Gemeinsamer Workshop des GAMM-Fachausschusses
"Dynamik und Regelungstheorie" und des
VDI/VDE-GMA-Ausschusses 1.40
"Theoretische Verfahren der Regelungstechnik"
Kassel, 8. - 9. März, 2004

Roswitha März
Humboldt-Universität zu Berlin und DFG-Forschungszentrum
"Mathematik für Schlüsseltechnologien:
Modellierung, Simulation und Optimierung realer Prozesse"

Algebro-Differentialgleichungen mit properem Hauptterm und Traktabilitätsindex

Gliederung:

1. Algebro-Differentialgleichungen mit properem Hauptterm
2. Traktabilitätsindex
3. Linear-quadratische Optimalsteuerung

1. Algebro-Differentialgleichungen mit properem Hauptterm

Algebro-Differentialgleichungen (ADGln) mit properem Hauptterm sind Gleichungen der Form

$$A(x(t),t)\,(d(x(t),t))' + b(x(t),t) = 0, \qquad t \in \mathcal{I}, \tag{1.1}$$

mit stetigen Koeffizienten

$$A(x,t) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad b(x,t) \in \mathbb{R}^m, \quad d(x,t) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathcal{I},$$

die stetige partielle Ableitungen A_x, b_x, d_x, d_t besitzen. $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ sei hier ein Intervall. Eine besondere Rolle kommt

$$d_x(x,t) =: D(x,t)$$

zu. $A(x,t)$ und $D(x,t)$ sind im allgemeinen singulär, gegebenenfalls rechteckig. Die lineare Version zu (1.1) ist

$$A(t)\,(D(t)x(t))' + B(t)x(t) = q(t), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{1.2}$$

Mit dem properen Hauptterm soll im Gegensatz zur sonst üblichen Formulierung von ADGln, z.B. linearen Gleichungen

$$E(t)x'(t) + F(t)x(t) = q(t), \quad t \in \mathcal{I}, \tag{1.3}$$

genau erfaßt werden, welche Ableitungen de facto involviert sind.
In früheren Arbeiten (z.B. [1]) wurde eine aus heutiger Sicht propere Formulierung mit Hilfe eines Projektors erzwungen. Die Formulierung (1.2) bzw. (1.1) ist dagegen viel flexibler.
Der Beginn der Arbeit mit properen Haupttermen ist durch [2], [3] markiert. Ein wichtiger Aspekt, der für propere Hauptterme spricht, ist die Symmetrie zwischen linearen Gleichungen (1.2) und ihren adjungierten Gleichungen

$$-D(t)^*\,(A(t)^*\lambda(t))' + B(t)^*\lambda(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I}. \tag{1.4}$$

Ausgehend von (1.3) entsteht dagegen die adjungierte Gleichung

$$-(E(t)^*\,\lambda(t))' + F(t)^*\lambda(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I},$$

die von ganz anderem Typ ist. Der Lohn für die genauere Modellierung mit properem Hauptterm sind übersichtlichere Verhältnisse u.a. in den Optimalsteurungsproblemen (vgl. §3).
Gleichungen der Form (1.1) entstehen unmittelbar durch die modifizierte Knotenanalyse (MNA = modified nodal analysis) bei der Schaltungssimulation [4].

Definition (z.B. [4]): Der Hauptterm von (1.1) heißt proper formuliert, wenn

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{im} D(x,t) \oplus \ \ker A(x,t) = I\!R^n \\ d(x,t) \in D(x,t) \end{array}\right\} \text{ für alle } x \in \mathcal{D}, t \in \mathcal{I} \text{ gilt,}$$

und die beiden Unterräume $\mathrm{im} D(x,t)$ und $\ker A(x,t)$ von x unabhängig sind und von stetig differenzierbaren Basisfunktionen aufgespannt werden.

Es darf also sinnvollerweise keine Lücke und keine Überlappung zwischen den beiden Unterräumen $\ker A(x,t)$ und $\mathrm{im} D(x,t)$ geben.

Die wohlbekannten semi-expliziten ADGln

$$\left.\begin{array}{rcl} M(x_1(t),\, x_2(t),\, t)\, x_1'(t) + b_1(x_1(t),\, x_2(t), t) &=& 0 \\ b_2(x_1(t),\, x_2(t), t) &=& 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \}m_1 \\ \}m_2 \end{array} \tag{1.5}$$

mit invertierbarem M werden in (1.1) erfaßt mit $n = m_1$ und $A = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, $d(x,t) = x_1$.
Es ist dabei offensichtlich $\ker A = 0$, $\operatorname{im} D(x,t) = \mathbb{R}^n$. Also ist (1.5) bereits eine Formulierung mit properem Hauptterm. Über die Lösbarkeit von (1.5) ist damit natürlich noch nichts gesagt, auch nichts über den Index usw. Für (1.5) wird man bei Lösungen von stetigen Funktionen ausgehen, deren erste m_1 Komponenten stetig differenzierbar sind.

Als Lösungen von (1.1) akzeptiert man natürlicherweise stetige Funktionen $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^m$, für die $d(x(.), .)$ stetig differenzierbar ist, und die die Gleichung für alle $t \in \mathcal{I}$ erfüllen. Dieses Lösungsverständnis entspricht für den (sonst uninteressanten) Spezialfall $A(x,t) \equiv I$, $d(x,t) \equiv x$ dem klassischen Lösungsbegriff für explizite Differentialgleichungen (DGln). Man sollte deshalb solche Lösungen (auch wenn sie der sehr verbreiteten Forderung nach C^1-Lösungen für ADGln nicht entsprechen) keinesfalls als *schwache* Lösungen bezeichnen. Diese Bezeichnung sollte Verallgemeinerungen in Zusammenhang mit Variationsgleichungen vorbehalten bleiben.

2. Traktabilitätsindex

Der Traktabilitätsindex wurde zunächst für ADGln in Standardform (lineare bzw. nichtlineare mit niedrigem Index) eingeführt (vgl. [1]). Er ist nicht mit Reduktionstechniken und Variablen-Transformationen verbunden, und es werden keine Gleichungen differenziert bzw. höhere Ableitungen und prolongierte Systeme gebildet. Statt dessen zielt der Traktabilitätsindex bei linearen ADGln auf eine Entkoppung des Originalsystems in die charakteristischen Komponenten. Für nichtlineare ADGln wird der Index über Linearisierung definiert.
Das Handwerkszeug für den Traktabilitätsindex sind Matrixketten, Unterräume und Projektoren. Kann man die relevanten Informationen dafür aus den Gleichungen herausfiltern, wird es möglich, den Index auch praktisch zu bestimmen. Der für das industrielle Simulationspaket TITAN von Siemens/Infineon entwickelte Index-Monitor wurde so auf der Grundlage des Traktabilitätsindex entwickelt [5]. Nicht nur bei der Schaltungssimulaton werden die Systeme zunehmend komplexer. Ein Index-Monitor kann auch als ein Sinnhaftigkeitsprüfer für große, automatisch zusammengestellte Systeme angesehen werden. Da wäre es gut, den Index bestimmen zu können und dazu die Verursacher-Komponenten von zu hohem Index, ohne daß man die Gleichungen insgesamt lösen muß.

Ausgangspunkt für den Traktabilitätsindex ist der folgende Sachverhalt für Matrixbüschel $\lambda G + B$ mit $m \times m$ Matrizen G und B. Bezeichne Q_0 eine Projektionsmatrix ($Q_0^2 = Q_0$) mit $N_0 := \ker G = \operatorname{im} Q_0$, $P_0 := I - Q_0$, weiter

$$\begin{aligned} G_0 &:= G, \quad B_0 := B, \\ G_1 &:= G_0 + B_0 Q_0, \qquad B_1 := B_0 P_0, \end{aligned}$$

und analog, mit $Q_i = Q_i^2$, $\operatorname{im} Q_i = \ker G_i =: N_i$, $P_i := I - Q_i$,

$$G_{i+1} := G_i + B_i Q_i, \quad B_{i+1} = B_i P_i, \quad i \geq 0. \tag{2.1}$$

Theorem ([6]) : $\lambda G + B$ ist genau dann ein reguläres Büschel mit Kronecker-Index μ, wenn es eine Sequenz (2.1) gibt, derart daß für $i > 1$

$N_0 \oplus \cdots \oplus N_{i-1} \subseteq \ \ker Q_i$ gilt, und
$\operatorname{rank} G_{\mu-1} < \operatorname{rank} G_\mu = m.$

Für eine lineare ADGln mit konstanten Koeffizienten

$$Gx'(t) + Bx(t) = q(t) \tag{2.2}$$

sind mit der Sequenz (2.1) Rearrangements verbunden:

$$\begin{aligned} &G_0x'(t) + B_0(P_0 + Q_0)x(t) = q(t), \\ &(G_0 + B_0Q_0)(P_0x'(t) + Q_0x(t)) + B_0P_0x(t) = q(t), \end{aligned}$$

usw. bis

$$G_\mu\{P_{\mu-1}\cdots P_0x'(t) + Q_0x(t) + \cdots + Q_{\mu-1}x(t)\} + B_{\mu-1}P_{\mu-1}\,x(t) = q(t).$$

Dabei ist die obige spezielle Wahl der Projektoren Q_i, die $Q_iQ_j = 0$ für $j < i$ liefert, sehr hilfreich. U.a. sind die Produkte $P_0 \cdots P_i$, $P_0 \cdots P_{i-1}Q_i$ wieder Projektoren.
Stellt man bei der Bildung der Sequenz (2.1) beim Schritt i_* fest, daß Q_{i*} nicht wie gewünscht gewählt werden kann, so handelt es sich bei $\lambda G + B$ um ein singuläres Büschel.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x_1'(t) & + & x_1(t) & = & q_1(t) \\ x_3'(t) & + & x_2(t) & = & q_2(t) \\ x_4'(t) & + & x_3(t) & = & q_3(t) \\ & & x_4(t) & = & q_4(t) \\ & & x_5(t) & = & q_5(t) \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Hierzu gibt es die folgende Sequenz:

$$G_0 = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1Q_0 = 0,$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2Q_1 = 0,\ Q_2Q_0 = 0,$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_0 Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_0P_1Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_0P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung x kann hiermit zerlegt werden zu

$$x = P_0P_1P_2x + P_0P_1Q_2x + P_0Q_1x + Q_0x.$$

Ein Blick auf (2.3) mach die Zuordnung zu den charakteristischen Komponenten deutlich.

Mit einer geeigneten Faktorisierung $G = AD$ kann man die ADGln (2.2) als

$$A(Dx(t))' + Bx(t) = q(t)$$

umschreiben und analog vorgehen.
Für ADGln (1.2) mit variablen Koeffizienten wird die Sequenz von Matrizen und Projektoren ausgehend von $G_0 := AD$, $B_0 := B$ punktweise für jedes t gebildet, allerdings mit einem etwa komplizierterem B_i:

$$\left.\begin{array}{lcl} G_{i+1} & := & G_i + B_iQ_i, \\ B_{i+1} & := & B_iP_i - G_{i+1}D^-(DP_0 \cdots P_{i+1}D^-)'DP_0 \cdots P_i \end{array}\right\}, \tag{2.4}$$

wobei D^- eine verallgemeinerte Inverse zu D ist ([7], [8]).

Definition ([7]): Eine ADGln (1.2) mit properem Hauptterm heißt regulär mit Traktabilitätsindex μ, falls es eine Sequenz (2.4) mit folgenden Eigenschaften gibt:

(a) $G_i(t)$ hat konstanten Rang r_i auf $\mathcal{I}, i = 0, \cdots, \mu$,

(b) $N_0(t) \oplus \cdots \oplus N_{i-1} \subseteq \ker Q_i(t)$, $i = 1, \cdots, \mu - 1$, $t \in \mathcal{I}$,

(c) Q_i ist stetig, $DP_0 \cdots P_iD^-$ ist stetig differenzierbar, $i = 0, \cdots, \mu - 1$,

(d) $r_{\mu-1} < r_\mu = m$.

Regularität mit Traktabilitätsindex μ ist unabhängig von der Projektorwahl im Rahmen des Kalküls [7]. Für den Fall konstanter Koeffizienten ist das genau die Büschel-Regularität mit Kronecker-Index μ. Invarianz in bezug auf Transformation der Variablen und auch auf Refaktorisierung des Hauptterms ist in [7] bewiesen.

Jede reguläre ADGln (1.2) mit Index μ (und eventuell zur Stetigkeit zusätzlichen Glattheitsanforderungen an A, D, B) kann nun mit

$$\begin{aligned} &u = DP_0 \cdots P_{\mu-1}x, \\ &v_0 = Q_0 x,\ v_i = P_0 \cdots P_{i-1} Q_i x, i = 1, \cdots, \mu - 1, \end{aligned}$$

entkoppelt werden zu ([8], [9])

$$u' - (DP_0 \cdots P_{\mu-1} D^-)' \, u + DP_0 \cdots P_{\mu-1} G_\mu^{-1} BD^- u = DP_0 \cdots P_{\mu-1} G_\mu^{-1} q, \qquad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{N}_{12} & \cdots & \mathcal{N}_{1\mu-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \mathcal{N}_{\mu-2\mu-1} \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_1' \\ \vdots \\ v_{\mu-1}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & \mathcal{M}_{12} & \cdots & \mathcal{M}_{1\mu-1} \\ 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathcal{M}_{\mu-2\mu-1} \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{\mu-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_0 q \\ \\ \\ \mathcal{L}_{\mu-1} q \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Die (stetigen) Koeffizienten $\mathcal{N}_{ij}$, $\mathcal{M}_{ij}$ und $\mathcal{L}_i$ sind in [8, 9] angegeben. Im Falle konstanter Projektoren $P_0, \cdots, P_{\mu-1}$ verschwinden die Koeffizienten $\mathcal{M}_{ij}$.

Die inhärente reguläre DGln (2.5) ist hier (bei einer sogenannten feinen Entkopplung [9]) eindeutig durch die Koeffizienten A, D, B festgelegt, und ihre Dynamik bestimmt die der ADGln insgesamt. Eine Prüfung der Koeffizienten $\mathcal{L}_1, \cdots \mathcal{L}_{\mu-1}$ ermöglicht die Charakterisierung von kausalen (proper nach P.C. Müller) gesteuerten ADGln. Auch hierfür ist wieder ein Projektor relevant [8]. Für

$$A(Dx)' + Bx = Cu \quad \text{mit} \quad G_\mu (I - P_1 \cdots P_{\mu-1}) G_\mu^{-1} C = 0$$

erreicht man $\mathcal{L}_i Cu = 0$, $i = 1, \cdots, \mu - 1$, was Differentiationen von u ausschließt.

Für nichtlineare ADGln (1.1) wird eine Sequenz analog zu (2.4) aufgebaut, und zwar punktweise für x, t und y ausgehend von $G_0(x,t) = A(x,t)D(x,t)$ und $B_0(y,x,t) = b_x(x,t) + (A(x,t)y)_x$. Dabei muß der Term $(DP_0 \cdots P_{i+1} D^-)'$ in (2.4) durch einen entsprechenden Ausdruck ersetzt werden [4].

Die Sequenz ist so konstruiert, daß alle Linearisierungen einer ADGln mit Traktabilitätsindex μ längst ausreichend glatter Funktionen wieder den Index μ haben [4].
Einige speziellere Fragen hierzu werden in [11] diskutiert.

In [10] ist ein numerischer Algorithmus zur Konstruktion der Projektoren und zum Index-Test entwickelt worden.

3. Linear-quadratische Optimalsteuerung

Sei die Kostenfunktion

$$J(x,u) := \frac{1}{2}\langle x(T), Vx(T)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^T \langle \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W(t)\, S(t) \\ S(t)^* K(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \rangle dt \tag{3.1}$$

mit der Nebenbedingung

$$A(t)(D(t)x(t))' + B(t)x(t) = C(t)u(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$

$$A(0)D(0)x(0) = y_0 \tag{3.3}$$

zu minimieren. $T > 0$ und $y_0 \in \operatorname{im} A(0)D(0)$ sind gegeben. (3.2) habe einen properen Hauptterm. $V, W(t)$ und $K(t)$ seien symmetrisch, V und $\begin{pmatrix} W(t)\, S(t) \\ S(t)^* K(t) \end{pmatrix}$ seien positiv semi-definit. Weiter gelte $N_0(T) := \ker(A(T)D(T) \subseteq \ker V$.

Zugleich mit (3.1) , (3.2), (3.3) betrachten wir die Randwertaufgabe (RWA).

$$\left.\begin{array}{rcl} A(Dx)' &=& -Bx + Cu \\ -D^*(A^*\lambda)' &=& Wx - B^*\lambda + Su \\ 0 &=& S^*x + C^*\lambda + Ku \end{array}\right\}, \tag{3.4}$$

$$A(0)D(0)x(0) = y_0, \quad D(T)^*A(T)^*\lambda(T) = Vx(T). \tag{3.5}$$

Nicht nur die zweite Gleichung im System (3.4) hat wieder einen properen Hauptterm, sonder auch das System (3.4) insgesamt.
Nach [12] liefert jede Lösung der RWA (3.4), (3.5) ein optimales Paar x_*, u_* für das Minimierungsproblem (3.1), (3.2), (3.3), d.h. die RWA stellt eine hinreichende Extremalbedingung dar. Nach [13] kann es jedoch sein, daß die Minimierungsaufgabe lösbar ist, die RWA aber nicht, d.h. die RWA ist nicht für alle Fälle notwendige Extremalbedingung. Nach [13] ist sie es, wenn die Matrix $(G_1(t)\, C(t))$ vollen Zeilenrang hat.

In [12] werden hinreichende und notwendige Bedingungen dafür gegeben, daß die ADGln (3.4) regulär mit Traktabilitätsindex Eins ist. Dies sind Zeilen-Vollrang-Bedingungen für die beiden Matrizen (punktweise für $t \in [0,T]$)

$$(G_1 C) \text{ und } \begin{pmatrix} G_0^* & B^*Q_{*0} & WQ_0 & S \\ 0 & -C^*Q_{*0} & S^*Q_0 & K \end{pmatrix},$$

mit $Q_0 = I - G_0^+ G_0$, $Q_{*0} = I - G_0 G_0^+$.
Für ADGln (3.4) mit Index Eins und $\ker A = 0$ hat die inhärente reguläre DGl Hamilton-Eigenschaften [12], was sehr für die Modellierung der ADGln mit $\ker A = 0$ spricht.

Abschließend sei bemerkt, daß die unten angegebenen Referenzen die Quellen für hier zitierte Ergebnisse sind. Sie enthalten zugleich die notwendigen Auseinandersetzungen mit vorhandener Literatur, auf die hier ganz verzichtet wurde.

Referenzen:

Hier werden *ausschließlich* Quellen zusammengestellt, die die oben skizzierten Ergebnisse im Detail enthalten. Eine entsprechende Einordnung von Problemen und Ergebnissen in die relevante Literatur ist nicht Anliegen dieses Vortrags. Hierzu sein auf die genannten Quellen und die darin enthaltenen Kommentare verwiesen.

[1] R. März: Numerical methods for differential-algebraic equations. Acta Numerica 1992, 141-198.

[2] R. März: Differential algebraic systems anew. Applied Numerical Mathematics 42, 315-335, 2002.

[3] K. Balla, R. März: A unified approach to linear differential algebraic equations and their adjoints. Journal for Analysis and its Application 21, 783-802, 2002.

[4] R. März: Differential algebraic systems with properly stated leading term and MNA equations. Intern. Series of Numerical Mathematics Vol. 146, 135-151, 2003.

[5] R. März, D. Estévez Schwarz, U. Feldmann, S. Sturzel, C. Tischendorf: Finding benefical DAE structures in circuit simulation. In: W. Jäger, H.-J. Krebs (eds.) Mathematics - Key Technology for the Future. Springer 2003.

[6] E. Griepentrog, R. März: Basic properties of some differential-algebraic equations. Journal for Analysis and its Application 8, 25 - 40, 1989.

[7] R. März: The index of linear differntial algebraic equations with properly stated leading terms. Results in Mathematics 42, 308-338, 2003.

[8] R. März: Solvability of linear differential algebraic equations with properly stated leading term. Results in Mathematics, to appear.

[9] R. März: Fine decouplings of regular differential algebraic equations. Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik, Preprint 04-3, http://www.mathematik.hu-berlin.de.

[10] R. Lamour: Index determination and calculation of consistent initial values for DAEs. Computers Math. Applic., to appear.

[11] I. Schumilina: Charakterisierung der Algebro-Differentialgleichungen mit Traktabilitätsindex 3, Manuskript, 2004.

[12] K. Balla, G.A. Kurina, R. März: Index criteria for differential algebraic equations arising from linear-quadratic optimal control problems. Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik, Preprint 03-14, http://www.mathematik.hu-berlin.de.

[13] A. Backes: A necessary optimality condition for the linear-quadratic DAE control problem. Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik, Preprint 03-16, http://www.mathematik.hu-berlin.de.