

MODELO MATEMÁTICO PARA EL  
CONTROL BIOLÓGICO DEL  
GUSANO BARRENADOR DE LA  
CAÑA DE AZÚCAR EN EL VALLE  
DEL CAUCA (*Diatraea saccharalis*)

Alberto Vélez Rodríguez

Martín Hernán Granada Duque

Universidad EAFIT

Escuela de Ciencias  
Departamento de Ciencias  
Matemáticas

2017

MODELO MATEMÁTICO PARA EL  
CONTROL BIOLÓGICO DEL GUSANO  
BARRENADOR DE LA CAÑA DE  
AZÚCAR EN EL VALLE DEL RIO CAUCA  
(*Diatraea saccharalis*)

Alberto Vélez Rodríguez

Martín Hernán Granada Duque

Trabajo de grado presentado como requisito parcial  
para optar al título de Magister en Matemática Aplicada

Asesores: Paula Andrea Gonzalez Parra

Germán Andrés Vargas Orozco

MEDELLÍN

UNIVERSIDAD EAFIT

ESCUELA DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

2017

Nota de aceptación

---

---

Presidente del jurado

---

Jurado

---

Jurado

---

Medellín, 26 de mayo de 2017

# Dedicatoria

A mi familia, en especial a mi esposa Dalila Victoria Rincón y a mis hijos, Vanessa, Paulo Armando y Margarita Rosa, mi razón de ser y el soporte que me impulsa a asumir nuevos retos

A la memoria de mi señor padre Don Alberto Vélez Marmolejo y

En consideración al dulce sueño en el que navega mi señora madre Doña Ayda Mery Rodríguez de Vélez.

Alberto Vélez Rodríguez

# Dedicatoria

A mi esposa Marisol Torres de Granada, mis hijos José Alejandro Granada Torres e Isabel Sofía Granada Torres.

A mi hermano Diego Alejandro Granada Duque.

A la memoria de mis padres Luis Ariel Granada Cardona y Marleny Rosa Elsa Duque Hurtado.

A la memoria de mi abuela Eufemia Hurtado.

Martin Hernán Granada Duque

# Agradecimiento

Quiero expresar mi eterna gratitud a nuestra directora de Tesis, Doctora Paula Andrea González Parra, Docente de la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Autónoma de occidente Cali, su apoyo irrestricto fue fundamental para concretar nuestro proyecto

Además, agradezco a nuestro codirector de Tesis, Doctor German Andrés Vargas Orozco, Coordinador del Área de Entomología del Centro de Investigaciones de la Caña de Azúcar en Colombia CENICAÑA, sus aportes desde la Entomología ampliaron nuestro panorama, vía a empalmar el discurso matemático con el de la biología

Adicionalmente, quiero agradecer al señor Mayor General Rodrigo Alejandro Valencia Guevara, oficial Fuerza Aérea Colombiana, su confianza y apoyo contribuyeron con la culminación de la Maestría

Alberto Vélez Rodríguez

# Agradecimiento

Con respeto y admiración para todas aquellas personas que hicieron parte de este capítulo de mi vida. En especial a los profesores: Hernando “El mazo” Prado, Jairo Banguero, Julio Alberto Ríos Gallego, Oswaldo Rodríguez, Hernán Montaña, Alvaro Iván Jiménez Alzate, César Andrés Ojeda, Luz Adriana Pereira de Ojeda y Jonny Ramirez

Martin Hernán Granada Duque



# RESUMEN

En este trabajo se propone un modelo matemático simple que represente la interacción entre el gusano barrenador de la caña de azúcar (*Diatraea saccharalis*) [11] y sus larvas parasitadas por una avispa (*Cotesia flavipes Cameron*) [22] que cohabita en el ambiente.

Se plantea inicialmente un modelo que muestra la interacción entre las dos especies. Este modelo se fundamenta en procesos de tipo continuo, a partir de la interacción huésped-parasitoide planteada por W. R. Thomson en 1924 y está definido por un sistema de cinco ecuaciones diferenciales. Se encuentran los puntos de equilibrio del sistema y a partir de estos resultados se inicia el proceso de inclusión de control al modelo, que busca optimizar la solución del problema utilizando el Principio del Máximo de Pontryagin. La solución numérica se obtiene aplicando el algoritmo Backward – Forward Sweep [26].

# ABSTRACT

In this work, a simple mathematical model is proposed that represents the interaction between the sugarcane borer (*Diatraea saccharalis*) [11] and its larvae parasitized by a small wasp (*Cotesia flavipes Cameron*) [22] that cohabits in the environment.

A model is initially proposed, in order to have an approach to the interaction between the two species. This model is based on continuous type processes, based on the host - parasitoid interaction proposed in 1924 and it is defined by a system of five differential equations. We find its equilibria and from these results, the control process's inclusion to the model is initiated, which seeks to optimize the solution of the problem, using the principle of maximum of Pontryagin. The numerical solution is obtained by applying the Backward - Forward Sweep algorithm [26].

# TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	9
ABSTRACT.....	10
LISTA DE TABLAS.....	13
LISTA DE FIGURAS.....	14
1 INTRODUCCIÓN.....	15
2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	21
2.1 Formulación del problema.....	23
2.2 Justificación.....	23
3 OBJETIVOS.....	25
3.1 Objetivo general.....	25
3.2 Objetivos específicos.....	25
4 ESTADO DEL ARTE.....	26
5 MARCO TEÓRICO.....	32
5.1 Definición de ecuaciones diferenciales.....	32
5.2 Definición de sistema de ecuaciones diferenciales.....	32
5.3 Definición de variable de control.....	33
5.4 Definición de variable de control óptimo.....	33
5.5. Definición de Función cóncava.....	34
5.6 Definición de punto de equilibrio.....	34
5.7 Definición de matriz jacobiana.....	35
5.8 Definición de valores propios.....	36
5.9 Teorema de linealización de Lyapunov-Poincaré.....	36
5.10 Teorema regla de Leibniz.....	36

5.11 Principio del máximo de Pontryagin.....	37
5.12 Teorema: Condición de optimalidad.....	43
5.13 Teorema: Condición para el mínimo.....	44
6 MODELO DIATRAEA SACCHARALIS – COTESIA FLAVIPES.....	46
6.1 Formulación del modelo <i>Diatraea saccharalis</i> – <i>Cotesia flavipes</i> ....	50
7 PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ANÁLISIS DE ESTABILIDAD.....	53
7.1 Linealización del sistema.....	53
7.2 Puntos de equilibrio y estabilidad .....	56
7.3 Análisis de incertidumbre, puntos de equilibrio y estabilidad.....	64
7.4 Simulación del sistema sin control.....	68
8 MODELO DIATRAEA SACCHARALIS – COTESIA FLAVIPES CON CONTROL.....	72
8.1 Formulación del problema de control óptimo.....	73
8.2 Solución del problema de control óptimo.....	74
8.3 Solución numérica del problema de control óptimo.....	77
8.4 Simulación de la variable de control óptimo.....	78
9 APORTE INVESTIGATIVO.....	85
10 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	86
10.1 Conclusiones.....	86
10.2 Trabajos futuros.....	87
11 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	88
12 REFERENCIAS WEB (RW).....	93

## LISTA DE TABLAS

Tabla 6.1	Descripción de las variables.....	47
Tabla 6.2	Descripción de parámetros del sistema .....	50

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Huevos de <i>Diatraea saccharalis</i> .....	18
Figura 1.2:	Larvas recién emergidas de <i>Diatraea saccharalis</i> .....	18
Figura 1.3:	Larva en desarrollo de <i>Diatraea saccharalis</i> .....	18
Figura 1.4:	Adulto de <i>Diatraea saccharalis</i> .....	19
Figura 1.5:	<i>Diatraea Saccharalis</i> siendo parasitada por <i>Cotesia flavipes</i> .....	19
Figura 1.6:	Cocones de <i>Cotesia flavipes</i> .....	19
Figura 1.7:	Adultos de <i>Cotesia flavipes</i> .....	19
Figura 2.1:	Cogollo de caña en primeras etapas.....	22
Figura 2.2:	Túnel elaborado por el barrenador.....	22
Figura 2.3:	Gran volumen interno de caña, devastado por el barrenador.....	22
Figura 4.1:	Comportamiento de las poblaciones por Rafikov-Limeira	28
Figura 4.2:	Proporción de parasitoides que se convierten en adultos en función del tiempo [43] .....	31
Figura 6.1:	Diagrama del modelo propuesto.....	46
Figura 7.1:	Partes reales de los valores propios de $P_1$ .....	66
Figura 7.2:	Partes reales de los valores propios de $P_3$ .....	67
Figura 7.3:	Soluciones para cuatro condiciones iniciales.....	70
Figura 8.1:	Control óptimo $U_m(t)$ .....	79
Figura 8.2:	Comportamiento de las poblaciones de huevos, larvas y adultos de <i>Diatraea saccharalis</i> .....	83

## 1 INTRODUCCIÓN

La utilización de enemigos naturales para intentar reducir las consecuencias dejadas por las plagas en cultivos alimentarios se remonta a tiempos lejanos. Esta estrategia con el paso de los años se denominó control biológico. Es posible que el control biológico comience en la antigua China, aplicado al cultivo de cítricos que eran atacados por plagas del follaje. Para ello colocaban hormigueros cercanos a los cultivos y se observaba que las hormigas eran excelentes depredadores de estas plagas en sus diversas variedades. Sin embargo, las hormigas acababan con diversos tipos de plagas sin discriminación de especies [RW12]. La idea de la utilización de parasitoides nace con Erasmo Darwin en 1800 cuando observa la acción de una avispa sobre las larvas de la plaga de follaje en plantaciones de repollo, pero sólo hasta 1888 se tienen registros de la utilización seria y coordinada del control biológico, por tal razón se considera este año como el inicio de esta actividad en el mundo, cuando se utilizó *Rodolia cardinalis* para el control de *Icerya purchasi*, una escama que estaba atacando los cultivos de cítricos en Australia y se había introducido accidentalmente en California [RW9].

Se ha tomado la siguiente definición, por considerar que su descripción es realmente clara para los intereses de esta investigación: “*Control biológico es una forma de manejar poblaciones de animales y/o plantas. Consiste en el uso de uno o más organismos para reducir la densidad de una planta o animal que causa daño al hombre (DeBach, 1964). Dado esto, el control biológico se puede definir como el uso de organismos benéficos (enemigos naturales) contra aquellos que causan daño (plagas).*”

*Un organismo que no es deseable puede ser eliminado localmente, o lo que es más deseable su población puede ser reducida a un nivel que no causa daño económico. La erradicación completa de plagas es ambiciosa y en la mayoría de los casos trae problemas ecológicos. Si un enemigo natural elimina completamente una plaga, este quedaría sin alimento para continuar su desarrollo. En control biológico se busca reducir las poblaciones de la plaga a un nivel que no cause daño económico, permitiendo así un cierto nivel poblacional de la plaga que garantice la sobrevivencia del agente controlador.*

*Este agente controlador mantiene su propia población previniendo que la plaga retorne a niveles poblacionales que causan daño” [RW9].*

En lo referente con la clasificación que se aplica en biología (taxonomía), se tiene que *Diatraea* pertenece al Phylum de los artrópodos, a la Clase insecta (insectos), al orden lepidóptero [17] (“del griego «*lepis*», escama, y «*pteron*», ala, debido a que sus alas están llenas de pequeñas escamas que le dan color), son el orden en el que se sitúan las mariposas y polillas. Es uno de los órdenes de seres vivos con más especies, más de 165.000 especies repartidas en unas 127 familias, es decir hay casi el triple de especies de mariposas que de vertebrados” [RW1]), familia Crambidae (La define como una polilla [RW2]), género *Diatraea* (Gusanos barrenadores [RW3]).

De otro lado, la taxonomía para la *Cotesia flavipes* da cuenta que ésta pequeña avispa pertenece al Phylum de los artrópodos, a la Clase insecta, del orden Hymenóptera (“Los Hymenóptera son conocidos como abejas, avispas, hormigas, etc. Presentan como características principales un ciclo holometábolo (huevo-larva-pupa-adulto), los adultos presentan dos pares de alas membranosas transparentes o traslúcidas, las posteriores más



pequeñas que las anteriores, el aparato bucal es de tipo masticador”) [RW7], familia Braconidae (avispa parasitoides) [RW8]

Los gusanos barrenadores del tallo de la caña de azúcar, pertenecientes al género *Diatraea*, es una de las principales plagas de la caña de azúcar en América [RW13]. Su manejo se ha basado en el control biológico, especialmente con la inclusión, en zonas afectadas de una población adicional de moscas *Parathenesia claripalpis* (van der Wulp) y *Metagonistylum minense* (Townsend) (Diptera: Tachinidae), quienes en su estado larvario parasitan al gusano barrenador, reduciendo su población y minimizando su daño. Con ese propósito en el Valle del Cauca, desde los años setenta, se viene trabajando en la cría y liberación de las moscas para mantener el daño del gusano en niveles aceptables. Hoy día Cenicaña cultiva de manera experimental en sus laboratorios *Cotesia flavipes*, una avispa que se ha venido asentando en los cultivos de caña desde hace algunos años y que es enemigo natural del gusano barrenador.




En este trabajo se busca analizar el efecto de una estrategia de control biológico de las larvas de *Diatraea*, mediante la liberación de un enemigo natural distinto y novedoso en la región del valle del río Cauca, en este caso la avispa *Cotesia flavipes*, que ataca el estado larvario de la plaga.

Para tal propósito se introdujo un modelo matemático del tipo hospedero-parasitoide siguiendo los lineamientos en [8,43], que representa la interacción natural entre *Diatraea saccharalis* y *Cotesia flavipes* y se formuló un problema de control óptimo en tiempo continuo que integra el cálculo de variaciones y el principio de optimalidad de Bellman, con una gran variedad de aplicaciones en economía [46] y en particular en modelos biológicos [26], para evaluar el efecto en la población de larvas de *Diatraea saccharalis* que se presenta ante una liberación adicional de avispa

*Cotesia flavipes*, como medida de control (“Esta escogencia se puede justificar, ya que los resultados de la teoría de cálculo de variación aparecen como casos particulares de los resultados de la teoría de control óptimo. Esta teoría necesita de condiciones sobre los espacios de definición de las variables de estado y de control los cuales son mucho más flexibles que la teoría de cálculo de variación” [46]). El objetivo es minimizar la población de larvas de *Diatraea saccharalis* liberando una mínima población de avispas *Cotesia flavipes* en un tiempo  $t$ .

En el marco teórico, se plantean las definiciones básicas necesarias y los teoremas más relevantes en la teoría de control óptimo.

En el capítulo 6 se introdujo el modelo *Diatraea saccharalis-Cotesia flavipes* dividiendo la población total en 5 estados biológicos. De una parte, huevos, larvas y adultos de *Diatraea saccharalis* y de otra parte larvas de *Diatraea saccharalis* parasitadas por *Cotesia flavipes* y adultos de *Cotesia flavipes*.

		
<p><b>Figura 1.1:</b> Huevos de <i>Diatraea saccharalis</i></p>	<p><b>Figura 1.2:</b> Larvas recién emergidas de <i>Diatraea saccharalis</i></p>	<p><b>Figura 1.3:</b> Larva en desarrollo de <i>Diatraea saccharalis</i></p>
<p>Fuente: Vélez – Granada</p>	<p>Fuente: Vélez - Granada</p>	<p>Fuente: Vélez - Granada</p>



**Figura 1.4:** Adulto de *Diatraea saccharalis*

Fuente: Vélez - Granada



**Figura 1.5:** *Diatraea Saccharalis* siendo parasitada por *Cotesia flavipes*

Fuente:  
[http://lpv400mip.blogspot.com.co/2015/07/universidad-de-panama-facultadde\\_4.html](http://lpv400mip.blogspot.com.co/2015/07/universidad-de-panama-facultadde_4.html)



**Figura 1.6:** Cocones de *Cotesia flavipes*

Fuente:  
<http://www.mnn.com/your-home/organic-farming-gardening/blogs/how-baby-wasps-can-save-your-tomatoes-from-hornworm-caterpillars>



**Figura 1.7:** Adultos de *Cotesia flavipes*

Fuente: Vélez - Granada

Nota: Fotografías tomadas directamente en los laboratorios de Cenicaña. Fotógrafo Diego Alejandro Granada Duque.

En el capítulo 7 se formuló el problema de control óptimo introduciendo una variable de control. El problema de control óptimo se resuelve usando el principio del máximo de Pontryagin [26]. El principio del máximo de Pontryagin es aplicado usando el algoritmo backward-forward [26, 33, 44, 45].

Finalmente se realizó un análisis de los resultados numéricos, encontrando que, al aplicar la variable de control, la solución del problema de control óptimo arrojó una disminución en la población acumulada de la plaga, especialmente en la cantidad de sus larvas.

## 2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En las plantaciones de caña de azúcar en el Valle del Cauca es común encontrar diversas problemáticas respecto al ataque de los cultivos por parte de diversas especies de seres vivos que necesitan este alimento para su subsistencia entre los cuales se pueden citar, pulgón amarillo, picudos, comejenes, gusanos barrenadores, chizas entre otros [1].

De todas las plagas existentes que atacan los cultivos de la caña se quiere hacer especial énfasis en los gusanos barrenadores del tallo, por ser estos los que ocasionan mayor daño a los cultivos, generando altos desembolsos en términos económicos para su control [1].

Los barrenadores del tallo de la caña de azúcar más comunes en el Valle del Cauca son del género *Diatraea*, en especial *Diatraea saccharalis*, *Diatraea busckella*, *Diatraea tabernella* y *Diatraea indigenella*. Las áreas de distribución son en su mayoría en la zona norte, para el caso de *Diatraea saccharalis*, centro y sur del departamento para el caso de *Diatraea indigenella*. Ésta última no se encuentra en otros países y su manejo depende de las experiencias locales [2,36].

Particularmente existe información donde se estima que por efecto de *Diatraea saccharalis*, se pierde el 0.83% por cada unidad porcentual de daño, lo que daría unas pérdidas de 0.96 toneladas de caña por hectárea [37].



Una manera de reducir el impacto que producen este tipo de plagas es la utilización del control biológico. Para el caso de *Diatraea saccharalis*, se puede ejercer control biológico a partir de la liberación en su área de influencia de enemigos naturales. La estrategia de control biológico se surte inicialmente del cultivo de las avispas en laboratorios para la liberación que complemente la población existente de *Cotesia flavipes* en los cultivos de caña, donde las avispas buscarán de manera natural las larvas de *Diatraea saccharalis* a parasitar [3].

La presencia en los últimos años en el Valle del Cauca de la avispa *Cotesia flavipes*, que deposita sus huevos en las larvas de *Diatraea saccharalis*, para que posteriormente las larvas de la avispa se alimenten de las larvas de gusano barrenador, determina una oportunidad de investigar la interacción entre las dos poblaciones para evaluar el impacto de liberar una población adicional de avispas vía al control de la plaga, utilizando la teoría del control óptimo.

## 2.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En un modelo matemático de tipo hospedero–parasitoide, que representa la dinámica natural de parasitación de la avispa *Cotesia flavipes* sobre las larvas de *Diatraea saccharalis*. ¿Cuál es el efecto en la población de larvas de *Diatraea saccharalis* al establecer una estrategia de control óptimo, liberando artificialmente una población de avispas *Cotesia flavipes* como medida de control [21], con el propósito de mitigar los daños en los tallos de la caña de azúcar?

Entiéndase por liberación artificial, la liberación de avispas de *Cotesia flavipes* cultivadas en laboratorio, bajo condiciones ideales y que incrementarán la población total de avispas, incluidas las ya existentes.

## 2.2 JUSTIFICACIÓN

Dada la situación de riesgo financiero y calidad del producto que representa la presencia del gusano barrenador *Diatraea saccharalis* para el sector de producción de caña de azúcar en la región del Valle del Cauca, se analizará un modelo matemático que permita evaluar los resultados de la intervención de un control óptimo, utilizando enemigos naturales, para la disminución de la proliferación de esta plaga y con ello impactar el componente económico y de calidad en el producto en los procesos de control de plagas.

Para ello se introduce inicialmente un modelo de tipo huésped–parasitoide [40] que representa la interacción entre estados biológicos de *Diatraea*

*saccharalis* (huésped) y *Cotesia flavipes* (parasitoide), teniendo en cuenta modelos conocidos en la literatura entre los cuales se pueden citar: Modelo depredador-presa de Lotka-Volterra [4], modelos continuos entre poblaciones [5,24], Modelo Nicholson-Bailey [6,12,14], entre otros.

Posteriormente, se formula un problema de control óptimo que minimiza la cantidad de *Cotesia flavipes* que deben liberarse con el objeto de reducir la población del gusano barrenador *Diatraea saccharalis*.



### 3 OBJETIVOS

#### 3.1 OBJETIVO GENERAL

Aplicar la teoría de control óptimo al modelo biológico que representa la dinámica de las poblaciones de la larva de *Diatraea saccharalis* y su enemigo natural la avispa *Cotesia flavipes* [23], para resolver el problema ocasionado por las larvas de *Diatraea saccharalis* que barrenan el tallo de la caña de azúcar y evaluar el efecto de los resultados obtenidos mediante el principio del máximo de Pontryagin.

#### 3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Formular un modelo de tipo hospedero-parasitoide [20] que represente la dinámica de la interacción entre *Diatraea saccharalis* y *Cotesia flavipes*.
- Analizar el modelo propuesto identificando puntos de equilibrio y la estabilidad del sistema.
- Formular un problema de control que permita identificar la manera óptima de disminuir la población de *Diatraea saccharalis* por medio de liberación artificial de la avispa *Cotesia flavipes*, propagada en laboratorio.
- Resolver el problema de control aplicando el principio del máximo de Pontryagin.

## 4 ESTADO DEL ARTE

Dentro de los trabajos encontrados sobre modelación de procesos de control frente a problemas de plaga barrenadora, en particular *Diatraea saccharalis*, se destacan: el trabajo de Marat Rafikov y Holanda Limeira, de la Universidad Federal de ABC, Santo André, Sao Paulo, Brasil [8]. En este modelo se presenta el hospedero *Diatraea saccharalis* en estado de huevos y larval. El huésped *Trichogramma Zucchi* (*Hymenóptera: Trichogrammatidae*) se presenta a partir de huevos parasitados. Una estrategia de control en retroalimentación lineal es propuesta en este trabajo, como manera de introducir el enemigo natural en el ambiente del barrenador.

Modelo Rafikov-Limeira.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \beta \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) x_1 - m_1 x_1 - n_1 x_1 - \alpha x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1 x_2 - m_2 x_2 - n_2 x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = n_1 x_1 - m_3 x_3 - n_3 x_3 \end{cases}$$

Con:

$x_1$ : Cantidad de huevos de *Diatraea saccharalis* en un tiempo t cualquiera.

$x_2$ : Cantidad de huevos parasitados.

$x_3$ : Cantidad de larvas de *Diatraea saccharalis* en un tiempo t cualquiera.

$\beta$ : Tasa de reproducción de *Diatraea saccharalis*.

$\alpha$ : Tasa de parasitismo.

$k$ : Capacidad de carga del ambiente.

$n_1$ : Fracción de huevos de *Diatraea saccharalis* de los cuales brota el parasitoide.

$n_2$ : Fracción de huevos parasitados de *Diatraea saccharalis* de los cuales emergerá un adulto parasitoide.

$n_3$ : Fracción de larvas que pasan al estado de pupa.

$m_1$ : Mortalidad natural de huevos de *Diatraea saccharalis*.

$m_2$ : Mortalidad natural de huevos parasitados.

$m_3$ : Mortalidad natural de las larvas de *Diatraea saccharalis*.

$\gamma$ : Tasa de parasitismo.

$\delta$ : Número de parasitoides que emergen de un huevo parasitado.

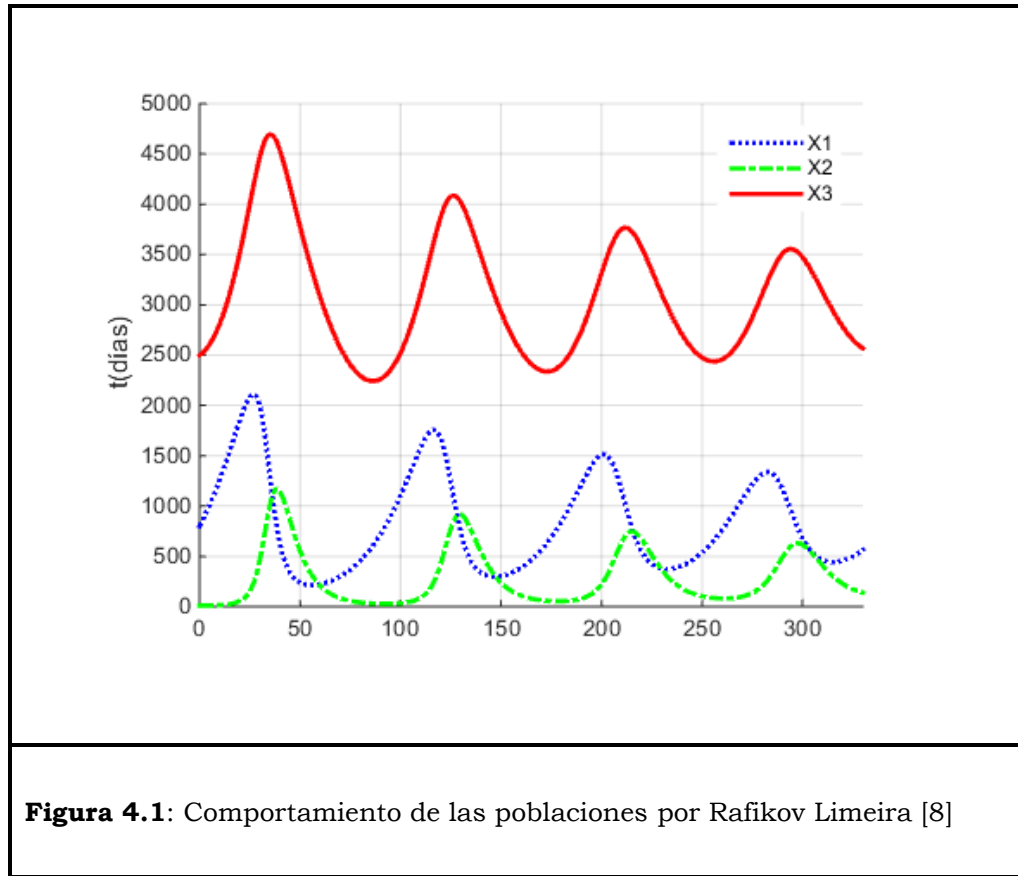
Los valores de los parámetros están dados por:

$$n_1 = 0.1 - n_2 = 0.1 - n_3 = 0.02439 - m_1 = 0.03566 - m_2 = 0.03566$$

$$m_3 = 0.00256 - k = 25000$$

El valor de  $\beta$  es determinante para la estabilidad de los puntos de equilibrio y el valor utilizado se elige a partir de la condición  $\beta < m_1 + n_1 = 0.13566$

La simulación numérica refleja la evolución de las poblaciones de huevos, huevos parasitados y larvas de *Diatraea saccharalis*.



**Figura 4.1:** Comportamiento de las poblaciones por Rafikov Limeira [8]

Al incluir el control  $U$  que representa la tasa de introducción adicional de huevos parasitados, el modelo [8] se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \beta \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) x_1 - m_1 x_1 - n_1 x_1 - \alpha x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_1 x_2 - m_2 x_2 - n_2 x_2 + U \\ \frac{dx_3}{dt} = n_1 x_1 - m_3 x_3 - n_3 x_3 \end{cases}$$

La estrategia de control del modelo indica que “*gran cantidad de parasitoides tiene que ser introducida en los primeros días...*” [8], “*Esta estrategia dirige el ecosistema al punto de equilibrio estable que se alcanza a los 40 días.*”

*Después de este periodo, de acuerdo con la estrategia de control propuesta anteriormente, es necesario aplicar la constante de control 12.15 huevos parasitados por día. Usar esta constante de control, no es económicamente ventajoso. En las prácticas agrícolas, éste puede ser sustituido por liberaciones periódicas de una pequeña población de enemigos naturales” [8].*

La diferencia de este modelo, con el modelo del presente trabajo es que *Cotesia flavipes* parasita la larva de *Diatraea saccharalis*, por lo que resulta de suma importancia considerar la población de huevos y adultos de *Cotesia flavipes* como variables influyentes del modelo. Adicionalmente, se abordó la solución desde otro enfoque, aplicando el principio del máximo de Pontryagin para obtener la solución numérica mediante el algoritmo backward-forward [26, 33, 44, 45].

De otro lado, se quiere destacar el modelo hospedero-parásito de Nicholson-Balely [9], el cual se presenta mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

Modelo Nicholson-Balely

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = R_0 H e^{-\alpha P} \\ \frac{dP}{dt} = H(1 - e^{-\alpha P}) \end{cases}$$

Con:

$H$ : Densidad del huésped.

$P$ : Densidad del parasitoide.

$R_0$ : Tasa de crecimiento del huésped sin ser parasitado.

$\alpha$ : Área de búsqueda del parasitoide relacionada con su eficacia.

Este modelo considera las poblaciones genéricas del huésped y del parasitoide, por lo que su importancia radica en constituirse en una ruta de investigación.

En el presente trabajo se ha tratado de considerar los estados biológicos más importantes en la dinámica del modelo.

Finalmente, consideramos el modelo hospedero–parasitoide propuesto por el doctor Carlos Castillo Chávez [43], gran autoridad en el tema quien con sus comentarios, proporcionó un parte de tranquilidad en la validez del modelo que representa la dinámica entre las especies, motivo de investigación en este trabajo. El modelo del doctor Castillo considera las variables hospedero susceptibles, hospederos parasitados y parasitoides adultos, a diferencia del modelo del presente trabajo en donde se tienen en cuenta estados biológicos de cada uno de ellos.

$$\begin{cases} S' = \beta - lPS - vS \\ L' = lPS - mL + \delta L \\ P' = mL - nP \end{cases}$$

Con:

S: Hospederos susceptibles.

L: Hospederos parasitados.

P: Parasitoides adultos.

$\beta$ : tasa de adición de la pupa de la mosca proveniente del medio ambiente.

$l$ : Alguna medida de fecundidad del parasitoide en su estado adulto.

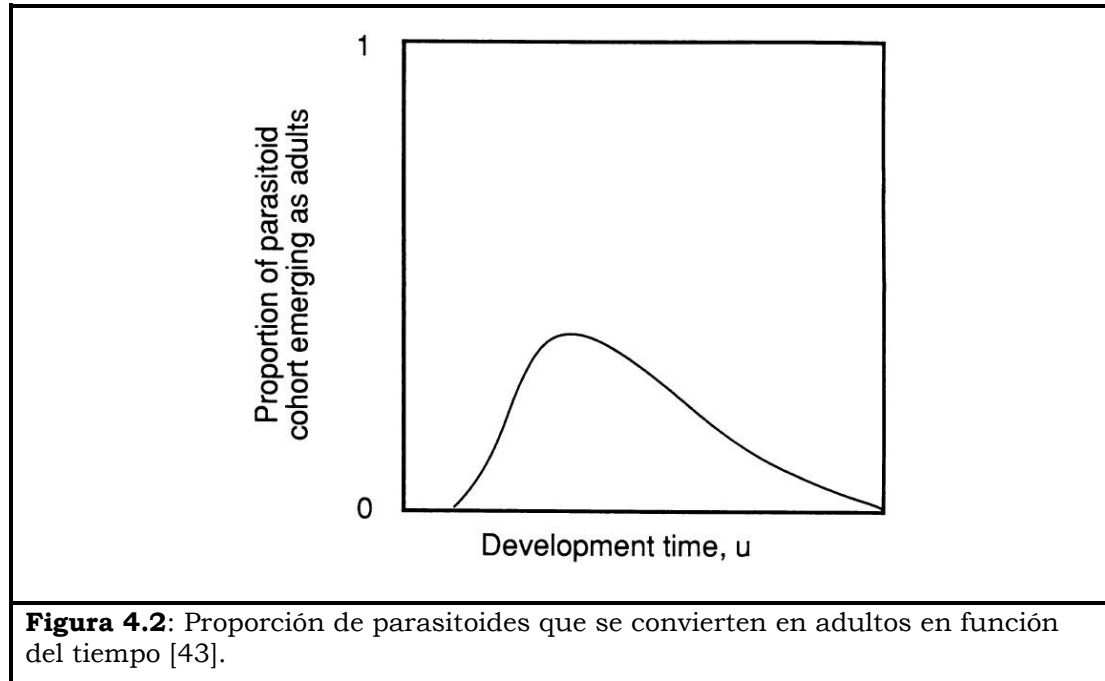
$v$ : Tasa de maduración de la mosca.

$m$ : Tasa de maduración de la larva del parasitoide.

$\delta$ : Tasa de mortalidad de la larva del parasitoide.

$n$ : Tasa de mortalidad del parasitoide en estado adulto.

La simulación del modelo muestra la proporción de parasitoides que se convierten en adultos en función del tiempo.



El estado del arte proporciona la oportunidad de introducir un modelo nuevo incluyendo un enemigo natural de los gusanos barrenadores que recientemente construye asentamientos en el Valle del Cauca. Las escasas investigaciones existentes en la región acerca de la eficacia de la parasitación de la avispa *Cotesia flavipes* sobre *Diatraea saccharalis* y de sus parámetros destacan la pertinencia del trabajo por cuanto, de ser exitoso, podría mejorar la calidad y disminuir los costos de la producción de azúcar en el valle del río Cauca. El modelo del presente trabajo incluye *Cotesia flavipes*, cuyos huevos parasitan la larva de *Diatraea saccharalis*.

## 5 MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan las definiciones y teoremas básicos necesarios que fortalecen la teoría de Control Óptimo.

Haciendo un recorrido por la conceptualización de los sistemas de ecuaciones diferenciales, sus puntos de equilibrio y análisis de estabilidad, matriz Jacobiana y los teoremas más importantes para el desarrollo de este trabajo, incluyendo como eje central el principio del máximo de Pontryagin.

### 5.1 Definición de ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, es una ecuación de la forma  $y' = h(t, y)$  donde  $h: (A \subseteq \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función y  $y: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es solución si satisface la ecuación diferencial [25].

### 5.2 Definición de sistema de ecuaciones diferenciales

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma  $y'_i = h_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  donde  $h_i: (A \subseteq \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  es solución si todos los argumentos satisfacen simultáneamente las ecuaciones del sistema.



### 5.3 Definición de variable de control.

Una variable de control  $U: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $U = U(t)$  es una función continua a trozos, asociada a una función diferenciable por tramos  $X: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  definida por  $X(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$  llamada variable de estado. Es preciso destacar que cada cambio en la variable de control determina cambios en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales, lo cual muestra una dependencia de la variable de estado  $X(t)$  con respecto a la variable de control  $U(t)$ , de aquí que se interprete tal dependencia como si a  $U$  le correspondiese una  $X$ , es decir  $X = X(U)$  a pesar que la dependencia real que tienen es con respecto a  $t$  [26]. En el presente trabajo y en respuesta a la cantidad de estados biológicos en los que se divide el total de la población, se va a considerar  $n = 5$ .

### 5.4 Definición variable de control óptimo.

Una variable de control óptimo es una función  $U_m(t)$  que optimiza un funcional integral de la forma  $J(U) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, X(t), U(t)) dt$ , sujeta al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden  $X' = g(t, X(t), U(t))$ , con condición inicial  $X(t_0)$ . ( $f$  y  $g$  son funciones continuamente diferenciables). La variable de estado óptimo, es la variable de estado  $X_m(t)$  asociada a  $U_m(t)$ . Es decir, la variable de control  $U_m(t)$ , asociada a una variable de estado  $X_m(t)$  determina un máximo de  $J$ , si  $J(U) \leq J(U_m) < \infty$ , para todas las variables de control continuas a trozos  $U$ , por lo que el proceso que se lleva a cabo para establecer un control óptimo, está representado por la pareja  $(U_m(t), X_m(t))$ .

Para hallar la pareja  $(U_m(t), X_m(t))$  se debe hallar la solución del problema de control.

$$\max_{U \in \mathfrak{C}} J(U)$$

$$\text{Sujeto a: } X' = g(t, X(t), U(t))$$

$$X(t_0) = X_0$$

$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}[0, \infty)$  Conjunto de funciones continuas por tramos

### 5.5 Definición de función cóncava

Una función continua  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es cóncava en  $[a, b]$ , si  $\alpha h(t_1) + (1 - \alpha)h(t_2) \leq h(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2)$  para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$  y cualquier par de puntos  $t_1, t_2 \in [a, b]$ . La función  $h$  es convexa si su opuesta  $-h$  es cóncava.

En el cálculo es usual hablar de cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba. Este concepto garantiza la existencia del máximo o del mínimo.

### 5.6 Definición de punto de equilibrio

Un punto de equilibrio (punto crítico) [30], de un sistema  $y'_i = h_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , es un punto  $P_e \in A \subseteq \mathbb{R}_+^n$  tal que  $h_i(P_e) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## 5.7 Definición de matriz jacobiana

La matriz jacobiana en un punto de equilibrio  $p_e$ , del sistema  $y'_i = h_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , es la matriz cuadrada de orden  $n$ , que se denota  $\mathfrak{J}(g(p_e))$  y está definida por  $\mathfrak{J}(g(p_e)) = (a_{ij}) = \left( \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(p_e) \right)_{n \times n}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y todo  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Las derivadas parciales  $\frac{\partial h_i}{\partial y_j}$  se determinan a partir de cada una de las ecuaciones del sistema.

Es decir:

$$\mathfrak{J}(g(p_e)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(p_e) & \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(p_e) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_{n-1}}(p_e) & \frac{\partial h_1}{\partial y_n}(p_e) \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1}(p_e) & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(p_e) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial y_{n-1}}(p_e) & \frac{\partial h_2}{\partial y_n}(p_e) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_1}(p_e) & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_2}(p_e) & \dots & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_{n-1}}(p_e) & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_n}(p_e) \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1}(p_e) & \frac{\partial h_n}{\partial y_2}(p_e) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial y_{n-1}}(p_e) & \frac{\partial h_n}{\partial y_n}(p_e) \end{pmatrix}$$

$h_j$  indica la ecuación  $j$ ésima del sistema para  $j = 1, 2, 3, 4, \dots, n$

## 5.8 Definición de valores propios

Un vector propio de una matriz cuadrada  $\mathbb{A}$  de orden  $n$ , es un vector  $\vec{v} \neq 0$ , tal que  $\mathbb{A}\vec{v} = r\vec{v}$  para algún número  $r$ .

El número  $r$  es el valor propio [27] de  $\mathbb{A}$  asociado al vector propio  $\vec{v}$ . Los valores propios se calculan resolviendo la ecuación  $\det(\mathbb{A} - r\mathbb{I}) = 0$ .

El determinante se iguala a cero para garantizar que el sistema homogéneo  $\mathbb{A}\vec{v} - r\vec{v} = \vec{0}$ , con  $\vec{v} \neq 0$  tenga infinitas soluciones [28, 29].

## 5.9 Teorema de linealización de Lyapunov - Poincaré

Un punto crítico de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de primer orden es asintóticamente estable si y sólo si, los valores propios de la matriz jacobiana poseen parte real negativa.

Un punto crítico de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden es inestable, si y sólo si, la matriz jacobiana del sistema posee al menos un valor propio con parte real positiva [47, RW15].

## 5.10 Teorema regla de Leibniz

Sean  $h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\frac{\partial h}{\partial t}$  funciones continuas para  $a \leq t \leq b$  y  $c \leq x \leq d$  con  $c < d$ .

Sea  $J = \int_a^b h(t, x)dt$ , entonces  $J$  es diferenciable y además  $\frac{dJ}{dt} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} h(t, x)dt$ .

En la versión del teorema del principio del máximo de Pontryagin que se presenta a continuación, se hace un bosquejo de demostración que corresponde a una explicación más detallada de la demostración del teorema 1.2 del libro [26]. Es preciso destacar que los teoremas 5.11 y 5.12 establecen las condiciones necesarias para resolver un problema de control óptimo.

### 5.11 Teorema principio del máximo de Pontryagin.

Si  $U_m: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  es el control óptimo y  $X_m: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la variable de estado asociada, correspondientes al problema:

$$\max_{U \in \mathfrak{C}} J(U)$$

$$\text{Sujeto a: } X' = g(t, X(t), U(t))$$

$$X(t_0) = X_0$$

$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}[0, \infty)$  Conjunto de funciones continuas por tramos

Existe una función diferenciable por tramos  $\lambda(t): I \rightarrow \mathbb{R}^n$  llamada función adjunta tal que:

$$\mathcal{H}(t, X_m(t), U(t), \lambda(t)) \leq \mathcal{H}(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t))$$

Para todas las variables de control continuas por tramos  $U(t)$  en  $t \in [t_0, t_1]$ , donde  $\mathcal{H}$ , llamado Hamiltoniano está definido por:

$$\mathcal{H} = f(t, X(t), U(t)) + \lambda(t)g(t, X(t), U(t))$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t))$$

y

$$\lambda(t_1) = 0$$

La ecuación  $\lambda'(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t))$  es llamada ecuación adjunta y  $\lambda(t_1) = 0$  es llamada condición de transversalidad.

En el presente trabajo  $n = 5$

Demostración:

Sean  $U_m(t)$  la variable de Control Optima (una función continua a trozos) y  $X_m(t)$  la variable de Estado Asociada (una función diferenciable a trozos).

Para toda función  $h(t)$ , continua a trozos, acotada en  $\mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$ , la función  $U_\varepsilon(t)$  definida por  $U_\varepsilon(t) = U_m(t) + \varepsilon h(t)$  es también una función continua a trozos y determina otra variable de control con su correspondiente variable de estado  $X_\varepsilon(t)$ . Dado que todas las trayectorias de las variables de estado tienen el mismo punto inicial, se tiene que  $X_\varepsilon(0) = X_0$  para todo  $\varepsilon > 0$ .

Por una parte  $\left. \frac{\partial U_\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = h(t)$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

Además, para  $t \in \mathbb{R}$

$$|U_\varepsilon(t) - U_m(t)|_{\mathbb{R}} \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |U_\varepsilon(t) - U_m(t)|$$

$$\Rightarrow |U_\varepsilon(t) - U_m(t)|_{\mathbb{R}} \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |U_m(t) + \varepsilon h(t) - U_m(t)|$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |U_\varepsilon(t) - U_m(t)|_{\mathbb{R}} \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |\varepsilon h(t)| \\
&\Rightarrow |U_\varepsilon(t) - U_m(t)|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon \sup_{s \in \mathbb{R}} |h(t)| \\
&\Rightarrow |U_\varepsilon(t) - U_m(t)|_{\mathbb{R}} \leq \varepsilon M \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon(t) = U_m(t), \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Por una parte  $\left. \frac{dU^\varepsilon(t)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$  existe para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Además, como  $U_\varepsilon(t) \rightarrow U_m(t)$  uniformemente para cada  $t \in \mathbb{R}$  y  $g(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t))$  una función continuamente diferenciable, entonces  $X_\varepsilon(t) \rightarrow X_m(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En efecto,

Toda Variable de Estado  $X(t)$  satisface el sistema

$$\begin{aligned}
&X'(t) = g(t, X(t), U(t)), \\
&\Rightarrow X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t [g(s, X_\varepsilon(s), U_\varepsilon(s))] ds
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|X_\varepsilon(t) - X_m(t)| = \left| \int_{t_0}^t [g(s, X_\varepsilon(s), U_\varepsilon(s)) - g(s, X_m(s), U_m(s))] ds \right|$$

Sean:

$$\begin{aligned}
&P_\varepsilon = (s, X_\varepsilon(s), U_\varepsilon(s)) \text{ y } P_m = (s, X_m(s), U_m(s)) \\
&\Rightarrow |X_\varepsilon(t) - X_m(t)| \leq \int_{t_0}^t |g(s, X_\varepsilon(s), U_\varepsilon(s)) - g(s, X_m(s), U_m(s))| ds \\
&\Rightarrow |X_\varepsilon(t) - X_m(t)| \leq \int_{t_0}^t |g(P_\varepsilon) - g(P_m)| ds.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad del valor medio

$$|X_\varepsilon(t) - X_m(t)| \leq \int_{t_0}^t \sup |Dg[s, \tau X_\varepsilon(s) + (1 - \tau)X_m(s), \tau U_\varepsilon(s) + (1 - \tau)U_m(s)]| [|X_\varepsilon(s) - X_m(s)| + |U_\varepsilon(s) - U_m(s)|] ds, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Si

$$K(s) = \sup |Dg[s, \tau X_\varepsilon(s) + (1 - \tau)X_m(s), \tau U_\varepsilon(s) + (1 - \tau)U_m(s)]|, \quad 0 \leq \tau \leq 1,$$

Entonces:

$$|X_\varepsilon(t) - X_m(t)| \leq \int_{t_0}^t K(s) |X_\varepsilon(s) - X_m(s)| ds + \int_{t_0}^t K(s) |U_\varepsilon(s) - U_m(s)| ds.$$

Por la desigualdad de Gronwall-Bellman [33]

$$|X_\varepsilon(t) - X_m(t)| \leq \left[ \int_{t_0}^t K(s) |U_\varepsilon(s) - U_m(s)| ds \right] e^{\int_{t_0}^t K(s) ds}$$

Por (5.1)

$$|X_\varepsilon(t) - X_m(t)| \leq \left[ \int_{t_0}^t K(s) \varepsilon M ds \right] e^{\int_{t_0}^t K(s) ds}$$

Es decir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_\varepsilon(t) = X_m(t), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}$$

Ahora bien, el funcional objetivo en  $U_\varepsilon$  está definida por:

$$\mathcal{J}(U_\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t)) dt$$



Por lo tanto,

$$J(U_\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t)) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t) X_\varepsilon(t)] dt + \lambda(t_0) X_\varepsilon(t_0) - \lambda(t_1) X_\varepsilon(t_1),$$

Para toda función diferenciable a trozos  $\lambda(t)$  definida en  $[t_0, t_1]$ .

En efecto se observa que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t) X_\varepsilon(t)] dt = \lambda(t_1) X_\varepsilon(t_1) - \lambda(t_0) X_\varepsilon(t_0)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\lambda(t) X_\varepsilon(t)] dt + \lambda(t_0) X_\varepsilon(t_0) - \lambda(t_1) X_\varepsilon(t_1) = 0.$$

$$\Rightarrow J(U_\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ f(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t)) + \frac{d}{dt} [\lambda(t) X_\varepsilon(t)] \right] dt + \lambda(t_0) X_\varepsilon(t_0) - \lambda(t_1) X_\varepsilon(t_1)$$

$$\Rightarrow J(U_\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t)) + \lambda'(t) X_\varepsilon(t) + \lambda(t) X'_\varepsilon(t)] dt + \lambda(t_0) X_0 - \lambda(t_1) X_\varepsilon(t_1).$$

Como  $X_\varepsilon(t)$  es una variable de estado, entonces satisface el sistema  $X'(t) = g(t, X(t), U(t))$ , por lo tanto

$$J(U_\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t)) + \lambda'(t) X_\varepsilon(t) + \lambda(t) g(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t))] dt + \lambda(t_0) X_0 - \lambda(t_1) X_\varepsilon(t_1).$$

Ahora bien, la derivada de  $J(U_\varepsilon)$  con respecto a  $\varepsilon$ , en  $\varepsilon = 0$ , es cero, dado que el máximo del funcional  $J$  se encuentra cuando  $U = U_m$ .

Esto es,

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} [J(U_\varepsilon)] \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} [J(U_\varepsilon)] \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t)) + \lambda'(t)X_\varepsilon(t) + \\ &\lambda(t)g(t, X_\varepsilon(t), U_\varepsilon(t))] dt \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\lambda(t_1)X_\varepsilon(t_1)] \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \\ \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial f}{\partial X_\varepsilon} \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial U_\varepsilon} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \lambda'(t) \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \lambda(t) \left( \frac{\partial g}{\partial X_\varepsilon} \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial g}{\partial U_\varepsilon} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} - \\ &\lambda(t_1) \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \end{aligned}$$

Sean:

$$\frac{\partial f}{\partial X_\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial U_\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial U_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t))$$

$$\frac{\partial g}{\partial X_\varepsilon} = \frac{\partial g}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t))$$

$$\frac{\partial g}{\partial U_\varepsilon} = \frac{\partial g}{\partial U_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t))$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial X_\varepsilon} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial X_\varepsilon} + \lambda'(t) \right) \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0} + \left( \frac{\partial f}{\partial U_\varepsilon} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial U_\varepsilon} \right) \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \right] dt - \\ \lambda(t_1) \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Como  $\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) = h(t)$ , para toda función  $h(t)$  continua a trozos acotada en  $\mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$  entonces,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial X_\varepsilon} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial X_\varepsilon} + \lambda'(t) \right) \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0} + \left( \frac{\partial f}{\partial U_\varepsilon} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial U_\varepsilon} \right) h(t) \right] dt - \lambda(t_1) \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t_1) \Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Sean  $\frac{\partial f}{\partial X_\varepsilon} + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial X_\varepsilon} + \lambda'(t) = 0$  y  $\lambda(t_1) = 0$  (coeficientes de  $\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial \varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0}$ ).

Ahora bien,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t)) = \frac{\partial f}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t)) + \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t))$$

Así quedan expuestas las condiciones necesarias del teorema que determinan la ecuación adjunta y la condición de frontera

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t)) \quad \text{Ecuación adjunta} \quad (5.3)$$

$$\lambda(t_1) = 0 \quad \text{Condición de Transversalidad} \quad \blacksquare \quad (5.4)$$

Un tratamiento más riguroso de este teorema, se puede revisar en los trabajos originales de Pontryagin [34].

## 5.12 Teorema: Condición de optimalidad

Si  $f(t, X(t), U(t))$  y  $g(t, X(t), U(t))$  son dos funciones continuamente diferenciables y cóncavas en  $U$ . Supongamos que  $U_m(t)$  es el control óptimo y  $X_m(t)$  su variable de estado correspondiente y  $\lambda(t)$  una función

diferenciable a trozos con  $\lambda(t) \geq 0$  para todo  $t \in I$ . Supongamos además que para todo  $t$  talque  $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\mathcal{H}_U(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t)) = 0$$

Entonces para toda variable de control  $U(t)$  y todo  $t$  talque  $t_0 \leq t \leq t_1$  se tiene que,

$$\mathcal{H}(t, X_m(t), U(t), \lambda(t)) \leq \mathcal{H}(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t))$$

Finalmente, el teorema 5.13 establece las condiciones suficientes que garantizan la existencia de solución del problema [26].

### 5.13 Teorema: Condición para el mínimo

Sea

$$J(U) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, X(t), U(t)) dt$$

$$\text{Sujeto a } X'(t) = g(t, X(t), U(t))$$

$$X(t_0) = X_0$$

Suponga que  $f(t, X(t), U(t))$  y  $g(t, X(t), U(t))$  son dos funciones continuamente diferenciables en cada uno de sus argumentos y cóncava en

$X$  y  $U$ . Suponga que  $U_m$  es el Control Optimo,  $X_m$  su variable de estado asociada y  $\lambda(t)$  una función diferenciable a trozos que satisfacen:

$$\mathcal{H}_U(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t)) = 0$$

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m(t), U_m(t), \lambda(t))$$

$$\lambda(t_1) = 0$$

$$\lambda(t) \geq 0$$

para  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Entonces para todos los controles  $U(t)$  se tiene

$$J(U_m(t)) \geq J(U(t))$$

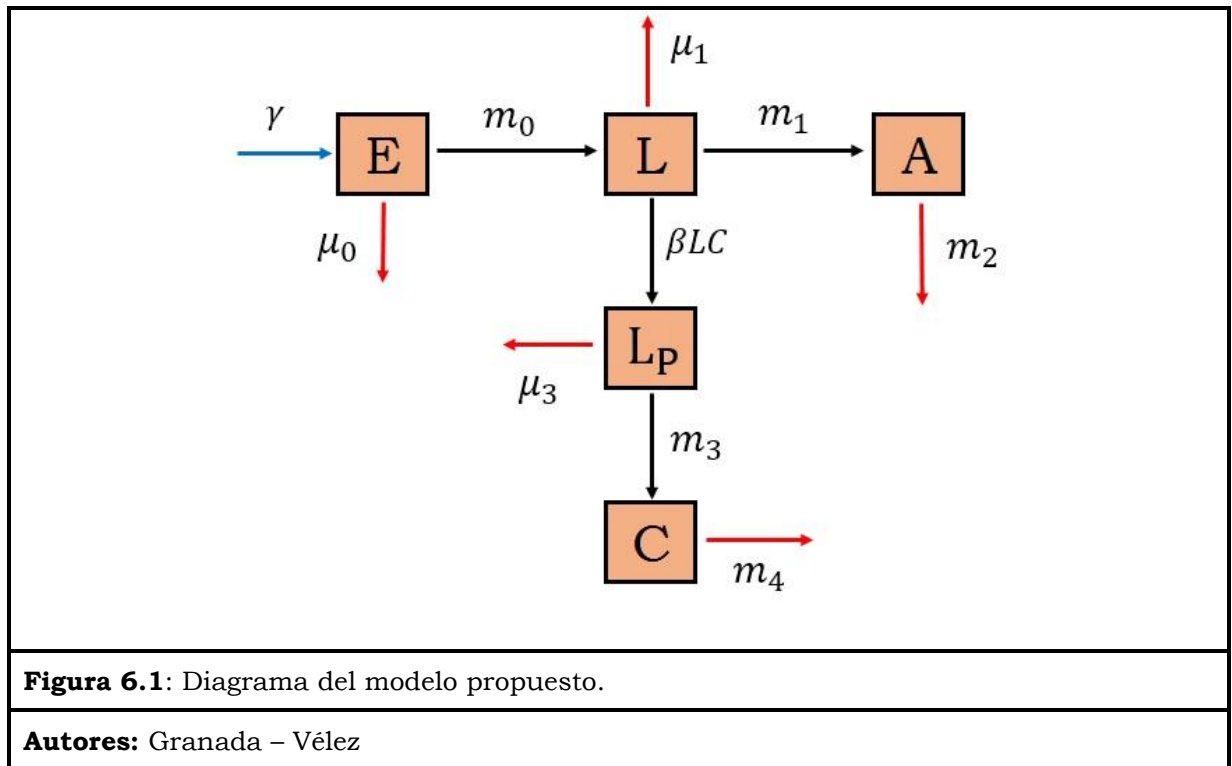
Con una notación simplificada, las anteriores condiciones equivalen a:

$$\mathcal{H}_U(t, X_m, U_m, \lambda) = f_U + \lambda g_U = 0$$

$$\lambda' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_\varepsilon}(t, X_m, U_m, \lambda) = -(f_X + \lambda g_X)$$

## 6 MODELO DIATRAEA SACCHARALIS-COTESIA FLAVIPES

En este capítulo se formula el modelo matemático de tipo hospedero-parasitoide [20] que representa la dinámica de la interacción entre *Diatraea saccharalis* y *Cotesia flavipes*. Con este propósito, se ha dividido el total de la población, en 5 estados biológicos. La dinámica del modelo, propuesto en el presente trabajo, sigue el flujo del siguiente diagrama de compartimientos.



El modelo incluye *Cotesia flavipes* que, siendo enemigo natural, parasita la larva del gusano barrenador, *Diatraea saccharalis* y aprovecha que la mortalidad natural de los huevos de *Diatraea saccharalis* disminuye la

población potencial de la plaga del tallo de la caña de azúcar. Esto configura una diferencia con otros modelos que consideran especies que parasitan los huevos y tienen una población más grande que combatir. Sin embargo, el modelo considera aún los huevos de *Diatraea saccharalis*, dado que es el estado biológico que afecta directamente la población de sus larvas.

Tabla 6.1 Descripción de las variables

Estado	Descripción
$E$	Huevos de <i>Diatraea saccharalis</i>
$L$	Larvas de <i>Diatraea saccharalis</i>
$A$	Adultos de <i>Diatraea saccharalis</i>
$L_p$	Larvas de <i>Diatraea saccharalis</i> Parasitadas por <i>Cotesia flavipes</i>
$C$	Adultos de <i>Cotesia flavipes</i>

Con las consideraciones anteriores, la variable de estado del modelo es:

$$X(t) = (E(t), L(t), A(t), L_p(t), C(t),) \quad (6.1)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, que representa la dinámica de interacción entre los estados biológicos de las especies es:

$$X'(t) = g(t, E(t), L(t), A(t), L_p(t), C(t), ) \quad (6.2)$$

Donde  $g: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+^5$  es una función continuamente diferenciable. El dominio de  $g$  en  $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}_+^5$  indica las condiciones de no negatividad de cada uno de sus argumentos y los valores de  $g$  representan la razón de cambio de la población en los estados biológicos de *Diatraea saccharalis* y de *Cotesia flavipes* considerados. Lo anterior evidencia la rapidez con la que los individuos entran y salen de un estado a otro a través del tiempo, afectando la población de cada uno de ellos de acuerdo a los siguientes lineamientos:

La razón de cambio de la densidad de la población de Huevos  $E$  de *Diatraea saccharalis* es:

$$\frac{dE}{dt} = \gamma A - (m_0 + \mu_0)E$$

Donde  $\gamma$  es el factor de crecimiento de la población de huevos,  $m_0$  es la tasa de transición del estado de huevos al estado de larvas de *Diatraea saccharalis* en estado de huevos y  $\mu_0$  es la tasa de mortalidad natural de la población de huevos de *Diatraea saccharalis*.

La razón de cambio de la densidad de la población de Larvas  $L$  de *Diatraea saccharalis* es:

$$\frac{dL}{dt} = m_0 E - \beta LC - (m_1 + \mu_1)L$$

Donde  $\beta$  es la tasa de fecundidad del parasitoide, asumiendo que la velocidad de parasitación de larvas de *Diatraea saccharalis* es directamente



proporcional al número de contactos entre ellas (larvas de *Diatraea saccharalis* que dejan de ser sanas),  $m_1$  es la tasa de transición del estado de larva al estado de adulto de *Diatraea saccharalis* en estado de larva y  $\mu_1$  es la tasa de mortalidad de larvas parasitadas de *Diatraea saccharalis*.

La razón de cambio de la población Adulta  $A$  de *Diatraea saccharalis* es:

$$\frac{dA}{dt} = m_1L - m_2A$$

Donde  $1/m_2$  es el tiempo esperado de *Diatraea saccharalis* en estado de adulto.

La razón de cambio de la densidad de la población de Larvas  $L_p$  de *Diatraea saccharalis* parasitadas por *Cotesia flavipes* es:

$$\frac{dL_p}{dt} = k\beta LC - (m_3 + \mu_3)L_p$$

Donde  $k$  es el factor que determina el número de larvas de *Cotesia flavipes* que emergen del interior del hospedero, es decir, de las  $\beta LC$  que fueron parasitadas, emergen  $k\beta LC$  larvas de *Cotesia flavipes*,  $1/m_3$  es el tiempo esperado para que emerjan adultos de *Cotesia flavipes* y  $\mu_3$  es la tasa de mortalidad de larvas parasitadas.

Finalmente, la razón de cambio de la población adulta  $C$  de *Cotesia flavipes* es:

$$\frac{dC}{dt} = m_3L_p - m_4C$$

Donde  $1/m_4$  es el tiempo esperado de adultez de *Cotesia flavipes*.

### 6.1 Formulación del modelo *Diatraea saccharalis-Cotesia flavipes*

Por lo anterior, la función  $g$  que describe la dinámica de parasitación de *Cotesia flavipes* (huésped) sobre *Diatraea saccharalis* (hospedero), de acuerdo al diagrama de la figura 6.1, está definida por el siguiente Sistema de Ecuaciones Diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \gamma A - (m_0 + \mu_0)E \\ \frac{dL}{dt} = m_0E - \beta LC - (m_1 + \mu_1)L \\ \frac{dA}{dt} = m_1L - m_2A \\ \frac{dL_p}{dt} = k\beta LC - (m_3 + \mu_3)L_p \\ \frac{dC}{dt} = m_3L_p - m_4C \end{cases} \quad (6.3)$$

Tabla 6.2 Descripción de Parámetros del sistema

	Descripción	Valor parámetro	Referencia bibliográfica
$\gamma$	Factor de crecimiento de la población de huevos.	9	-
$\beta$	Tasa de fecundidad del parasitoide.	$\frac{1}{10}$	41

$k$	Factor que determina el número de larvas de <i>Cotesia flavipes</i> que se emergen del interior del hospedero.	2	41
$m_0$	Tasa de transición del estado de huevos al estado de larvas de <i>Diatraea saccharalis</i> .	$\frac{1}{5}$	42
$m_1$	Tasa de transición del estado de larva al estado de adulto de <i>Diatraea saccharalis</i> .	$\frac{1}{22}$	42
$1/m_2$	Tiempo esperado de <i>Diatraea saccharalis</i> en estado de adulto.	6	42
$1/m_3$	Tiempo esperado para que emerjan adultos de <i>Cotesia flavipes</i>	11	41
$1/m_4$	Tiempo esperado de adultez de <i>Cotesia flavipes</i> .	5	41
$\mu_0$	Tasa de mortalidad natural de la población de huevos de <i>Diatraea saccharalis</i> .	$\frac{1}{50}$	-
$\mu_1$	Tasa de mortalidad de larvas de <i>Diatraea saccharalis</i> .	$\frac{9}{200}$	-
$\mu_3$	Tasa de mortalidad de larvas parasitadas de <i>Diatraea saccharalis</i> .	$\frac{1}{100}$	-

Los valores de los parámetros cumplen con la condición de no negatividad y fueron obtenidos de los trabajos presentados en los textos: “Estudio de algunos aspectos biológicos de *Cotesia flavipes* Cameron (Hymenóptera: Braconidae) parasitoide de *Diatraea saccharalis* Fabricius” [41] y “Descripción y daño de los insectos que atacan al arroz, en América Latina”

[42]. Los valores no referenciados fueron supuestos de la investigación. No se llevó a cabo un proceso de estimación de parámetros por cuanto aún no existe una base de datos en la región, que permita hacer tal estimación.

## 7 PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En el modelo del presente trabajo, las funciones  $E(t)$ ,  $L(t)$ ,  $A(t)$ ,  $L_p(t)$  y  $C(t)$  representan las poblaciones de huevos de *Diatraea saccharalis*, larvas de *Diatraea saccharalis*, adultos de *Diatraea saccharalis*, larvas de *Diatraea saccharalis* parasitadas por *Cotesia flavipes* y adultos de *Cotesia flavipes* respectivamente, que interactúan en el medio a través del tiempo como enemigos naturales. Sus tasas de crecimiento están definidas en el sistema (6.2) formado por las ecuaciones escritas en (6.3).

En este capítulo se hace una mirada cualitativa del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo, para obtener resultados que proporcionen respuestas a preguntas tales como las siguientes: ¿Existen valores de los estados biológicos considerados en el modelo, para los cuales las especies coexisten en equilibrio? y, suponiendo que las especies coexisten en equilibrio, si introducimos en un tiempo algunos miembros de las poblaciones de los estados biológicos considerados en el modelo, ¿permanecerán las poblaciones cerca de esos valores de equilibrio para cuando  $t \rightarrow \infty$ ? . De acuerdo con los resultados que arroje el análisis cualitativo del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo, centraremos nuestra atención en aquel punto de equilibrio que presente estabilidad por cuanto tal punto de equilibrio valida biológicamente el sistema.

### 7.1 Linealización del sistema

En esta sección del capítulo se linealizará el sistema de tal forma que, para puntos cercanos a un punto de equilibrio del sistema (6.2) se pueda aproximar a un sistema lineal.

Sean:

$$F = F(E, L, A, L_p, C) = \gamma A - (m_0 + \mu_0)E$$

$$G = G(E, L, A, L_p, C) = m_0E - \beta LC - (m_1 + \mu_1)L$$

$$H = H(E, L, A, L_p, C) = m_1L - m_2A$$

$$I = I(E, L, A, L_p, C) = k\beta LC - (m_3 + \mu_3)L_p$$

$$J = J(E, L, A, L_p, C) = m_3L_p - m_4C$$

Y sea un punto de equilibrio del sistema  $P_e = \begin{pmatrix} E_e \\ L_e \\ A_e \\ L_{p_e} \\ C_e \end{pmatrix}$

Aproximando  $F, G, H, I$  y  $J$  para valores cercanos a  $P_e$  se tiene:

$F(E, L, A, L_p, C)$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\partial F}{\partial E}(P_e)(E - E_e) + \frac{\partial F}{\partial L}(P_e)(L - L_e) + \frac{\partial F}{\partial A}(P_e)(A - A_e) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial L_p}(P_e)(L_p - L_{p_e}) + \frac{\partial F}{\partial C}(P_e)(C - C_e) \end{aligned}$$

$$G(E, L, A, Lp, C)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\partial G}{\partial E}(P_e)(E - E_e) + \frac{\partial G}{\partial L}(P_e)(L - L_e) + \frac{\partial G}{\partial A}(P_e)(A - A_e) \\ &+ \frac{\partial G}{\partial Lp}(P_e)(Lp - Lp_e) + \frac{\partial G}{\partial C}(P_e)(C - C_e) \end{aligned}$$

$$H(E, L, A, Lp, C)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\partial H}{\partial E}(P_e)(E - E_e) + \frac{\partial H}{\partial L}(P_e)(L - L_e) + \frac{\partial H}{\partial A}(P_e)(A - A_e) \\ &+ \frac{\partial H}{\partial Lp}(P_e)(Lp - Lp_e) + \frac{\partial H}{\partial C}(P_e)(C - C_e) \end{aligned}$$

$$I(E, L, A, Lp, C)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\partial I}{\partial E}(P_e)(E - E_e) + \frac{\partial I}{\partial L}(P_e)(L - L_e) + \frac{\partial I}{\partial A}(P_e)(A - A_e) \\ &+ \frac{\partial I}{\partial Lp}(P_e)(Lp - Lp_e) + \frac{\partial I}{\partial C}(P_e)(C - C_e) \end{aligned}$$

$$J(E, L, A, Lp, C)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\partial J}{\partial E}(P_e)(E - E_e) + \frac{\partial J}{\partial L}(P_e)(L - L_e) + \frac{\partial J}{\partial A}(P_e)(A - A_e) \\ &+ \frac{\partial J}{\partial Lp}(P_e)(Lp - Lp_e) + \frac{\partial J}{\partial C}(P_e)(C - C_e) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{pmatrix} \approx \mathfrak{J}(g(P_e)) \begin{pmatrix} E - E_e \\ L - L_e \\ A - A_e \\ Lp - Lp_e \\ C - C_e \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Para valores de  $(E, L, A, Lp, C)$  cercanos a  $P_e$ . Donde  $\mathfrak{J}(g(P_e))$  es la matriz jacobiana evaluada en el punto de equilibrio  $P_e$ .

Por lo tanto, el sistema (6.2) se puede aproximar al sistema lineal definido por:

$$\begin{pmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dL}{dt} \\ \frac{dA}{dt} \\ \frac{dLp}{dt} \\ \frac{dC}{dt} \end{pmatrix} = \mathfrak{J}(g(P_e)) \begin{pmatrix} E - E_e \\ L - L_e \\ A - A_e \\ Lp - Lp_e \\ C - C_e \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Se espera que para valores de  $(E, L, A, Lp, C)$  cercanos a  $P_e$  el comportamiento de las trayectorias del sistema (6.2) sean semejantes a las trayectorias del sistema linealizado (6.5).

## 7.2 Puntos de equilibrio y estabilidad

En esta sección del capítulo se determinarán los puntos de equilibrio del sistema con el fin de asegurar que los valores de los estados biológicos



considerados en el modelo coexistan en equilibrio. Se analizarán aquellos que tengan un sentido biológico ajustado a que existan especies en el medio y a que se cumplan las condiciones de no negatividad naturales en las poblaciones de individuos. La estabilidad en un punto de equilibrio determinará, biológicamente hablando, que los valores de las poblaciones se conservan cerca al punto de equilibrio estable.

Puntos de equilibrio:

$$\gamma A - (m_0 + \mu_0)E = 0 \quad (7.1)$$

$$m_0 E - \beta LC - (m_1 + \mu_1)L = 0 \quad (7.2)$$

$$m_1 L - m_2 A = 0 \quad (7.3)$$

$$k\beta LC - (m_3 + \mu_3)L_p = 0 \quad (7.4)$$

$$m_3 L_p - m_4 C = 0 \quad (7.5)$$

Por (7.1), (7.3), (7.4) y (7.5), se tiene:

$$E = \frac{\gamma}{(m_0 + \mu_0)} A \quad L = \frac{m_2}{m_1} A \quad L = \frac{(m_3 + \mu_3) L_p}{k\beta C} \quad L_p = \frac{m_4}{m_3} C$$

Se factoriza la ecuación (7.2)

$$m_0 E - L(\beta C + (m_1 + \mu_1)) = 0 \quad (7.6)$$

Se reemplaza  $\frac{m_0\gamma}{(m_0+\mu_0)}A - \frac{m_2}{m_1}A(\beta C + (m_1 + \mu_1)) = 0$

Por lo tanto  $A\left(\frac{m_0\gamma}{(m_0+\mu_0)} - \frac{m_2}{m_1}(\beta C + (m_1 + \mu_1))\right) = 0$

$$\Rightarrow A\left(\frac{m_0\gamma}{(m_0+\mu_0)} - \frac{m_2\beta}{m_1}C - \frac{m_2}{m_1}(m_1 + \mu_1)\right) = 0 \quad (7.7)$$

Ahora bien, Por (7.7)

$$A = 0 \Rightarrow E = 0$$

Por (7.6)

$$E = 0 \Rightarrow L(\beta C + (m_1 + \mu_1)) = 0$$

Para  $L = 0$ :

$$L = 0 \Rightarrow L_p = 0$$

$$L_p = 0 \Rightarrow C = 0$$

Entonces el punto de equilibrio  $P_1$  es:

$$P_1 = (0,0,0,0,0)$$

El punto de equilibrio  $P_1$  indica el momento en que el cultivo está libre de plaga, lo cual no corresponde a la situación actual de los cultivos en el Valle del Cauca [36].

Ahora bien, desde un interés netamente matemático se analizará la estabilidad en  $P_1$ .

Para el cálculo numérico de todos los puntos de equilibrio y de los valores propios de las matrices jacobianas correspondientes, se utilizó el software MATHEMATICA.

Matriz jacobiana evaluada en  $P_1$ :

$$\mathfrak{J}(P_1) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{50} & 0 & 9 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{199}{2200} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{22} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{111}{1100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Valores propios de  $\mathfrak{J}(P_1)$ :

$$\lambda_1 = -0.1666667$$

$$\lambda_2 = -0.1009091$$

$$\lambda_3 = -0.377759 - 0.373195i$$

$$\lambda_4 = -0.377759 + 0.373195i$$

$$\lambda_5 = 0.278397$$

Como se puede observar, los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  asociados a  $P_1$  son valores con parte real negativa, mientras que  $\lambda_5$  es un valor propio con parte real positiva. Por el teorema de Lyapunov el punto crítico  $P_1$  es inestable.

Para  $\beta C + (m_1 + \mu_1) = 0$  :

$$\beta C + (m_1 + \mu_1) = 0 \Rightarrow C = -\frac{m_1 + \mu_1}{\beta} \quad (7.8)$$

$$\text{Reemplazando } L_p = \frac{m_4}{m_3} \left( -\frac{m_1 + \mu_1}{\beta} \right) \text{ Por lo tanto } L_p = -\frac{m_4(m_1 + \mu_1)}{m_3\beta} \quad (7.9)$$

Además de (7.3)  $A = 0 \Rightarrow L = 0$

Finalmente, como  $E = 0$

Entonces, el punto de equilibrio  $P_2$  es:

$$P_2 = \left( 0, 0, 0, -\frac{m_4(m_1 + \mu_1)}{m_3\beta}, -\frac{m_1 + \mu_1}{\beta} \right)$$

El valor numérico de  $P_2$  es:

$$P_2 = (0, 0, 0, -1.65833, -0.904545)$$

Las expresiones (7.8) y (7.9) que corresponden a la cuarta y quinta componentes de  $P_2$  son negativas, estableciendo una incongruencia con las condiciones de no negatividad de las poblaciones de individuos. Además, los valores  $E = 0$ ,  $L = 0$  y  $A = 0$  indican que no existe *Diatraea saccharalis* en ninguno de sus estados biológicos considerados. Por lo anterior, el punto de equilibrio  $P_2$  no es viable biológicamente hablando y no representa ningún interés para el trabajo.

Ahora bien, desde un interés netamente matemático se analizará la estabilidad en  $P_2$ .

Matriz jacobiana evaluada en  $P_2$ :

$$\mathfrak{J}(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{50} & 0 & 9 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{22} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{199}{1100} & 0 & -\frac{111}{1100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Valores propios de  $\mathfrak{J}(P_2)$ :

$$\lambda_1 = -0.1666667$$

$$\lambda_2 = -0.1009091$$

$$\lambda_3 = -0.35139 - 0.3679i$$

$$\lambda_4 = -0.35139 - 0.3679i$$

$$\lambda_5 = 0.316114$$

Los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  asociados a  $P_2$  son valores con parte real negativa, mientras que  $\lambda_5$  es un valor propio con parte real positiva. Por el teorema de Lyapunov, el punto crítico  $P_2$  es inestable.

Finalmente, por (7.7)

$$A \neq 0 \Rightarrow \frac{m_0\gamma}{(m_0+\mu_0)} - \frac{m_2\beta}{m_1}C - \frac{m_2}{m_1}(m_1 + \mu_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m_2\beta}{m_1}C = \frac{m_0\gamma}{(m_0+\mu_0)} - \frac{m_2}{m_1}(m_1 + \mu_1)$$

$$\Rightarrow C = \frac{m_1}{m_2\beta} \left( \frac{m_0\gamma}{(m_0+\mu_0)} - \frac{m_2}{m_1} (m_1 + \mu_1) \right)$$

$$\text{Por (7.5) } L_p = \frac{m_4 m_1}{m_3 m_2 \beta} \left( \frac{m_0\gamma}{(m_0+\mu_0)} - \frac{m_2}{m_1} (m_1 + \mu_1) \right)$$

$$\text{Por (7.5) se tiene además que } \frac{L_p}{C} = \frac{m_4}{m_3}$$

$$\text{Por (7.4) } L = \frac{m_3 + \mu_3}{k\beta} \frac{L_p}{C} \Rightarrow L = \frac{(m_3 + \mu_3)m_4}{k\beta m_3}$$

$$\text{Por (7.3) } A = \frac{m_1}{m_2} L \Rightarrow A = \frac{m_1(m_3 + \mu_3)m_4}{m_2 k\beta m_3}$$

$$\text{Por (7.1) } E = \frac{\gamma m_1(m_3 + \mu_3)m_4}{(m_0 + \mu_0)m_2 k\beta m_3}$$

Entonces, el punto de equilibrio  $P_3$  es:

$$P_3 = \left( \frac{\gamma m_1(m_3 + \mu_3)m_4}{(m_0 + \mu_0)m_2 k\beta m_3}, \frac{(m_3 + \mu_3)m_4}{k\beta m_3}, \frac{m_1(m_3 + \mu_3)m_4}{m_2 k\beta m_3}, \frac{m_4 m_1}{m_3 m_2 \beta} \left( \frac{m_0\gamma}{(m_0 + \mu_0)} - \frac{m_2}{m_1} (m_1 + \mu_1) \right) \right)$$

$$P_3 = \left( \frac{\gamma m_1 m_4 M_3}{M_0 m_0 m_2 k\beta}, \frac{m_4 M_3}{k\beta}, \frac{m_1 m_4 M_3}{m_2 k\beta}, \frac{m_4 m_1}{m_3 m_2 \beta} \left( \frac{\gamma}{M_0} - m_2 M_1 \right), \frac{m_1}{m_2 \beta} \left( \frac{\gamma}{M_0} - m_2 M_1 \right) \right)$$

$$P_3 = \left( \frac{\gamma m_1 m_4 M_3}{M_0 m_0 m_2 k\beta}, \frac{m_4 M_3}{k\beta}, \frac{m_1 m_4 M_3}{m_2 k\beta}, \frac{m_4 m_1}{m_3 m_2 \beta} M, \frac{m_1}{m_2 \beta} M \right)$$

Donde

$$M_0 = \frac{(m_0 + \mu_0)}{m_0} = \frac{11}{10}$$

$$M_1 = \frac{(m_1 + \mu_1)}{m_1} = \frac{199}{100}$$

$$M_3 = \frac{(m_3 + \mu_3)}{m_3} = \frac{111}{100}$$

$$M = \frac{\gamma}{M_0} - m_2 M_1 = \frac{51811}{6600}$$

El valor numérico de  $P_3$  es:

$$P_3 = (10.3202, 0.925, 0.252273, 39.2508, 21.4095)$$

El punto  $P_3$  muestra existencia de las especies en todos los estados biológicos considerados y además cumple con las condiciones de no negatividad en cada una de ellas

Matriz jacobiana evaluada en  $P_3$ :

$$\mathfrak{J}(P_3) = \begin{pmatrix} -\frac{11}{50} & 0 & 9 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{270}{121} & 0 & 0 & -\frac{37}{400} \\ 0 & \frac{1}{22} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{51811}{12100} & 0 & -\frac{111}{1100} & \frac{17}{200} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Valores propios de  $\mathfrak{J}(P_3)$ :

$$\lambda_1 = -2.21972$$

$$\lambda_2 = -0.399988$$

$$\lambda_3 = -0.184376$$

$$\lambda_4 = -0.0761051$$

$$\lambda_5 = -0.0054631$$

Todos los valores propios de la matriz jacobiana en  $P_3$  son reales negativos. Por el teorema de Lyapunov el punto de equilibrio  $P_3$  es estable.

### **7.3 Análisis de incertidumbre, puntos de equilibrio y estabilidad**

Para el ajuste del modelo de control biológico se utilizaron valores de los parámetros provenientes de investigaciones realizadas en diversos lugares de Latinoamérica, puesto que aún no se cuenta con investigaciones en la región que permitan tener valores de referencia locales. Sin embargo, conscientes de que dichos valores utilizados en el ajuste podrían cambiar por las condiciones ambientales propias de la región y que estos cambios podrían afectar la estabilidad del sistema, se consideró variabilidad en los parámetros, permitiendo un rango de variación del 10 % para cada uno de ellos (parámetro  $\pm$  (parámetro \* 0.1)).

Utilizando el Método de Montecarlo (Algoritmo 1.) se ajustó el modelo bajo diferentes valores de los parámetros y se analizó la estabilidad correspondiente a los puntos de equilibrio  $P_1$  y  $P_3$ . La estabilidad en  $P_2$  no fue analizada por cuanto el método sólo considera puntos de equilibrio que cumplen condiciones de no negatividad.



El procedimiento utilizado por el método para analizar la estabilidad está resumido en el siguiente algoritmo [38, 39].

#### Algoritmo 1. METODO DE MONTECARLO

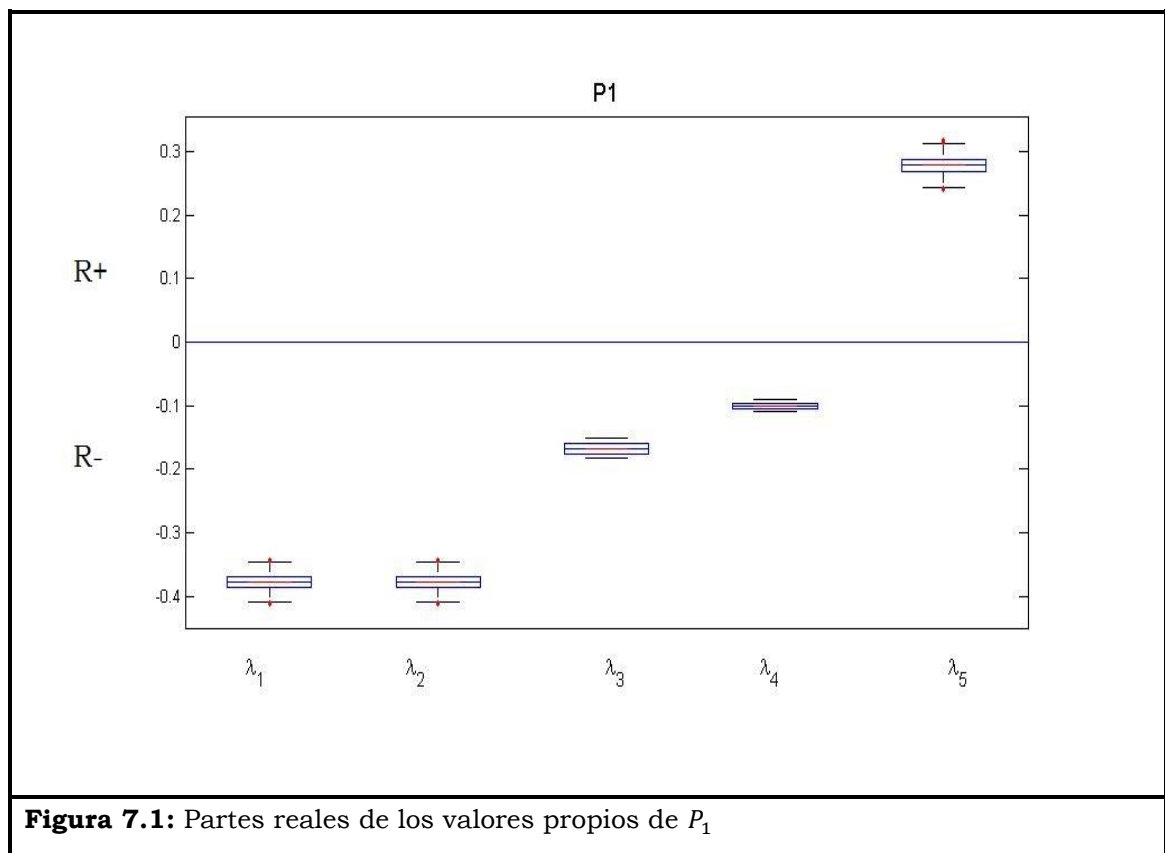
- 1: Determine un intervalo por cada parámetro.
- 2: Seleccione N y ejecute para  $i=1$  hasta N.
- 3: Genere un número aleatorio en el intervalo de cada parámetro.
- 4: Con el número generado calcule cada uno de los puntos de equilibrio.
- 5: Si el punto de equilibrio cumple condiciones de no negatividad, calcule el Jacobiano.
- 6: Calcule la parte real de los valores propios de la matriz Jacobiana.
- 7: Guarde la parte real de los valores propios de la matriz Jacobiana.
- 8: Cierre el paso 2.
- 9: El dato de salida son las gráficas de los puntos de equilibrio que permiten la categorización de los mismos, fin del algoritmo.

Las figuras 7.1 y 7.2 muestran los diagramas de caja y alambres para los valores propios de los puntos de equilibrios  $P_1$  y  $P_3$  respectivamente. A partir de estos diagramas es posible ver que las partes reales de los valores propios obtenidos en cada iteración del método Montecarlo presentan una variabilidad que no afecta su signo.

El método arroja pequeños rectángulos que indican la parte real de cada valor propio guardada en ellos. A cada valor propio se le calcula 1.000.000 de posibilidades a partir del número generado aleatoriamente para cada

parámetro en el intervalo definido. En el rectángulo se agrupa el 50 % de la parte real de todas las posibilidades calculadas para cada uno de los cinco valores propios de la matriz jacobiana en el punto de equilibrio. El 50 % restante se distribuye fuera del rectángulo en las líneas horizontales unidas al rectángulo por medio de un alambre.

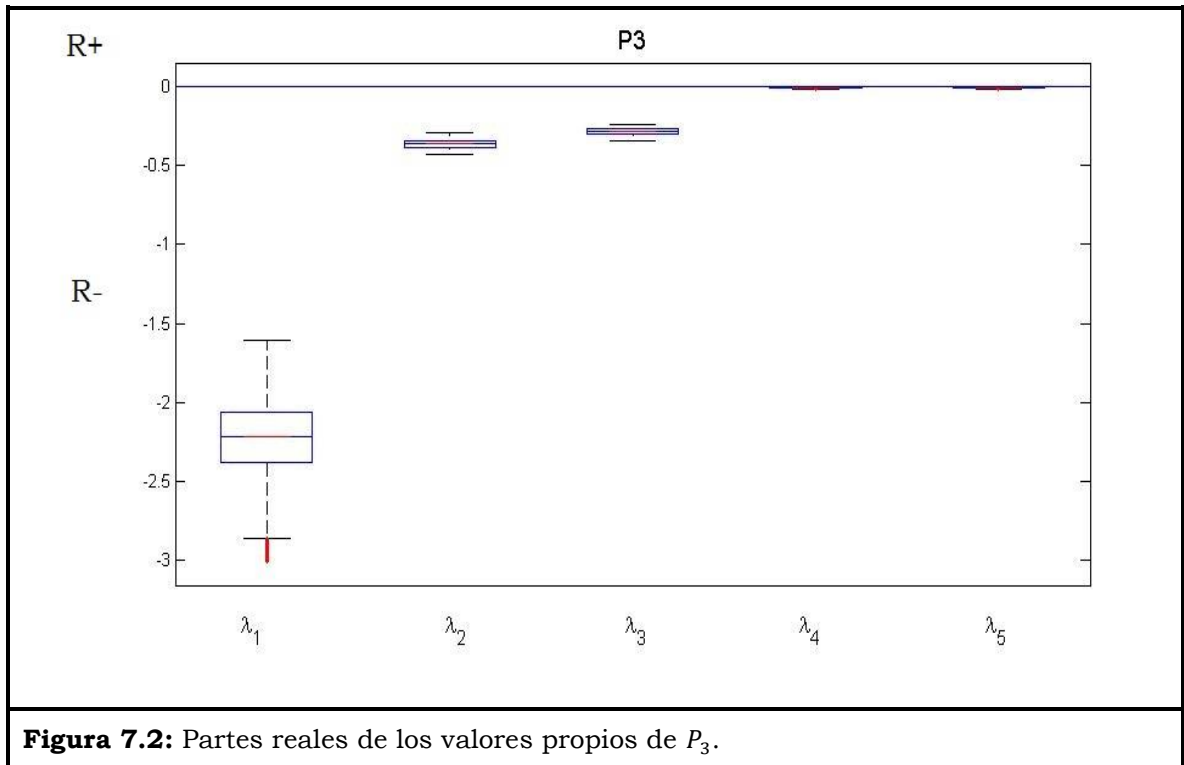
Para  $P_1$ :



En la figura 7.1 se observan los rectángulos que indican la parte real de cada valor propio asociado a  $P_1$  guardada en ellos. Para  $P_1$  se puede observar que la parte real de cuatro de los valores propios es negativa (cajas bosquejadas por debajo del cero real) y uno muestra que la parte real es positiva (caja bosquejada por encima del cero real).

Este análisis de estabilidad coincide plenamente con la inestabilidad de  $P_1$  encontrada en la sección 7.2 a pesar de la variabilidad permitida para los parámetros.

Para  $P_3$ :



**Figura 7.2:** Partes reales de los valores propios de  $P_3$ .

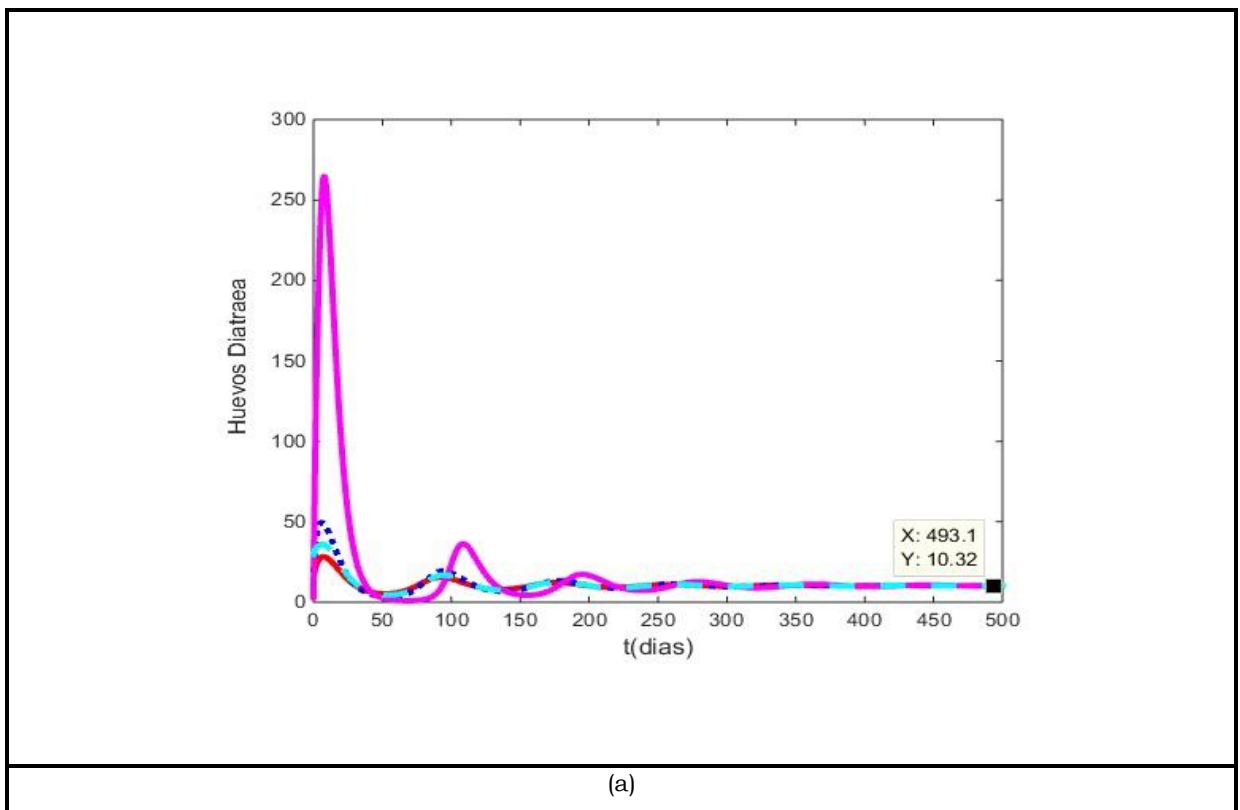
En la figura 7.2 se observan los rectángulos que indican la parte real de cada valor propio asociado a  $P_3$  guardada en ellos. Para  $P_3$  se puede observar que la parte real de todos los valores propios es negativa (cajas bosquejadas por debajo del cero real).

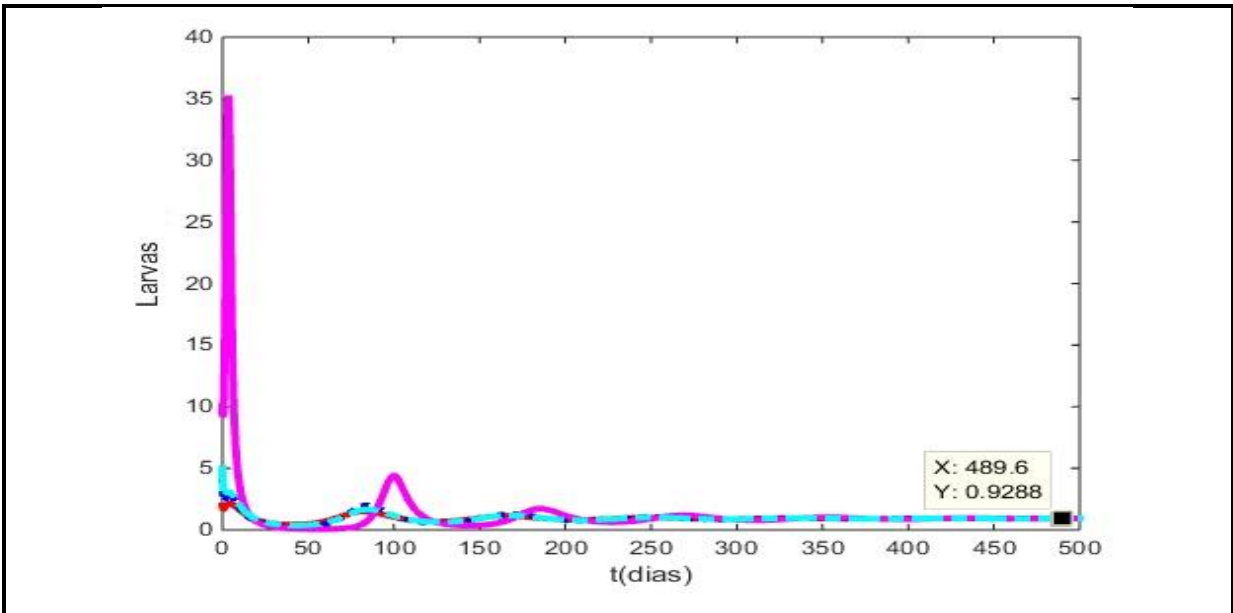
Este análisis de estabilidad coincide plenamente con la estabilidad de  $P_3$  encontrada en la sección 7.2 a pesar de la variabilidad permitida para los parámetros.

Es importante destacar que el punto de equilibrio  $P_3$  es el que resulta de interés desde el punto de vista biológico, por cuanto cumple las condiciones de no negatividad y las especies coexisten en equilibrio cerca de él cuando  $t \rightarrow \infty$

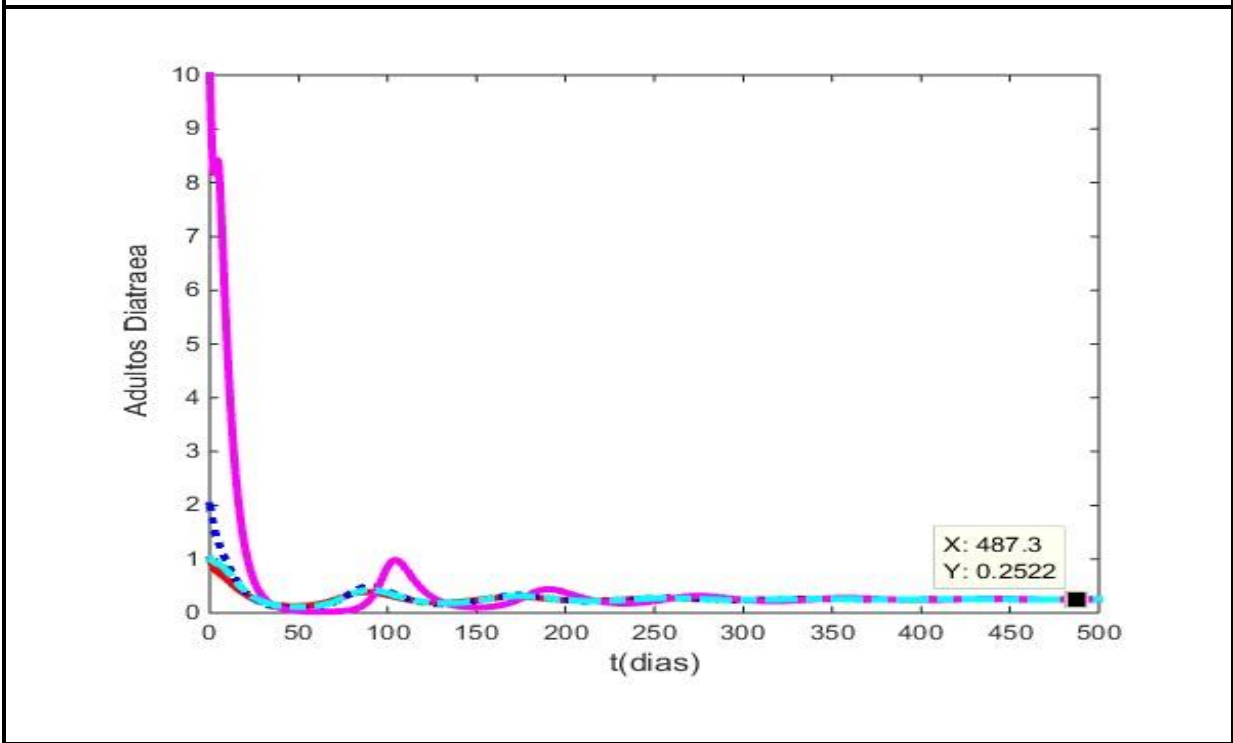
#### 7.4 Simulación del sistema sin control

En esta sección, se presentará la simulación numérica del comportamiento de la población en cada uno de los estados biológicos considerados en el modelo, para observar cuál es el comportamiento de las mismas cuando en un tiempo futuro, al introducir diferentes condiciones iniciales para cada población.

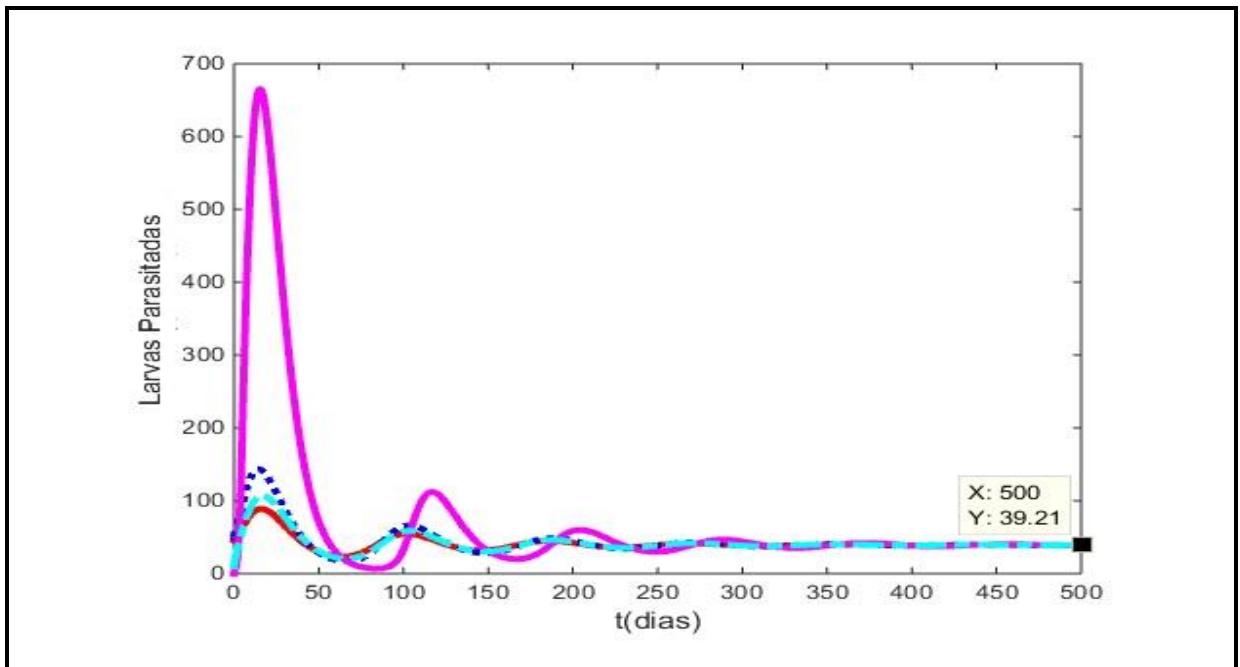




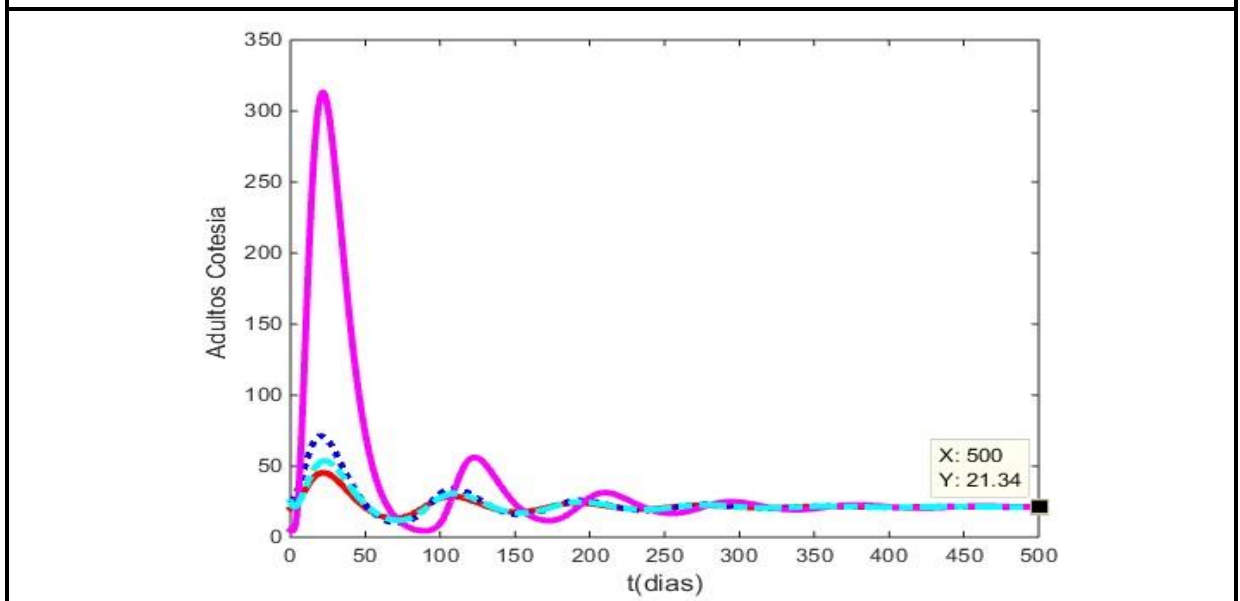
(b)



(c)



(d)



(e)

**Figura 7.3:** Soluciones para cuatro condiciones iniciales.

La figura 7.3, muestra la simulación de la dinámica de las poblaciones de huevos (a), larvas de *Diatraea saccharalis* (b), adultos de *Diatraea saccharalis* (c), larvas de *Diatraea saccharalis* parasitadas por *Cotesia*

*flavipes* (d) y adultos de *Cotesia flavipes* (e). Se consideraron cuatro condiciones iniciales diferentes para cada una de las poblaciones en ese orden  $\{(15, 2, 1,45, 20), (20, 5, 2, 50, 25), (3, 10, 10, 0, 5), (30, 5, 1, 10, 25)\}$ . Las cuatro condiciones iniciales dieron lugar a cuatro curvas que representan cuatro diferentes comportamientos de la población en cada figura.

En la figura (a) se puede observar que el número de huevos de *Diatraea saccharalis* tienden al valor 10.32, en la figura (b) el número de larvas de *Diatraea saccharalis* tienden a 0.9288, en la figura (c) el número de adultos de *Diatraea saccharalis* tienden a 0.2522, en la figura (d) el número de larvas parasitadas tienden a 39.21 y en la figura (e) el número de adultos de *Cotesia*, tienden a 21.34.

Estos valores que se evidencian en las figuras anteriores corresponden a valores cercanos al punto de equilibrio  $P_3 = (10.3202, 0.0925, 0.252273, 39.2508, 21.4095)$  hallado en la sección 7.2.

## 8 MODELO DIATRAEA SACCHARALIS-COTESIA FLAVIPES CON CONTROL.

En este capítulo se formula el problema de control óptimo, cuya solución va a permitir identificar la manera óptima de disminuir la población de *Diatraea saccharalis* por medio de liberación de la avispa *Cotesia flavipes* cultivada en laboratorio.

En el problema de control óptimo del presente trabajo se ha definido como objetivo reducir el número de larvas de *Diatraea saccharalis*, determinando una función continua a trozos  $U_m: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ , que define la variable de control óptimo  $U_m(t)$  (definición 5.4) e indica la mejor manera de liberar una población adicional de *Cotesia flavipes* a la existente en el medio, en un tiempo  $t > 0$ , tal que  $J(U) \leq J(U_m) < \infty$ , para todas las variables de control continuas a trozos  $U$ , donde  $J(U)$  es el funcional de rendimiento definido por:

$$J(U) = \int_{t_0}^{t_1} B_1(L(t))^2 + B_2(U(t))^2 dt \quad (\text{Funcional objetivo}) \quad (8.1)$$

Los coeficientes  $B_1 > 0$  y  $B_2 > 0$  indican el costo relativo de intervenciones en el intervalo  $[t_0, t_1]$  y en particular  $B_2$  indica el costo relativo asociado con la liberación de *Cotesia flavipes*.

Todos los argumentos de la variable de estado  $X(t) = (E(t), L(t), A(t), L_p(t), C(t))$  asociados a los controles  $U(t)$ , son funciones continuamente diferenciables que satisfacen el sistema:



$$X'(t) = \begin{cases} \frac{dE}{dt} & = \gamma A - (m_0 + \mu_0)E \\ \frac{dL}{dt} & = m_0 E - \beta LC - (m_1 + \mu_1)L \\ \frac{dA}{dt} & = m_1 L - m_2 A \\ \frac{dL_p}{dt} & = k\beta LC - (m_3 + \mu_3)L_p \\ \frac{dC}{dt} & = m_3 L_p - m_4 C + U(t) \end{cases} \quad (8.2)$$

$$X(t_0) = X_0 \quad (8.3)$$

### 8.1 Formulación del problema de control óptimo

Sean  $J(U)$  (8.1),  $X'(t)$  (8.2) y  $X(t_0)$  (8.3), el problema de control óptimo de este trabajo pretende encontrar una función de control (variable de control) y su variable de estado asociada que minimice el funcional objetivo, es decir,

$$\min_{U \in \mathfrak{C}} J(U)$$

Sujeto a (8.2)

$$X_0$$

$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}[0, \infty)$  es el conjunto de funciones continuas a trozos.

La función  $U(t)$  que minimiza a  $J(U)$  es llamada variable de control óptimo ( $U_m(t)$ ).

Las funciones,

$$F(t, X(t), U(t)) = B_1(L(t))^2 + B_2(U(t))^2 \text{ (integrando)} \quad (8.4)$$

$$G(t, X(t), U(t)) = X'(t) \text{ (restricciones)} \quad (8.5)$$

Son en efecto funciones continuamente diferenciables y la condición cuadrática de  $F$  en  $X(t), U(t)$  proporciona la convexidad requerida para garantizar el mínimo.

Se aborda el problema desde la teoría del control óptimo debido a la generalidad que proporciona y a su nivel de aplicación en economía y en modelos biológicos (*“se puede justificar, ya que los resultados de la teoría de cálculo de variación aparecen como casos particulares de los resultados de la teoría de control óptimo. Esta teoría necesita de condiciones sobre los espacios de definición de las variables de estado y de control los cuales son mucho más flexibles que la teoría de cálculo de variación”* [46]).

## 8.2 Solución del problema de control óptimo

En esta sección se resuelve el problema de control óptimo aplicando el principio del máximo de Pontryagin (teorema 5.11), por lo cual es necesario calcular el hamiltoniano, plantear la ecuación adjunta y la condición de transversalidad y plantear la condición de optimalidad (teorema 5.12).

El Hamiltoniano está definido por:

$$\mathcal{H} = F(t, X(t), U(t)) + \lambda(t) \cdot G(t, X(t), U(t))$$

Con

$$F(t, X(t), U(t)) = B_1(L(t))^2 + B_2(U(t))^2,$$

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t)) \text{ y}$$

$$G(t, X(t), U(t)) = \left( \frac{dE(t)}{dt}, \frac{dL(t)}{dt}, \frac{dA(t)}{dt}, \frac{dL_p(t)}{dt}, \frac{dC(t)}{dt} \right)$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{H} = \left[ B_1(L(t))^2 + B_2(U(t))^2 \right] + (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t)) \cdot \left( \frac{dE(t)}{dt}, \frac{dL(t)}{dt}, \frac{dA(t)}{dt}, \frac{dL_p(t)}{dt}, \frac{dC(t)}{dt} \right)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, X(t), U(t), \lambda(t)) &= B_1(L(t))^2 + B_2(U(t))^2 + \lambda_1(t) \frac{dE(t)}{dt} + \lambda_2(t) \frac{dL(t)}{dt} + \lambda_3(t) \frac{dA(t)}{dt} \\ &+ \lambda_4(t) \frac{dL_p(t)}{dt} + \lambda_5(t) \frac{dC(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, X(t), U(t), \lambda(t)) &= B_1(L(t))^2 + B_2(U(t))^2 + \lambda_1(t)(\gamma A(t) - (m_0 + \mu_0)E(t)) \\ &+ \lambda_2(t)(m_0 E(t) - \beta L(t)C(t) - (m_1 + \mu_1)L(t)) \\ &+ \lambda_3(t)(m_1 L(t) - m_2 A(t)) + \lambda_4(t)(k\beta L(t)C(t) - (m_3 + \mu_3)L_p(t)) \\ &+ \lambda_5(t)(m_3 L_p(t) - m_4 C(t) + U(t)) \end{aligned}$$

La condición de optimalidad se determina a partir de la derivada parcial de  $\mathcal{H}$  con respecto a  $U$ . Dicha derivada se iguala a cero para obtener la variable de control óptima  $U_m(t)$ , es decir,

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \Rightarrow F_U + \lambda \cdot G_U = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U} \left[ B_1(L(t))^2 + B_2(U(t))^2 + \lambda_1(t)(\gamma A(t) - (m_0 + \mu_0)E(t)) + \lambda_2(t)(m_0E(t) - \right. \\ \left. \beta L(t)C(t) - (m_1 + \mu_1)L(t)) + \lambda_3(t)(m_1L(t) - m_2A(t)) + \lambda_4(t) \left( k\beta L(t)C(t) - (m_3 + \right. \right. \\ \left. \left. \mu_3)L_p(t) \right) + \lambda_5(t) \left( m_3L_p(t) - m_4C(t) + U(t) \right) \right] = 0, \text{ para todo } t \in [0,300] \end{aligned}$$

Se toma  $t \in [0,300]$  considerando gran parte del tiempo de cultivo de la caña de azúcar (10 meses) [RW14]

$$2B_2U_m(t) + \lambda_5(t) = 0$$

Por lo tanto

$$U_m(t) = \frac{\lambda_5(t)}{2B_2}$$

La variable de control óptimo depende de la quinta componente de la función adjunta ( $\lambda_5(t)$ ) y del costo relativo asociado con la liberación de *Cotesia flavipes* ( $B_2$ ).

La segunda derivada de  $\mathcal{H}$  respecto a  $U$  determina la condición de mínimo.

$$\text{En efecto } \frac{\partial^2 H}{\partial^2 u} = 2B_2 > 0$$

La ecuación adjunta es igual a la derivada parcial de  $\mathcal{H}$  con respecto a  $X$ .

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial X} \Rightarrow \lambda' = -(F_X + \lambda(t) \cdot G_X)$$

Para determinar  $\lambda'(t)$ , se requieren las derivadas parciales con respecto a la variable de estado de las funciones en (8.4) y (8.5).

Por lo tanto, las ecuaciones adjuntas están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} &= (m_0 + \mu_0)\lambda_1(t) - m_0\lambda_2(t) \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} &= -2B_1L(t) + (\beta C(t) + m_1 + \mu_1)\lambda_2(t) - m_1\lambda_3(t) - k\beta C(t)\lambda_4(t) \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} &= -\gamma\lambda_1(t) + m_2\lambda_3(t) \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial t} &= (m_3 + \mu_3)\lambda_4(t) - m_3\lambda_5(t) \\ \frac{\partial \lambda_5}{\partial t} &= \beta L(t)\lambda_2(t) - k\beta L(t)\lambda_4(t) + m_4\lambda_5(t) \end{aligned} \tag{8.6}$$

La condición de transversalidad es:

$$\lambda(T_f) = \vec{0} \quad \text{es decir} \quad \lambda(300) = \vec{0}$$

### 8.3 Solución numérica del problema de control óptimo

En esta sección, se encuentra la solución numérica  $U_m(t)$  utilizando el algoritmo forward-backward sweep method.

El procedimiento utilizado por el método para encontrar la aproximación de la solución óptima esta resumido en el siguiente Algoritmo [26-35]

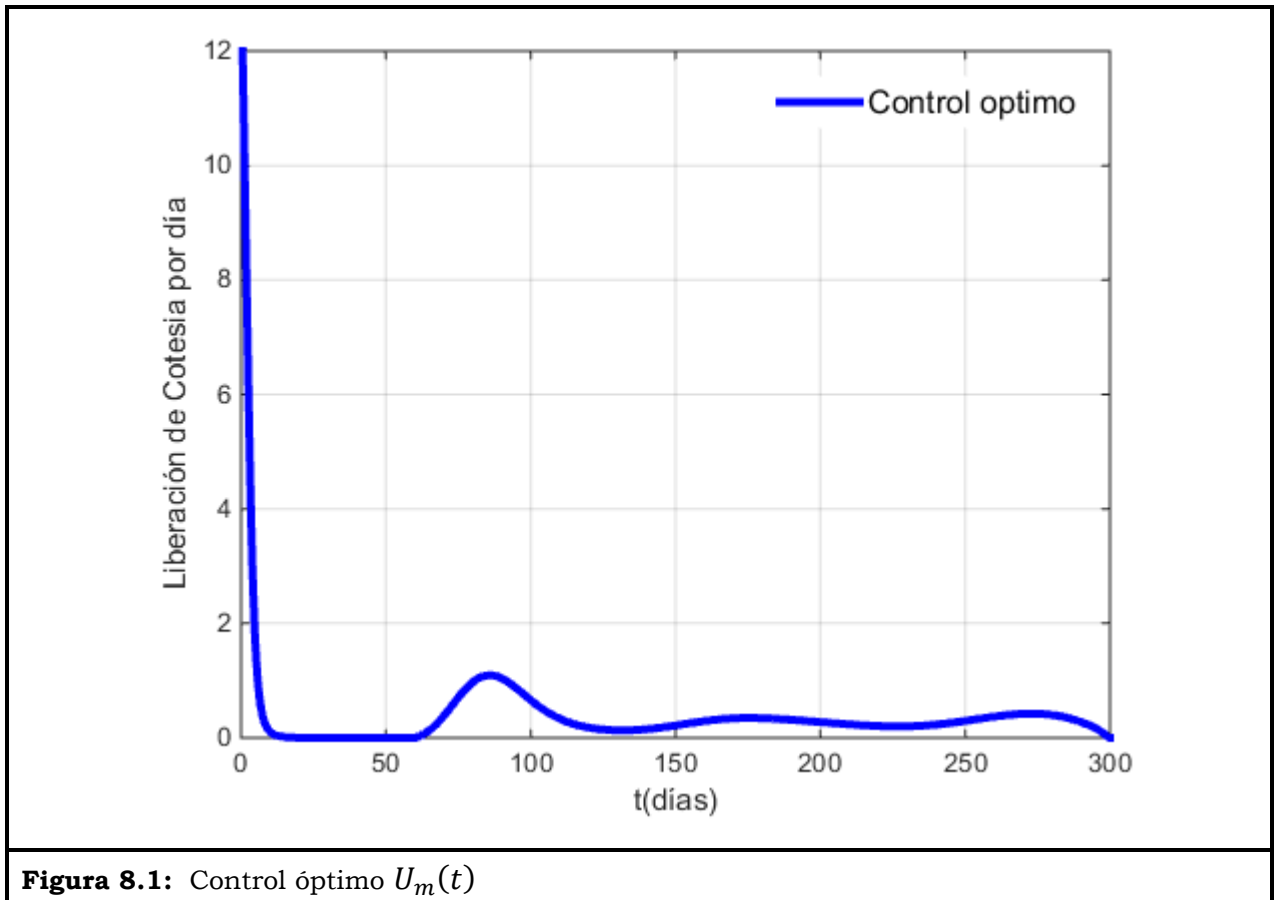
## Algoritmo 2. FORWARD-BACKWARD SWEEP METHOD

- 1: Seleccione un valor inicial para  $U_m(t)$
- 2: Con el valor inicial de  $U_m(t)$  y el valor inicial de  $X(t_0)$ , se resuelve progresivamente para  $X$  el sistema (8.2).
- 3: Con la condición de Transversalidad y los valores de  $U_m(t)$  y  $X$ , se resuelve regresivamente para  $\lambda$  la ecuación adjunta (8.6).
- 4: Se actualiza el valor de  $U_m(t)$  sustituyendo los nuevos valores de  $X$  y  $\lambda$  en la Condición de Optimalidad.
- 5: Se verifica la convergencia así: Si  $\frac{\|U_{Nueva} - U_{Vieja}\|}{\|U_{Nueva}\|} < tol$ , entonces  $U_{Nueva}$  es la aproximación esperada de la solución Óptima. En caso contrario se repite el proceso desde el segundo paso.
- 6: El dato de salida es la aproximación esperada de la solución óptima del problema, fin del algoritmo.

### **8.4 Simulación de la variable de control óptimo**

La variable de control óptimo encontrada numéricamente mediante el algoritmo anterior, es una función que determina la mejor forma de introducir poblaciones adicionales de avispa por unidad de tiempo y se debe aplicar durante el tiempo de cosecha de la caña de azúcar con el propósito de reducir la población de plaga en sus tres estados biológicos.

En la siguiente figura se presenta la simulación del comportamiento de la función de control óptimo  $U_m(t)$  en un periodo de 300 días.

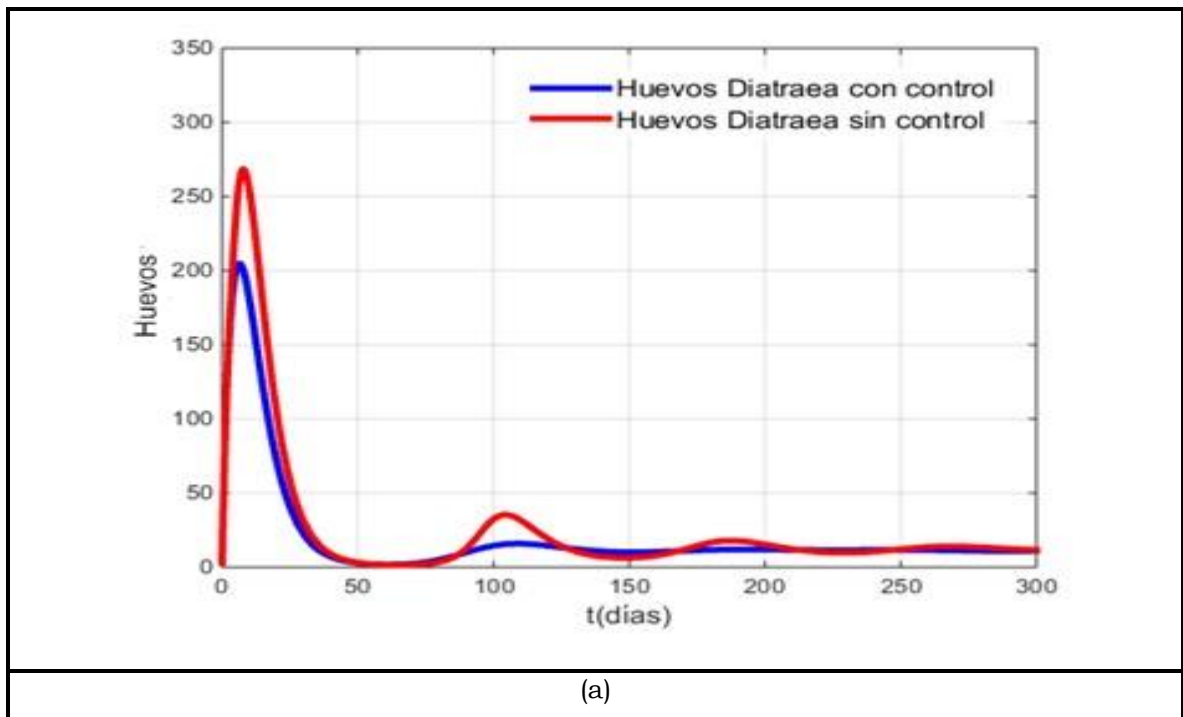


**Figura 8.1:** Control óptimo  $U_m(t)$

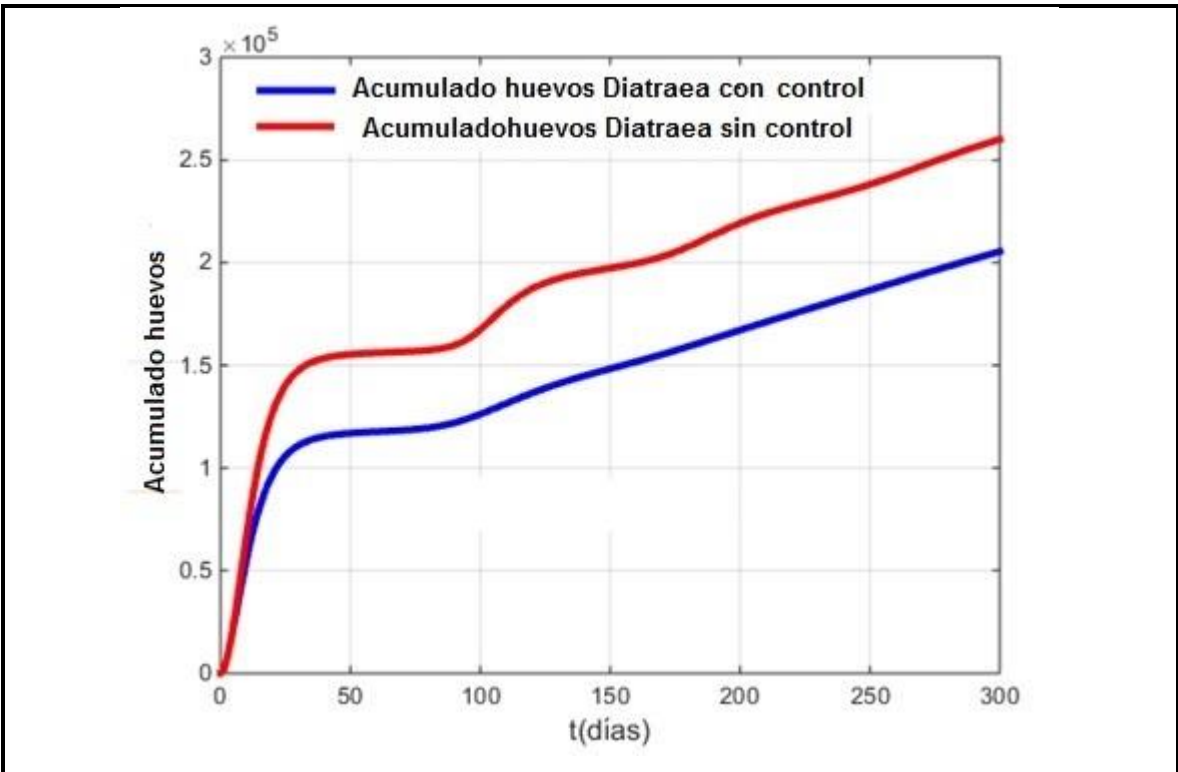
La figura 8.1 muestra el comportamiento numérico del control óptimo  $U_m(t)$ . Para la solución numérica del problema de control óptimo, se estableció una condición inicial de 10 larvas de *Diatraea sacharallis* (estos datos varían ocasionalmente y dependen de una búsqueda manual en el cultivo, en términos de horas hombre, que se realiza por sectores de sembrado durante un jornal de trabajo [36]). La simulación indica que por cada 10 larvas de *Diatraea sacharallis* se deben liberar alrededor de 14 avispas de *Cotesia flavipes* en el día cero. En la medida en que transcurre el tiempo estas

liberaciones se deben reducir paulatinamente hasta valores muy cercanos a cero en el día 12. Entre los días 12 y 60 la simulación indica que no es necesario hacer liberaciones (reduciendo de este modo los costos de una liberación indiscriminada). Entre los días 60 y 85 se debe incrementar las liberaciones hasta aproximadamente el 7 % de las liberaciones iniciales (valor de avispas liberadas en un día/valor de avispas liberadas en el día 0) x 100 %) después de lo cual se deben disminuir las liberaciones hasta el 2.8 % en el día 128. A partir del día 150 se deben hacer liberaciones en promedio de aproximadamente el 2 % de las liberaciones iniciales hasta terminar la cosecha.

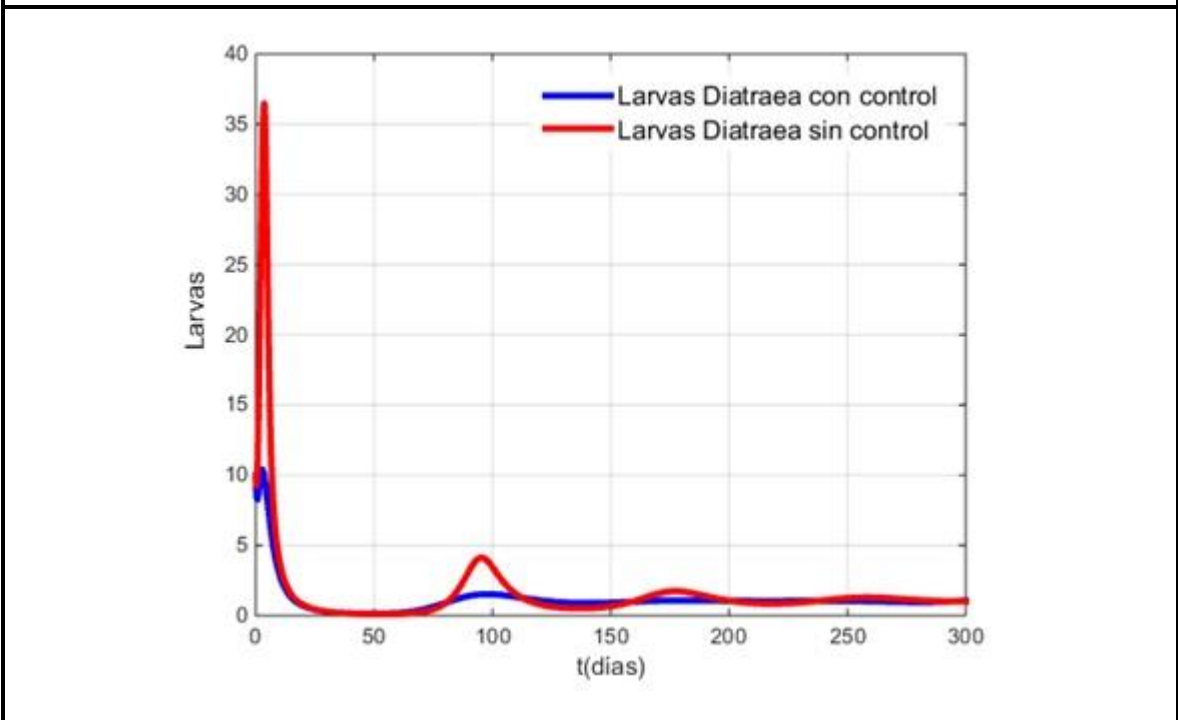
En la siguiente figura se presenta la simulación del comportamiento en función del tiempo de las poblaciones de huevos, larvas y adultos de *Diatraea saccharalis* sin liberación de avispas (sin control) y con liberación de avispas (con control).



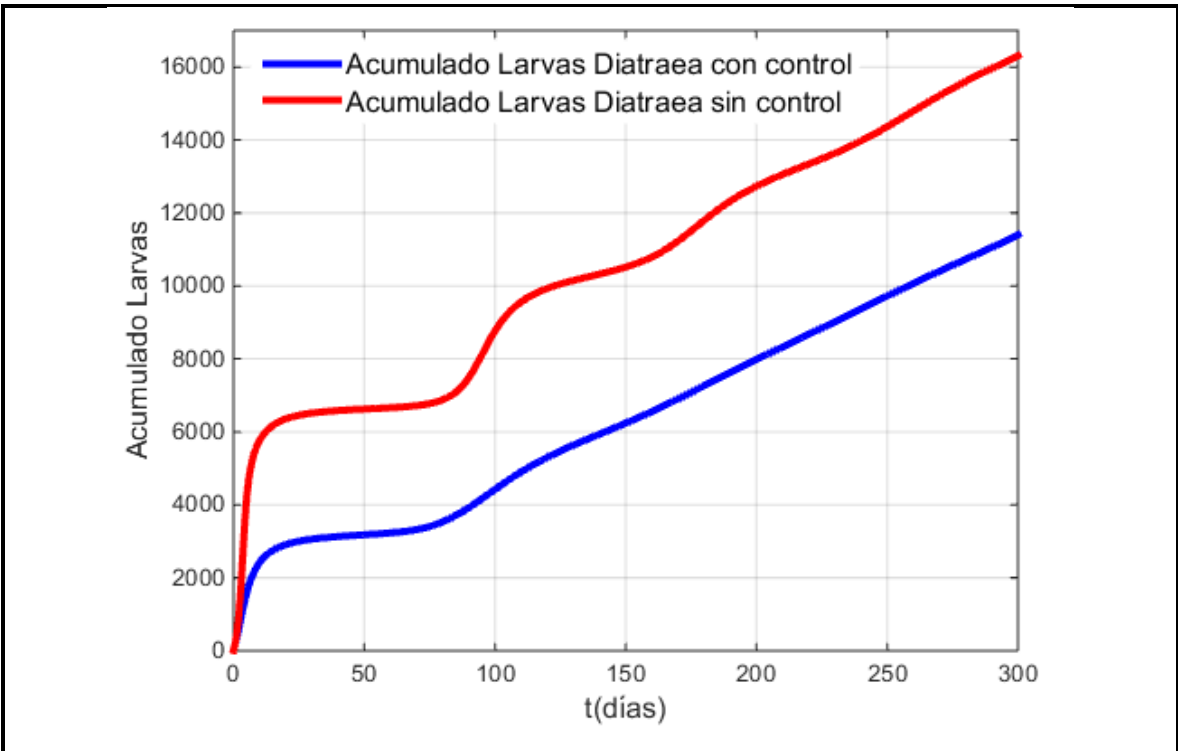




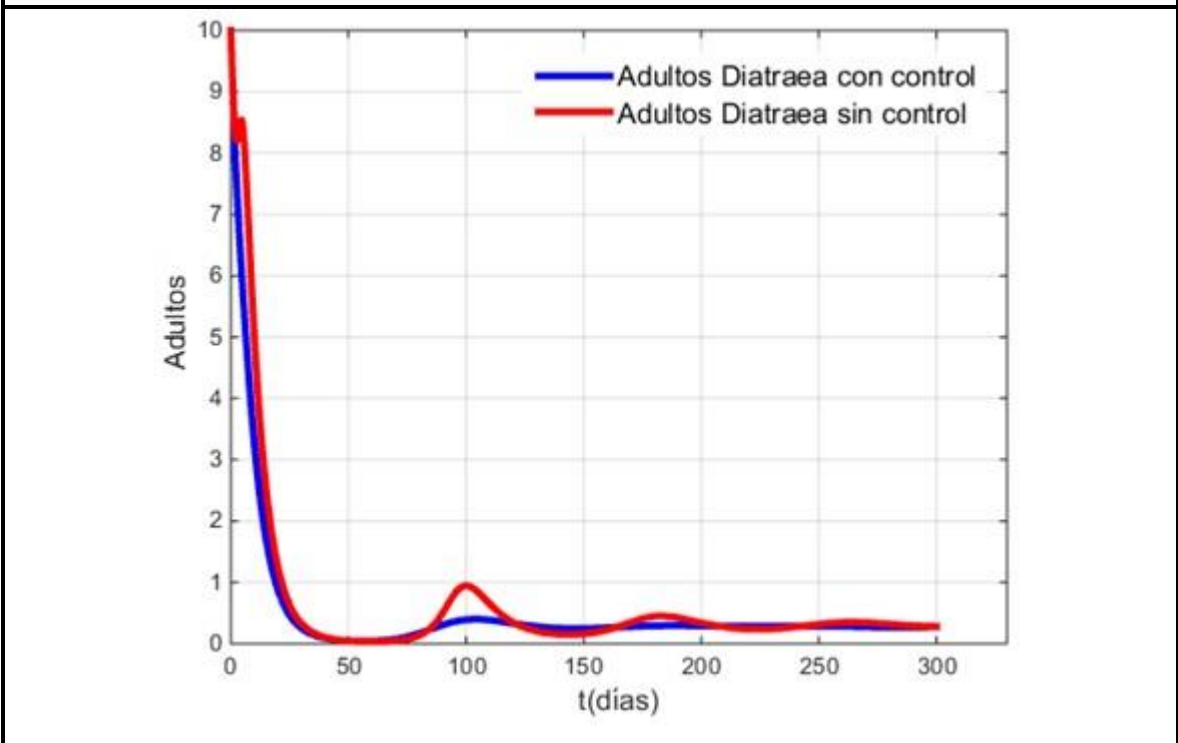
b)



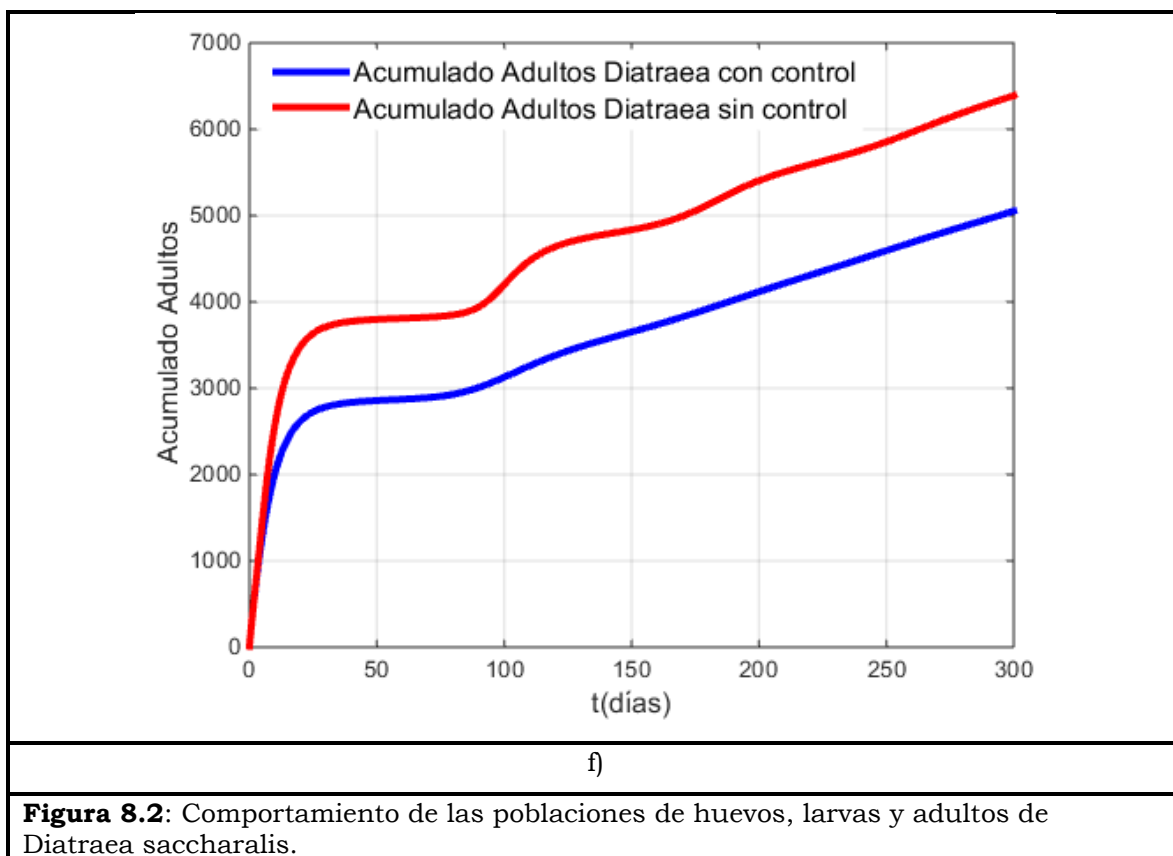
(c)



d)



(e)



La figura 8.2, en a), c) y e), muestra una comparación entre los comportamientos simulados de las poblaciones de los tres estados biológicos de la plaga considerados en este trabajo, antes y después de aplicar la función de control óptimo. Las curvas en color rojo representan las poblaciones antes de introducir la variable de control y las curvas en color azul representan las poblaciones después de incluir la variable de control. Además muestra, en b), d) y f), una comparación de las poblaciones acumuladas de *Diatraea saccharalis*, con el propósito de evidenciar la reducción de población acumulada del gusano después de aplicado el control. En b) muestra una disminución en la población acumulada de huevos de aproximadamente el 20.8 % (reducción población con control dividido entre población sin control \* 100) d) evidencia una disminución de

la población acumulada de larvas de aproximadamente el 30.1 % y en f) una disminución de la población acumulada de adultos de aproximadamente el 20.9 %.

Los resultados reflejan que aplicado el control óptimo  $U_m(t)$  se presenta una disminución de la población de *Diatraea saccharalis* y por lo tanto hay una mitigación de daños en los tallos de la caña de azúcar.

## 9 APORTE INVESTIGATIVO

Validar, desde la matemática, la utilización de la avispa *Cotesia flavipes*, cuya presencia en el Valle del Cauca se ha venido evidenciando en los últimos tres años en los cultivos de caña de azúcar, como elemento de control biológico contra el problema generado en la caña de azúcar de la región del valle del Cauca por el barrenador *Diatraea saccharalis*, a partir de la formulación y la solución de un problema de control óptimo. Se espera que el modelo fortalezca los procesos de control biológico que actualmente se utilizan en Cenicaña, los valide matemáticamente hablando, de tal forma que primen por encima de los procesos de control químicos, reduciendo con ello los costos generados por la compra de agentes químicos, así como también minimizando los efectos nocivos que los usos de pesticidas pueden tener en el consumo humano por la producción de azúcar a partir de caña fumigada.

## 10 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

### 10.1 CONCLUSIONES

En el trabajo se propuso un modelo en tiempo continuo para estudiar la interacción entre *Diatraea saccharalis* (barrenador del tallo de la caña de azúcar) y *Cotesia flavipes* (enemigo natural del barrenador). Se formuló un problema de control óptimo con el propósito de minimizar las Larvas de *Diatraea saccharalis* usando la menor cantidad de recursos para la liberación de avispas de *Cotesia flavipes*. El problema fue resuelto mediante el principio del máximo de Pontryagin utilizando el algoritmo Forward-Backward Sweep. Los resultados numéricos confirman que la liberación de avispas de *Cotesia flavipes* minimizan la población de *Diatraea saccharalis* en sus tres estados considerados. Nuestros resultados muestran que se deben hacer grandes liberaciones de avispa en los primeros días después de sembrada la caña, liberaciones aproximadamente del 8% de las iniciales en los días cercanos al día 85 y a partir del día 150 se deben hacer liberaciones de aproximadamente el 2%, de esta manera obtenemos reducciones significativas en la población acumulada de *Diatraea saccharalis*. Se obtuvo una reducción aproximada, en la población acumulada, del 20.9% en adultos, 30.1 % en larvas y 20.8 % en huevos.

## 10.2 TRABAJOS FUTUROS

Teniendo en cuenta que existen otros enemigos naturales de *Diatraea saccharalis*, entre los cuales se encuentra *Trichogramma gallois* (presente en el valle geográfico del río Cauca) el cual parasita los huevos, se podría proponer un modelo que relacione la interacción entre las tres especies, es decir, *Diatraea saccharalis*, *Cotesia flavipes* y *Trichogramma gallois*. Se formularía un problema de control óptimo que considere dos controles (liberación de *Cotesia flavipes* y liberación de *Trichogramma gallois*) con el objetivo de determinar cuál de los dos controles es más eficiente. Adicionalmente se hace necesario realizar muestreos detallados de las poblaciones de las especies que proporcionen datos y permitan realizar una mejor estimación de los parámetros para el caso específico del valle geográfico del río Cauca.

## 11 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Gómez L. L. A.; Lastra Borja, L. A. Insectos asociados con la caña de azúcar en Colombia. CENICAÑA. 1995, p 237 – 263.
- [2] Gómez L. L. A. Lastra Borja, L. A. Retos y oportunidades en el manejo de los barrenadores del tallo. Serie divulgativa. CENICAÑA. Abril, 1995, p 1-4.
- [3] Bertorelli, M. Producción y uso de *Trichogramma* en Anzoátegui Venezuela, en programas de manejo integrado de plagas. Divulga No 33, enero – junio, 1990.
- [4] González Manteiga, María Teresa. Modelos matemáticos discretos en las ciencias de la naturaleza. Universidad complutense de Madrid. 2002.
- [5] Borrelli R y Coleman CS. Ecuaciones diferenciales, una perspectiva de modelación. México, Oxford, 2002 p 397.
- [6] Nicholls Estrada, Clara Inés. Control biológico de insectos, un enfoque agroecológico. Universidad de Antioquia. 2008.
- [7] Donald E. Kirk. Optimal control theory. Dover. 1998.
- [8] Marat Rafikov, Holanda Limeira. Mathematical modelling of the biological pest control of the sugarcane borer. Universidad federal de ABC, Santo André, Sao Paulo, Brazil. 2011.
- [9] Tomás Cabello, Manuel Gámez, József Garay, Zoltán Varga. Lucha biológica y modelos matemáticos: cuándo y cómo hacer las sueltas de enemigos naturales. Universidad de Almería, Universidad Eotvos Hungría, Universidad Godoll Hungría. 2011.
- [10] Marat Rafikov, Jean Carlos Silveira. On dynamical behavior of the sugarcane borer – parasitoid agroecosystem. Universidad Federal de ABC. Brasil. 2013.
- [11] Cenicaña. Los barrenadores de la caña de azúcar. Serie divulgativa. Abril 1995.



- [12] J. Bascompte, R Solé. Margalef y el espacio o por qué los ecosistemas no bailan sobre la punta de una aguja. Asociación Española de Ecología Terrestre. Abril 2005.
- [13] Baddi M. H. y J. C. Chacón. Estimación lineal y no lineal de parámetros de depredación. UANL. San Nicolás de la garza. México. 2014.
- [14] Van Driesche, R. G. and T. S. Bellows, Jr. Biological control. Chapman and Hall, New York. 1996.
- [15] Michael P. Hassell – Robert M. May. Spatial heterogeneity and the dynamics of parasitoid host systems. 1998.
- [16] Raimond Bürger. Introducción al modelamiento en biomatemática. Universidad de Concepción, Chile. 2009.
- [17] Tomás Cabello. Control biológico. UAL. 2006.
- [18] R. M. May – M. P. Hassell – R. M. Anderson – D. W. Tonkin. Density dependence in host – parasitoid models. Journal of animal ecologic. 1981.
- [19] Valeria Fernandez – Juan C. Corley. La respuesta funcional: Una revisión y guía experimental. Asociación argentina de ecología. 2004.
- [20] Abdul Qadeer khan – Muhammad Naeem Qureshi. Dynamics of a modified Nicholson – Bailey host parasitoid model. Advances in difference equations. 2015.
- [21] Tomás Cabello – Manuel Gámez – J. Garay – Z. Varga. Lucha biológica y modelos matemáticos: Cuándo y cómo hacer las sueltas de enemigos naturales. Universidad de Almería. 2011.
- [22] Gómez, Luis A. – Luz A Lastra. Insectos asociados con la caña de azúcar en Colombia. Cenicaña. 1995.
- [23] Viterbo Rodríguez – Lourdes Chavarría – Iris Gómez – Yahaira Peñaloza – Mitzi Tejada. Desarrollo del parasitoide *Cotesia Flavipes* Cámeron 1891(Hymenóptera: Braconidae) en *Diatraea Tabernella* Dyar y *Diatraea Sacharallis* Fabricius 1794(Lepidóptera: Pyralidae) y su efectividad en el control de la *Diatraea Tabernella*. Universidad

- de Panamá. Facultad de ciencias naturales, exactas y tecnología. 2004.
- [24] Castillo. Chavez. Mathematical models in population biology and epidemiology. Second Edition. Springer. 2000.
- [25] Courant R. – Jhon F. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Vol 2. Limusa. 1978.
- [26] Lenhart Suzane – Workman John T. Optimal control Applied to Biological Models. Chapman & Hall/CRC. USA 2007.
- [27] Apostol M. Tom. Calculus. Volumen 2. Segunda edición. Reverte 1973.
- [28] Noble Ben – Daniel James W. Algebra lineal aplicada. Tercera edición. Prentice Hall. México. 1988.
- [29] Kleiman Ariel – De Kleiman Elena K. Matrices aplicaciones matemáticas en economía y administración. Limusa Noriega. México. 1992.
- [30] Agarwal Ravi P – Meehan María – O`Regan Donal. Fixed Point Theory and Applications. Cambridge University press. 2004.
- [31] Jones D. S.- Sleeman B. D. Differential Ecuations and Mathematical Biology. Chapman & Hall/CRC. USA 2003.
- [32] Lang Serge. Introducción al análisis matemático. Addison-Wesley Iberoamericana. USA 1990.
- [33] Fleming Wendell H. – Rishel Raymond W. Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer. 1975.
- [34] Pontryagin L.S. – Boltyanskii V. G – Gamkrelize R. V. – Mishchenko E. F. The mathematical theory of optimal processes. Wyley, New York. 1962.
- [35] Gonzalez Parra Paula Andrea. Tesis: Constrained optimal for a multi-group discrete a time influenza model. The University of Texas at El Paso. 2012.

- [36] Leyton Flor Samy Andres. Tesis: Factores ecosistémicos que influncian las poblaciones y daño de *Diatraea* spp. En cultivos de caña de azúcar en el valle geográfico del rio cauca. Universidad Autónoma de Occidente. 2016.
- [37] Vargas G, Gomez LA, Michaud JP (2015) Sugarcane stem borers of the Colombian Cauca River Valley: pest status, biology and control. *Florida Entomologist* 98:728-735.
- [38] Lawson AB (2006) *Statistical Methods in Spatial Epidemiology*, 2nd edition. Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley.
- [39] Kroese DP, Taimre T, Botev ZI (2011) *Handbook of Monte Carlo Methods*. Wiley Series in Probability and Statistics 706, Wiley.
- [40] EdelsteinKeshet Leah. *Mathematical models in Biology*. Mc Graw Hill. 1998.
- [41] Hernández Dilcia. Estudio de algunos aspectos biológicos de *Cotesia flavipes* Cameron (Hymenoptera: Braconidae) parasitoide de *Diatraea saccharalis* Fabricius (Lepidoptera: Crambidae). Universidad Centroccidental “Lisandro Alvarado”. Decanato de Agronomía. Apartado 400, Barquisimeto, Venezuela. 2010.
- [42] Galvis Y, Gonzalez J, Reyes J. Descripción y daño de los insectos que atacan al arroz, en América Latina. CIAT. Colombia. 1982.
- [43] Castillo Chávez Carlos, Adler Fred, Smith Lincoln. A distributed – delay model for the local population dynamics of parasitoid – host system. Cornell University.
- [44] S. Lee, G. Chowell and C. Castillo-Chavez. Optimal control for pandemic influenza: the role of limited antiviral treatment and isolation. *J. Theor. Biol.*, 2010, vol. 265.
- [45] S. Lee, R. Morales and C. Castillo-Chavez. A note on the use of influenza vaccination strategies when supply is limited. *Math. Biosc. & eng.*, 2011, vol. 8.
- [46] Bardey David, Bonnet Hélene. Teoría del control óptimo: ¡Una guía para principiantes! Borradores de investigación #87. Universidad del Rosario. Enero 2006.

- [47] Knowles Greg. An introduction to Applied Optimal Control. Mathematics in science and Engineering. Volume 159. Richard Bellman, University of Southern California. 1981.

## 12 REFERENCIAS WEB (RW)

- [1] <http://www.taxateca.com/ordenlepidoptera.html>
- [2] <http://conabio.inaturalist.org/taxa/52002-Crambidae>
- [3] <http://www.revperuentomol.com.pe/publicaciones/vol7/INSECTOS-EN-BOLIVIA.pdf>
- [4] [http://www.sipove.gob.mx/Doc\\_SIPOVE/SVegetal/Publica/barrenador/Fichas/FT\\_Barrenador.pdf](http://www.sipove.gob.mx/Doc_SIPOVE/SVegetal/Publica/barrenador/Fichas/FT_Barrenador.pdf)
- [5] [http://www.backyardnature.net/es/ins\\_pup~.htm](http://www.backyardnature.net/es/ins_pup~.htm)
- [6] <http://repositorio.iniap.gob.ec/bitstream/41000/1614/1/comunicaci%C3%B3n%20T%C3%A9cnica%20N%C2%BA%2024.pdf>
- [7] <http://www.bio-nica.info/Ento/Hymeno%5Chymenoptera.htm>
- [8] [http://www1.inecol.edu.mx/azm/documentos/79/d-Delf%C3%ADn\\_Gonz%C3%A1lez.pdf](http://www1.inecol.edu.mx/azm/documentos/79/d-Delf%C3%ADn_Gonz%C3%A1lez.pdf)
- [9] <http://portal.mda.gov.br/o/899249>
- [10] <http://www.alexanderwild.com/Insects/Stories/Parasites-1/i-PJ8FVdn>
- [11] <https://sergiolacorte.blogspot.com.co/2010/12/barrenador-del-tallo-caracteristicas-y.html>
- [12] <http://controlbiologicouagro.blogspot.com.co/2014/08/el-origen-del-control-biologico.html>
- [13] [http://www.cenicana.org/pdf/documentos\\_no\\_seriados/libro\\_el\\_cultivo\\_cana/libro\\_p237-263.pdf](http://www.cenicana.org/pdf/documentos_no_seriados/libro_el_cultivo_cana/libro_p237-263.pdf)

- [14] [http://www.sancarlos.com.ec/portal/html/themes/ingenio/pdf/proceso\\_produccion.pdf](http://www.sancarlos.com.ec/portal/html/themes/ingenio/pdf/proceso_produccion.pdf)
- [15] [https://engineering.purdue.edu/~zak/ECE680/Lyapunov\\_ECE\\_680.pdf](https://engineering.purdue.edu/~zak/ECE680/Lyapunov_ECE_680.pdf)