{b \cdot z}(x \otimes y),
$$

provando que a função também é B-balanceada, e portanto $(w, z) \mapsto \varphi_z(w)$ dá origem a uma função linear

$$
a_0 : (\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K}) \otimes_B^{alg} \mathcal{L} \to \mathcal{H} \otimes_A (\mathcal{K} \otimes_B \mathcal{L}).
$$

Seja agora $s = \sum_{k=1}^n w_k \otimes z_k \in (\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K}) \otimes_B^{alg} \mathcal{L}$, em que

$w_k = \lim_{n_k \to \infty} \sum_{i_k=1}^{n_k} x_{i_k} \otimes y_{i_k}$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\langle a_0(s), a_0(s) \rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \langle a_0(w_k \otimes z_k), a_0(w_l \otimes z_l) \rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \langle \varphi_{z_k}(w_k), \varphi_{z_l}(w_l) \rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \lim_{n_k \to \infty} \lim_{n_l \to \infty} \sum_{i_k=1}^{n_k} \sum_{i_l=1}^{n_l} \langle x_{i_k} \otimes (y_{i_k} \otimes z_k), x_{i_l} \otimes (y_{i_l} \otimes z_l) \rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \lim_{n_k \to \infty} \lim_{n_l \to \infty} \sum_{i_k=1}^{n_k} \sum_{i_l=1}^{n_l} \langle y_{i_k} \otimes z_k, (\langle x_{i_k}, x_{i_l} \rangle \cdot y_{i_l}) \otimes z_l \rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \lim_{n_k \to \infty} \lim_{n_l \to \infty} \sum_{i_k=1}^{n_k} \sum_{i_l=1}^{n_l} \langle z_k, \langle y_{i_k}, \langle x_{i_k}, x_{i_l} \rangle \cdot y_{i_l} \rangle \cdot z_l \rangle = \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \langle z_k, \langle w_k, w_l \rangle \cdot z_l \rangle = \\
&= \langle s, s \rangle,
\end{aligned}$$

provando que a_0 é uma isometria. Além disso, como os tensores elementares de $\mathcal{H} \otimes_A (\mathcal{K} \otimes_B \mathcal{L})$ estão na imagem de a_0, segue que este é sobrejetor e portanto se estende a um unitário $a : (\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{K}) \otimes_B \mathcal{L} \to \mathcal{H} \otimes_A (\mathcal{K} \otimes_B \mathcal{L})$, como se queria demonstrar. ■

Outra pergunta natural que surge é se existem correspondências inversíveis com relação ao produto tensorial, no sentido de que seu produto tensorial seja isomorfo às C*-álgebras correspondentes. Estas correspondências existem e são chamadas de bimódulos de imprimitividade. Porém, antes de entrarmos neste tópico, vamos falar um pouco mais sobre unitários entre correspondências e sua relação com o produto tensorial.

Teorema 2.4.9. *Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ A-módulos de Hilbert e $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ A-B correspondências. Dados unitários $f : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ e $g : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ existe um unitário $f \otimes g$ de $\mathcal{H}_1 \otimes_A \mathcal{K}_1$ para $\mathcal{H}_2 \otimes_A \mathcal{K}_2$ de forma que $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$, para todo $x \otimes y \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$.*

Demonstração: É claro que a função $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$ é bilinear. Além disso, esta função é A-balanceada, já que f é um homomorfismo de A-módulos de Hilbert e g é um homomorfismo de A-B correspondências. Assim, este mapa dá origem a um operador linear $\varphi : \mathcal{H}_1 \otimes_A^{alg} \mathcal{K}_1 \to \mathcal{H}_2 \otimes_A^{alg} \mathcal{K}_2$ definido por $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$.

Dados agora $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in \mathcal{H}_1 \otimes_A^{alg} \mathcal{K}_1$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(z), \varphi(z) \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes g(y_i), \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \otimes g(y_j) \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle f(x_i) \otimes g(y_i), f(x_j) \otimes g(y_j) \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle g(y_i), \langle f(x_i), f(x_j) \rangle g(y_j) \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle g(y_i), \langle x_i, x_j \rangle g(y_j) \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle g(y_i), g(\langle x_i, x_j \rangle y_j) \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle y_i, \langle x_i, x_j \rangle y_j \rangle = \langle z, z \rangle,
\end{aligned}$$

donde segue que φ é isométrico, e portanto se estende a uma isometria

$$f \otimes g : \mathcal{H}_1 \otimes_A \mathcal{K}_1 \to \mathcal{H}_2 \otimes_A \mathcal{K}_2.$$

Por fim, como f e g são unitários, e portanto sobrejetores, temos que os tensores elementares de $\mathcal{H}_2 \otimes_A^{alg} \mathcal{K}_2$ estão na imagem de $f \otimes g$ e portanto $\mathcal{H}_2 \otimes_A^{alg} \mathcal{K}_2$ está na imagem de $f \otimes g$. Como a imagem de uma isometria é fechada, segue que esta é sobrejetora, e portanto um unitário. ∎

Definição 2.4.10. Sejam A e B C*-álgebras. Um *A-B-bimódulo de Hilbert* $\mathcal{H}$ é um A-módulo de Hilbert à esquerda e um B-módulo de Hilbert à direita de forma que

1. $a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b$;
2. $\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle z = x \langle y, z \rangle$;

em que $a \in A$, $b \in B$, $x, y, z \in \mathcal{H}$ e $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotam os produtos internos à esquerda e à direita, respectivamente.

Um bimódulo de Hilbert é chamado um *bimódulo de imprimitividade* se ele é cheio com relação a cada produto interno.

O produto tensorial entre bimódulos de Hilbert dá origem à um novo bimódulo de Hilbert, em que o produto interno à esquerda é dado por $\langle\langle x \otimes y, w \otimes z\rangle\rangle = \langle\langle x \cdot \langle\langle y, z\rangle\rangle, w\rangle\rangle$. Em particular, o produto tensorial entre bimódulos de imprimitividade é novamente um bimódulo de imprimitividade.

Sejam A, B C*-álgebras, $I \lhd A$, $J \lhd B$ ideais e $\mathcal{H}$ um A-B-bimódulo de Hilbert. Podemos produzir um I-J-bimódulo de Hilbert fazendo o produto de $\mathcal{H}$ por I e J respectivamente. Formalmente, considere o conjunto $\mathcal{K} := \overline{span}\{m \cdot x \cdot n : m \in I, x \in \mathcal{H}, n \in J\}$. É claro que $\mathcal{K}$ é invariante pela operação de soma, produto por escalar e produto por I. Segue pela Proposição 2.2.16 que $\mathcal{K} = \{m \cdot x \cdot n : m \in I, x \in \mathcal{H}, n \in J\}$. Com isto, temos

$$\langle m_1 \cdot x_1 \cdot n_1, m_2 \cdot x_2 \cdot n_2\rangle = n_1^*\langle m_1 \cdot x_1, m_2 \cdot x_2\rangle n_2 \in J$$

e similarmente $\langle\langle m_1 \cdot x_1 \cdot n_1, m_2 \cdot x_2 \cdot n_2\rangle\rangle \in I$ para todo $m_1 \cdot x_1 \cdot n_1, m_2 \cdot x_2 \cdot n_2 \in \mathcal{K}$. Isto mostra que os produtos internos também estão bem definidos e portanto $\mathcal{K}$ é um I-J-bimódulo de Hilbert. Denotaremos este bimódulo de Hilbert por $I \cdot \mathcal{H} \cdot J$. Caso $J = B$, denotaremos $\mathcal{K}$ por $I \cdot \mathcal{H}$. Analogamente, adotaremos a notação $\mathcal{H} \cdot J$ para o caso em que $I = A$. Com isto, podemos construir unitários $\varphi : I \otimes_A \mathcal{H} \to I \cdot \mathcal{H}$ e $\psi : \mathcal{H} \otimes_B J \to \mathcal{H} \cdot J$ de maneira análoga feita no Exemplo 2.4.7.

Quando existe um bimódulo de imprimitividade entre duas C*-álgebras, dizemos que elas são *Morita equivalentes*. Uma equivalência de Morita é uma forma mais fraca de isomorfismo entre C*-álgebras, como pode ser visto no próximo exemplo.

Exemplo 2.4.11. Sejam A e B C*-álgebras. Suponha que exista um $*$-isomorfismo $\varphi : A \to B$. Então B é um A-B-bimódulo de imprimitividade. É claro que B é um B-módulo de Hilbert cheio, como no Exemplo 2.4.11. Além disso, podemos tornar B um A-módulo de Hilbert à esquerda com a ação de A sendo $a \cdot x = \varphi(a)b$ e o produto interno $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \varphi^{-1}(xy^*)$, para $a \in A$ e $b, x, y \in B$. Como φ é um isomorfismo, segue que B é cheio à esquerda.

A condição 1 da Definição 2.4.10 segue da associatividade do produto. Para a condição 2, temos

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle z = \varphi(\varphi^{-1}(xy^*))z = xy^*z = x\langle y, z\rangle,$$

provando que B é um A-B-bimódulo de imprimitividade.

Em contrapartida, bimódulos de Hilbert generalizam isomorfismos parciais entre C*-álgebras, como mostraremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.4.12. Sejam A e B C*-álgebras. Dados $I \lhd A$ e $J \lhd B$ ideais, suponha que exista um $*$-isomorfismo $\varphi : I \to J$. Então J é um

A-B-bimódulo de Hilbert. Usando novamente a estrutura de B-módulo de Hilbert como no Exemplo 2.4.11, temos que J é um B módulo de Hilbert.

Seguindo o exemplo anterior, temos um I-B-bimódulo de Hilbert. Porém, como φ é um isomorfismo, segue que φ é não degenerado, e portanto, usando o Lema 2.3.5, temos que φ se estende a um $*$-homomorfismo não degenerado $\tilde{\varphi} : A \to J$. Este $*$-homomorfismo nos dá uma ação de A em J. Além disso, o produto interno é dado por φ^{-1}, como feito anteriormente.

Com isso, J é um A-B-bimódulo de Hilbert.

Nossos esforços para estudar de maneira (bi)categórica as ações de semigrupos inversos vão usar bicategorias com morfismos isomorfos aos definidos no exemplo anterior. Estes bimódulos são chamados de *regulares* e serão o foco de nosso estudo mais adiante.

Exemplo 2.4.13. Lembre que, pela Proposição 2.2.12, um B-módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ cheio é também um $K(\mathcal{H})$-módulo de Hilbert cheio à esquerda. Vamos mostrar que $\mathcal{H}$ é um bimódulo de imprimitividade.

Como os operadores adjuntáveis são B-lineares, segue que a condição 1 da Definição 2.4.10 é satisfeita. Para a segunda condição, tome $x, y, z \in \mathcal{H}$. Temos

$$\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle z = \theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle,$$

donde segue que $\mathcal{H}$ é um $K(\mathcal{H})$-B-bimódulo de imprimitividade.

Similarmente, se $\mathcal{H}$ é um A-módulo de Hilbert cheio à esquerda, então $\mathcal{H}$ é um A-$K(\mathcal{H})$-bimódulo de imprimitividade.

Lema 2.4.14. *Sejam A, B, C C^*-álgebras, $I \triangleleft A$, $J, K \triangleleft B$ e $L \triangleleft C$ ideais de forma que existam *-isomorfismos $\alpha : I \to J$ e $\beta : K \to L$. Se vermos J como um A-B-bimódulo de Hilbert e K como um A-C-bimódulo de Hilbert, então $J \otimes_B L$ é unitariamente isomorfo a M, em que M é o ideal de C dado por $\beta(J \cap K)$ visto como um A-C-bimódulo de Hilbert.*

Demonstração: Defina $\psi_0 : J \times L \to M$ por $(x, y) \mapsto \beta(x\beta^{-1}(y))$. Observe que esta função está bem definida, já que $J \cap K = JK$. Dados $x, x_1, x_2 \in J$, $y, y_1, y_2 \in L$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\psi_0(x_1 + \lambda x_2, y) &= \beta((x_1 + \lambda x_2)\beta^{-1}(y)) = \\
&= \beta(x_1\beta^{-1}(y)) + \lambda\beta(x_2\beta^{-1}(y)) = \\
&= \psi_0(x_1, y) + \lambda\psi_0(x_2, y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\psi_0(x, y_1 + \lambda y_2) &= \beta(x\beta^{-1}(y_1 + \lambda y_2)) = \\ &= \beta(x\beta^{-1}(y_1)) + \lambda\beta(x\beta^{-1}(y_2)) = \\ &= \psi_0(x, y_1) + \lambda\psi_0(x, y_2),\end{aligned}$$

provando que ψ_0 é bilinear. Mais ainda, para $b \in B$,

$$\psi_0(xb, y) = \beta(xb\beta^{-1}(y))$$

e

$$\psi_0(x, by) = \beta(x\beta^{-1}(\tilde{\beta}(b)y)),$$

em que $\tilde{\beta}$ é a extensão de β para B como um $*$-homomorfismo não degenerado.

Observe que como β é um $*$-isomorfismo, $\beta^{-1}(\tilde{\beta}(b)) = i$ para um único $i \in K$. Disto,

$$\beta(x\beta^{-1}(\tilde{\beta}(b)y)) = \beta(x\beta^{-1}(\tilde{\beta}(b))\beta^{-1}(y)) = \beta(xi\beta^{-1}(y)),$$

e como $\beta(i) = \tilde{\beta}(b)$, segue que $\psi_0(xb, y) = \psi_0(x, by)$.

Com isto ψ_0 é bilinear e B-balanceada e portanto induz um operador linear $\psi : J \otimes_B^{alg} L \to M$.

Seja $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in J \otimes_B^{alg} L$. Temos,

$$\begin{aligned}\langle\psi(z), \psi(z)\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\psi(x_i \otimes y_i), \psi(x_j \otimes y_j)\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\beta(x_i\beta^{-1}(y_i)), \beta(x_j\beta^{-1}(y_j))\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \beta(\beta^{-1}(y_i^*)x_i^*x_j\beta^{-1}(y_j)) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} y_i^*\tilde{\beta}(x_i^*x_j)y_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i, \tilde{\beta}(\langle x_i, x_j\rangle)y_j\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i \otimes y_i, x_j \otimes y_j\rangle = \langle z, z\rangle\end{aligned}$$

provando que ψ é isométrica. Usando a Proposição 1.2.24, temos que o conjunto $J_0 := \{jk \in J \cap K : j \in J, k \in K\}$ é denso em $J \cap K$. Disto,

$\beta(J_0)$ é denso em M. Mais ainda, observe que dado $m = \beta(jk) \in \beta(J_0)$, temos

$$\psi(j \otimes \beta(k)) = \beta(j\beta^{-1}(\beta(k))) = \beta(jk) = m,$$

provando que a imagem de ψ é densa e portanto ψ é um unitário, como queríamos provar. ■

Observe que a ação de A em M como acima é dada através do isomorfismo $\gamma : \alpha^{-1}(J \cap K) \to \beta(J \cap K)$, em que $\gamma = \beta \circ \alpha$. Isto é muito similar ao contexto de ações parciais, como pode ser visto em [12], onde precisamos fazer a composição de funções num domínio apropriado, restringindo este se preciso.

Sejam A, B C*-álgebras e $(\mathcal{H}, \pi)$ uma A-B correspondência em que $\mathcal{H}$ é um B-módulo de Hilbert cheio. Vimos acima que $\mathcal{H}$ é um $K(\mathcal{H})$-B-bimódulo de imprimitividade. Disso, se π é um $*$-isomorfismo de A em $K(\mathcal{H})$, segue que $\mathcal{H}$ é um A-B-bimódulo de imprimitividade. Então um questionamento natural é se $\mathcal{H}$ é um A-B-bimódulo de imprimitividade, então existe um isomorfismo entre A e $K(\mathcal{H})$. Isto de fato é verdade e será mostrado no próximo teorema.

Teorema 2.4.15. *Sejam A, B C*-álgebras e $\mathcal{H}$ um A-B-bimódulo de Hilbert. Então o $*$-homomorfismo $\varphi : A \to L(\mathcal{H})$ definido por $\varphi(a)(x) = a \cdot x$ se restringe a um $*$-isomorfismo de I sobre $K(\mathcal{H})$, em que $I = \overline{span}\{\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle : x, y \in \mathcal{H}\}$. Em particular, se $\mathcal{H}$ é um A-B-bimódulo de imprimitividade, φ é um $*$-isomorfismo sobre $K(\mathcal{H})$.*

Demonstração: Denote por ψ a restrição de φ ao ideal I. Vamos mostrar que ψ é injetivo. Seja $n \in ker(\psi)$. Temos que $n \cdot x = 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$, donde segue que

$$n\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle = \langle\!\langle n \cdot x, y\rangle\!\rangle = 0$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Isto implica que $nm = 0$, para todo $m \in I$, donde segue que $n = 0$ e portanto ψ é injetivo.

Para mostrar que a imagem de ψ é igual a $K(\mathcal{H})$, observe que para todo $x, y, z \in \mathcal{H}$,

$$\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle = \langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle z,$$

donde segue que $\theta_{x,y}$ é igual à multiplicação por $\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle$. Como o span do conjunto $\{\theta_{x,y} : x, y \in \mathcal{H}\}$ é denso em $K(\mathcal{H})$, segue que a imagem de ψ é $K(\mathcal{H})$ provando o desejado. ■

Com isto, usando a Proposição 2.2.12, segue que as normas induzidas pelos produtos internos à direita e à esquerda em um bimódulo de imprimitividade são iguais. Veremos mais adiante que isto também vale para um bimódulo de Hilbert geral.

Podemos então formalizar a noção de uma correspondência ser inversível.

Definição 2.4.16. Uma A-B correspondência $\mathcal{H}$ é chamada inversível, com relação ao produto tensorial, se existe uma B-A correspondência $\mathcal{K}$ de forma que $\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \cong A$ e $\mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H} \cong B$.

Dado um A-B-bimódulo de imprimitividade $\mathcal{H}$, podemos construir um B-A bimódulo de imprimitividade, chamado de dual, ou de inverso, de $\mathcal{H}$ e denotado por $\mathcal{H}^*$ da seguinte forma:

Como conjunto $\mathcal{H}^* := \{x^* : x \in \mathcal{H}\}$, ou seja, os mesmos elementos de $\mathcal{H}$ renomeados para diferenciarmos. A soma é a mesma de $\mathcal{H}$, isto é $x^* + y^* := (x+y)^*$ e para $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $\lambda x^* := (\overline{\lambda} x)^*$. Para a ação de B à esquerda de $\mathcal{H}^*$, defina

$$b \cdot x^* := (xb^*)^*$$

e similarmente $x^* \cdot a = (a^* x)^*$. Mantemos os produtos internos da mesma maneira, no sentido de que o produto interno à esquerda de $\mathcal{H}^*$ é igual ao produto interno à direita de $\mathcal{H}$ e similarmente para o produto interno à direita. Este é então um B-A-bimódulo de imprimitividade, como pode ser verificado facilmente.

Além disso, temos um anti-isomorfismo $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$, no sentido que f é conjugado-linear, bijetiva e $f(axb) = b^* f(x) a^*$ para todo $a \in A$, $b \in B$ e $x \in \mathcal{H}$.

Dado um A-B bimódulo de imprimitividade $\mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \cong A$ e $\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \cong B$. De fato, note que a função $(x^*, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ é bilinear. Além disso,

$$(x^* a, y) \mapsto \langle a^* x, y \rangle = \langle x, ay \rangle \mapsfrom (x, ay),$$

provando que esta dá origem a uma função linear $p : \mathcal{H}^* \otimes_A^{alg} \mathcal{H} \to B$. Esta função é sobrejetora pois $\mathcal{H}$ é cheio à direita. Mais ainda, dado

$z = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i \in \mathcal{H}^* \otimes_A^{alg} \mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned} \langle p(z), p(z) \rangle &= p(z)^* p(z) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i, x_i \rangle \langle x_j, y_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i, x_i \langle x_j, y_j \rangle \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i, \langle x_i^*, x_j^* \rangle y_j \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i^* \otimes y_i, x_j^* \otimes y_j \rangle = \langle z, z \rangle, \end{aligned}$$

provando que p é uma isometria e portanto dá origem a um unitário de $\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H}$ para B. Similarmente, existe um unitário de $\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^*$ para A.

Isto mostra que $\mathcal{H}^*$ é um inverso para $\mathcal{H}$ e logo todo bimódulo de imprimitividade é uma correspondência inversível. Mais geralmente, podemos fazer esta mesma construção para um A-B-bimódulo $\mathcal{H}$ qualquer. Note que um A-B-bimódulo se torna um I-J-bimódulo de imprimitividade, para os ideais $I := \overline{span}\{\langle\langle x, y \rangle\rangle : x, y \in \mathcal{H}\}$ e $J := \overline{span}\{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathcal{H}\}$. Com isto, $\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \cong I$ e $\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \cong J$. Assim, a observação feita após o Teorema 2.4.15 também é válida para bimódulos de Hilbert que não necessariamente são de imprimitividade.

Lema 2.4.17. *Sejam A uma C^*-álgebra e $\mathcal{H}$ um A-A-bimódulo de Hilbert. Se $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$, então $\mathcal{H} \cong I \cong J$ como A-A-bimódulos de Hilbert, em que $I = \overline{span}\{\langle\langle x, y \rangle\rangle : x, y \in \mathcal{H}\}$ e $J = \overline{span}\{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathcal{H}\}$.*

Demonstração: Como $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$, segue que

$$\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}^*$$

e como vimos acima, $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H}^* \cong I$ e $\mathcal{H} \otimes_A I \cong \mathcal{H}$, donde segue que $\mathcal{H} \cong I$. Se fizermos o produto tensorial por $\mathcal{H}^*$ do outro lado vamos ter que $\mathcal{H} \cong J$ como desejamos, concluindo a demonstração. ■

Mostraremos adiante que $I = J$ como acima, porém para isto iremos usar a unicidade, a menos de isomorfismo, do inverso de um bimódulo de Hilbert.

Antes de continuarmos com a próxima proposição caracterizando correspondências inversíveis, vamos mostrar um lema técnico importante.

Lema 2.4.18. *Sejam A, B, C C^*-álgebras, $\mathcal{H}$ um A-B-bimódulo de imprimitividade e $\mathcal{K}$ um B-C-bimódulo de imprimitividade. Então existe um unitário $u : (\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K})^* \to \mathcal{K}^* \otimes_B \mathcal{H}^*$.*

Demonstração: A função $(x, y) \to y^* \otimes x^*$ é conjugado-linear e B-balanceada, donde segue que existe uma função linear $u_0 : (\mathcal{H} \otimes_B^{alg} \mathcal{K})^* \to \mathcal{K}^* \otimes_B \mathcal{H}^*$ definida por $(x \otimes y)^* \to y^* \otimes x^*$. Note que u_0 tem imagem densa em $\mathcal{K}^* \otimes_B \mathcal{H}^*$, donde segue que se u_0 for uma isometria, então u_0 se estenderá a um unitário como queremos mostrar.

Vamos então mostrar que u_0 é uma isometria. Seja $z = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes y_i)^* \in (\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K})^*$, temos

$$
\begin{aligned}
\langle u_0(z), u_0(z) \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i^* \otimes x_i^*, y_j^* \otimes x_j^* \rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i^*, \langle y_i^*, y_j^* \rangle x_j^* \rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i^*, (x_j \langle\langle y_i, y_j \rangle\rangle)^* \rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\langle x_i, x_j \langle\langle y_j, y_i \rangle\rangle \rangle\rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle\langle x_i \langle\langle y_i, y_j \rangle\rangle, x_j \rangle\rangle = \langle\langle z, z \rangle\rangle
\end{aligned}
$$

provando o desejado. ∎

O próximo resultado nos diz que uma correspondência inversível é um bimódulo de imprimitividade.

Proposição 2.4.19. *Sejam A, B C^*-álgebras e $(\mathcal{H}, \pi)$ uma A-B correspondência inversível. Então $\mathcal{H}$ é um A-B-bimódulo de imprimitividade. Além disso, se $\mathcal{K}$ é uma inversa de $\mathcal{H}$, então $\mathcal{K} \cong \mathcal{H}^*$.*

Para a demonstração da proposição acima, veja ([8]: Lemma 2.4).

Por fim, vamos mostrar alguns lemas técnicos que nos ajudarão adiante.

Primeiro note que se $\mathcal{H}$ é um A-B-bimódulo de Hilbert, então $\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$, através do unitário induzido pelo produto interno à esquerda, ou à direita. Ou seja, os mapas dados por $x \otimes y^* \otimes z \mapsto x\langle y, z \rangle$ e $x \otimes y^* \otimes z \mapsto \langle\langle x, y \rangle\rangle z$. Além disso, por ser um bimódulo de Hilbert, estas funções são iguais, donde segue que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \arrow[r, "id\otimes\langle\cdot,\cdot\rangle"] \arrow[d, "\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle\otimes id"'] & \mathcal{H} \otimes_B \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \arrow[d, "\mu"] \\
\langle\!\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\!\rangle \otimes_A \mathcal{H} \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{H},
\end{tikzcd}$$

em que estamos usando $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar o unitário induzido pelos produtos internos, μ para denotar o unitário induzido pela ação à esquerda ou à direita e $\langle\!\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\!\rangle, \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle$ para denotar os ideais gerados pelos produtos internos à esquerda e à direita. Similarmente, existem unitários que implementam o isomorfismo $\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}^*$.

Suponha que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ sejam A-B-bimódulos de Hilbert e que exista um unitário, para o produto interno à direita, de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{K}$ que comuta com a ação à esquerda dos bimódulos. Este unitário é então um operador A-linear de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{K}$. Como as normas em bimódulos de Hilbert são iguais, segue que este unitário também será isométrico com relação à norma induzida pelo produto interno à esquerda. Além disto, por ser um unitário, é em particular sobrejetor, e portanto é um unitário para o produto interno à esquerda.

Lema 2.4.20. *Sejam A, B, C C^*-álgebras, $\mathcal{H}$ um A-B-bimódulo de Hilbert, $\mathcal{K}$ um B-C-bimódulo de Hilbert e $\mathcal{L}$ um A-C-bimódulo de Hilbert de forma que $\langle\!\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle\!\rangle = \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle$. Então*

$$\mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}, \mathcal{L}) \cong \mathcal{U}(\mathcal{K}, \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{L})$$

e

$$\mathcal{U}(\mathcal{L}, \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}) \cong \mathcal{U}(\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{L}, \mathcal{K}),$$

em que $\mathcal{U}$ denota os unitários entre os bimódulos de Hilbert em questão.

Demonstração: Seja $\varphi : \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ um unitário. Podemos construir um unitário $id \otimes \varphi : \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \to \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{L}$ definido por $x^* \otimes y \otimes z \mapsto x^* \otimes \varphi(y \otimes z)$. Usando o unitário induzido pelo produto interno à direita, o qual denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, temos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes id : \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \to \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \otimes_B \mathcal{K}.$$

Por fim, usando o unitário induzido pela ação à esquerda sobre $\mathcal{K}$, denotado por μ, temos

$$\mu : \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \otimes_B \mathcal{K} \to \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \cdot \mathcal{K} \cong \mathcal{K},$$

em que o último isomorfismo é dado pois $\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle = \langle\!\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle\!\rangle$.

Assim, a composição $id \otimes \varphi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle^{-1} \otimes id \circ \mu^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{K}, \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{L})$. Assim construímos uma aplicação de $\mathcal{U}(\mathcal{H}\otimes_B\mathcal{K},\mathcal{L})$ para $\mathcal{U}(\mathcal{K},\mathcal{H}^*\otimes_A\mathcal{L})$. Vamos mostrar que esta aplicação é injetora e sobrejetora. Para a sobrejetividade, considere $\psi \in \mathcal{U}(\mathcal{K}, \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{L})$. Seja $x \in \mathcal{K}$ com $x = \langle x_1, x_2\rangle y$, em que $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ e $y \in \mathcal{K}$. Disto, $\psi(x) = \langle x_1, x_2\rangle\psi(y) = \langle x_1, x_2\rangle(w^* \otimes z) \in \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{L}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \langle x_1, x_2\rangle w^* \otimes z = \\
&= (w\langle x_2, x_1\rangle)^* \otimes z = \\
&= (\langle\!\langle w, x_2\rangle\!\rangle x_1)^* \otimes z = \\
&= x_1^* \langle\!\langle x_2, w\rangle\!\rangle \otimes z = x_1^* \otimes \langle\!\langle x_2, w\rangle\!\rangle z.
\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\varphi \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}, \mathcal{L})$, temos que

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varphi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle^{-1} \otimes id \circ \mu^{-1})(x) &= (id \otimes \varphi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle^{-1} \otimes id)(\langle x_1, x_2\rangle \otimes y) = \\
&= id \otimes \varphi(x_1^* \otimes x_2 \otimes y) = x_1^* \otimes \varphi(x_2 \otimes y).
\end{aligned}$$

Defina então $\varphi_0 : \mathcal{H}\otimes\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ por $x\otimes\psi^{-1}(w^*\otimes z) \mapsto \langle\!\langle x, w\rangle\!\rangle\cdot z$. Contas simples mostram que φ_0 é um unitário e além disto, $id \otimes \varphi_0 \circ \langle\cdot,\cdot\rangle^{-1} \otimes id \circ \mu^{-1} = \psi$, provando a sobrejetividade.

Para a injetividade, considere $\varphi, \psi \in \mathcal{U}(\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}, \mathcal{L})$ de forma que $\varphi \neq \psi$. Daí, existe $x \otimes y \in \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}$ de forma que $\varphi(x \otimes y) \neq \psi(x \otimes y)$. Seja então $z \in \mathcal{K}$ de forma que $z = \langle w, x\rangle y$, com $w \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$. Temos

$$id \otimes \varphi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle^{-1} \otimes id \circ \mu^{-1}(z) = id \otimes \varphi(w^* \otimes x \otimes y) = w^* \otimes \varphi(x \otimes y)$$

e similarmente $id \otimes \psi \circ \langle\cdot,\cdot\rangle^{-1} \otimes id \circ \mu^{-1}(z) = w^* \otimes \psi(x \otimes y)$, provando que a aplicação é injetiva, e portanto é uma bijeção.

Para o outro caso a demonstração é análoga. ■

Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ são unitariamente isomorfos, então $\langle\!\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle\!\rangle$ e $\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle = \langle\mathcal{K},\mathcal{K}\rangle$ já que um unitário preserva produtos internos.

Com isto, podemos mostrar a observação feita após o Lema 2.4.17. Seja $\mathcal{H}$ um A-A-bimódulo de Hilbert como no Lema 2.4.17. Usando a Proposição 2.4.19, segue que existe um unitário entre $\mathcal{H}^*$ e $\mathcal{H}$. Pela observação feita acima, isto implica que $\langle\!\langle\mathcal{H}^*,\mathcal{H}^*\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle\!\rangle$, porém $\langle\!\langle\mathcal{H}^*,\mathcal{H}^*\rangle\!\rangle = \langle\mathcal{H},\mathcal{H}\rangle$, por definição, donde segue que $I = J$ como comentado após o Lema 2.4.17.

Com isto em mente, podemos provar o próximo lema.

Lema 2.4.21. *Sejam A, B C*-álgebras, $\mathcal{H}$ um A-B-bimódulo de Hilbert e $\mathcal{K}$ um B-A-bimódulos de Hilbert. Se existirem unitários*

$$u : \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

e

$$v : \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \to \mathcal{K}$$

então existe um único unitário $\varphi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{K}$ de forma que a função

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle^{-1}} \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \xrightarrow{id \otimes \varphi \otimes id} \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H} \xrightarrow{u} \mathcal{H}$$

é a identidade.

Demonstração: Vamos começar construindo φ. Pela observação acima deste lema,

$$\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^*.$$

Podemos ainda usar o unitário u do enunciado para obter

$$\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^*.$$

Agora, usando os unitários induzidos pelos produtos internos, junto com o unitário induzido pelas ações sobre $\mathcal{K}$, temos

$$\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \cong \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \cdot \mathcal{K} \cdot \langle\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\rangle,$$

e assim conseguimos um unitário de $\mathcal{H}^*$ para $\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \cdot \mathcal{K} \cdot \langle\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\rangle$. Similarmente, com o uso de v, existe um unitário de $\mathcal{K}^*$ para $\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \cdot \mathcal{H} \cdot \langle\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle\rangle$. Compondo este com o anti-isomorfismo dado pela inversão de bimódulos de Hilbert em ambos os lados, obtemos outro unitário de $\mathcal{K}$ para $\langle\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle\rangle \cdot \mathcal{H}^* \cdot \langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle$.

Compondo então este unitário com o obtido antes, conseguimos um unitário de $\mathcal{K}$ para $\langle\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle\rangle \cdot \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \cdot \mathcal{K} \cdot \langle\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\rangle \cdot \langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle$, donde segue que $\langle\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle\rangle \subset \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle$ e $\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle \subset \langle\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\rangle$. Fazendo a composição do outro lado, obtemos as continências opostas, donde segue que $\langle\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle\rangle = \langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle$ e $\langle \mathcal{K}, \mathcal{K} \rangle = \langle\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\rangle$. Assim, $\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle \cdot \mathcal{K} \cdot \langle\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\rangle \cong \mathcal{K}$ e obtemos um unitário $\varphi : \mathcal{H}^* \to \mathcal{K}$.

Vamos mostrar que $v \circ id \otimes \varphi \otimes id$ é igual ao unitário induzido pelo produto interno à direita. Seja $x \otimes y^* \otimes z \in \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H}$ de forma que $y = y_1^* \langle\langle y_2, y_3 \rangle\rangle = (\langle\langle y_3, y_2 \rangle\rangle y_1)^* \in \mathcal{H}^* \cdot \langle\langle \mathcal{H}, \mathcal{H} \rangle\rangle$ e $y_2 = v(w_1 \otimes k \otimes w_2)$.

Com isto,

$$\begin{aligned} x \otimes y^* \otimes z &\mapsto x \otimes y_1^* \otimes y_2 \otimes y_2^* \otimes z \\ &\mapsto x \otimes y_1^* \otimes w_1 \otimes k \otimes w_2 \otimes y_3^* \otimes z \\ &\mapsto x \otimes \langle y_1, w_1 \rangle \cdot k \cdot \langle\langle w_2, y_3 \rangle\rangle \otimes z = (id \otimes \varphi \otimes id)(x \otimes y^* \otimes z), \end{aligned}$$

donde segue que $(v \circ id \otimes \varphi \otimes id)(x \otimes y^* \otimes z) = v(x \otimes \langle y_1, w_1 \rangle \cdot k \cdot \langle\!\langle w_2, y_3 \rangle\!\rangle \otimes z)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x \otimes y^* \otimes z \quad &\mapsto \quad x\langle y_3 \langle y_2, y_1 \rangle, z \rangle = \\
&= \quad x\langle y_1, y_2 \rangle \langle y_3, z \rangle = \\
&= \quad x\langle y_1, v(w_1 \otimes k \otimes w_2) \rangle \langle y_3, z \rangle = \\
&= \quad \langle\!\langle x, y_1 \rangle\!\rangle v(w_1 \otimes k \otimes w_2) \langle y_3, z \rangle = \\
&= \quad v(\langle\!\langle x, y_1 \rangle\!\rangle w_1 \otimes k \otimes w_2 \langle y_3, z \rangle) = v(x \otimes \langle y_1, w_1 \rangle \cdot k \cdot \langle\!\langle w_2, y_3 \rangle\!\rangle \otimes z),
\end{aligned}$$

provando o desejado e com isto, mostramos que o mapa induzido por φ é de fato a identidade.

Por fim, para a unicidade, temos que, usando o unitário induzido pelo produto interno,

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}^*, \mathcal{K})$$

é isomorfo a

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^*, \mathcal{K}),$$

que por sua vez, usando o Lema 2.4.20, é isomorfo a

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}, \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H}),$$

que, usando o unitário u do enunciado, é isomorfo a

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}, \mathcal{H}).$$

Assim, como há apenas uma identidade de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{H}$, segue que existe apenas um unitário de $\mathcal{H}^*$ para $\mathcal{K}$. ■

Capítulo 3

Bicategorias

Neste capítulo introduziremos a noção de bicategorias. Para um estudo mais aprofundado neste assunto, indicamos [2] ou [9]. Estas referências também são indicadas para o estudo do próximo capítulo.

3.1 Definições

Vamos começar motivando a definição de bicategorias. Intuitivamente, uma bicategoria é uma categoria em que temos uma noção de morfismos entre morfismos, a qual nos permite enfraquecer as igualdades dos axiomas de associatividade e identidade de uma categoria para isomorfismos. Chamamos estes morfismos entre morfismos de 2-morfismos.

Com isto, podemos pensar uma bicategoria $\mathcal{B}$ como uma tripla de coleções, uma consistindo dos objetos, outra consistindo dos morfismos e outra consistindo dos 2-morfismos da bicategoria, em que para cada morfismo, temos 2 objetos que tratamos como domínio e contradomínio do mesmo e para cada 2-morfismo, temos 2 morfismos que tratamos como domínio e contradomínio do mesmo.

Representamos então objetos como vértices, morfismos como flechas entre vértices e 2-morfismos como flechas entre flechas, como pode ser visto no diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd} B & A. \arrow[l, bend right, "f"', ""{name=U, below}] \arrow[l, bend left, "g", ""{name=D, above}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Observe que estamos tratando 2-morfismos como uma forma de avaliar se dois morfismos são similares. Por este motivo, vamos considerar apenas os 2-morfismos entre morfismos de mesmo domínio e contra domínio.

Com isto, podemos nos restringir a pensar em 2 objetos por vez e pensar na coleção de morfismos gerados por estes dois objetos, bem como na coleção de 2-morfismos entre estes morfismos. Vamos querer preservar as propriedades categóricas aqui, pedindo que para cada 2 objetos tenhamos uma categoria cuja a qual os objetos serão os morfismos da nossa bicategoria e os morfismos desta categoria serão os 2-morfismos da nossa bicategoria. Com isto, temos uma família de categorias indexada por pares ordenados de objetos. Dados A e B objetos de uma bicategoria $\mathcal{B}$ denotaremos por $\mathcal{B}(A,B)$ sua categoria associada.

Esta ideia gera uma noção de composição entre os 2-morfismos, a qual chamaremos de composição vertical e denotaremos por $\cdot_v$. Esta ideia pode ser visualizada através dos seguintes diagramas,

$$\begin{tikzcd} B & & A \arrow[ll, bend right=60, "f"', ""{name=F}] \arrow[ll, "g"{description}, ""{name=G}] \arrow[ll, bend left=60, "h", ""{name=H}] \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\beta"] \end{tikzcd} \mapsto \begin{tikzcd} B & & A. \arrow[ll, bend right=40, "f"', ""{name=F}] \arrow[ll, bend left=40, "h", ""{name=H}] \arrow[from=F, to=H, Rightarrow, "\beta\cdot_v\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Até o momento, não temos nenhuma forma de composição entre os morfismos. Para formar tal composição, vamos nos utilizar de funtores entre as categorias formadas por pares de objetos. Lembre que numa categoria usual, podemos compor morfismos quando o contradomínio de um coincide com o domínio do outro. Seguindo estas ideias, sejam A, B e C objetos de uma bicategoria $\mathcal{B}$. Como mencionado antes, vemos um objeto de $\mathcal{B}(A,B)$ como um morfismo da nossa bicategoria e, além disto, este morfismo tem como domínio A e contradomínio B. Com isto, podemos pensar em compor morfismos de $\mathcal{B}(B,C)$ com morfismos de $\mathcal{B}(A,B)$ para formar morfismos de $\mathcal{B}(A,C)$. Para cada tripla ordenada de objetos A, B e C de $\mathcal{B}$, denotaremos por c_{ABC} o funtor que vai da categoria $\mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B)$ para a categoria $\mathcal{B}(A,C)$.

Desta forma conseguimos uma noção de composição entre morfismos, a qual denotaremos por $\circ$ ou simplesmente pela concatenação dos morfismos, e uma outra noção de composição entre 2-morfismos, a qual chamaremos de composição horizontal e denotaremos por $\cdot_h$. Podemos ver melhor como esta composição se comporta através dos seguintes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
C & B \arrow[l, bend right, "f_2"'] \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\beta"] & A \arrow[l, bend right, "f_1"'] \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mapsto & C & A, \arrow[l, bend right, "f_2 f_1"'] \arrow[l, bend left, "g_2 g_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \beta\cdot_h\alpha"]
\end{tikzcd}
$$

em que f_1, g_2 são morfismos de A para B, f_2, g_2 são morfismos de B para C, α é um 2-morfismo de f_1 para g_1 e β é um 2-morfismo de f_2 para g_2. Além disto, podemos nos utilizar das propriedades funtoriais de c_{ABC} para derivar uma relação entre as duas composições de 2-morfismos. Dados $(\beta_2, \alpha_2), (\beta_1, \alpha_1)$ em $Hom(\mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(A, B))$ 2-morfismos de (g_2, g_1) para (h_2, h_1) e de (f_2, f_1) para (g_2, g_1) respectivamente, temos

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
C & B \arrow[l, bend right=60, "f_2"'] \arrow[l, "g_2" description] \arrow[l, bend left=60, "h_2"] \arrow[l, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\beta_1"] \arrow[l, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\beta_2"] & A. \arrow[l, bend right=60, "f_1"'] \arrow[l, "g_1" description] \arrow[l, bend left=60, "h_1"] \arrow[l, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\alpha_1"] \arrow[l, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\alpha_2"]
\end{tikzcd}
$$

Logo, podemos compor verticalmente α_2 com α_1 e β_2 com β_1, já que em ambos os casos os 2-morfismos encontram-se na mesma categoria, gerando o 2-morfismo $(\beta_2 \cdot_v \beta_1, \alpha_2 \cdot_v \alpha_1)$ em $\mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(A, B)$,

$$
\begin{tikzcd}
C & B \arrow[l, bend right, "f_2"'] \arrow[l, bend left, "h_2"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \beta_2\cdot_v\beta_1"] & A. \arrow[l, bend right, "f_1"'] \arrow[l, bend left, "h_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \alpha_2\cdot_v\alpha_1"]
\end{tikzcd}
$$

Aplicando então o funtor composição, obtemos o 2-morfismo $(\beta_2 \cdot_v \beta_1) \cdot_h (\alpha_2 \cdot_v \alpha_1)$,

$$
\begin{tikzcd}
C & A. \arrow[l, bend right, "f_2 f_1"'] \arrow[l, bend left, "h_2 h_1"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow (\beta_2\cdot_v\beta_1)\cdot_h(\alpha_2\cdot_v\alpha_1)"]
\end{tikzcd}
$$

Por outro lado, podemos aplicar o funtor composição primeiro, o que nos trará dois 2-morfismos componíveis verticalmente, $\beta_2 \cdot_h \alpha_2$ e $\beta_1 \cdot_h \alpha_1$,

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
C & A. \arrow[l, bend right=60, "f_2 f_1"'] \arrow[l, "g_2 g_1" description] \arrow[l, bend left=60, "h_2 h_1"] \arrow[l, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \beta_1\cdot_h\alpha_1"] \arrow[l, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \beta_2\cdot_h\alpha_2"]
\end{tikzcd}
$$

Fazendo então a composição vertical deles, obtemos $(\beta_2 \cdot_h \alpha_2) \cdot_v (\beta_1 \cdot_h \alpha_1)$,

$$\begin{tikzcd} C & & A \arrow[ll, bend right, "f_2 f_1"'] \arrow[ll, bend left, "h_2 h_1"] \arrow[ll, phantom, "\Downarrow (\beta_2 \cdot_h \alpha_2) \cdot_v (\beta_1 \cdot_h \alpha_1)"] \end{tikzcd}$$

e as propriedades funtoriais de c nos dão

$$(\beta_2 \cdot_v \beta_1) \cdot_h (\alpha_2 \cdot_v \alpha_1) = (\beta_2 \cdot_h \alpha_2) \cdot_v (\beta_1 \cdot_h \alpha_1).$$

Apesar de estarmos considerando estes funtores como uma noção de composição, note que ainda não temos nenhum axioma sobre estes funtores para que eles se comportem da forma que gostaríamos.

Com a ideia de manter os axiomas de categorias substituindo igualdades por isomorfismos, isto nos motiva inicialmente a ter um morfismo identidade para cada objeto da nossa bicategoria. Dado um objeto A de $\mathcal{B}$, podemos considerar a categoria $\mathcal{B}(A, A)$, a qual o morfismo identidade de A deveria pertencer. Lembre que a categoria 1 é a categoria com um objeto e um morfismo. Criaremos então um funtor da categoria 1 para a categoria $\mathcal{B}(A, A)$, o qual denotaremos por I_A, e denotaremos a imagem de seu objeto por Id_A e de seu morfismo por Id_A, isto é, vamos denotar o 2-morfismo identidade na nossa bicategoria pela mesma notação do morfismo cujo qual ele é identidade sobre. Como mencionamos acima, Id_A será tratado como o morfismo identidade para o objeto A. Observe também que as categorias $\mathcal{B}(A, A)$, para cada objeto A de nossa bicategoria, são as únicas categorias em questão que não podem ser vazias.

Vamos agora construir os 2-morfismos que implementarão os axiomas de associatividade e de identidade para os morfismos da nossa bicategoria. Para isto usaremos a noção de isomorfismos naturais.

Observe que a associatividade de morfismos em uma categoria pode ser representada através da comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} (h, g, f) \arrow[r, "\circ \times id"] \arrow[d, "id \times \circ"'] & (h \circ g, f) \arrow[d, "\circ"] \\ (h, g \circ f) \arrow[r, "\circ"'] & h \circ g \circ f, \end{tikzcd}$$

em que h, g, f são morfismos componíveis, $\circ$ representa a composição e id representa manter o morfismo igual.

No nosso caso, temos que a composição de morfismos é dada através dos funtores composição c_{ABC}, c_{BCD}, c_{ABD} e c_{BCD}, em que A, B, C, D são objetos da nossa bicategoria. Replicando então o diagrama acima para esta composição, pensando que h é um morfismo de C para D, g é um morfismo de B para C e f é um morfismo de A para B, ou seja, (h, g, f) são objetos de $\mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B)$, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "c_{BCD} \times Id_{\mathcal{B}(A,B)}"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{B}(C,D)} \times c_{ABC}"'] & \mathcal{B}(B,D) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[d, "c_{ABD}"] \\
\mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(A,C) \arrow[r, "c_{ACD}"'] & \mathcal{B}(A,D),
\end{tikzcd}$$

em que $Id_{\mathcal{C}}$ é o funtor identidade da categoria $\mathcal{C}$. Gostaríamos de fazer com que este diagrama comute, porém isto implicaria no axioma da associatividade de categorias. No lugar disto, pediremos que os funtores $c_{ABD} \circ c_{BCD} \times Id_{\mathcal{B}(A,B)}$ e $c_{ACD} \circ Id_{\mathcal{B}(C,D)} \times c_{ABC}$ sejam naturalmente isomorfos, ou seja, pediremos que exista um isomorfismo natural $a_{ABCD} : c_{ABD} \circ c_{BCD} \times Id_{\mathcal{B}(A,B)} \to c_{ACD} \circ Id_{\mathcal{B}(C,D)} \times c_{ABC}$.

Observe também que o isomorfismo natural a_{ABCD} também nos dá uma forma de associatividade para a composição horizontal de 2-morfismos, como pode ser vista através da propriedade natural de a_{ABCD} expressa através do diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(h_1 g_1) f_1 \arrow[r, "a_{(h_1, g_1, f_1)}"] \arrow[d, "(\gamma \cdot_h \beta) \cdot_h \alpha"'] & h_1 (g_1 f_1) \arrow[d, "\gamma \cdot_h (\beta \cdot_h \alpha)"] \\
(h_2 g_2) f_2 \arrow[r, "a_{(h_2, g_2, f_2)}"'] & h_2 (g_2 f_2),
\end{tikzcd}$$

em que (γ, β, α) é um morfismo em $\mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B)$ de (h_1, g_1, f_1) para (h_2, g_2, f_2).

Com isto, nos falta construir os 2-morfismos responsáveis por implementar os axiomas de identidades. Lembre que podemos representar a identidade de morfismos em uma categoria através das equações

$$id \circ f = f \quad \text{e} \quad f \circ id = f,$$

em que f é um morfismo qualquer e id representa, por um abuso de notação, cada identidade de f.

Como no nosso caso, as identidades são implementadas através dos funtores I_A, I_B e a composição é implementada pelos funtores c_{AAB} e c_{ABB}, para A, B objetos da nossa bicategoria, podemos replicar a equação acima, com f sendo um morfismo de A para B, através dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
1 \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "I_B \times Id_{\mathcal{B}(A,B)}"'] & \mathcal{B}(A,B) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{B}(B,B) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "c_{ABB}"'] & \mathcal{B}(A,B)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(A,B) \times 1 \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{B}(A,B)} \times I_A"'] & \mathcal{B}(A,B) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{B}(A,B) \times \mathcal{B}(A,A) \arrow[r, "c_{AAB}"'] & \mathcal{B}(A,B),
\end{tikzcd}$$

em que L e R são os funtores que implementam os isomorfismos canônicos $1 \times \mathcal{B}(A,B) \cong \mathcal{B}(A,B)$ e $\mathcal{B}(A,B) \times 1 \cong \mathcal{B}(A,B)$, respectivamente.

Finalmente, lembre que a associatividade implica que podemos compor morfismos da maneira que quisermos, fazendo que sempre faça sentido mesmo sem parênteses. Já a identidade funciona mesmo quando está no meio de outros morfismos, independendo de qual forma a simplifiquemos. No nosso caso, precisamos exigir alguns axiomas para que propriedades similares valham os quais são representados através dos seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}
((kh)g)f \arrow[rr, "a_{(k,h,g)} \cdot_h Id_f"] \arrow[d, "a_{(kh,g,f)}"'] & & (k(hg))f \arrow[d, "a_{(k,hg,f)}"] \\
(kh)(gf) \arrow[dr, "a_{(k,h,gf)}"'] & & k((hg)f) \arrow[dl, "Id_k \cdot_h a_{(h,g,f)}"] \\
& k(h(gf)) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(gId_B)f \arrow[rr, "a_{(g,1,f)}"] \arrow[dr, "r_g \cdot_h Id_f"'] & & g(Id_B f) \arrow[dl, "l_g \cdot_h Id_f"] \\
& gf, &
\end{tikzcd}$$

em que k é um morfismo de D para E, h é um morfismo de C para D, g é um morfismo de B para C e f é um morfismo de A para B. Aqui não estamos expressando diretamente as transformações naturais entre funtores, mas sim entre os resultados dos funtores em morfismos das nossas categorias com o intuito de simplificar a notação. Neste caso, estamos denotando por Id_t o 2-morfismo identidade do morfismo t.

Com isto em mente, podemos formalizar o que deveria ser uma bicategoria através da definição a seguir.

Definição 3.1.1. Uma bicategoria (ou 2-categoria fraca) $\mathcal{B}$ consiste dos seguintes dados:

- Uma coleção $Ob\mathcal{B}$ de objetos.

- Para cada par ordenado A, B em $Ob\mathcal{B}$, uma categoria $\mathcal{B}(A, B)$.

- Para cada tripla ordenada A, B, C em $Ob\mathcal{B}$, um funtor

$$c_{ABC} : \mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B) \to \mathcal{B}(A,C).$$

  Para cada objeto (g, f) de $\mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B)$, denotamos $c_{ABC}(g, f)$ por $g \circ f = gf$ e para cada morfismo (α, β) de $\mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B)$, $c_{ABC}(\beta, \alpha)$ é denotado por $\beta._h\alpha$.

- Para cada A em $Ob\mathcal{B}$, um funtor

$$I_A : 1 \longrightarrow \mathcal{B}(A, A),$$

  em que 1 é a categoria com apenas um objeto e um morfismo (identidade).

- Para cada quádrupla ordenada A, B, C, D em $Ob\mathcal{B}$, um isomorfismo natural

$$a_{ABCD} : c_{ABD} \circ (c_{BCD} \times Id_{\mathcal{B}(A,B)}) \longrightarrow c_{ACD} \circ (Id_{\mathcal{B}(C,D)} \times c_{ABC}),$$

  em que $Id_{\mathcal{C}}$ representa o funtor identidade da categoria $\mathcal{C}$. Observe que a categoria de base do funtor $c_{ABD} \circ (c_{BCD} \times Id_{\mathcal{B}(A,B)})$ é $(\mathcal{B}(C,D) \times \mathcal{B}(B,C)) \times \mathcal{B}(A,B)$ e a categoria de base do funtor $c_{ACD} \circ (Id_{\mathcal{B}(C,D)} \times c_{ABC})$ é $\mathcal{B}(C,D) \times (\mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B))$, porém como estas categorias são equivalentes, estamos identificando-as para simplificar a notação. Faremos algo similar nos próximos itens com a mesma finalidade.

- Para cada par ordenado A, B em $Ob\mathcal{B}$ dois isomorfismos naturais

$$l_{AB} : c_{ABB} \circ (I_B \times Id_{\mathcal{B}(A,B)}) \longrightarrow L$$

  e

$$r_{AB} : c_{AAB} \circ (Id_{\mathcal{B}(A,B)} \times I_A) \longrightarrow R$$

  em que L e R são os funtores que geram as equivalências canônicas $1 \times \mathcal{B}(A,B) \cong \mathcal{B}(A,B)$ e $\mathcal{B}(A,B) \times 1 \cong \mathcal{B}(A,B)$, respectivamente.

Estes dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

- $c_{ADE}(Id_{Id_{\mathcal{B}(D,E)}} * a_{ABCD}) \circ a_{ABDE} \circ c_{ABE}(a_{BCDE} * Id_{Id_{\mathcal{B}(A,B)}}) = a_{ACDE} \circ a_{ABCE}$.

- $c_{ABC}(Id_{Id_{\mathcal{B}(B,C)}} * l_{AB}) \circ c_{ABC}(a_{ABBC}) = c_{ABC}(r_{BC} * Id_{Id_{\mathcal{B}(A,B)}})$,

em que $Id_{Id_{\mathcal{C}}}$ denota a transformação natural entre os funtores identidades de uma categoria $\mathcal{C}$, que também é identidade por sua vez.

Uma bicategoria em que os isomorfismos naturais a, l e r são igualdades é chamada de 2-categoria (ou 2-categoria estrita). Neste caso, quando restringimos nossa bicategoria apenas aos objetos e aos morfismos, teremos uma categoria no sentido usual.

Exemplo 3.1.2. Seja C uma categoria. Existe uma maneira de tornar C uma bicategoria de maneira trivial. Podemos definir os 2-morfismos como apenas os triviais, ou seja, para cada morfismo da categoria, temos um único 2-morfismo dele para ele mesmo, que é o 2-morfismo identidade. Com isso C se torna uma 2-categoria.

Definição 3.1.3. Dada uma bicategoria $\mathcal{B}$, definimos a bicategoria oposta $\mathcal{B}^{op}$ como tendo os mesmos objetos e 2-morfismos de $\mathcal{B}$, porém com os morfismos invertidos, no sentido de que se A e B são objetos de $\mathcal{B}$ e f é um morfismo de A para B na bicategoria $\mathcal{B}$, então f é um morfismo de B para A na bicategoria $\mathcal{B}^{op}$.

Dados objetos A, B, C de uma bicategoria $\mathcal{B}$, e morfismos f de A para B e g de B para C, sua composição normal seria dada pelo funtor composição e denotada por gf. Quando tratamos da categoria oposta, estes mesmos morfismos serão tratados como sendo f de B para A e g de C para B e, portanto, podemos compor eles ainda, mas na ordem inversa, através de um funtor composição diferente. Neste caso, a composição é dada por $f \circ^{op} g := gf$. Ou seja, a composição é a mesma da bicategoria original, mas formalmente a ordem é trocada. Veremos mais adiante a razão disto ser importante.

Veremos mais exemplos de bicategorias no decorrer deste trabalho.

Sabemos que um morfismo em uma categoria é inversível se existe um outro morfismo de forma que a composição deles, em qualquer ordem, é igual à identidade correspondente. No nosso caso, como enfraquecemos a noção de identidade para apenas um isomorfismo, faz sentido definir uma nova noção de invertibilidade de morfismos e é isto que faremos a seguir.

Definição 3.1.4. Seja $\mathcal{B}$ uma bicategoria. Um morfismo $f \in \mathcal{B}(A,B)$ é dito ser uma equivalência se existe um morfismo $g \in \mathcal{B}(B,A)$ de forma que $f \circ g \cong 1_B$ e $g \circ f \cong 1_A$, isto é, se existem 2-morfismos inversíveis de $f \circ g$ para 1_B e de $g \circ f$ para 1_A.

No contexto categórico usual, definimos um grupoide como uma categoria pequena em que todos os morfismos são inversíveis. Como visto no Exemplo 3.1.2, podemos enriquecer esta categoria para uma 2-categoria. Por outro lado, existe uma definição mais geral do mesmo conceito, chamada de 2-grupoide, que pode ser vista em [7].

Nosso próximo objetivo é construir mais exemplos de bicategorias, o que faremos nas próximas seções.

3.2 A Bicategoria $\mathfrak{C}^*(2)$

Vamos construir uma bicategoria denotada por $\mathfrak{C}^*(2)$, cujos objetos são C*-álgebras.

Dadas duas C*-álgebras A e B, defina $\mathfrak{C}^*(2)(A,B)$ como sendo a seguinte categoria:

Para objetos, considere os $*$-homomorfismos não degenerados de A para $M(B)$ e para os morfismos, considere os unitários multiplicadores de B, no sentido de que se f e g são dois morfismos de A para $M(B)$, então g está relacionado à f se, e somente se, existir um unitário multiplicador de B de forma que $Ad_u(f) = g$. Mostraremos a seguir que isto está bem definido.

Dado f $*$-homomorfismo não degenerado de A para $M(B)$ e um unitário $u \in \mathcal{U}M(B)$, defina $Ad_u(f) : A \to M(B)$ por $Ad_u(f)(a) = uf(a)u^*$. Para ver que $Ad_u(f)$ é não degenerado, note que $B = u^*B$. Daí, $f(A)u^*B = f(A)B = B = u^*B$, o que implica $Ad_u(f)(A)B = uf(A)u^*B = B$. Portanto $Ad_u(f)$ está bem definido e é um objeto da nossa categoria.

Dados $u, v \in \mathcal{U}M(B)$ morfismos de f para g e de g para h respectivamente, defina a composição $v \cdot_v u$ por vu. Note que se $Ad_u(f) = g$ e $Ad_v(g) = h$, então para cada $a \in A$, temos

$$\begin{aligned} h(a) &= Ad_v(g)(a) = \\ &= vg(a)v^* = \\ &= v(uf(a)u^*)v^* = \\ &= (vu)f(a)(vu)^* = v \cdot_v u(f)(a), \end{aligned}$$

mostrando que esta composição está bem definida. É claro que a unidade de $M(B)$ induz o morfismo identidade para cada objeto de $\mathfrak{C}^*(2)(A, B)$.

Lembre que a topologia estrita nos operadores adjuntáveis de um módulo de Hilbert $\mathcal{H}$ é tal que uma net $\{f_i\}_{i\in I}$ converge para f na topologia estrita se, e somente se, as nets $\{f_i(x)\}_{i\in I}$ e $\{f_i^*(x)\}_{i\in I}$ convergem, em norma, para $f(x)$ e $f^*(x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Para o caso de álgebra dos multiplicadores $M(A)$, para alguma C*-álgebra A, uma net $\{m_i\}_{i\in I}$ converge para m na topologia estrita se, e somente se $m_i a \to ma$ e $am_i \to am$, para todo $a \in A$.

Considerando $L(A)$ como os operadores adjuntáveis de A visto como A-módulo de Hilbert, podemos usar o Corolário 2.3.8 para estender os morfismos desta bicategoria para $*$-homomorfismos unitais e estritamente cotínuos entre as álgebras dos multiplicadores. Por esta razão, iremos tratar os morfismos desta bicategoria como os morfismos descritos acima.

Dadas três C*-álgebras A, B e C sejam f e g $*$-homomorfismos unitais e estritamente contínuos de $M(A)$ para $M(B)$ e de $M(B)$ para $M(C)$, respectivamente. Fazendo a composição $g \circ f : M(A) \to M(C)$, temos um $*$-homomorfismo unital e estritamente contínuo, assim estando bem definida como um outro morfismo da nossa bicategoria. Sejam $u \in \mathcal{U}M(B)$ e $v \in \mathcal{U}M(C)$ dois 2-morfismos de f para g e de h para k, respectivamente, de forma que k e g sejam componíveis, bem como h e f. Temos

$$\begin{aligned} (k \circ g)(a) &= v(h(g(a)))v^* = \\ &= v(h(uf(a)u^*))v^* = (vh(u))(h \circ f)(a)(vh(u))^*. \end{aligned}$$

Com isso podemos definir a composição horizontal dos dois 2-morfismos acima, dada pelo funtor composição, como $v \cdot_h u = Ad_{vh(u)}$. Note ainda que como $vh(b)v^* = k(b)$, para todo $b \in B$, segue que o mesmo vale para a extensão de h e k para a álgebra de multiplicadores $M(B)$, assim temos que

$$v \cdot_h u = Ad_{vh(u)} = Ad_{k(u)v}.$$

Para as características funtoriais, note que as unidades são levadas nas unidades, já que as extensões dos $*$-homomorfismos às álgebras de multiplicadores são unitais. Sejam agora u_1, v_1 2-morfismos de f_1 para g_1 e de g_1 para h_1, respectivamente, e u_2, v_2 2-morfismos de f_2 para g_2 e de g_2 para h_2, respectivamente. Temos

$$\begin{aligned}
(v_2 \cdot_v u_2) \cdot_h (v_1 \cdot_v u_1) &= v_2 u_2 f_2(v_1 u_1) = \\
&= v_2 u_2 f_2(v_1) f_2(u_1) = \\
&= v_2 g_2(v_1) u_2 f_2(u_1) = (v_2 \cdot_h v_1) \cdot_v (u_2 \cdot_h u_1),
\end{aligned}$$

provando a funtorialidade de c_{ABC}.

Para uma C*-álgebra A, temos que o funtor I_A manda o objeto no $*$-homomorfismo identidade e o morfismo na unidade de $M(A)$.

Note que o isomorfismo natural a e os isomorfismos l e r são triviais já que a composição de $*$-homomorfismos é associativa e é unital. Com isso, os axiomas são trivialmente satisfeitos, provando que $\mathfrak{C}^*(2)$ é uma 2-categoria.

Iremos estudar agora as equivalências nesta bicategoria.

Proposição 3.2.1. *Sejam A e B C*-álgebras. Temos que um morfismo f de A para B em $\mathfrak{C}^*(2)$ é uma equivalência se, e somente se, f se restringe a um $*$-isomorfismo de A para B.*

Demonstração: Lembre que se f é uma equivalência de A para B, então existe outro morfismo g tal que existem unitários multiplicadores $u \in \mathcal{U}M(A)$ e $v \in \mathcal{U}M(B)$ de forma que v implementa um isomorfismo entre $f \circ g$ e 1_B e u implementa um isomorfismo entre $g \circ f$ e 1_A. Isto é,

$$f \circ g = Ad_v \quad e \quad g \circ f = Ad_u.$$

Seja então g um morfismo como acima, bem como u e v 2-morfismos que implementem os devidos isomorfismos.

Primeiramente, note que Ad_u é um $*$-automorfismo de $M(A)$, bem como Ad_v é um $*$-automorfismo de $M(B)$. Mais ainda, é fácil ver que Ad_u e Ad_v se restringem a bijeções em A e B, respectivamente.

Mostraremos agora que $f(A)$ está contida em B. Para tanto, note que pelo fato de g ser estritamente contínuo, temos que $\text{span}\{g(B)A\}$ é denso em A. Disto,

$$f(g(B)A) = Ad_v(B) f(A) = Bf(A) \subset B,$$

provando que $f(A) \subset B$. Similarmente, $g(B) \subset A$.

Com isto, f se restringe a um $*$-homomorfismo de A para B. Mais ainda, como $f \circ g = Ad_v$ e $g \circ f = Ad_u$, temos que as restrições também são iguais, o que implica que $f \circ g$ e $g \circ f$ são bijeções, e portanto f é bijetora, e logo a sua restrição é um $*$-isomorfismo de A para B.

Por outro lado, é claro que a extensão estritamente contínua de um isomorfismo é um isomorfismo, e portanto, uma equivalência em $\mathfrak{C}^*(2)$.

$\blacksquare$

3.3 A Bicategoria $\mathfrak{Corr}(2)$

Vamos construir uma bicagetoria denotada por $\mathfrak{Corr}(2)$, cujos objetos são C*-álgebras.

Dadas duas C*-álgebras A e B, defina $\mathfrak{Corr}(2)(A, B)$ como sendo a seguinte categoria:

Para objetos, considere as $A-B$ correspondências e para morfismos, considere os isomorfismos unitários de $A - B$ correspondências.

Dadas duas $A-B$ correspondências $(\mathcal{H}, \phi)$ e $(\mathcal{K}, \psi)$ e dois isomorfismos unitários entre elas u e v, defina $u \cdot_v v = uv$, ou seja, a composição dos unitários. É claro que a identidade induz a unidade para cada objeto da nossa categoria.

Dadas três C*-álgebras A, B e C sejam $(\mathcal{H}, \phi)$ e $(\mathcal{K}, \psi)$ $A - B$ e $B - C$ correspondências, respectivamente. Defina a composição destas correspondências como sendo $(\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}, \phi \otimes 1)$. Pela observação após a Definição 2.4.6 isto é uma $A - C$ correspondência, e portanto nossa composição está bem definida. Sejam u um isomorfismo unitário de $(\mathcal{H}_1, \phi_1)$ para $(\mathcal{K}_1, \psi_1)$ e v um isomorfismo unitário de $(\mathcal{H}_2, \phi_2)$ para $(\mathcal{K}_2, \psi_2)$, de forma que $(\mathcal{K}_2, \psi_2)$ e $(\mathcal{K}_1, \psi_1)$ sejam componíveis, bem como $(\mathcal{H}_2, \phi_2)$ e $(\mathcal{H}_1, \phi_1)$. Defina $v \cdot_h u = u \otimes v$. Pelo Teorema 2.4.9 isto é novamente um isomorfismo unitário de $\mathcal{H}_1 \otimes_B \mathcal{H}_2$ para $\mathcal{K}_1 \otimes_B \mathcal{K}_2$.

É claro que a unidade é levada na unidade via este funtor, logo basta mostrarmos que a composição é preservada. Para tanto, sejam u_1, v_1 2-morfismos de $(\mathcal{H}_1, \phi_1)$ para $(\mathcal{K}_1, \psi_1)$ e de $(\mathcal{K}_1, \psi_1)$ para $(\mathcal{L}_1, \gamma_1)$, respectivamente, e u_2, v_2 2-morfismos de $(\mathcal{H}_2, \phi_2)$ para $(\mathcal{K}_2, \psi_2)$ e de $(\mathcal{K}_2, \psi_2)$ para $(\mathcal{L}_2, \gamma_2)$, respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned}(v_2 \cdot_v u_2) \cdot_h (v_1 \cdot_v u_1) &= (v_1 u_1) \otimes (v_2 u_2) = \\ &= (v_1 \otimes v_2)(u_1 \otimes u_2) = (v_2 \cdot_h v_1) \cdot_v (u_2 \cdot_h u_1),\end{aligned}$$

provando a funtorialidade de c_{ABC}.

Para uma C*-álgebra A, temos que I_A manda o objeto na correspondência trivial (A, id) e o morfismo no homomorfismo identidade de A para A.

O isomorfismo natural a é dado pela Proposição 2.4.8 e os isomorfismos naturais l e r são dados pelo Exemplo 2.4.7.

Usando os isomorfismos mencionados acima é fácil mostrar que os axiomas são satisfeitos, e portanto $\mathfrak{Corr}(2)$ é uma bicategoria.

Como no caso anterior, estudaremos as equivalências na $\mathfrak{Corr}(2)$.

Proposição 3.3.1. *Sejam A e B C*-álgebras. Temos que um morfismo $(\mathcal{H}, \phi)$ de A para B em $\mathfrak{Corr}(2)$ é uma equivalência se, e somente se, ϕ é um isomorfismo sobre $K(\mathcal{H})$ e, portanto, podemos estender $(\mathcal{H}, \phi)$ a um A-B bimódulo de imprimitivade.*

Demonstração: Este resultado segue diretamente da Proposição 2.4.19 e do Teorema 2.4.15.

$\blacksquare$

3.4 Sub-bicategorias de $\mathfrak{Corr}(2)$

Dada uma bicategoria $\mathcal{B}$, uma sub-bicategoria de $\mathcal{B}$ é uma subcoleção de objetos, morfismos e 2-morfismos que formam ainda uma bicategoria com a estrutura de $\mathcal{B}$.

Observe que podemos ver $\mathfrak{C}^*(2)$ como uma sub-bicategoria da $\mathfrak{Corr}(2)$, pois $M(B)$ é isomorfo aos operadores adjuntáveis de B visto como B-módulo de Hilbert e portanto, as correspondências neste caso se tornam $*$-representações não degeneradas. Já os 2-morfismos, por serem isomorfismos unitários de B, o qual dá origem a um multiplicador de B. Além disso, o fato deste isomorfismo ser unitário implica que este será um unitário de $M(B)$.

Uma restrição natural para as correspondências da bicategoria $\mathfrak{Corr}(2)$ são bimódulos de Hilbert, ou seja, a restrição para as correspondências que tem uma estrutura de produto interno à esquerda que é compatível com a já existente à direita. Já vimos que o produto tensorial entre dois bimódulos de Hilbert é novamente um bimódulo de Hilbert e portanto esta restrição forma uma sub-bicategoria de $\mathfrak{Corr}(2)$, chamada de $\mathfrak{Bim}(2)$.

As equivalências da $\mathfrak{Bim}(2)$ são caracterizadas da mesma forma que equivalências da $\mathfrak{Corr}(2)$, ou seja, equivalências são bimódulos de imprimitividade.

Nosso próximo exemplo é novamente uma sub-bicategoria da $\mathfrak{Corr}(2)$, é de fato uma sub-bicategoria de $\mathfrak{Bim}(2)$, porém esta não contém, e nem está contida, em $\mathfrak{C}^*(2)$. Construiremos a bicategoria $\mathfrak{Reg}(2)$.

Como já mencionado acima, esta bicategoria é uma sub-bicategoria da $\mathfrak{Corr}(2)$ e logo é constituída das mesmas estruturas, restritas a um caso específico. Portanto, nossos objetos continuam sendo C*-álgebras, bem como nossos 2-morfismos continuam sendo isomorfismos unitários entre correspondências, porém agora nos restringiremos apenas às correspondências regulares, isto é, às correspondências que são unitariamente isomorfas a uma da seguinte forma:

Dadas duas C*-álgebras A e B, suponha que exista um $*$-isomorfismo φ de um ideal I de A para um ideal J de B. Então J, com a ação trivial de B à direita e a ação dada pela extensão de φ à esquerda, se torna um $A-B$ bimódulo de Hilbert. Para mostrarmos que esta bicategoria está bem definida, basta mostrarmos que a composição de correspondências desta forma é novamente uma correspondência desta forma, porém isto foi feito no Lema 2.4.14, e portanto $\mathfrak{Reg}(2)$ é de fato uma bicategoria. Por ser uma sub-bicategoria da $\mathfrak{Corr}(2)$, temos que as suas equivalências são as mesmas que no caso anterior. Apesar disso, podemos caracterizá-las a partir do isomorfismo entre os ideais de A e B.

Proposição 3.4.1. *Sejam A e B C*-álgebras. Um morfismo $(\mathcal{H}, \phi)$ de A para B em $\mathfrak{Reg}(2)$ é uma equivalência se, e somente se, existe um isomorfismo de $(\mathcal{H}, \phi)$ para (B, f), em que B é visto como um $A-B$ bimódulo de imprimitividade, sendo a ação trivial de B à direita e a ação dada por um isomorfismo $f : A \to B$ à esquerda.*

Demonstração: Como os morfismos desta categoria são as correspondências regulares temos que $(\mathcal{H}, \phi)$ é isomorfo a uma correspondência da forma (J, f), em que J é um ideal de B e f é um isomorfismo parcial de A para B. Além disso temos, por um resultado anterior, que $(\mathcal{H}, \phi)$ é um $A-B$ bimódulo de imprimitividade. Com isso, (J, f) é um $A-B$ bimódulo de imprimitividade. Isso implica que $J = B$, por causa do produto interno à direita, e portanto f é sobrejetor. Além disso, o produto interno à esquerda implica que a imagem inversa de B pela f é igual a A. Logo, f é um isomorfismo de A para B.

O outro lado é claro. ∎

Com isto, temos quatro exemplos de bicategorias de C*-álgebras com as quais poderemos trabalhar. Nosso próximo objetivo é tratar de um tipo de aplicação de uma bicategoria para a outra.

Capítulo 4

Funtores fracos

4.1 Definições

O objetivo desta seção é definir algo similar a funtores para bicategorias. Como no início do capítulo anterior, vamos motivar a definição fazendo uma analogia com o caso de funtores entre categorias.

Um funtor fraco deve ser pensado como um tipo de aplicação entre bicategorias. No caso de funtores entre categorias, temos duas aplicações, uma que vai dos objetos para os objetos e uma que vai dos morfismos para os morfismos. No nosso caso também necessitamos de aplicações entre objetos e morfismos, mas além destas, precisamos de uma aplicação entre 2-morfismos. Com isto, um funtor fraco tem de ser uma tripla de aplicações.

Um funtor entre categorias preserva composições e identidades, porém como estamos enfraquecendo nossas axiomas de igualdades para isomorfismos, faz sentido pensarmos na mesma ideia para funtores fracos. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bicategorias e F um funtor fraco entre elas. Vamos usar a aplicação entre objetos, a qual ainda denotaremos por F por abuso de notação, para levar objetos da bicategoria $\mathcal{B}$ para objetos da bicategoria $\mathcal{B}'$. Se A é um objeto de $\mathcal{B}$, vamos denotar por A^F sua imagem pela aplicação F em $\mathcal{B}'$. Lembre que em uma bicategoria $\mathcal{B}$, para cada par ordenado de objetos A, B, temos uma categoria $\mathcal{B}(A, B)$. Com isto em mente, vamos exigir que para cada par ordenado de objetos A, B de $\mathcal{B}$ exista um funtor $F_{AB} : \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(A^F, B^F)$. Isto implica que um funtor fraco deve preservar a composição vertical de 2-morfismos.

Voltando à motivação de funtores entre categorias, lembre que um funtor preserva as composições das categorias, o que pode ser representado através do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
(g,f) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "G\times G"'] & g\circ f \arrow[d, "G"] \\
(G(g),G(f)) \arrow[r, "\circ"'] & G(g)\circ G(f),
\end{tikzcd}$$

para g, f morfismos de uma categoria $\mathcal{C}$ e G um funtor de $\mathcal{C}$ para outra categoria $\mathcal{D}$.

Agora, se c_{ABC} e $c'_{A^F B^F C^F}$ denotam os funtores composição de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, respectivamente, para objetos A, B, C de $\mathcal{B}$ e um funtor fraco F de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$, então o diagrama acima se traduz para o diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B,C)\times\mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "c_{ABC}"] \arrow[d, "F_{BC}\times F_{AB}"'] & \mathcal{B}(A,C) \arrow[d, "F_{AC}"] \\
\mathcal{B}'(B^F,C^F)\times\mathcal{B}'(A^F,B^F) \arrow[r, "c'_{A^F B^F C^F}"'] & \mathcal{B}'(A^F,C^F).
\end{tikzcd}$$

A comutatividade do diagrama acima implicaria que a composição seria preservada por igualdade, porém como queremos enfraquecer esta ideia, exigimos que exista um isomorfismo natural[1] ϕ_{ABC} do funtor $c'_{FAFBFC} \circ (F_{BC} \times F_{AB})$ para o funtor $F_{AC} \circ c_{ABC}$. Os isomorfismos naturais ϕ_{ABC} são responsáveis por preservar a composição de morfismos e da composição horizontal de 2-morfismos em uma bicategoria. Eles podem ser entendidos melhor através da sua propriedade natural. Dado (β, α) em $Hom(\mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B))$ um 2-morfismo de (g_2, f_2) para (g_1, f_1), temos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_{BC}g_1F_{AB}f_1 \arrow[r, "\phi_{(g_1,f_1)}"] \arrow[d, "F_{BC}\beta\cdot_h F_{AB}\alpha"'] & F_{AC}g_1f_1 \arrow[d, "F_{AC}(\beta\cdot_h\alpha)"] \\
F_{BC}g_2F_{AB}f_2 \arrow[r, "\phi_{(g_2,f_2)}"'] & F_{AC}g_2f_2
\end{tikzcd}$$

[1] No caso geral, pedimos que exista apenas uma transformação natural entre os funtores.

comuta.

Precisamos agora do análogo à preservação de identidades. Lembre que em uma bicategoria $\mathcal{B}$, para cada objeto A, temos um funtor I_A que faz o papel da identidade dentro da categoria $\mathcal{B}(A, A)$. Similarmente, se $\mathcal{B}'$ é outra bicategoria e F é um funtor fraco de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$, então I'_{A^F} é o funtor que faz o papel da identidade dentro da categoria $\mathcal{B}'(A^F, A^F)$. Por outro lado, F_{AA} também leva o morfismo e o 2-morfismo imagem de I_A para a mesma categoria. Na forma de diagramas, temos

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "I_A"] \arrow[dr, "I'_{A^F}"'] & \mathcal{B}(A,A) \arrow[d, "F_{AA}"] \\
 & \mathcal{B}'(A,A).
\end{tikzcd}$$

Com isto, pedir que este diagrama seja comutativo é o mesmo que pedir que um funtor fraco preserva identidades. Seguindo a mesma ideia anterior, vamos pedir que exista um isomorfismo natural[2] ϕ_A de I'_{A^F} para $F_{AA} \circ I_A$. Novamente, os isomorfismos naturais ϕ_A preservam a identidade através da comutatividade do diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1_{FA} \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "1_{FA}"'] & F_{AA}1_A \arrow[d, "F_{AA}1_A"] \\
1_{FA} \arrow[r, "\phi_A"'] & F_{AA}1_A.
\end{tikzcd}$$

Finalmente, precisamos também levar em conta os isomorfismos naturais que implementam a associatividade e as identidades à esquerda e à direita das categorias, para isto iremos nos utilizar novamente de imagens de morfismos através dos funtores, por simplicidade de notação. Seja (h, g, f) em $\mathcal{B}(C, D) \times \mathcal{B}(B, C) \times \mathcal{B}(A, B)$ um morfismo. Temos que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
(F_{CD}hF_{BC}g)F_{AB}f \arrow[r, "\phi_{(h,g)} \cdot_h Id_{F_{AB}f}"] \arrow[d, "a'_{(Fh,Fg,Ff)}"'] & F_{BD}hgF_{AB}f \arrow[r, "\phi_{(hg,f)}"] & F_{AD}((hg)f) \arrow[d, "Fa_{(h,g,f)}"] \\
F_{CD}h(F_{BC}gF_{AB}f) \arrow[r, "Id_{F_{CD}h} \cdot_h \phi_{(g,f)}"] & F_{CD}hF_{AC}gf \arrow[r, "\phi_{(h,gf)}"] & F_{AD}(h(gf)),
\end{tikzcd}$$

[2]Novamente, no caso geral é exigido apenas uma transformação natural.

$$\begin{tikzcd}
F_{AB}fId_{A^F} \arrow[r, "Id_{F_{AB}f}\cdot_h \phi_A"] \arrow[dr, "r'_{A^F B^F}"'] & F_{AB}fF_{AA}Id_A \arrow[r, "\phi_{(f,Id_A)}"] & F_{AB}fId_A \arrow[dl, "F_{AB}r_{AB}"] \\
& F_{AB}f &
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
Id_{B^F}F_{AB}f \arrow[r, "\phi_B\cdot_h Id_{F_{AB}f}"] \arrow[dr, "l'_{A^F B^F}"'] & F_{BB}Id_BF_{AB}f \arrow[r, "\phi_{(Id_B,f)}"] & F_{AB}Id_Bf \arrow[dl, "F_{AB}l_{AB}"] \\
& F_{AB}f. &
\end{tikzcd}$$

Com isto em mente, podemos definir formalmente o que é um funtor fraco, ou mais geralmente um morfismo, entre bicategorias.

Definição 4.1.1. Dadas duas bicategorias $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, um *morfismo* consiste dos seguintes dados:

- Uma aplicação F de $Ob\mathcal{B}$ para $Ob\mathcal{B}'$.
- Para cada par ordenado A, B em $Ob\mathcal{B}$, um funtor
$$F_{AB} : \mathcal{B}(A, B) \longrightarrow \mathcal{B}'(A^F, B^F).$$
- Para cada tripla ordenada A, B, C em $Ob\mathcal{B}$, uma transformação natural
$$\phi_{ABC} : c'_{A^F B^F C^F} \circ (F_{BC} \times F_{AB}) \to F_{AC} \circ c_{ABC}.$$
- Para cada A em $Ob\mathcal{B}$, uma transformação natural
$$\phi_A : I'_{A^F} \to F_{AA} \circ I_A.$$

Estes dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

- $F_{AD}(a_{ABCD}) \circ \phi_{ABD} \circ c'_{A^F B^F D^F}(\phi_{BCD} * Id_{\mathcal{B}(A,B)}) =$ $\phi_{ACD} \circ c'_{A^F C^F D^F}(Id_{\mathcal{B}(C,D)} * \phi_{ABC}) \circ a'_{A^F B^F C^F D^F}$.
- $F_{AB}(r_{AB}) \circ \phi_{AAB} \circ c'_{A^F A^F B^F}(Id_{\mathcal{B}(A,B)} * \phi_A) = r'_{A^F B^F}$.
- $F_{AB}(l_{AB}) \circ \phi_{ABB} \circ c'_{A^F B^F B^F}(\phi_B * Id_{\mathcal{B}(A,B)}) = l'_{A^F B^F}$.

Um *funtor fraco* é um morfismo em que as transformações naturais são isomorfismos. Neste trabalho iremos nos importar apenas com funtores fracos por causa da estrutura das nossas bicategorias, já que no nosso caso, os 2-morfismos são sempre inversíveis. Um morfismo em que as transformações naturais são igualdades é um funtor.

Exemplo 4.1.2. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Já vimos que podemos torná-las bicategorias adicionando os 2-morfismos triviais, para todos os morfismos existentes. Um funtor fraco entre as duas bicategorias desta forma pode ser visto apenas como uma extensão de um funtor existente de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$.

4.2 Ações fracas de grupos

Fixe por este capítulo um grupo discreto G qualquer.

Uma *ação fraca* de grupos é um funtor fraco α de G, visto como uma bicategoria, para uma outra bicategoria $\mathcal{B}$.

Simplificaremos agora algumas propriedades de funtores fracos para este caso, mas antes disso explicitaremos como um grupo é visto como uma bicategoria.

Por abuso de notação, consideraremos G como sendo a bicategoria associada ao grupo G. Então $ObG = \{e\}$, em que e é a unidade do grupo. Os morfismos de G são exatamente todos os elementos de g, ou seja, $\{g : g \in G\}$ e os 2-morfismos são apenas os triviais, ou seja, $\{Id_g : g \in G\}$, em que Id_g é o 2-morfismo identidade que leva g em g. As composições de morfismos são apenas a multiplicação no grupo, e as composições de 2-morfismos, se interpretarmos Id_g como sendo uma cópia da identidade, também podem ser vistas desta maneira. Esta é uma bicategoria estrita, já que tanto a unidade quanto a associatividade são igualdades. No caso da bicategoria em que estamos agindo seja estrita, então faz sentido falar do caso em que o funtor fraco é um funtor, e neste caso teremos uma ação de grupos sobre algum objeto da bicategoria.

Assim, o funtor fraco associa esta ação a um único objeto da bicategoria $\mathcal{B}$, digamos A. O funtor α associa a cada elemento g do grupo um morfismo α_g de A para A. Os 2-morfismos serão trivialmente associados aos 2-morfismos identidade dos respectivos α_g's.

Dados $g, h \in G$ temos, pelo funtor α, α_g e α_h. O funtor composição da bicategoria $\mathcal{B}$ nos permite compor estes morfismos. O primeiro isomorfismo natural nos dá uma relação entre a composição de α_g e α_h com α_{gh}. Esta relação é implementada por $\phi_{(g,h)}$. Isto também nos diz que cada α_g é uma equivalência na nossa bicategoria $\mathcal{B}$. Além disso, a propriedade natural nos dá

$$Id_{\alpha_{gh}} \cdot_v \phi_{(g,h)} = \phi_{(g,h)} \cdot_v (Id_g \cdot_h Id_h).$$

O segundo isomorfismo natural nos dá uma relação entre α_e e a identidade de A. Esta relação é implementada por ϕ_e, o qual chamaremos apenas de ϕ. Além disso, sua propriedade natural nos dá

$$Id_{\alpha_e} \cdot_v \phi = \phi \cdot_v Id_A.$$

Dados g, h e $k \in G$, então os axiomas nos dão

$$\phi_{(g,hk)} \cdot_v (Id_{\alpha_g} \cdot_h \phi_{(h,k)}) \cdot_v a' = \phi_{(gh,k)} \cdot_v (\phi_{(g,h)} \cdot_h Id_{\alpha_k}),$$

$$\phi_{(g,e)} \cdot_v (Id_{\alpha_g} \cdot_h \phi) = r'_{\alpha_g}$$

e

$$\phi_{(e,g)} \cdot_v (\phi \cdot_h Id_{\alpha_g}) = l'_{\alpha_g}.$$

4.3 Ações fracas em $\mathfrak{C}^*(2)$

Nosso objetivo agora é tornar concreta a ideia de ação fraca de grupos aplicando em bicategorias conhecidas. Nosso primeiro caso será a bicategoria $\mathfrak{C}^*(2)$. Como esta bicategoria também é estrita, veremos que podemos simplificar ainda mais as noções de ação fraca.

Chamemos de α o funtor fraco de G para $\mathfrak{C}^*(2)$. Já vimos que α age sobre um objeto de $\mathfrak{C}^*(2)$, ou seja sobre uma C*-álgebra A. Para cada $g \in G$ temos um $*$-homomorfismo unital e estritamente contínuo α_g de $M(A)$ para $M(A)$. Sabemos que α_g é uma equivalência e portanto α_g se restringe a um $*$-automorfismo de A. Veremos os α_g's como estas restrições. Os 2-morfismos são cópias da unidade de $M(A)$.

Usando a composição definida em $\mathfrak{C}^*(2)$, temos que $\alpha_g\alpha_h$ é unitariamente equivalente a α_{gh}. Denotamos o unitário que implementa esta equivalência por $\omega(g,h)$, isto é

$$Ad_{\omega(g,h)}\alpha_g\alpha_h = \alpha_{gh}. \tag{4.1}$$

Sabemos que a identidade de A é o $*$-homomorfismo identidade. Temos que α_e é unitariamente equivalente à identidade de A. Denotamos o unitário que implementa esta equivalência por u, isto é

$$Ad_u\alpha_e = id_A. \tag{4.2}$$

Note que neste caso as propriedades naturais são triviais.

Os axiomas nos dão as seguintes relações:

$$\omega(g,hk)\alpha_g(\omega(h,k)) = \omega(gh,k)\omega(g,h), \tag{4.3}$$

$$\omega(g,e)^* = \alpha_g(u) \tag{4.4}$$

e

$$\omega(e,g)^* = u. \tag{4.5}$$

Em particular temos que $\omega(e,e)^* = u$. Note que com isso a condição (4.1), com $g,h = e$, implica a condição (4.2) usando a invertibilidade de α_e. Além disso, tomando $h,k = e$, temos que (4.3) implica (4.4) e (4.4) implica que $\alpha_e(u) = u$, o que junto com (4.3) implica (4.5).

Com isso, uma ação fraca de G em $\mathfrak{C}^*(2)$ age sobre uma C*-álgebra A com $*$-isomorfismos α_g e unitários multiplicadores $\omega(g,h) \in \mathcal{U}M(A)$ satisfazendo as relações (4.1) e (4.3).

Defina $\omega^*(g,h) = \omega(g,h)^*$. Note que a condição (4.3) é reconhecida pela relação de uma ação torcida α com um cociclo ω^* em uma ação torcida definida por Busby-Smith [3]. Porém, em sua definição, eles exigem que $u = 1$, o que implica que $\alpha_1 = id_A$ e que $\omega^*(g,e) = \omega^*(e,g) = 1$. É mostrado no artigo [7] que existe uma equivalência entre as ações definidas em [3] e as ações definidas acima. Esta noção é dada por uma noção enfraquecida de transformação natural, entre uma ação fraca de grupo sobre $\mathfrak{C}^*(2)$ e uma ação torcida de [3].

4.4 Ações fracas em $\mathfrak{Corr}(2)$

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que ações fracas em $\mathfrak{Corr}(2)$ correspondem a fibrados de Fell saturados. Por um problema técnico dado pela direção dos morfismos, vamos considerar a bicategoria oposta, $\mathfrak{Corr}(2)^{op}$ para esta equivalência.

Primeiro note que não faz sentido falarmos de ações estritas em $\mathfrak{Corr}(2)$ já que esta não é uma 2-categoria.

Iremos assumir que a ação está sobre uma C*-álgebra A.

Teorema 4.4.1. *Uma ação fraca α de G sobre uma C*-álgebra A em $\mathfrak{Corr}(2)^{op}$ é equivalente a um fibrado de Fell saturado $(A_g)_{g\in G}$ sobre G juntamente com um $*$-isomorfismo entre A e A_e.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que dado um fibrado de Fell saturado sobre G, temos uma ação fraca de G sobre A.

Sejam $(A_g)_{g\in G}$ um fibrado de Fell saturado e φ um $*$-isomorfismo de A para A_e. Lembre que neste caso A_e é uma C*-álgebra, e portanto faz sentido falarmos de um $*$-isomorfismo entre A e A_e. A multiplicação do fibrado nos dá, para cada $g \in G$, um $A_e - A_e$ bimódulo de imprimitividade A_g, já que o fibrado é saturado. Utilizando o $*$-isomorfismo φ, temos que estes bimódulos podem ser vistos sobre A. A Proposição (3.3.1) nos diz que cada A_g é uma equivalência. Defina $\alpha_g := A_g$ e $u := \varphi$.

Denotaremos a multiplicação do fibrado por "$\cdot$", bem como a ação à esquerda e à direita por A. A ação de A sobre A_g é dada por

$$a \cdot \xi \cdot b = \varphi(a) \cdot \xi \cdot \varphi(b),$$

em que $a, b \in A$ e $\xi \in A_g$, para todo $g \in G$.

Lembre que o produto interno de cada fibra do fibrado visto como módulo de Hilbert à direita sobre A_e é dado por

$$\langle x, y\rangle = x^* \cdot y,$$

e o produto interno de cada fibra do fibrado visto como módulo de Hilbert à esquerda sobre A_e é dado por

$$\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle = x \cdot y^*,$$

em que x e y são elementos desta mesma fibra.

Neste caso, como consideramos as fibras como A-A bimódulos de Hilbert, temos que os produtos internos serão

$$\langle x, y\rangle = \varphi^{-1}(x^* \cdot y),$$

e

$$\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle = \varphi^{-1}(x \cdot y^*).$$

Iremos construir agora os isomorfismos entre $\alpha_g\alpha_h$ e α_{gh}.

A multiplicação do fibrado nos dá uma função bilinear de $A_g \times A_h$ para A_{gh}. Além disso, a associatividade da multiplicação nos dá

$$(a \cdot x \cdot b) \cdot (y \cdot c) = (\varphi(a) \cdot x \cdot \varphi(b)) \cdot (y \cdot \varphi(c)) = \varphi(a) \cdot x \cdot (\varphi(b) \cdot y) \cdot \varphi(c),$$

para todo $a, b, c \in A$, $x \in A_g$ e $y \in A_h$. Portanto, a multiplicação induz uma aplicação μ de $A_g \otimes_A^{alg} A_h$ para A_{gh}, em que $A_g \otimes_A^{alg} A_h$ denota o produto tensorial algébrico de A_g por A_h sobre A.

Além disto, para $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum\limits_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j \in A_g \otimes_A^{alg} A_h$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i), \mu(\sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j)\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi^{-1}((x_i \cdot y_i)^* \cdot w_j \cdot z_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi^{-1}(y_i^* \cdot x_i^* \cdot w_j \cdot z_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varphi^{-1}(y_i^* \cdot \varphi(\langle x_i, w_j\rangle) \cdot z_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle y_i, \varphi(\langle x_i, w_j\rangle).z_j\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \langle x_i \otimes y_i, w_j \otimes z_j\rangle = \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j\rangle,
\end{aligned}$$

portanto μ se estende a uma isometria de $A_g \otimes_A A_h$ para A_{gh}. Mais ainda, como o fibrado é saturado μ é sobrejetor e portanto um unitário. Denotamos este unitário por $\omega(g,h)$. Temos

$$\omega(g,h) : \alpha_g \alpha_h = A_g \otimes_A A_h \to A_{gh} = \alpha_{gh}.$$

Acima estamos usando a composição da bicategoria oposta, já que na bicategoria usual $\alpha_g \alpha_h = A_h \otimes_A A_g$, e portanto $\omega(g,h)$ nos daria um isomorfismo entre $\alpha_h \alpha_g$ e α_{gh}.

Com isto, temos que todas as estruturas de uma ação fraca já estão estabelecidas, o que nos resta é mostrar que os axiomas são válidos.

Os axiomas são traduzidos nas seguintes equações, para $g, h, k \in G$,

$$\omega(g, hk)(id_{A_g} \otimes \omega(h,k))a = \omega(gh,k)(\omega(g,h) \otimes id_{A_k}),$$

$$\omega(g,e)(id_{A_g} \otimes u) = r$$

e

$$\omega(e,g)(u \otimes id_{A_g}) = l.$$

Note que basta verificarmos as igualdades para os tensores elementares. Seja então $(x \otimes y) \otimes z \in (A_g \otimes_A A_h) \otimes_A A_k$. Temos

$$(x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{a} x \otimes (y \otimes z) \xrightarrow{id_{A_g} \otimes \omega(h,k)} x \otimes y \cdot z \xrightarrow{\omega(g,hk)} x \cdot (y \cdot z)$$

e

$$(x \otimes y) \otimes z \xrightarrow{\omega(g,h) \otimes id_{A_k}} x \cdot y \otimes z \xrightarrow{\omega(gh,k)} (x \cdot y) \cdot z$$

e portanto a primeira igualdade segue da associatividade do fibrado de Fell. Para a segunda e terceira igualdades, sejam $x \otimes a \in A_g \otimes A$ e $a \otimes x \in A \otimes_A A_g$, temos

$$x \otimes a \xrightarrow{id_{A_g} \otimes u} x \otimes \varphi(a) \xrightarrow{\omega(g,e)} x \cdot \varphi(a)$$

e

$$x \otimes a \xrightarrow{r} x \cdot a$$

e

$$a \otimes x \xrightarrow{u \otimes id_{A_g}} \varphi(a) \otimes x \xrightarrow{\omega(e,g)} \varphi(a) \cdot x$$

e

$$a \otimes x \xrightarrow{l} a \cdot x$$

e portanto estas igualdades seguem da ação de A sobre cada fibra, e com isso, temos que o fibrado de Fell saturado implementa uma ação fraca de G sobre A em $\mathfrak{Corr}(2)$.

Por outro lado, seja α uma ação fraca de G sobre A em $\mathfrak{Corr}(2)$.

Já vimos que cada correspondência α_g é uma equivalência, e portanto são A-A bimódulos de imprimitividade. Os espaços de Banach $A_g := \alpha_g$ se tornarão as fibras do nosso fibrado de Fell. O isomorfismo natural u implementa o isomorfismo entre A e A_e, o qual se torna um isomorfismo entre espaços de Banach. A multiplicação do fibrado será implementada pelos isomorfismos naturais $\omega(g,h)$ definindo

$\mu(g,h) : A_g \times A_h \to A_{gh}$ por $\mu(g,h)(x,y) = \omega(g,h)(x \otimes y)$. Quando estiver claro, ou for irrelevante, onde estão os elementos a serem multiplicados, trataremos μ sem seus índices. O primeiro axioma de ações fracas de grupos nos dá a associatividade do fibrado de Fell. Como cada $\omega(g,h)$ é um isomorfismo, segue que a imagem de μ é densa e portanto nosso futuro fibrado será saturado. Em particular, temos que $\mu(e,e)$ torna A_e uma álgebra.

Se $x, y \in A_e$, então existe um $a \in A$ de forma que $u(a) = y$ e o segundo axioma de ações fracas de grupos nos dá

$$\mu(x,y) = x \cdot a = x \cdot u^{-1}(y).$$

Mais ainda, como u^{-1} é um homomorfismo de A-A bimódulos, segue que

$$u^{-1}(\mu(x,y)) = u^{-1}(x \cdot u^{-1}(y)) = u^{-1}(x)u^{-1}(y),$$

provando que u é um homomorfismo de álgebras para a multiplicação μ em A_e.

Nosso próximo passo é construir a involução do nosso fibrado de Fell. Para tanto, lembre que dado um A-B-bimódulo de imprimitividade $\mathcal{H}$ temos um B-A-bimódulo de imprimitividade dual $\mathcal{H}^*$, como construído após a Definição 2.4.16, de forma que $\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{H}^*$ é unitariamente isomorfo a A através do mapa implementado pelo produto interno à esquerda e $\mathcal{H}^* \otimes_A \mathcal{H}$ é unitariamente isomorfo a B através do mapa implementado pelo produto interno à direita. Vimos também que se $\mathcal{K}$ é outro B-A-bimódulo de imprimitividade, então existe um isomorfismo entre $\mathcal{K}$ e $\mathcal{H}^*$. Construiremos agora este isomorfismo explicitamente.

Primeiro lembre que para todo B-módulo de Hilbert à esquerda $\mathcal{K}$, temos um unitário entre $B \otimes_B \mathcal{K}$ e $\mathcal{K}$, como construído no Exemplo 2.4.7, que manda um tensor elementar $b \otimes k$ em $b \cdot k$. Além disso, se $\mathcal{K}$ é um B-A-bimódulo de imprimitividade, temos o isomorfismo já mencionado entre $\mathcal{K} \otimes_A \mathcal{K}^*$ e B, que manda o tensor elementar $x \otimes y^*$ em $\langle x, y \rangle$. Portanto, compondo estes isomorfismos, segue que $span\{\langle x, y \rangle k : x, y \in \mathcal{H} \text{ e } k \in \mathcal{K}\}$ é denso em $\mathcal{K}$. Suponha agora que $v : \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} A$ seja um unitário. Então temos o seguinte isomorfismo induzido:

$$\hat{v} : \mathcal{K} \longrightarrow B \otimes \mathcal{K} \longrightarrow (\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}) \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}^* \otimes (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{id \otimes v} \mathcal{H}^* \otimes A \longrightarrow \mathcal{H}^*,$$

que manda $\langle x, y \rangle \cdot k$ em $x^* \cdot v(y \otimes k) = (v(y \otimes k)^* \cdot x)^*$. Note que podemos ver $\hat{v}$ como uma aplicação (conjugado-linear) de $\mathcal{K}$ para $\mathcal{H}$ mandando $\langle x, y \rangle \cdot k$ em $v(y \otimes k)^* \cdot x$. Similarmente, se tivermos também um isomorfismo unitário $w : \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H}^* \xrightarrow{\sim} B$, teremos uma função $\hat{w}$:

$\mathcal{H} \to \mathcal{K}$ que manda $\langle k,l\rangle \cdot x$ para $w(l \otimes x)^* \cdot k$, em que $k,l \in \mathcal{K}$, $x \in \mathcal{H}$ e $\langle k,l\rangle$ denota o produto interno à direita de $\mathcal{K}$.

No nosso caso, queremos construir uma involução de A_g para $A_{g^{-1}}$. Porém, em geral, $A_{g^{-1}}$ não é igual a A_g^*, mas a construção acima nos dá um isomorfismo entre eles. De fato, considere o isomorfismo

$$v_g : A_{g^{-1}} \otimes_A A_g = \alpha_{g^{-1}} \otimes \alpha_g \xrightarrow{\omega(g^{-1},g)} \alpha_{g^{-1}g} = \alpha_e = A_e \xrightarrow{u^{-1}} A.$$

Aplicando agora a construção feita acima temos um isomorfismo $\hat{v}_g$ de A_g para $A^*_{g^{-1}}$. Como conjunto $A^*_{g^{-1}} = A_{g^{-1}}$, e portanto podemos ver $\hat{v}_g$ como uma função de A_g para $A_{g^{-1}}$, como descrito acima. Esta será a involução do nosso fibrado de Fell, ou seja, para $x \in A_g$, definimos $x^* = \hat{v}_g(x)$.

Vamos mostrar que esta função satisfaz as propriedades de involução. Primeiro, note que $\hat{v}_g$ é conjugado-linear por construção, já que $\hat{v}_g$ de A_g para $A^*_{g^{-1}}$ é linear.

Nosso próximo passo é mostrar que $(x^*)^* = x$. Porém, note que se $x \in A_g$, $x^* = \hat{v}_g(x) \in A_{g^{-1}}$, e portanto $(x^*)^* = \hat{v}_{g^{-1}}(\hat{v}_g(x))$. Logo, precisamos mostrar que $\hat{v}_{g^{-1}} = \hat{v}_g^{-1}$.

Voltando para o caso geral, considere $\mathcal{H}$ um A-B bimódulo de imprimitividade, $\mathcal{K}$ um B-A bimódulo de imprimitividade junto com dois isomorfismos $v : \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \to A$ e $w : \mathcal{K} \otimes_A \mathcal{H} \to B$. Vamos denotar tal tripla de $(\mathcal{K}, v, w)$ e vamos estudar quando $\hat{v}$ é inversa de $\hat{w}$.

Primeiro note que podemos supor, a menos de isomorfismo, que nossa tripla é da forma $(\mathcal{H}^*, v', w')$ em que v' é o isomorfismo dado pelo produto interno à esquerda de $\mathcal{H}$. De fato, como $\hat{v}$ implementa um isomorfismo de $\mathcal{K}$ para $\mathcal{H}^*$, podemos compor v e w com o isomorfismo $id \otimes \hat{v}^{-1}$ para termos isomorfismos com $\mathcal{K} = \mathcal{H}^*$ para A e B. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
v'(\xi \otimes \eta^*) &= v \circ (id \otimes \hat{v}^{-1})(\xi \otimes \eta^*) = \\
&= v \circ (id \otimes \hat{v}^{-1})(\xi \otimes x^* \cdot v(y \otimes k)) = \\
&= v(\xi \otimes \langle x, y\rangle \cdot k) = \\
&= v(\xi\langle x, y\rangle \otimes k) = \\
&= v(\langle\!\langle \xi, x\rangle\!\rangle y \otimes k) = \\
&= \langle\!\langle \xi, x\rangle\!\rangle v(y \otimes k) = \\
&= \langle\!\langle \xi, v(y \otimes k)^* \cdot x\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \xi, \eta\rangle\!\rangle,
\end{aligned}$$

em que $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ com $\eta = v(y \otimes k)^* \cdot x$, e portanto v' é igual ao produto interno à esquerda de $\mathcal{H}$.

Vamos continuar denotando v' e w' por v e w, apesar desta composição a mais.

Note que se os isomorfismos v e w são implementados pelos produtos internos à esquerda e à direita de $\mathcal{H}$, respectivamente, então temos

$$\hat{v}(\langle x,y\rangle \cdot z^*) = x^* \cdot \langle\!\langle y,z\rangle\!\rangle = (\langle\!\langle z,y\rangle\!\rangle \cdot x)^* = (z \cdot \langle y,x\rangle)^* = (\langle x,y\rangle \cdot z^*)^*,$$

e logo, por continuidade, $\hat{v}$ é a involução de $\mathcal{H}^*$ para $\mathcal{H}$. Analogamente, $\hat{w}$ será a involução de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{H}^*$, caso $\hat{w}$ seja implementado pelo produto interno à direita. Disto, é claro que $\hat{w} = \hat{v}^{-1}$.

Por outro lado, se $\mathcal{K} = \mathcal{H}^*$ e v é implementado pelo produto interno à esquerda de $\mathcal{H}$, temos

$$w(y^* \otimes z)^* \cdot x^* = \hat{w}(\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle z) = (\langle\!\langle x,y\rangle\!\rangle \cdot z)^* = \langle z,y\rangle \cdot x^*,$$

para todo $z \in \mathcal{H}$, o que implica que $w(y^* \otimes z) = \langle y,z\rangle$, pois a ação à esquerda de B sobre $\mathcal{H}^*$ é injetiva, já que em particular é isomorfa a $\mathbb{K}(\mathcal{H}^*)$. Com isso, temos que $\hat{w}$ é inversa de $\hat{v}$ se, e somente se, w é o isomorfismo implementado pelo produto interno à direita.

Voltando ao caso geral, se $(\mathcal{K},v,w)$ é uma tripla como anteriormente, temos que $id\otimes w : \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}\otimes\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é igual a $v\otimes id : \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}\otimes\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, ou seja, $x \cdot w(y^* \otimes z) = v(x \otimes y^*) \cdot z$ para $x,y,z \in \mathcal{H}$, se, e somente se, $\hat{v}^{-1} = \hat{w}$.

De fato, suponha que $id \otimes w = v \otimes id$. Então

$$\begin{aligned}
\hat{v} \circ \hat{w}(\langle k,l\rangle \cdot x) &= \hat{v}(w(l \otimes x)^* \cdot k) = \\
&= \hat{v}(k) \cdot w(l \otimes x) = \\
&= v(\hat{v}(k) \otimes l) \cdot x = \\
&= \langle\!\langle \hat{v}(k), \hat{v}(l)\rangle\!\rangle \cdot x = \langle k,l\rangle \cdot x,
\end{aligned}$$

para $k,l \in \mathcal{K}$ e $x \in \mathcal{H}$, lembrando que $v \circ (id \otimes \hat{v}^{-1})$ é igual ao isomorfismo induzido pelo produto interno à esquerda.

Com isso, $\hat{w}$ é uma inversa à esquerda de $\hat{v}$, e portanto $\hat{w} = \hat{v}^{-1}$.

Por outro lado, se $\hat{w} = \hat{v}^{-1}$, usando a mesma conta anterior, temos

$$\hat{v}(k) \cdot w(l \otimes x) = v(\hat{v}(k) \otimes l) \cdot x,$$

para todo $k,l \in \mathcal{K}$ e $x \in \mathcal{H}$, mostrando que $v \otimes id = id \otimes w$. Com isso, temos uma caracterização geral para quando $\hat{v}^{-1} = \hat{w}$.

Afirmamos que $\langle \hat{v}(k), x\rangle = w(k \otimes x)$, para todo $k \in \mathcal{K}$ e $x \in \mathcal{H}$. De fato, isso é uma propriedade válida para $\mathcal{K} = \mathcal{H}^*$ e v e w são os isomorfismos induzidos pelos produtos internos à esquerda e à direita, respectivamente, e esta propriedade é invariante por isomorfismos. Para ver isso, suponha que esta propriedade valha para uma tripla $(\mathcal{K}, v, w)$ e considere um isomorfismo $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$. Com isso temos uma nova tripla da forma $(\mathcal{K}', v', w')$ em que $v' = v \circ (id \otimes f^{-1})$ e $w' = w \circ (f^{-1} \otimes id)$. Vamos mostrar que esta propriedade também vale para esta tripla.

Sejam $x, y, z \in \mathcal{H}$, $k \in \mathcal{K}$ e $k' \in \mathcal{K}'$ de forma que $f(k) = k'$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{v'}(\langle y, z\rangle k'), x\rangle &= \langle v(z \otimes k)^* \cdot y, x\rangle = \\
&= \langle y, v(z \otimes k) \cdot x\rangle = \\
&= \langle y, z \cdot w(k \otimes x)\rangle = \\
&= \langle y, z\rangle w(k \otimes x) = \\
&= \langle y, z\rangle w'(k' \otimes x) = w'(\langle y, z\rangle k' \otimes x),
\end{aligned}$$

mostrando que esta propriedade é invariante por isomorfismos, e portanto é válida para qualquer tripla.

Aplicando isto para $\mathcal{H} = A_g$, $\mathcal{K} = A_{g^{-1}}$, $v_g = v = u^{-1} \circ \omega(g, g^{-1})$ e $v_{g^{-1}} = w = u^{-1} \circ \omega(g^{-1}, g)$ temos, pelo primeiro axioma de ações fracas, que $v \otimes id = id \otimes w$ e portanto $\hat{v}^{-1} = \hat{w}$, provando que $(x^*)^* = x$, para todo $x \in A_g$. Mais ainda, temos

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|\langle x, x\rangle\| = \\
&= \|\langle(\hat{v}_{g^{-1}} \circ \hat{v}_g)(x), x\rangle\| = \\
&= \|v_{g^{-1}}(\hat{v}_{g^{-1}}^{-1} \otimes id)((\hat{v}_{g^{-1}} \circ \hat{v}_g)(x) \otimes x)\| = \\
&= \|v_{g^{-1}}(\hat{v}_g(x) \otimes x)\| = \\
&= \|u^{-1} \circ w(g^{-1}, g)(\hat{v}_g(x) \otimes x)\| = \\
&= \|\omega(g^{-1}, g)(\hat{v}_g(x) \otimes x)\| = \|x^* \cdot x\|.
\end{aligned}$$

Sejam agora $g, h \in G$. O isomorfismo

$$A_g \otimes_A A_h \otimes_A A_{(gh)^{-1}} \xRightarrow{\omega(g,h)\otimes id} A_{gh} \otimes_A A_{(gh)^{-1}} \xRightarrow{\omega(gh,(gh)^{-1})} A_e \xRightarrow{u^{-1}} A,$$

induz o isomorfismo $A_g \otimes_A A_h \to A^*_{(gh)^{-1}}$ definido por $x \otimes y \mapsto (x \cdot y)^*$, já que $u^{-1} \circ \omega(gh, (gh)^{-1}) = v_{gh}$, e logo o mapa acima é $\hat{v}_{gh} \circ \omega(g, h)$.

Por outro lado, o isomorfismo

$$A_g \otimes_A A_h \otimes_A A_{(gh)^{-1}} \xRightarrow{id\otimes id\otimes\omega(h^{-1},g^{-1})^{-1}} A_g \otimes_A A_h \otimes_A A_{h^{-1}} \otimes_A A_{g^{-1}}$$
$$\xRightarrow{id\otimes\omega(h,h^{-1})\otimes id} A_g \otimes_A A_e \otimes_A A_{g^{-1}}$$
$$\xRightarrow{id\otimes u^{-1}\otimes id} A_g \otimes_A A_{g^{-1}} \xRightarrow{\omega(g,g^{-1})} A_e \xRightarrow{u^{-1}} A,$$

induz o isomorfismo $A_g \otimes_A A_h \to A^*_{(gh)^{-1}}$ definido por $x \otimes y \mapsto y^* \cdot x^*$. Para ver isto voltaremos mais uma vez para o caso mais geral.

Considere $\mathcal{H}$ um A-B-bimódulo de imprimitividade, e seja $\tilde{\mathcal{H}}$ um B-A-bimódulo de imprimitividade inverso de $\mathcal{H}$ via o unitário $v : \mathcal{H}\otimes_B\tilde{\mathcal{H}} \to A$. Considere ainda $\mathcal{K}$ um B-C-bimódulo de imprimitividade, e seja $\tilde{\mathcal{K}}$ um C-B-bimódulo de imprimitividade inverso de $\mathcal{K}$ via o unitário $w : \mathcal{K} \otimes_C \tilde{\mathcal{K}} \to B$. Já vimos que existem unitários $\hat{v} : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}^*$ e $\hat{w} : \mathcal{K} \to \tilde{\mathcal{K}}^*$.

Com isto, temos um isomorfismo u

$$\mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \otimes_C \tilde{\mathcal{K}} \otimes_B \tilde{\mathcal{H}} \xRightarrow{id\otimes w\otimes id} \mathcal{H} \otimes_B B \otimes_B \tilde{\mathcal{H}} \Rightarrow \mathcal{H} \otimes_B \tilde{\mathcal{H}} \xRightarrow{v} A,$$

que implementa um isomorfismo $\hat{u} : \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \to (\tilde{\mathcal{K}} \otimes_B \tilde{\mathcal{H}})^*$.

Por outro lado, temos outro isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K} \xRightarrow{\hat{v}\otimes\hat{w}} \tilde{\mathcal{H}}^* \otimes_B \tilde{\mathcal{K}}^* \xRightarrow{\varphi} (\tilde{\mathcal{K}} \otimes_B \tilde{\mathcal{H}})^*,$$

definido por $x \otimes y \mapsto (\hat{w}(y)^* \otimes \hat{v}(x)^*)^*$. Aqui estamos usando o unitário construído no Lema 2.4.18.

Mostraremos que estes isomorfismos são iguais. Para tanto, dados $x \otimes y \in \mathcal{H} \otimes_B \mathcal{K}$, $\eta, \xi = y_1 \otimes x_1 \in \tilde{\mathcal{K}} \otimes \tilde{\mathcal{H}}$, temos

$$\hat{u}(x \otimes y\langle\!\langle \xi, \eta\rangle\!\rangle) = v(x \cdot w(y \otimes y_1) \otimes x_1) \cdot \eta^* = (\eta \cdot v(x \cdot w(y \otimes y_1) \otimes x_1)^*)^*.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \Psi(x \otimes y\langle\!\langle \xi, \eta\rangle\!\rangle) &= (\hat{w}(y)^* \otimes \hat{v}(x)^*)^* \langle\!\langle \xi, \eta\rangle\!\rangle = \\ &= (\langle\!\langle \eta, \xi\rangle\!\rangle \cdot \hat{w}(y)^* \otimes \hat{v}(x)^*)^* = (\eta \cdot \langle \xi, \hat{w}(y)^* \otimes \hat{v}(x)^*\rangle)^*. \end{aligned}$$

Portanto, para mostrar que $\Psi = \hat{u}$, basta mostrarmos que

$$\langle \hat{w}(y)^* \otimes \hat{v}(x)^*, \xi\rangle = \langle \hat{v}(x)^*, \langle \hat{w}(y)^*, y_1\rangle x_1\rangle = v(x \cdot w(y \otimes y_1) \otimes x_1),$$

porém isto é direto, já que $\langle \cdot, \cdot\rangle = v \circ (\hat{v}^{-1} \otimes id)$ e $\langle \cdot, \cdot\rangle = w \circ (\hat{w}^{-1} \otimes id)$.

Voltando agora ao nosso caso, segue pelos axiomas de ações fracas que os isomorfismos que criamos precisam ser iguais, donde segue que $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$, provando que esta função é uma involução e, portanto, a construção acima nos dá um fibrado de Fell.

Por construção, o fibrado construído a partir da ação fraca é o inverso da ação fraca construída a partir do fibrado, donde segue o resultado. ■

Observação: Na nossa demonstração, pode-se "corrigir" o problema do isomorfismo entre $\alpha_g \alpha_h$ e α_{gh} sem o uso da bicategoria oposta como foi feito em [7]. Ao invés disso, podemos definir $\alpha_g := A_{g^{-1}}$, porém isto tem sido deixado de lado na literatura já que em casos mais gerais não temos uma noção de inversão dentro da estrutura inicial.

4.5 Ações fracas de semigrupos inversos

Neste seção iremos fazer uma análise como antes para funtores fracos de um semigrupo inverso com unidade S, visto como uma bicategoria, para a bicategoria $\mathfrak{Bim}(2)$, construída anteriormente. Vamos mostrar que uma ação fraca de S corresponde a um fibrado de Fell saturado sobre S. Observe que aqui não estamos usando a bicategoria $\mathfrak{Corr}(2)$ como construída anteriormente, já que um resultado essencial para esta demonstração é que se $\mathcal{H}$ é uma A-A correspondência de forma que $\mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$ como A-A correspondências, então $\mathcal{H}$ é isomorfo a um ideal de A e isto não se verifica, em geral, em $\mathfrak{Corr}(2)$. Apesar disto este resultado vale quando tratamos de bimódulos de Hilbert, como é mostrado no Lema 2.4.17 e reforçado em uma observação acima do Lema 2.4.21.

Para grupos isto não é um problema, já que existe apenas um idempotente e portanto isto não irá fazer diferença se usarmos $\mathfrak{Bim}(2)$ no caso de grupos.

Teorema 4.5.1. *Uma ação fraca α de S sobre uma C^*-álgebra A em $\mathfrak{Bim}(2)^{op}$ é equivalente a um fibrado de Fell saturado $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ sobre S juntamente com um $*$-isomorfismo entre A e A_1.*

Demonstração: Dado um fibrado de Fell saturado $\mathcal{A}$ e um $*$-isomorfismo entre A e A_1, segue de argumentos análogos à primeira parte da demonstração do Teorema 4.4.1 que estes dão origem a uma ação fraca de S sobre $\mathfrak{Bim}(2)^{op}$.

Para a segunda parte, vamos novamente seguir os passos da demonstração do Teorema 4.4.1. Seja α um funtor fraco de S para $\mathfrak{Bim}(2)^{op}$. Defina $A_s := \alpha_s$ para todo $s \in S$. Defina $\mu(s,t) : A_s \times A_t \to A_{st}$ por

$(x,y) \mapsto \omega(s,t)(x \otimes y)$, em que ω denota o isomorfismo natural relativo à composição de morfismos da ação fraca α. Esta função é claramente bilinear e segue do primeiro axioma de funtores fracos que esta função é associativa e será chamada de multiplicação. Como anteriormente, quando estiver claro, ou for irrelevante, onde estão os elementos a serem multiplicados estão, iremos omitir os índices de μ e quando for conveniente, usaremos a notação $\mu(x,y) = x \cdot y = xy$. Como cada $\omega(s,t)$ é um isomorfismo, em particular sobrejetor, segue que o nosso futuro fibrado será saturado.

Se $e \in E(S)$, então $\mu(e,e)$ torna A_e uma álgebra associativa. Em particular, isto é verdade para A_1. Dados $x, y \in A_1$, existe $a \in A$ de forma que $u(a) = y$, em que u é o isomorfismo natural de α que implementa a identidade. O segundo axioma de funtores fracos implica

$$\mu(x,y) = x \cdot a = x \cdot u^{-1}(y).$$

Além disso, como u^{-1} é um homomorfismo de A-A-bimódulos, segue que

$$u^{-1}(\mu(x,y)) = u^{-1}(x \cdot u^{-1}(y)) = u^{-1}(x)u^{-1}(y),$$

provando que u é um homomorfismo de álgebras para a multiplicação μ de A_1.

Antes construir a involução vamos estudar as fibras sobre idempotentes e construir os mapas $\{j_{t,s}\}_{s \le t}$ com $s, t \in S$. Pelo comentário antes do Lema 2.4.21, para todo $e \in E(S)$, $A_e \cong I_e = J_e$, em que $I_e = \overline{span}\{\langle\langle x,y\rangle\rangle : x, y \in \mathcal{A}\}$ e $J_e = \overline{span}\{\langle x,y\rangle : x, y \in \mathcal{A}\}$. Além disso, como u implementa um isomorfismo de A para A_1, segue que $u(I_e) = u(J_e)$ é um ideal fechado de A_1. Disto, A_e é (isomorfo a) um ideal fechado de A_1. Iremos identificar A_e com este ideal. Isto mostra em particular que a multiplicação construída de $A_s \times A_e$ para A_{se} é dada pela ação de $u^{-1}(A_e)$ sobre A_s e similarmente para a multiplicação de $A_e \times A_s$ para $s \in S$ e $e \in E(S)$. Denotamos por r_e a restrição de u para I_e que implementa seu isomorfismo com A_e. Assim, se $s \le t$, então $ts^{-1}s = s$ e podemos construir o mapa

$$j_{t,s} : A_s \xrightarrow{\omega(t,s^{-1}s)^{-1}} A_t \otimes_A A_{s^{-1}s} \xrightarrow{id \otimes r_{s^{-1}s}^{-1}} A_t \otimes_A J_{s^{-1}s} \longrightarrow A_t,$$

definido por $x \cdot r_{s^{-1}s}(y) = \mu(x, r_{s^{-1}s}(y)) = \omega(t, s^{-1}s)(x \otimes r_{s^{-1}s}(y)) \mapsto x \cdot y$, para $x \in A_t$ e $y \in J_{s^{-1}s}$. Para mostrar que este mapa é isométrico, basta mostrarmos que a função $\varphi : A_t \otimes_A J_{s^{-1}s} \to A_t$ definida por $x \otimes y \mapsto x \cdot y$ é isométrica.

Seja $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in A_t \otimes_A^{alg} J_{s^{-1}s}$. Temos

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi(z), \varphi(z) \rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i \cdot y_i, x_j \cdot y_j \rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} y_i^* \langle x_i, x_j \rangle y_j = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle y_i, \langle x_i, x_j \rangle y_j \rangle = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i \otimes y_i, x_j \otimes y_j \rangle = \langle z, z \rangle,
\end{aligned}
$$

provando que φ, e portanto também $j_{t,s}$, é isométrico. Mais ainda, como r_e é um isomorfismo de A-A-bimódulos para todo $e \in E(S)$, segue que

$$
j_{s,t}(x \cdot r_{s^{-1}s}(y) \cdot a) = j_{s,t}(x \cdot r_{s^{-1}s}(y \cdot a)) = x \cdot y \cdot a = j_{s,t}(x \cdot r_{s^{-1}s}(y)) \cdot a
$$

para $x \in A_t$, $y \in J_{s^{-1}s}$ e $a \in A$, e portanto $j_{s,t}$ é A-linear à direita. Analogamente, segue que $j_{s,t}$ é A-linear à esquerda.

Vamos mostrar que se $s \le t \le u$ para $s, t, u \in S$, temos que $j_{u,s} = j_{u,t} \circ j_{t,s}$. Dados $x \in A_t \subset A_u$ e $y \in J_{s^{-1}s}$, temos $j_{t,s}(x \cdot r_{s^{-1}s}(y)) = x \cdot y$. Além disto, como $A_u \times A_{t^{-1}t} \cong A_t$, segue que existe $(w, z) \in A_u \times A_{t^{-1}t}$ de forma que $w \cdot r_{t^{-1}t}(z) = x$. Disto,

$$
\begin{aligned}
(j_{u,t} \circ j_{t,s})(x \cdot r_{s^{-1}s}(y)) &= j_{u,t}(x \cdot y) = \\
&= j_{u,t}(w \cdot r_{t^{-1}t}(z)) \cdot y = w \cdot zy.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
j_{u,s}(x \cdot r_{s^{-1}s}(y)) &= j_{u,s}(w \cdot r_{t^{-1}t}(z) r_{s^{-1}s}(y)) = \\
&= j_{u,s}(w \cdot u(zy)) = \\
&= j_{u,s}(w \cdot r_{s^{-1}s}(zy)) = w \cdot zy,
\end{aligned}
$$

provando a igualdade.

Considere agora $s, t, u, v \in S$ com $s \le t$ e $u \le v$. Vamos mostrar que $j_{t,s}(x) \cdot j_{v,u}(y) = j_{tv,su}(x \cdot y)$ para $x \in A_s$ e $y \in A_u$. Para isso, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_s \times A_u \arrow[rr, "\mu(s,u)"] & & A_{su} \\
A_{ss^{-1}} \times A_t \times A_v \times A_{u^{-1}u} \arrow[u, "\mu(ss^{-1},t)\times\mu(v,u^{-1}u)"] \arrow[d, "(\varphi\times\varphi)\circ(r^{-1}_{ss^{-1}}\times id\times id\times r^{-1}_{u^{-1}u})"'] \arrow[rr, "id\times\mu(t,v)\times id"] & & A_{ss^{-1}} \times A_{tv} \times A_{u^{-1}u} \arrow[u, "\mu(ss^{-1}tv,u^{-1}u)\circ(\mu(ss^{-1},tv)\times id)"'] \arrow[d, "\varphi\circ(\varphi\times id)\circ(r^{-1}_{ss^{-1}}\times id\times r^{-1}_{u^{-1}u})"] \\
J_{ss^{-1}} \cdot A_t \times A_v \cdot J_{u^{-1}u} \arrow[rr, "\mu(t,v)"'] & & J_{ss^{-1}} \cdot A_{tv} \cdot J_{u^{-1}u},
\end{tikzcd}$$

o qual afirmamos ser comutativo. De fato o quadrado de cima comuta por causa da associatividade do produto. Além disto, o quadrado de baixo comuta porque ω é uma família de homomorfismos de bimódulos. Mais ainda, observe que isto implica que há dois caminhos de $A_s \times A_u$ para A_{tv}[3] e como o diagrama é comutativo, estes são iguais. O primeiro caminho, dado seguindo os morfismos à esquerda do diagrama dá origem à isometria $\mu\circ(j_{t,s}\times j_{v,u})$. Seguindo o caminho dos morfismos à direita, temos a isometria $j_{tv,su} \circ \mu$, provando o desejado.

Nosso próximo passo será construir a involução do nosso fibrado de Fell. Note que para cada $s \in S$, temos unitários $A_s \otimes_A A_{s^{-1}} \otimes_A A_s \cong A_s$ e $A_{s^{-1}} \otimes_A A_s \otimes_A A_{s^{-1}} \cong A_{s^{-1}}$, dados pela multiplicação, e portanto, usando o Lema 2.4.21, existe um único unitário I_s de $A_s^* \to A_{s^{-1}}$ de forma que

$$A_s \to A_s \otimes_A A_s^* \otimes_A A_s \to A_s \otimes_A A_{s^{-1}} \otimes_A A_s \to A_s \tag{1}$$

é igual à identidade. Adotamos a notação $I_s(x) := x^*$ para todo $s \in S$ e $x \in A_s$. Mais adiante, vamos considerar I_s como um mapa conjugado-linear de A_s para $A_{s^{-1}}$.

Afirmamos que isto é equivalente a dizer que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
A_s \otimes_A A_s^* \arrow[r, "\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle"] \arrow[d, "id\otimes I_s"'] & J_{ss^{-1}} \arrow[d, "r_{ss^{-1}}"] \\
A_s \otimes_A A_{s^{-1}} \arrow[r, "\omega(s,s^{-1})"'] & A_{ss^{-1}}
\end{tikzcd} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd}
A_s^* \otimes_A A_s \arrow[r, "\langle\cdot,\cdot\rangle"] \arrow[d, "I_s\otimes id"'] & J_{s^{-1}s} \arrow[d, "r_{s^{-1}s}"] \\
A_{s^{-1}} \otimes_A A_s \arrow[r, "\omega(s^{-1},s)"'] & A_{s^{-1}s}.
\end{tikzcd} \tag{3}$$

[3]Aqui estamos vendo $J_{ss^{-1}} \cdot A_{tv} \cdot J_{u^{-1}u}$ como um submódulo de A_{tv}

Primeiramente, note que estes diagramas caracterizam o produto e a involução construídos com os produtos internos de cada A_s. De fato, note que os diagramas acima comutarem implica que para todo $x \otimes y \in A_s \otimes_A A_s$ temos

$$r_{ss^{-1}}(\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle) = \mu(x \cdot y^*) \quad \text{e} \quad r_{s^{-1}s}(\langle x, y\rangle) = \mu(x^* \cdot y).$$

Para mostrar esta equivalência, começaremos assumindo que o diagrama (2) comuta. Fazendo o tensor por A_s à direita juntamente com o tensor com a identidade nos unitários, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_s \otimes_A A_s^* \otimes_A A_s \arrow[r, "\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes I_s \otimes id"'] & J_{ss^{-1}} \otimes_A A_s \arrow[d, "r_{ss^{-1}} \otimes id"] \\
A_s \otimes_A A_{s^{-1}} \otimes_A A_s \arrow[r, "\omega(s,s^{-1}) \otimes id"'] & A_{ss^{-1}} \otimes_A A_s
\end{tikzcd}$$

comuta. Observe que se compusermos o unitário induzido pelo produto interno e pela ação de A_s no início e $\omega(ss^{-1}, s)$ no final do digrama, segue que o caminho de baixo é igual ao isomorfismo (1). Mostraremos que o caminho de cima é igual à identidade. Para isto, seja $x\langle y, z\rangle \in A_s$, com $x, y, z \in A_s$. Daí, o caminho de cima leva $x\langle y, z\rangle$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
x\langle y, z\rangle &\mapsto x \otimes y^* \otimes z \\
&\mapsto \langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle \otimes z \\
&\mapsto r_{ss^{-1}}(\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle) \otimes z \\
&\mapsto r_{ss^{-1}}(\langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle) \cdot z = \langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle \cdot z = x\langle y, z\rangle,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Por outro lado, assuma que o isomorfismo em (1) é igual à identidade. Fazendo o produto tensorial por $A_{s^{-1}}$ e usando o fato de que $A_s \otimes_A A_{s^{-1}} \cong A_{ss^{-1}}$ e que $A_s^* \otimes A_{ss^{-1}} \cong A_s^*$ e $A_{s^{-1}} \otimes_A A_{ss^{-1}} \cong A_{s^{-1}}$, segue que o isomorfismo em (1) dá origem, a partir do segundo termo, ao caminho de baixo do diagrama (2). Por outro lado, contas similares às feitas acima mostram que a identidade dá origem ao caminho de cima do diagrama (2), donde segue que o diagrama (2) comuta. Similarmente, mostra-se que o diagrama (3) comutar é equivalente a (1) ser igual à identidade.

Além disto, $I_{s^{-1}} \circ I_s : A_s^* \to A_{s^{-1}} \to A_s^*$ é igual à identidade. Aqui estamos vendo $I_{s^{-1}}$ como um mapa de $A_{s^{-1}}$ para A_s^* através da composição com os anti-isomorfismos dados pela inversão de bimódulos em ambos os lados. Iremos tratar esta composição em ambos os lados como entendida e não mencionaremos esta adiante para evitar notações pesadas.

De fato, note que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^*_{s^{-1}} \otimes_A A_{s^{-1}} \arrow[r, "\langle \cdot,\cdot \rangle"] \arrow[d, "I_s^{-1} \otimes I_s^{-1}"'] & J_{ss^{-1}} \arrow[d, "id"] \\
A_s \otimes_A A^*_s \arrow[r, "\langle\!\langle \cdot,\cdot \rangle\!\rangle"] \arrow[d, "id \otimes I_s"'] & J_{ss^{-1}} \arrow[d, "r_{ss^{-1}}"] \\
A_s \otimes_A A_{s^{-1}} \arrow[r, "\omega(s,s^{-1})"'] & A_{ss^{-1}}
\end{tikzcd}$$

comuta. Para ver isto primeiro note que, como $A^*_s \cong A_{s^{-1}}$, segue que $\langle\!\langle A_s, A_s \rangle\!\rangle = \langle A^*_s, A^*_s \rangle = \langle A_{s^{-1}}, A_{s^{-1}} \rangle$, ou seja o produto interno à esquerda de A_s é igual ao produto interno à direita de $A_{s^{-1}}$. Usamos isto para mostrar que o quadrado de cima do diagrama comuta. O quadrado de baixo é exatamente o diagrama (2) e portanto comuta. O retângulo maior é igual ao diagrama (3), com s^{-1} no lugar de s e I_s^{-1} no lugar de $I_{s^{-1}}$. Porém, como o diagrama (3) também é equivalente a (1) e este é caracterizado unicamente por I_s, segue que $I_s^{-1} = I_{s^{-1}}$ e portanto $I_{s^{-1}} \circ I_s = id$ como afirmado. Isto mostra em particular que para $s \in S$ e $x \in A_s$, $I_{s^{-1}} \circ I_s(x) = (x^*)^* = x$.

Usando novamente o diagrama (2), vamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^*_s \otimes_A A^*_t \arrow[r, "\omega(t,s)"] \arrow[d, "I_s \otimes I_t"'] & A^*_{ts} \arrow[d, "I_{ts}"] \\
A_{s^{-1}} \otimes_A A_{t^{-1}} \arrow[r, "\omega(s^{-1},t^{-1})"'] & A_{s^{-1}t^{-1}}
\end{tikzcd}$$

comuta, lembrando que $A^*_s \otimes_A A^*_t \cong (A_t \otimes_A A_s)^*$. Este diagrama comutar implica que se $s, t \in S$, $x \in A_s$ e $y \in A_t$, então $\mu(y,x)^* = \mu(x^*, y^*)$, ou seja $(y \cdot x)^* = x^* \cdot y^*$. Para mostrar isto, iremos usar a caracterização dos diagramas (2) e (3) através de produtos internos.

Dados $(x \otimes y)^* \in (A_t \otimes_A A_s)^*$ e $w \otimes z \in A_t \otimes_A A_s$, temos que o mapa de multiplicação nos dá unitários de $(A_t \otimes_A A_s)^*$ para A^*_{ts} e de $A_t \otimes_A A_s$ para A_{ts}. Isto implica que seus produtos internos são iguais, através deste unitário, donde segue que

$$\begin{aligned}(x\cdot y)^*\cdot(w\cdot z) &= u(\langle x\cdot y, w\cdot z\rangle) = \\ &= u(\langle (x\otimes y, w\otimes z\rangle) = \\ &= u(\langle y, \langle x,w\rangle z\rangle) = \\ &= y^*\cdot x^*\cdot w\cdot z = \\ &= (y^*\cdot x^*)\cdot(w\cdot z),\end{aligned}$$

para todo $w\cdot z\in A_{ts}$, donde segue que $(x\cdot y)^* = y^*\cdot x^*$ como queríamos mostrar.

Por fim, resta-nos mostrar que se $s\le t$, então $j_{t^{-1},s^{-1}}(x^*) = j_{t,s}(x)^*$ para todo $x\in A_s$. Sejam $x,y\in A_s$. Como os mapas $j_{t,s}$ são isométricos, temos

$$j_{t,s}(y)^*\cdot j_{t,s}(x) = u(\langle j_{t,s}(y), j_{t,s}(x)\rangle) = u(\langle y,x\rangle) = y^*\cdot x.$$

Por outro lado, já vimos que $j_{t^{-1},s^{-1}}\circ j_{t,s} = j_{t^{-1}t,s^{-1}s}$, donde segue que

$$j_{t^{-1},s^{-1}}(y^*)\circ j_{t,s}(x) = j_{t^{-1}t,s^{-1}s}(y^*\cdot x) = y^*\cdot x,$$

já que $t^{-1}t, s^{-1}s\in E(S)$, e portanto este mapa é apenas a inclusão do ideal $J_{s^{-1}s}$ no ideal $J_{t^{-1}t}$. Com isto, temos que $j_{t,s}(y)^*\cdot j_{t,s}(x) = j_{t^{-1},s^{-1}}(y^*)\circ j_{t,s}(x)$, para todo $x\in A_s$, donde segue que $j_{t,s}(y)^* = j_{t^{-1},s^{-1}}(y^*)$ para todo $y\in A_s$ provando o desejado. ■

Referências Bibliográficas

[1] AWODEY, S. **Category Theory**, Oxford University Press, (2010).

[2] BÉNABOU, J. **Introduction to Bicategories**, Reports of the Midwest Category Seminar, ed. Bénabou et al, Springer LNM 47, (1967).

[3] BUSBY, R. C.; SMITH H. A. **Representations of Twisted Group Algebras**, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 503–537.

[4] BUSS, A. **A C*-algebra de um grupo**, Dissertação (Mestrado) - UFSC (2003).

[5] BUSS, A.; EXEL, R. **Twisted Actions and Regular Fell Bundles Over Inverse Semigroups**, Proc. London Math. Soc., vol. 103, (2011), 235-270.

[6] BUSS, A.; MEYER, R. **Inverse Semigroup Actions on Groupoids**, preprint, to appear in Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[7] BUSS, A.; MEYER, R.; ZHU, C. **A Higher Category Approach to Twisted Actions on C*-Algebras**, Proc. Edinb. Math. Soc., vol. 56, (2013), 387-426.

[8] ECHTERHOFF, S.; KALISZEWISKI, S.; QUIGG, J.; RAEBURN, I. **A Categorical Approach to Imprimitivity Theorems for C*-Dynamical Systems**, Mem. Amer. Math. Soc., 180 (2006), no. 850, viii+169 pp.

[9] Etingof, P.; Gelaki, S.; Nikshych D.; Ostrik V. **Tensor Categories**, Mathematical Surveys and Monographs Volume 205, (2015).

[10] EXEL, R. **Noncommutative Cartan sub-algebras of C*-algebras**, New York J. Math., 17 (2011), 331-382.

[11] EXEL, R. **Partial Actions of Groups and Actions of Inverse Semigroups**, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), 3481-3494.

[12] EXEL, R. **Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications**, Submitted (2016).

[13] EXEL, R. **Twisted partial actions, a classification of regular C*-algebraic bundles**, Proc. London Math. Soc., 74 (1997), 417-443.

[14] LANCE, E. C. **Hilbert C*-Modules**, A toolkit for operator algebraists, Cambridge University Press, (1995).

[15] LAWSON, M. V. **Inverse Semigroups**, The Theory of Partial Isometries, World Scientific, (1998).

[16] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis With Applications**, John Wiley & Sons, (1978).

[17] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**, Springer, (1971).

[18] MURPHY, G. J. **C*-algebras and Operator Theory**, Academic Press, (1990).

[19] RAEBURN, I.; WILLIAMS, D. P. **Morita Equivalence and Continuous-Trace C*-Algebras**, Mathematical Surveys and Monographs Volume 60, (1991).

[20] RUDIN, W.; **Real and Complex Analysis**, McGraw-Hill, (1970).