

Ein einparametrischer Zugang zur Lösung von Vektroptimierungsproblemen in halbgeordneten endlichdimensionalen Räumen

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herr Dipl.-Math. Paulo Mbunga
geboren am 05.12.1965 in Damba / Angola

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Hans Jürgen Prömel

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät II:
Prof. Dr. Uwe Kühler

Gutachter:

1. Prof. Dr. Christiane Tammer
2. Prof. Dr. Jan-J. Rückmann
3. Prof. Dr. Jürgen Guddat

eingereicht am: 29.12.2005
Tag der mündlichen Prüfung: 09.06.2006

Zusammenfassung

Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen steht das mehrkriterielle Optimierungsproblem, in einer beliebigen nichtleeren Menge eines halbgeordneten endlich dimensionalten Raumes. Zu dessen Lösung betrachten wir ein Dialogverfahren, in dem der Entscheidungsträger in jedem Schritt seine Wünsche äußert. Bei der Bestimmung einer Lösung, die den Entscheidungsträger zufriedenstellt, müssen wir ein im Allgemeinen nichtkonvexes und nicht triviales skalares Optimierungsproblem lösen. Zur Lösung dieses Problems haben wir zwei Klassen einparametrischer Optimierungsprobleme (Einbettungen) konstruiert. Mit Hilfe der Projektion auf den konvexen Ordnungskegel haben wir gezeigt, dass diese Einbettungen wohldefiniert sind. Im Gegensatz zu der in der Literatur untersuchten Standardeinbettung, sind die in dieser Arbeit betrachteten Einbettungen durch die Skalarisierungen der Vektroptimierungsprobleme mittels streng monotoner skalarisierender Funktionen motiviert. Diese Untersuchung wird unter dem Gesichtspunkt der Theorie der einparametrischen Optimierungsprobleme für den Fall eines beliebigen spitzen polyedrischen Ordnungskegels durchgeführt. Sie umfasst z.B. Fragestellungen nach der Art der Singularitäten, die für die verschiedenen Einbettungen auftreten können, nach den Bedingungen, unter denen eine Zusammenhangskomponente in der Menge stationärer oder verallgemeinerter kritischer Punkte mit Hilfe von Kurvenverfolgungsmethoden numerisch beschrieben werden kann und nach den hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösungskurve. Anschließend haben wir das von Gudat und Jongen eingeführte Konzept der strukturellen Stabilität eines skalaren Optimierungsproblems in der Vektroptimierung verallgemeinert und einen Zusammenhang zur strukturellen Stabilität eines Minimaxproblems erstellt. Dieses Minimaxproblem steht in starker Beziehung zur Skalarisierungsmethode der Vektroptimierungsprobleme.

Schlagwörter:

Vektroptimierung, Parametrische Optimierung, Kurvenverfolgungsmethoden, streng monoton wachsend skalarisierende Funktion, strukturelle Stabilität

Abstract

In this work we consider the multiobjective optimization in a subset of a partially ordered finite dimensional space. In order to solve this problem we use a dialogue procedure in which the decision maker has to determine in each step the aspiration and reservation level expressing his wishes (goals). This leads to an optimization problem which is not easy to solve in the nonconvex case. We solve it proposing two classes of one-parametric optimization problems (embeddings). Using the projection in the ordering cone, we show that these embeddings are well defined, i.e. the corresponding constraint sets depending on real-valued parameters are not empty. Contrary to the very known standard embedding the proposed embeddings are motivated by the use of strongly monotonically increasing functions, which play an important role by the scalarization of multiobjective optimization problems. The two classes of embeddings are investigated from the point of view of parametric optimization considering a pointed polyhedral cone. This investigation includes the determination of the kind of singularities which can appear, the conditions under which a connected component in the set of stationary or generalized critical point can be numerically described using pathfollowing methods and a solution curve may exist. Finally, we extend the concept of structural stability by Guddat and Jongen to the multiobjective optimization problems and establish a connection to the problem of Minimax type, which is related to the scalarization of multiobjective optimization problems.

Keywords:

Multiobjective optimization, parametric optimization, pathfollowing methods, strongly monotonically increasing function, structural stability

Widmung

Hiermit möchte ich mich herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. J. Gudat und allen Mitarbeitern des Bereiches Mathematische Optimierung der Humboldt-Universität für die fachlichen Diskussionen und nützlichen Hinweise bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Finite Optimierung	9
2.1	Grundlegende Definitionen und Beziehungen	9
2.2	Topologische Eigenschaften und Strukturelle Stabilität . . .	12
3	Vektoroptimierung: Grundbegriffe	17
3.1	Lösungskonzepte in der Vektoroptimierung	17
3.2	Skalarisierung von Vektoroptimierungsaufgaben	23
3.3	Klassische Verfahren	25
4	Einparametrische Optimierungsprobleme	29
4.1	Nichtdegenerierte kritische Punkte	29
4.2	Die Klasse von Jongen, Jonker und Twilt	32
4.2.1	Über Kurvenverfolgungsalgorithmen und Sprünge (Jumps)	42
5	Anwendung des Einbettungsprinzips in der Vektoroptimierung	50
5.1	Das Hauptproblem	51
5.2	Verallgemeinerte Einbettungen basierend auf streng mono- ton wachsende Skalarisierungsfunktionen	55
5.2.1	D -monoton fallende Kurven	56
5.2.2	Singularitäten	58
5.2.3	Die Startsituation	66
5.2.4	Eine modifizierte Standard-Einbettung	70
5.2.5	Penalty-Skalarisierung und deren Einbettung	71
5.2.6	Charakterisierung der Rückkehrpunkte ohne Sprung- möglichkeit	77
5.3	Über die Existenz einer Lösungskurve und die Rolle der Mangasarian-Fromovitz-Bedingung	84
5.3.1	Unterhalbstetigkeit der "Abschnittsabbildung" Γ . .	85

5.3.2	Die Rolle der MFCQ und die Enlarged MFCQ	86
6	Regularisierungen	90
6.1	Verallgemeinerte Einbettungen und die Klasse \mathcal{F}	90
7	Strukturelle Stabilität für Vektoroptimierungsprobleme	98
7.1	Lemmata und vorbereitende Ergebnisse	104
7.2	Beweis des Hauptsatzes (Notwendigkeitsteil)	105
8	Das Verfahren und Illustrative Beispiele	109
8.1	Dialog-Verfahren auf Basis einparametrischer Optimierung .	109
8.2	Numerische Beispiele	110
9	Abschließende Bemerkung	122

Abbildungsverzeichnis

1.1	Sprung in Punkten vom Typ 4	4
1.2	Rückkehrpunkte in negativer und positiver Richtung	5
4.1	5 Typen von Jongen, Jonker und Twilt	34
4.2	Sprung in Punkten vom Typ 2	44
4.3	Sprung in Punkten vom Typ 3	45
5.1	Konstruktion nichtleerer Abschnitte	57
5.2	Type 2: Situationen I, II und III	64
5.3	Verhalten am Punkt vom Typ 4 ohne Sprung, $f_j(\bar{x}) = u_j(\bar{t})$	65
8.5	Beispiel 6 mit dem Goal $\mu^1 = (200, 800)$	112
8.6	Beispiel 6 mit $\mu^1 = (400, 600)$	113
8.7	Beispiel 6 mit $\mu^1 = (200, 300)$	114
8.8	Beispiel 6 mit $\mu^1 = (100, 240)$	115
8.9	Beispiel 6 mit $\mu^1 = (100, 250)$	116
8.10	Beispiel 6 mit $\mu^1 = (1000, 2500)$, $K = 1500$	117
8.1	Beispiel 5 in (x_1, x_2) -Raum	118
8.2	Beispiel 5 in (y_1, y_2) -Raum	119
8.3	Beispiel 5 in (x_1, x_2) -Raum mit $x^0 = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$	120
8.4	Beispiel 5 in (y_1, y_2) -Raum mit $x^0 = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$	121

Tabellenverzeichnis

8.1	Ein Dialogablauf	111
-----	----------------------------	-----

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Lösung von Optimierungsproblemen mit mehreren Zielfunktionen, den so genannten Vektroptimierungsproblemen:

$$(\mathcal{VOP}) \quad \min \{f(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x)) \mid x \in M\},$$

wobei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $f_k \in C^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), k = 1, \dots, l, q \geq 2$.

Solche Probleme haben eine große praktische Bedeutung, i.A. hat man nicht nur eine Zielfunktion.

Wir geben hier nur ein Beispiel an: Optimale Lastverteilung, d.h. Steuerung der Kraftwerke im Verbund:

- Kostenfunktion minimieren!
- Netzverluste minimieren!

Konkrete Beispiele findet man in [17].

Was versteht man unter einer Lösung von (\mathcal{VOP}) ?

In der Literatur wurden für das (\mathcal{VOP}) verschiedene „Lösungsbegriffe“ vorgeschlagen, z.B. (lokal) effiziente Punkte, (lokal) effiziente Punkte mit Schranke ϵ , schwach effiziente Punkte. Es handelt sich jeweils um Punkte, für die es bezüglich einer gewissen Prä- oder Halbordnung keinen besseren gibt. Die entsprechenden Mengen schränken die Restriktionsmengen des (\mathcal{VOP}) ein, sind aber im Allgemeinen viel zu groß. Es ist auch nicht sinnvoll (weder numerisch noch praktisch), diese Mengen zu berechnen. Deshalb setzen wir ein Dialogverfahren ein, das wir kurz beschreiben werden.

Dialog-Verfahren (Mensch-Maschine) Es sei $x^o = x^k$ ein im k -ten Schritt berechneter Punkt. Vorher haben wir

$$(1.1) \quad \hat{f}_j = \inf \{f_j(x) \mid x \in M\}$$

berechnet.

Im nichtkonvexen Fall setzen wir voraus, dass \hat{f}_j hinreichend gute untere Schranken sind.

Bildschirm:

\hat{f}_1	$f_1(x^k)$	$\frac{f_1(x^k) - \hat{f}_1}{ \hat{f}_1 } \times 100$
\vdots	\vdots	\vdots
\hat{f}_j	$f_j(x^k)$	$\frac{f_j(x^k) - \hat{f}_j}{ \hat{f}_j } \times 100$
\vdots	\vdots	\vdots
\hat{f}_l	$f_l(x^k)$	$\frac{f_l(x^k) - \hat{f}_l}{ \hat{f}_l } \times 100$

Die letzte Spalte enthält die prozentualen Abweichungen von den unteren Schranken. Im Falle $\hat{f}_j = 0$ und $\hat{f}_j = -\infty$ müssen geeignete Zahlen gewählt werden. Dem Entscheidungsträger (decision maker) werden folgende Fragen vorgelegt:

1. Welche $f_j (j \in L)$ möchten Sie verbessern?
2. Sei $L_1 \subset L$ die entsprechende Indexmenge. Welchen Wert μ_j^1 möchten Sie für $f_j, j \in L_1$ erreichen?
3. Welche obere Schranke μ_k^1 würden Sie für $f_k, k \in L \setminus L_1$ akzeptieren?

In der Literatur wird $\mu_j^1, j \in L_1$ als „aspiration level“ und $\mu_j^1, j \in L \setminus L_1$ als „reservation level“ bezeichnet. Der Dialog endet, wenn der Entscheidungsträger „zufrieden“ ist.

Sei

$$M_{\mu^1} := \{x \in M \mid f(x) \leq_D \mu^1\},$$

wobei \leq_D eine durch den konvexen Kegel D induzierte Halbordnung in \mathbb{R}^l ist.

Fragen

1. $M_{\mu^1} \neq \emptyset$ (ist μ^1 realistischer Wunsch (realistic goal)?) oder $M_{\mu^1} = \emptyset$ (ist μ^1 nicht realistisch?)
2. Voraussetzung: $M_{\mu^1} \neq \emptyset$
Bestimme einen Punkt $\hat{x} \in M_{\mu^1}$, der zugleich z.B. (lokal) effizient ist. Diesen Punkt bezeichnen wir als Goal-Realizer.

Setzen wir einfachheitshalber für die folgende Beschreibung voraus, dass M_{μ^1} nicht leer ist und $D = \mathbb{R}_+^l$. Zur Bestimmung eines Goal-Realizers bietet sich die so genannte Standardeinbettung an:

$$P_1(t) : \quad \min \left\{ \|x - x^o\|^2 \mid x \in M_1(t) \right\} \quad t \in [0, 1],$$

wobei

$$M_1(t) := \{x \in M \mid f_j(x) + (t-1)|f_j(x^o)| \leq 0, j \in J\}$$

und $x^o \in M$ fest gewählt.

Eine geeignete Modifizierung von $P_1(t)$ wurde in [20] untersucht. Wenn wir für $t = 0$ mit x^o (globaler Minimalpunkt für $P_1(0)$) mit einem Kurvenverfolgungsalgorithmus starten und eine Diskretisierung

$$(1.2) \quad 0 = t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = 1$$

und zugehörige lokale Minimalpunkte (stationäre bzw. kritische Punkte) $x(t_i), i = 1, \dots, N$ finden, haben wir offensichtlich einen Goal-Realizer bestimmt. Wir haben mit einem speziellen einparametrischen Optimierungsproblem zu tun.

Für ein allgemeines Problem der Gestalt

$$P(t) : \quad \min \{f(x, t) \mid h_i(x, t) = 0, i \in I, g_j(x, t) \leq 0, j \in J\} \quad t \in [0, 1],$$

wobei $I := \{1, \dots, m\}, J := \{1, \dots, s\}, f, h_i, g_j \in C^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i \in I, j \in J, q \geq 2$, gibt es eine ausgearbeitete Theorie (Stabilitätssätze, generische Singularitäten, die Klasse \mathcal{F} von Jongen-Jonker-Twilt für C^3 -Funktionen, die Klasse \mathcal{K} von Kojima-Hirabayashi für C^2 -Funktionen, Störungssätze) und

Lösungsverfahren (Kurvenverfolgungsalgorithmen) mit Sprüngen von einer Zusammenhangskomponente in

$$(1.3) \quad \Sigma_{loc} := \{(x, t) \mid x \text{ lokaler Minimalpunkt für } P(t)\}$$

$$(1.4) \quad \Sigma_{stat} := \{(x, t) \mid x \text{ stationärer Punkt für } P(t)\}$$

$$(1.5) \quad \Sigma_{gc} := \{(x, t) \mid x \text{ g.c. Punkt für } P(t)\}$$

zu einer anderen mit den Algorithmen PATH I - PATH III, JUMP I - JUMP III in [16] bis hin zum Programmpaket PAFO (siehe [12], [56]).

Es geht nun bei der Wahl einer speziellen Einbettung $P_i(t)$, z.B. $i = 1$, darum, dieses spezielle einparametrische Problem bezüglich der oben genannten Theorie und Lösungsverfahren zu analysieren bzw. Einbettungen so zu modifizieren, dass bessere Eigenschaften gelten.

Im Folgenden sollen nun die Hauptfragen an eine spezielle Einbettung $P_i(t)$ beschrieben werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Klasse \mathcal{F} .

1. Setzen wir voraus, dass die Problem beschreibenden Funktionen von $P_i(t)$ zur Klasse \mathcal{F} gehören, dann stellen wir die Frage: Welche Singularitäten können auftreten?
2. Ist die Voraussetzung in 1. gerechtfertigt?
3. Wie kommt man durch Störungen in die Klasse \mathcal{F} ?
4. Zum besseren Verständnis der Frage 4 sei bemerkt, dass man bei Punkten $(\bar{x}, \bar{t}) \in cl \Sigma_{loc}$ vom Typ 4 zwischen den folgenden Fällen zu unterscheiden hat (siehe Abbildung 1.1). Welche der beiden Fälle

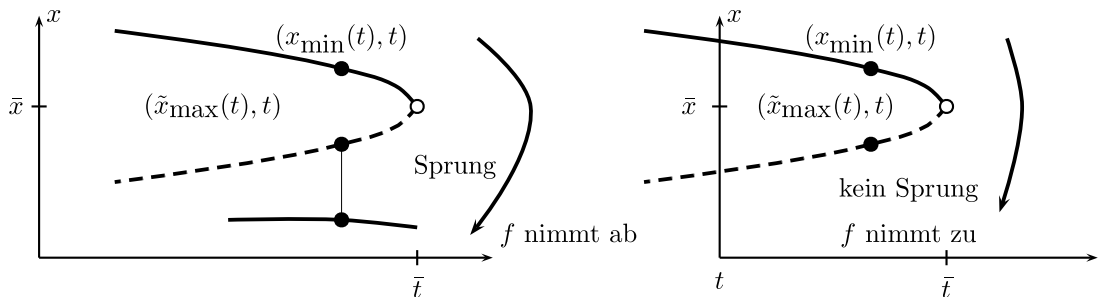


Abbildung 1.1: Sprung in Punkten vom Typ 4

kann für $P_i(t)$ eintreten bzw. kommen beide vor? Die Frage 5 erläutern wir am Beispiel vom Typ 4. Dieser Punkt kann in zwei Richtungen auftreten (siehe Abbildung 1.2)

5. In welcher Richtung können Punkte vom Typ 4 auftreten?

Nehmen wir einmal an, es gelingt, eine Einbettung zu konstruieren, bei der Punkte vom Typ 4 nur in positiver Richtung auftreten, so wäre der Algorithmus JUMP I erfolgreich (Hinweis zu JUMP I: Start in einem lokalen Minimalpunkt, Kurvenverfolgung; wenn ein Rückkehrpunkt z.B. vom Typ 3 auftritt Sprung zu einer anderen Zusammenhangskomponente).

6 Ist man unter der so genannten Enlarged Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification an die Menge M_{μ^1} mit einfacher Kurvenverfolgung (PATH III) erfolgreich?

Das Problem $P_1(t)$ wurde in dieser Richtung in [20] untersucht. Es hat aber den folgenden großen Nachteil: Man findet zwar unter gewissen Bedingungen einen Goal-Realizer, der aber nicht notwendig aus einer der zu Beginn erwähnten Mengen der (lokal) effizienten oder (lokal) effizienten Punkte mit Schranke ϵ zu sein braucht. Diese spielen jedoch in der Literatur eine wichtige Rolle. Wir haben hier z.B. die Mengen der lokalen effizienten Punkte aufgeschrieben. Damit wollen wir zum Ausdruck bringen, dass uns der nichtkonvexe Fall interessiert und die in dieser Arbeit betrachteten Einbettungen durch diese Mengen motiviert sind.

Aufgabenstellungen

I Bearbeitung der Fragestellungen 1. – 6.

II Es sollen noch weitere aus der Literatur (siehe z.B. [59]) bekannte Einbettungen in diesem Sinne modifiziert und dann untersucht werden.

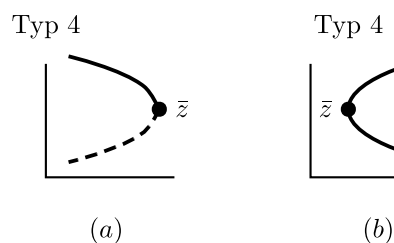


Abbildung 1.2: Rückkehrpunkte in negativer und positiver Richtung

III Theoretische und numerische Vergleiche ausgewählter Einbettungen.

IV Anpassung des für allgemeine einparametrische Optimierungsprobleme entwickeltes Programmpaket PAFO an die speziellen Einbettungen.

V Entwicklung eines nutzerfreundlichen Dialogalgorithmus in Kombination mit PAFO.

Das zweite Kapitel enthält grundlegende Definitionen und wohlbekannte Optimalitätsbedingungen. Anschließend werden wichtige Werkzeuge (z.B. der Stabilitätssatz, die starke Whitney Topologie) für diese Arbeit dargestellt.

Im dritten Kapitel werden grundlegende theoretische Begriffe der Vektoroptimierung eingeführt, die dem weiteren Verständnis der Arbeit dienen sollen.

Das vierte Kapitel ist der Theorie einparametrischer Optimierungsprobleme sowie Kurvenverfolgungsalgorithmen wie Path II, Path III und Sprünge wie Jump I und II gewidmet.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit zwei Klassen von inneren Einbettungen, die durch streng monoton wachsende skalarisierende Funktionen motiviert sind:

Die erste Klasse wird durch folgende Einbettungen vertreten:

(a)

$$(P_u(t)) \quad \min \{ \psi \circ \mathbf{f}(x) \mid x \in M_u(t) \},$$

wobei

$$M_u(t) = \{x \in M \mid \mathbf{f}(x) \leq_D u(t)\}.$$

Hierbei ist ψ eine auf $f(M)$ streng D -monoton wachsende Funktion mit $\psi \circ \mathbf{f} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $k \geq 3$ und $u \in C^k(I; \mathbb{R}^l)$, $k \geq 1$, mit folgenden Eigenschaften:

- I ist ein Intervall in \mathbb{R} mit $[0, 1] \subseteq I$
- $u(t) = (u_1(t), \dots, u_l(t))$
- $u(0) = \mu^0$ und $u(1) = \mu^1$ (Der realistischer Wunsch des Entscheidungsträgers).

Für eine bessere Startsituation werden wir auch die folgende Modifizierung berücksichtigen:

$$P_u''(t) : \min \left\{ \alpha(t) \psi \circ \mathbf{f}(x) + (1 - \alpha(t)) \|x - x^0\|^2 \mid x \in M_u(t) \right\}.$$

Hierbei ist $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \alpha(x) \leq 1, \quad x \in [0, 1],$
- $\alpha(0) = 0$ und $\alpha(1) = 1,$
- $\alpha(t) = 0$, falls $t < 0$.

(b) Die weitere Klasse wird durch die Penalty-Einbettung erzeugt:

$$P_1^p(t) : \min \left\{ -\|\mathbf{f}(x) - u(t)\|^2 + \alpha(t) \left\| (\mathbf{f}(x) - u(t))^{D^*} \right\|^2 \mid x \in M \right\}, t \in [0, 1]$$

mit $\alpha(t) := \left(\frac{t}{1-t}\right)^2$, wobei die Funktion $u \in \mathfrak{U}([0, 1])$, d.h. u ist auf $[0, 1]$ D -monoton fallend.

Die Bearbeitung der Fragestellungen 1. – 6. für die oben genannten Einbettungen wurde speziell im Falle eines spitzen polyedrischen Kegels durchgeführt.

Im sechsten Kapitel wird die Regularität in Sinne von Jongen, Jonker und Twilt für die oben genannten Klassen von Einbettungen präsentiert.

Im siebten Kapitel verallgemeinern wir das von Guddat/Jongen [21] eingeführte Konzept der Strukturellen Stabilität eines skalaren Optimierungsproblems auf die Vektoroptimierung und machen Aussagen über eine gewisse Stabilität oder Instabilität eines Vektoroptimierungsproblems. Wir studieren globale Stabilitätseigenschaften des Vektoroptimierungsproblems vom Typ :

$$\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G): \quad \min \{ \mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x)) \mid x \in M[H, G] \},$$

wobei

$$M[H, G] := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0, \quad g_j(x) \leq 0, \quad i \in I, j \in J \}$$

mit

$$I := \{1, \dots, m\}, \quad J := \{1, \dots, s\}, \quad L := \{1, \dots, l\}.$$

Unter der Annahme der Kompaktheit der Restriktionsmenge $M[H, G]$ geben wir eine notwendige Bedingung dafür an, dass das Vektoroptimierungsproblem $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ strukturell stabil ist.

Im achten Kapitel präsentieren wir ein auf einparametrische Optimierung basierendes Dialog-Verfahren und ein paar illustrative Beispiele.

Kapitel 2

Finite Optimierung

2.1 Grundlegende Definitionen und Beziehungen

In diesem Kapitel definieren wir mehrere Begriffe, die sich auf das finite Optimierungsprobleme

$$\mathcal{P}(f, H, G) : \quad \min \{f(x) \mid x \in M[H, G]\},$$

wobei

$$\begin{aligned} M[H, G] &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0 \quad (i \in I), \quad g_j(x) \leq 0 \quad (j \in J)\} \\ I &:= \{1, \dots, m\}, \quad m < n, \quad J := \{1, \dots, s\} \end{aligned}$$

beziehen.

Alle in diesem Kapitel genannten Definitionen und Sätze sind bekannt. Bei verschiedenen Anwendungen und Lösungsansätzen werden unterschiedliche Differenzierbarkeitsgrade für die definierenden Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \quad H := (h_1, \dots, h_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{und} \quad G &:= (g_1, \dots, g_s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s \end{aligned}$$

von $\mathcal{P}(f, H, G)$ verlangt. In dieser Arbeit, werden wir annehmen, dass die Funktionen $f, h_i, i \in I, g_j, j \in J$ aus $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind. Gegeben sei $\bar{x} \in M[H, G]$. Wir setzen

$$(2.1) \quad J_o(\bar{x}) := \{j \in J \mid g_j(\bar{x}) = 0\}$$

für die Menge der aktiven Ungleichungsnebenbedingungen. Ein Element $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt zulässig, wenn $\bar{x} \in M[H, G]$ gilt. Als lokale Lösung von $\mathcal{P}(f, H, G)$ werden \bar{x} bezeichnet, die der Beziehung

$$(2.2) \quad f(\bar{x}) \leq f(x) \text{ für alle } x \in M[H, G] \cap U(\bar{x})$$

genügen, wobei $U(\bar{x})$ eine offene Normkugel um \bar{x} mit einem hinreichend kleinen Radius $\epsilon > 0$ ist. Es wird von einem strikten lokalen Minimalpunkt gesprochen, falls die Ungleichung (2.2) strikt gilt.

Die Menge $M[H, G]$ kann im Allgemeinen sehr bizarr aussehen, auch wenn die definierenden Funktionen h_i, g_j oft differenzierbar sind. Wir erwähnen dazu den folgenden Satz von H. Whitney (siehe [4]).

Satz 1 *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. Dann existiert ein $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$.*

Um die Menge $M[H, G]$ zu strukturieren, müssen wir ihr, infolge des Satzes 1, zusätzliche Bedingungen aufzwingen. Wir führen zunächst die folgenden Bedingungen, die in unserer Arbeit eine besondere Rolle spielen, ein:

Definition 1 (LICQ) *Die lineare Unabhängigkeitsbedingung ist in einem Punkt $\bar{x} \in M[H, G]$ erfüllt, falls die Vektoren $\{Dh_i(\bar{x}), i \in I, Dg_j(\bar{x}), j \in J_o(\bar{x})\}$ linear unabhängig sind.*

Definition 2 (MFCQ) *Die Mangasarian-Fromovitz Bedingung ist in einem Punkt $\bar{x} \in M[H, G]$ erfüllt, falls Folgendes gilt:*

MF1 *die Vektoren $\{Dh_i(\bar{x}), i \in I\}$ sind linear unabhängig.*

MF2 *Es existiert ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass:*

$$\begin{aligned} Dh_i(\bar{x})\xi &= 0, & i \in I \\ Dg_j(\bar{x})\xi &< 0, & j \in J_o(\bar{x}). \end{aligned}$$

Der Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ wird MF-Vektor für die Stelle \bar{x} genannt.

Der folgender Satz ermöglicht es, die einfachen Optimalitätskriterien erster Ordnung für $\mathcal{P}(f, H, G)$ anzugeben.

Satz 2 (F. John) *Es sei $k \geq 1$, und es seien $f, h_i, g_j \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i \in I, j \in J$. Ferner sei \bar{x} ein lokaler Minimalpunkt von $\mathcal{P}(f, H, G)$. Dann gibt es Zahlen $\bar{\lambda}_o \geq 0, \bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j \in \mathbb{R}, i \in I, j \in J_o(\bar{x})$, nicht alle gleich Null, so dass die Gleichung*

$$(2.3) \quad \bar{\lambda}_o Df(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_o(\bar{x})} \bar{\mu}_j Dg_j(\bar{x}) = 0$$

gilt.

Wenn zusätzlich $Dh_i(\bar{x})$, $i \in I$, linear unabhängig sind, so ist mindestens eine der Zahlen λ , μ_j , $j \in J_o(\bar{x})$, ungleich Null. Einen Punkt, der (2.3) erfüllt, bezeichnet man als Fritz-John-Punkt.

Im nachstehenden Satz kann man leicht unter Berücksichtigung der Bedingung LICQ oder MFCQ vermeiden, dass $\bar{\lambda}_o$ verschwindet, sonst ist die Bedingung (2.3) unabhängig von der Zielfunktion, und kann somit keine Beziehung zur Optimalität besitzen.

Satz 3 Sei die MFCQ in einem lokalen Minimalpunkt $\bar{x} \in M[H, G]$ erfüllt. Dann existieren Zahlen $(\bar{\lambda}_o, \bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j)$ mit $i \in I$, $j \in J_o(\bar{x})$ und $\bar{\mu}_j \geq 0$, für alle $j \in J_o(\bar{x})$, so dass die Gleichung

$$(2.4) \quad Df(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J_o(\bar{x})} \bar{\mu}_j Dg_j(\bar{x}) = 0$$

gilt.

Definition 3 Ein Punkt $\bar{x} \in M[H, G]$ heißt stationärer Punkt, wenn es Zahlen $(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j)$ mit $i \in I$, $j \in J_o(\bar{x})$ und $\bar{\mu}_j \geq 0$ gibt, so dass (2.4) erfüllt ist. Das Tupel $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ bezeichnet man als Kuhn-Tucker-Punkt (oder auch KKT-Punkt).

Die Zahlen $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_j$ mit $i \in I$ und $j \in J_o(\bar{x})$ werden Lagrange-Multiplikatoren genannt. Wenn die LICQ in \bar{x} erfüllt ist, so kann man feststellen, dass die Lagrange-Multiplikatoren eindeutig bestimmt sind. Ist die MFCQ erfüllt, gilt das nachstehende Ergebnis von J. Gauvin (siehe [8]). Sei

$$(2.5) \quad \Lambda(\bar{x}) = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{|I|+|J_o(\bar{x})|} \mid \mu \geq 0 \text{ and } (\lambda, \mu) \text{ erfüllt (2.4)} \right\}.$$

Satz 4 Sei \bar{x} ein stationärer Punkt für $\mathcal{P}(f, H, G)$. Dann ist die Menge $\Lambda(\bar{x})$ ein kompakter und konvexer Polyeder genau dann, wenn die MFCQ an der Stelle \bar{x} erfüllt ist.

Die in Definition 3 eingeführten Kuhn-Tucker-Punkte können auch mit Hilfe des folgenden Kojima-Systems charakterisiert werden. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$(2.6) \quad \alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}, \quad \alpha^- = \min\{\alpha, 0\},$$

und betrachten die Kojima-Abbildung \mathcal{H} , die durch

$$(2.7) \quad \mathcal{H} : \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D^T f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i D^T h_i(x) + \sum_{j=1}^s \mu_j^+ D^T g_j(x) \\ -h_i(x), \quad i = 1, \dots, m \\ \mu_j^- - g_j(x), \quad j = 1, \dots, s \end{pmatrix}$$

definiert ist. Es gibt einen Zusammenhang zwischen den Nullstellen von \mathcal{H} und der Menge der Karusch-Kuhn-Tucker-Punkte von $\mathcal{P}(f, H, G)$. Falls (x, λ, μ) eine Lösung von $\mathcal{H} = 0$ ist, so ist (x, λ, μ^+) ein KKT-Punkt, wobei $\mu^+ = (\mu_1^+, \dots, \mu_s^+)$ ist. Umgekehrt gilt, falls (x, λ, μ) ein KKT-Punkt ist, dass $(x, \lambda, \tilde{\mu})$ mit $\tilde{\mu}_j = \mu_j + g_j(x), j \in J$ eine Lösung von $\mathcal{H} = 0$ ist. Durch das Erscheinen von μ_j^+ und μ_j^- ist die Abbildung von \mathcal{H} nicht differenzierbar. In [41] wurde gezeigt, dass die Kojima-Abbildung PC^1 (stückweise differenzierbar) ist. Die Stabilität der stationären Punkte kann auch mit Hilfe der Abbildung \mathcal{H} studiert werden. Im nächsten Kapitel geben wir eine genaue Definition dieses Stabilitätskonzeptes an.

Definition 4 Ein zulässiger Punkt $\bar{x} \in M[H, G]$ heißt kritisch, falls die LICQ erfüllt ist und es Multiplikatoren $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j, i \in I, j \in J_o(\bar{x})$ (nicht notwendig mit nichtnegativen μ_j) existieren, so dass die Gleichung (2.4) erfüllt ist.

Die Lagrange-Funktion bezüglich eines Punktes $\bar{x} \in M[H, G]$ wird als

$$(2.8) \quad L(x, \lambda, \mu) = Df(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j \in J_o(\bar{x})} \mu_j g_j(x)$$

definiert. Der Tangentialraum an \bar{x} bezüglich der Menge $M = M[H, G]$ wird als

$$(2.9) \quad T_{\bar{x}}M = \{ \zeta \in \mathbb{R}^n \mid Dh_i(\bar{x})\zeta = 0, Dg_j(\bar{x})\zeta = 0, i \in I, j \in J_o(\bar{x}) \}$$

definiert.

Definition 5 Es seien $T \subset \mathbb{R}^n$ ein linearer Teilraum, und A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. A heißt positiv definit auf T , wenn $v^T A v > 0, \forall v \in T, v \neq 0$. A heißt positiv semidefinit auf T , wenn $v^T A v \geq 0, \forall v \in T, v \neq 0$.

2.2 Topologische Eigenschaften und Strukturelle Stabilität

In diesem Abschnitt erwähnen wir ein paar nützliche geometrische und topologische Aspekte des Problems $\mathcal{P}(f, H, G)$, die wir für unsere späteren Untersuchungen brauchen werden. Es handelt sich um die in Gudat/Jongen/Rückmann [22] durchgeführten Untersuchungen über die Stabilität der Zulässigkeitsmenge $M[H, G]$ und das Konzept der Strukturellen Stabilität eines skalaren und finiten Optimierungsproblemekes $\mathcal{P}(f, H, G)$ unter kleinen Störungen der definierenden Funktionen.

Um diese Störungen widerzuspiegeln, wollen wir zuerst die Topologie im Raum der Funktionen (f, H, G) genau angeben. Der Raum $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ möge mit der starken (oder Whitney) C^2 -Topologie, auch $C^2_\mathbb{S}$ genannt (siehe [29]), ausgestattet sein. Diese wird von den Umgebungsbasen um die Funktionen $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ erzeugt, deren Elemente sich durch die Addition von f zu folgenden Basisumgebungen der konstanten Funktion 0 ergeben:

$$(2.10) \quad \mathcal{W}_\epsilon = \left\{ \eta \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid |\eta(x)| + \sum_i \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) \right| + \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| < \epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Dabei ist $\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine überall positive stetige Funktion. Die $C^2_\mathbb{S}$ -Topologie von $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wird als die Produkttopologie von $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \dots \times C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (m -mal) erklärt, wobei jeder Faktor mit der $C^2_\mathbb{S}$ -Topologie versehen ist.

Definition 6 Seien $h_i \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i \in I$. Die Zulässigkeitsmenge $M[H, G]$ heißt stabil, falls es eine $C^1_\mathbb{S}$ -Umgebung \mathcal{O} von (H, G) in $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^m \times C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^s$ derart gibt, dass für jedes Element $(\tilde{H}, \tilde{G}) \in \mathcal{O}$ die zugehörige Zulässigkeitsmenge $M[\tilde{H}, \tilde{G}]$ homöomorph zu $M[H, G]$ ist.

Satz 5 (Stabilitätssatz [22]) Seien $h_i \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i \in I$ und die Zulässigkeitsmenge $M[H, G]$ kompakt. Dann ist $M[H, G]$ stabil genau dann, wenn die MFCQ für jeden Punkt $x \in M[H, G]$ erfüllt ist.

Die Unterniveaumenge bezüglich eines Funktionswertes $t \in \mathbb{R}$ wird wie folgt bezeichnet:

$$(2.11) \quad \mathcal{L}^t(f, H, G) := \{x \in M[H, G] \mid f(x) \leq t\}.$$

Definition 7 Zwei Optimierungsprobleme $\mathcal{P}(f, H, G)$ und $\mathcal{P}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$ werden äquivalent genannt, wenn es stetige Funktionen $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart gibt, dass die folgenden Bedingungen P1 – P3 erfüllt sind:

P1 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus von \mathbb{R}^n auf sich selbst, wobei $\phi_t(x) := \phi(t, x)$.

P2 Die Abbildung ψ ist ein Homöomorphismus von \mathbb{R} auf sich selbst und ψ ist monoton wachsend.

P3 $\phi_t[\mathcal{L}^t(f, H, G)] = \mathcal{L}^{\psi(t)}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$ für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1 Es sei bemerkt, dass das Konzept der Definition 7 eine Äquivalenzrelation in der Menge von Optimierungsproblemen vom Typ $\mathcal{P}(f, H, G)$ definiert. Das folgt aus der Stetigkeit der Funktion $\eta : (t, x) \longrightarrow \phi_t^{-1}(x)$ (siehe [21]).

Definition 8 Das Optimierungsproblem $\mathcal{P}(f, H, G)$ heißt *strukturell stabil*, falls es eine C_S^2 -Umgebung \mathcal{O} von (f, H, G) mit der Eigenschaft gibt, dass für jedes Element $(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G}) \in \mathcal{O}$ das Problem $\mathcal{P}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$ äquivalent zu dem Problem $\mathcal{P}(f, H, G)$ ist.

Bevor wir das Charakterisierungstheorem für die Strukturelle Stabilität von $\mathcal{P}(f, H, G)$ angeben können, fahren wir mit einer Abklärung der bislang noch nicht eingeführten Begriffe fort, welche im Charakterisierungstheorem verwendet werden. Für jede Teilmenge U des \mathbb{R}^n werde bezüglich unseres Problems $\mathcal{P}(f, H, G)$

$$(2.12) \quad \text{norm}[(f, H, G), U] =$$

$$\sup_{x \in U} \max_{\eta \in \{f, h_i, i \in I, g_j, j \in J\}} \left\{ |\eta(x)| + \sum_i \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) \right| + \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \right\}$$

gesetzt. Im Folgenden können wir als Bedingung stetiger Abhängigkeit eines Kuhn-Tucker-Punktes von den Problemdata die starke Stabilität gemäß Kojima [41] wie folgt definieren:

Definition 9 Sei $x^u \in M[H, G]$ ein Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}(f, H, G)$. Dann wird x^u *stark stabil* genannt, falls für ein gewisses $\bar{\delta} > 0$ und jedes $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ ein $\alpha > 0$ derart existiert, dass für jede C^2 -Funktion $(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$ mit $\text{norm}[(f - \tilde{f}, H - \tilde{H}, G - \tilde{G}), B(x^u, \delta)] \leq \alpha$ die Kugel $B(x^u, \delta)$ einen Kuhn-Tucker-Punkt x^d von $\mathcal{P}(\tilde{f}, \tilde{H}, \tilde{G})$ enthält, welcher in $B(x^u, \delta)$ eindeutig ist.

Für eine andere Formulierung benötigen wir weitere Definitionen. Wir bezeichnen mit $\Lambda(\bar{x}^u)$ das von den Vektoren $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{|I|} \times \mathbb{R}^{|J_0(\bar{x}^u)|}$ gebildete Polyeder, welche die Bedingungen MF1 und MF2 (siehe Definition 2) erfüllen. Hierbei sei irgendeine feste Anordnung der Komponenten von (λ, μ) angenommen. Wir haben also die Menge

$$(2.13) \quad \Lambda(\bar{x}^u) = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{|I|} \times \mathbb{R}^{|J_0(\bar{x}^u)|} \mid (\lambda, \mu) \text{ erfüllt MF1 und MF2} \}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{J} \subseteq J$ setzen wir

$$(2.14) \quad W(x, \tilde{J}) = \{\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^n \mid Dh_i(x)\tilde{\zeta} = 0, i \in I, Dg_j(x)\tilde{\zeta} = 0, j \in \tilde{J}\}.$$

Lemma 1 (Kojima [41]) Sei $\bar{x}^u \in M[H, G]$ ein Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}(f, H, G)$.

1. Falls die Bedingung LICQ an der Stelle \bar{x}^u erfüllt ist, so ist \bar{x}^u genau dann stark stabil, wenn die Matrix $D^2L_{[\lambda, \mu]}(\bar{x}^u)$ nichtverschwindende Determinanten mit einem gemeinsamen Vorzeichen auf den Teilräumen $W(\bar{x}^u, \bar{J})$ für alle \bar{J} mit $J_+(\bar{x}^u) \subseteq \bar{J} \subseteq J_o(\bar{x}^u)$ besitzt, wobei

$$(2.15) \quad J_+(\bar{x}^u) = \{j \in J_o(\bar{x}^u) \mid \mu_j > 0\}$$

ist.

2. Falls die Bedingung MFCQ, nicht aber die Bedingung LICQ, an der Stelle \bar{x}^u erfüllt ist, so ist \bar{x}^u genau dann stark stabil, wenn die Matrix $D^2L_{[\lambda, \mu]}(\bar{x}^u)$ für jedes $(\lambda, \mu) \in \Lambda(\bar{x}^u)$ positiv definit auf dem Teilraum $W(\bar{x}^u, J_+(\bar{x}^u))$ ist, wobei $J_+(\bar{x}^u)$ gemäß (2.15) definiert ist.

Der nächste Satz unterstreicht die Bedeutung der Mangasarian-Fromovitz-Bedingungen auf der einen Seite und des Konzeptes der starken Stabilität auf der anderen Seite.

Satz 6 (Charakterisierungssatz Guddat/Jongen [21]) Sei $M[H, G]$ kompakt. Dann ist das Optimierungsproblem $\mathcal{P}(f, H, G)$ genau dann strukturell stabil, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:

- (a) Die Bedingung MFCQ ist an jeder Stelle aus $M[H, G]$ erfüllt.
- (b) Jeder Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}(f, H, G)$ ist stark stabil.
- (c) Verschiedene Kuhn-Tucker-Punkte besitzen verschiedene $(f -)$ Werte.

Um die Frage nach der Existenz einer Lösungskurve im Abschnitt 5.3 zu beantworten, benötigen wir noch folgende Begriffe über Punkt-Menge-Abbildungen.

Seien (X, d_X) und (Λ, d_Λ) metrische Räume. Unter einer Punkt-Menge-Abbildung von Λ in X versteht man eine mengenwertige Funktion Γ , die jedem Element $\lambda \in \Lambda$ eine (möglicherweise leere) Teilmenge $\Gamma(\lambda)$ von X zuordnet. Γ ist also eine Abbildung von Λ in die Potenzmenge 2^X von X , Schreibweise: $\Gamma : \Lambda \longrightarrow 2^X$.

Definition 10 Eine Punkt-Menge-Abbildung $\Gamma : \Lambda \longrightarrow 2^X$ heißt unterhalbstetig (nach Berge) oder B-unterhalbstetig in λ^o , falls für jede offene Menge Ω mit $\Omega \cap \Gamma(\lambda^o) \neq \emptyset$ ein $\delta = \delta(\Omega) > 0$ derart existiert, dass

$$\Gamma(\lambda) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \forall \lambda \in V_\delta\{\lambda^o\}$$

gilt.

Definition 11 *Eine stetige Funktion*

$$f : \Lambda \longrightarrow X \quad \text{mit} \quad f(\lambda) \in \Gamma(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

heißt stetige Auswahlfunktion für eine gegebene Punktmenge-Abbildung Γ .

Die Frage nach der Existenz einer Auswahlfunktion ist topologischer Natur und wurde in Michael[46], [47], [48] untersucht.

Kapitel 3

Vektoroptimierung: Grundbegriffe

Im Folgenden sollen nun grundlegende theoretische Begriffe der Vektoroptimierung eingeführt werden, die dem weiteren Verständnis der Arbeit dienen werden.

Wir betrachten ein Problem der Form

$$(3.1) \quad " \min_{x \in X} f(x) ",$$

wobei X eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$ eine Vektorfunktion ist. Für $l = 1$ erhalten wir das Standard Optimierungsproblem mit skalarer Zielfunktion. Das Problem (3.1) wird als *Vektoroptimierungsproblem* bezeichnet.

Die Forderung "min" in (3.1) bei einer Optimierungsaufgabe mit mehr als einer Zielfunktion bedarf einer Erläuterung. Es muss klargestellt werden, in welchem Sinne Vektoren $f(x) \in \mathbb{R}^l$ mit $x \in X$ minimiert werden können. Die mathematische Theorie über halbgeordnete Mengen liefert uns Werkzeuge zur Beantwortung dieser Frage.

3.1 Lösungskonzepte in der Vektoroptimierung

Um minimale Elemente in \mathbb{R}^l zu definieren, wird eine Vergleichsrelation zwischen Elementen aus \mathbb{R}^l benutzt. Eine Vergleichsrelation wird wie folgt definiert.

Definition 12 (a) Jede nichtleere Menge R aus dem Produktraum $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ nennt man binäre Relation R auf \mathbb{R}^l (Schreibweise: xRy für $(x, y) \in R$).

(b) Jede Relation \leq auf \mathbb{R}^l heißt Halbordnung in \mathbb{R}^l , falls für jedes $x, y, z, w \in \mathbb{R}^l$:

- (i) $x \leq x$ (Reflexivität);
- (ii) $x \leq y, \quad y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität);
- (iii) $x \leq y, \quad w \leq z \Rightarrow x + w \leq y + z$ (Kompatibilität mit der Addition);
- (iv) $x \leq y, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$ (Kompatibilität mit der Multiplikation mit Skalaren).

Eine Halbordnung \leq in \mathbb{R}^l heißt antisymmetrisch, falls für jedes $x, y \in \mathbb{R}^l$:

$$(3.2) \quad x \leq y, \quad y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Ein mit einer Halbordnung ausgestatteter Vektorraum \mathbb{R}^l wird *halbgeordneter Vektorraum* genannt. Wir bemerken, dass zwei beliebige Elemente in einem halbgeordneten Raum nicht immer durch die Halbordnung verglichen werden können.

Da eine Halbordnung durch konvexe Kegel charakterisiert werden kann, ist es nicht notwendig, mit der algebraischen Struktur in der Definition 12 zu arbeiten.

Definition 13 (Kegel) Sei D eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R}^l .

(a) Die Menge D heißt Kegel, falls

$$(3.3) \quad x \in D, \quad \lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x \in D.$$

(b) Der Kegel D heißt spitz (echt), falls

$$(3.4) \quad x \in D, \quad -x \in D \quad \Rightarrow \quad x = 0_{\mathbb{R}^l}.$$

(c) Der Kegel D heißt scharf, falls ein offener Halbraum

$$(3.5) \quad \overset{o}{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^l \mid \langle x, x^* \rangle > 0\} \quad x^* \neq 0$$

existiert, so dass

$$(3.6) \quad cl D \subset \overset{o}{H}^+ \cup \{0\}.$$

(d) Er heißt nichttrivial, falls $0 \in D$, $D \neq \{0\}$, $D \neq \mathbb{R}^l$.

Satz 7 ([51]) Sei D ein konvexer Kegel. Dann ist D scharf genau dann, wenn $\text{cl } D$ spitz ist.

Definition 14 Ein Kegel $D \subset \mathbb{R}^l$ heißt polyedrisch, falls er sich mit Hilfe endlich vieler Elemente $y^j \in \mathbb{R}^l$, $j = 1, \dots, s$ in der Form

$$(3.7) \quad D = \{y \in \mathbb{R}^l \mid y = \sum_{j=1}^s \alpha_j y^j, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, s \geq 0\}$$

darstellen lässt.

Für derartige Kegel gilt (vgl. [15])

Lemma 1 Polyedrische Kegel sind stets konvex und abgeschlossen, und es gilt $D = D^{**}$, wobei

$$(3.8) \quad D^* = \{w \in \mathbb{R}^l \mid \langle w, y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in D\}$$

der polare Kegel von D ist.

Zur Verbindung zwischen polyedrischen Kegeln und homogenen linearen Ungleichungssystemen hat man im endlichdimensionalen Fall folgende zentrale Aussage (vgl. [15]):

Lemma 2

- (i) (Minkowsky) Für beliebige Matrizen $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems $Ax \geq 0$ stets ein polyedrischer Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$.
- (ii) (Weyl) Jeder polyedrische Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ läßt sich als Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems $Ax \geq 0$ mit einer geeigneten Matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ darstellen.

Satz 8 ([31],[14]) Ein Kegel D ist genau dann konvex, wenn

$$(3.9) \quad x + y \in D, \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Folgender Satz liefert den Zusammenhang zwischen der Halbordnung und dem konvexen Kegel.

Satz 9 (a) Ist in \mathbb{R}^l eine Halbordnung \leq definiert, dann ist die Menge

$$(3.10) \quad D := \{x \in \mathbb{R}^l \mid 0_{\mathbb{R}^l} \leq x\}$$

ein konvexer Kegel. Ist, zusätzlich, die Halbordnung antisymmetrisch, so ist D spitz.

(b) Falls D ein konvexer Kegel in \mathbb{R}^l ist, so ist die binäre Relation

$$(3.11) \quad \leq := \{(x, y) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \mid y - x \in D\}$$

eine Halbordnung in \mathbb{R}^l . Falls, zusätzlich, der Kegel D spitz ist, so ist die Halbordnung \leq antisymmetrisch.

Definition 15 (Ordnungskegel) Den Kegel, der die Halbordnung in \mathbb{R}^l charakterisiert, nennt man Ordnungskegel oder positiven Kegel.

In dieser Arbeit bezeichnen wir den durch die Halbordnung induzierten Ordnungskegel $D \subset \mathbb{R}^l$ mit \leq_D .

Bemerkung 2

$$(3.12) \quad x \leq_D y \quad :\Longleftrightarrow \quad y - x \in D.$$

Beispiel 1 (a) Pareto Ordnung: $D = \mathbb{R}_+^l$

(b) Schwache Pareto Ordnung: $D = \text{int } \mathbb{R}_+^l$

(c) *Lexikographische Ordnung:*

$$D = \{d \in \mathbb{R}^l \mid \text{es existiert ein } k \in \{1, \dots, l\}, \\ \text{so dass } d_i = 0 \text{ für alle } i < k \text{ und } d_k > 0\} \cup \{0\}.$$

Wir bemerken, dass dieser Kegel weder offen noch abgeschlossen ist (siehe Abbildung 2.3 in [51]).

(d) Einen verallgemeinerten Fall von (a) erhält man, wenn der Entscheidungsträger nur die ersten p' Ziele maximieren und die nächsten $p' + 1$ bis p'' minimieren will, indem er die letzten Ziele ab $p'' + 1$ bis l zu vorgegebenen Werten (aspiration levels) nah lässt. In diesem Fall ist der Ordnungskegel wie folgt angegeben:

$$D = \left\{ d \in \mathbb{R}^l \mid \begin{array}{l} d_i \geq 0, i = 1, \dots, p'; \\ d_i \leq 0, i = p' + 1, \dots, p''; \\ d_i = 0, i = p'' + 1, \dots, l \end{array} \right\}.$$

Man kann zeigen (siehe [43]), dass dieser Kegel abgeschlossen ist und kein Inneres besitzt.

Definition 16 (Effizienz) Sei D ein Ordnungskegel und T eine beliebige Teilmenge von \mathbb{R}^l . Ein Element $\bar{y} \in T$ heißt D -minimal, effizient oder D -effizient, falls

$$(3.13) \quad (\bar{y} - \tilde{D}) \cap T = \emptyset,$$

wobei

$$(3.14) \quad \tilde{D} = D \setminus (D \cap -D).$$

Definition 17 Ist \mathbb{R}^l durch einen nichttrivialen und spitzen Kegel D mit $\text{int } D \neq \emptyset$ halbgeordnet, so heißt $\bar{y} \in T$ schwach effizient, falls \bar{y} bezüglich des Kegels $D_1 = \text{int } D \cup \{0\}$ effizient ist, wobei $\tilde{D} = \text{int } D$.

Die Menge aller effizienten bzw. schwach effizienten Elemente von T wollen wir mit $E(T, D)$ bzw. $E_w(T, D)$ bezeichnen.

Definition 18 Sei $\mathbf{f}(X)$ das Bild der Zulässigen Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ des Vektoroptimierungsproblems (3.1) bezüglich der Vektorfunktion \mathbf{f} und D der Ordnungskegel in \mathbb{R}^l . Ein Punkt $\bar{x} \in X$ heißt effiziente Lösung (oder Edgeworth-Pareto Optimalpunkt) von Problem (3.1), falls $\mathbf{f}(\bar{x}) \in E(\mathbf{f}(X), D)$. Der Punkt $\bar{x} \in X$ heißt schwach effiziente Lösung, falls $\mathbf{f}(\bar{x}) \in E_w(\mathbf{f}(X), D)$.

Die Gesamtheit aller effizienten bzw. schwach effizienten Lösungen bezeichnen wir mit

$$(3.15) \quad E(X, D) = \{x \in M \mid \mathbf{f}(x) \in E(\mathbf{f}(X), D)\} \quad \text{bzw.}$$

$$(3.16) \quad E_w(X, D) = \{x \in M \mid \mathbf{f}(x) \in E_w(\mathbf{f}(X), D)\}.$$

Definition 19 (lokaler Pareto Optimalpunkt) Ein Punkt $\bar{x} \in X$ heißt lokal Pareto optimal oder lokale effiziente Lösung, falls eine Umgebung $U(\bar{x})$ von \bar{x} existiert, so dass $\bar{y} := \mathbf{f}(\bar{x})$ eine effiziente Lösung bezüglich der lokalen Bildmenge $\mathbf{f}(X \cap U(\bar{x}))$ ist.

Analog wie in Definition 19, kann man auch den Begriff eines lokalen schwachen effizienten Punktes einführen. Die Mengen der lokalen Pareto Optimallösungen bzw. lokalen schwachen effizienten Lösungen bezeichnen wir mit

$$(3.17) \quad E_{loc}(X, D) = \{x \in M \mid \mathbf{f}(x) \in E_{loc}(\mathbf{f}(X), D)\} \quad \text{bzw.}$$

$$(3.18) \quad E_{locw}(X, D) = \{x \in M \mid \mathbf{f}(x) \in E_{locw}(\mathbf{f}(X), D)\}.$$

Folgende Sätze liefern uns einige Eigenschaften der Effizienzmenge $E(\mathbf{f}(X), D)$.

Satz 10 ([14]) Die Effizienzmenge von 3.1 liegt auf dem Rand von $\mathbf{f}(X)$:

$$(3.19) \quad E(\mathbf{f}(X), D) \subseteq \partial(\mathbf{f}(X)).$$

Satz 11 ([14]) Sei \mathbb{R}^l durch einen spitzen konvexen abgeschlossenen Kegel D halbgeordnet. $\mathbf{f}(X)$ sei nichtleer, konvex, abgeschlossen und beschränkt. Dann ist $E(\mathbf{f}(X), D)$ zusammenhängend.

Um die Existenz von effizienten Punkten in der Menge der zulässigen Entscheidungen M zu sichern, brauchen wir den Begriff der Kegel-Halbstetigkeit.

Definition 20 (Kegel-Halbstetigkeit) Es sei D ein Kegel in \mathbb{R}^l . Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ heißt kegel-halbstetig, falls

$$(3.20) \quad f^{-1}(y - clD) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid y - f(x) \in clD\}$$

für jedes $y \in \mathbb{R}^l$ abgeschlossen ist.

Bemerkung 1 Für den Fall $D = \mathbb{R}_+^l$ ist die D -Halbstetigkeit die Verallgemeinerung der Halbstetigkeit nach unten einer reellwertigen Funktion. Die multi-kriterielle Bewertungsfunktion $f = (f_1, \dots, f_l) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ ist \mathbb{R}_+^l -halbste-tig genau dann, wenn jedes $f_i (i = 1, \dots, l)$ halbstetig nach unten ist (siehe Lemma 2.11 in Ehrgott [7] und Bemerkung 3.2.6 in Sawaragi-Nakayama-Tanino [51]). Jedes f_i ist halbstetig, da $f_i \in C^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), i = 1, \dots, l$ für $q \in \{2, 3\}$.

Satz 12 (Sawaragi-Nakayama-Tanino [51]) Es seien X eine nichtleere kompakte Menge in \mathbb{R}^n , D ein Kegel in \mathbb{R}^n und f eine D -halbste-tige Funktion von \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^l . Dann ist die Menge der effizienten Punkte $E(X, D)$ nicht leer.

3.2 Skalarisierung von Vektroptimierungsaufgaben

Unter Skalarisierung versteht man die Ersetzung eines Vektroptimierungsproblems durch eine geeignete Optimierungsaufgabe mit einer Zielfunktion (skalare Optimierung). Die Bildung skalarer Ersatzaufgaben ermöglicht in vielen Fällen, dass effiziente Lösungen des Vektroptimierungsproblems als Lösung skalarer Aufgaben charakterisiert und gefunden werden. In diesem Abschnitt geben wir skalare Optimierungsprobleme an, die in dieser Arbeit eine große Rolle spielen.

Definition 21 Sei S eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R}^l .

1. Eine Funktion $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend auf S , falls

$$(3.21) \quad x, y \in S \text{ und } x \leq_D y \quad \Rightarrow \quad \phi(x) \leq \phi(y).$$

2. Eine Funktion $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend auf S , falls

$$(3.22) \quad x, y \in S, x \neq y \text{ und } x \leq_D y \quad \Rightarrow \quad \phi(x) < \phi(y).$$

3. Sei D ein Kegel mit einer nichtleeren Inneren $\text{int}(D)$. Eine Funktion $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt strikt monoton wachsend auf S , falls

$$(3.23) \quad x, y \in S \text{ und } y - x \in \text{int}(D) \quad \Rightarrow \quad \phi(x) < \phi(y).$$

Es ist sofort zu sehen, dass für $\text{int}(D) \neq \emptyset$ jede streng monoton wachsende Funktion strikt monoton wachsend ist.

Beispiel 2 Sei $D = \mathbb{R}_+^l$.

(a) Die Funktion (gewichtete Summe) $\phi : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(3.24) \quad \phi(y) := \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_l \geq 0$ ist monoton wachsend. Sie ist streng monoton wachsend, falls $\lambda_1, \dots, \lambda_l > 0$. Eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes wird in Bemerkung 3 angegeben.

(b) Jede gewichtete l_p -Norm mit $1 \leq p < \infty$ definiert durch

$$(3.25) \quad \|y\|_p^w := \left(\sum_{i=1}^l w_i |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für jedes } y \in \mathbb{R}^l$$

mit positiven Zahlen $w_i, i = 1, \dots, l$ ist auf \mathbb{R}_+^l streng monoton wachsend. Dagegen ist die gewichtete Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty^w$ mit

$$(3.26) \quad \|y\|_\infty^w := \max_{i \in \{1, \dots, l\}} \{w_i |y_i|\} \quad \text{für jedes } y \in \mathbb{R}^l$$

($w_1, \dots, w_l > 0$) auf \mathbb{R}_+^l strikt monoton wachsend.

Bemerkung 3 Sei G ein durch D halbgeordneter linearer topologischer Raum und $S \subseteq G$. Jedes lineare Funktional $l \in \overset{\circ}{D}^*$, wobei

$$(3.27) \quad \overset{\circ}{D}^* = \{d^* \in G^* \mid \langle d^*, d \rangle > 0 \text{ für alle } d \in D \setminus \{0\}\},$$

ist auf S streng monoton wachsend (siehe [57] und Beispiel 5.2 a) in [31]). Ein klassisches Beispiel ist das so genannte Lagrange Funktional:

$$(3.28) \quad l(s) := \langle l, s \rangle \text{ für } s \in S,$$

wobei $\langle \circ, \circ \rangle$ die Dualität zwischen G^* und G angibt.

Folgender Satz liefert ein grundlegendes Resultat zur Skalarisierung von Vektroptimierungsproblemen.

Satz 13 ([31],[58], [14]) (a) Es sei $\phi : f(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine über $f(X)$ streng monoton wachsende Funktion. Falls es ein $\bar{x} \in X$ gibt mit

$$(3.29) \quad \phi(f(\bar{x})) \leq \phi(f(x)) \quad \text{für jedes } x \in X,$$

dann ist \bar{x} ein effizienter Punkt von Problem (3.1).

- (b) Es sei $\phi : f(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine über $f(X)$ monoton wachsende Funktion. Falls es ein $\bar{x} \in X$ gibt mit

$$(3.30) \quad \phi(f(\bar{x})) < \phi(f(x)) \quad \text{für jedes } x \in X \text{ mit } f(x) \neq f(\bar{x}),$$

dann ist \bar{x} ein effizienter Punkt von Problem (3.1).

- (c) Es seien D ein Kegel mit einem nichtleeren Inneren $\text{int}(D)$ und $\phi : f(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine über $f(X)$ strikt monoton wachsende Funktion. Falls es ein $\bar{x} \in X$ gibt mit

$$(3.31) \quad \phi(f(\bar{x})) \leq \phi(f(x)) \quad \text{für jedes } x \in X,$$

dann ist \bar{x} ein schwach effizienter Punkt von Problem (3.1).

Satz 13 ist besonders zur Bestimmung von Elementen aus $E(X, D)$, $E_w(X, D)$ bzw. $E_{loc}(X, D)$, $E_{locw}(X, D)$ geeignet.

3.3 Klassische Verfahren

Im Folgenden Abschnitt geben wir einen Überblick der wichtigsten Verfahren an, die Elemente der Effizienzmenge des Vektoroptimierungsproblems (3.1) erzeugen. Bewußt beschränken wir uns auf deterministische Verfahren. Dabei legen wir die Skalarisierung des Vektorproblems (3.1) zugrunde. Die Lösung des entstandenen Skalarproblems liefert im Allgemeinen nur einen effizienten Punkt. Die Umwandlung des Vektoroptimierungsproblems (3.1) geschieht in Abhängigkeit bestimmter Skalarisierungsparameter. Bei der Änderung dieser Parameter entstehen skalare Optimierungsprobleme, die jeweils eine Lösung liefern. Somit können mehrere effiziente Punkte berechnet werden. Wir wollen folgende Verfahren erwähnen:

- (a) **Wichtungsmethode**

Diese Methode wurde zum ersten Mal von Zadeh [Zadeh [62], 1963] verwendet und ist einer der meist benutzten Methoden der Vektoroptimierung. Der Entscheidungsträger ordnet jeder der l Zielfunktionen entsprechend ihrer "Wichtigkeit" ein Gewicht $\lambda_i > 0$ zu und löst als Ersatzaufgabe von (3.1)

$$(3.32) \quad \min \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i(x) \mid x \in X \right\}.$$

Gemäß Satz 13 ist jede Lösung x^0 von (3.1) auch ein effizienter Punkt. Die unterschiedliche Wahl der Gewichte $\lambda_i > 0$ realisiert die Dialogfähigkeit.

(b) **Methode der Beschränkungen**

Diese Methode geht auf Marglin [45] und Haimes [25] zurück. Kann der Entscheidungsträger von den l Zielfunktionen der Aufgabe (3.1) eine $f_j, j \in \{1, \dots, l\}$ auswählen, bei der er sehr flexibel ist, und für die anderen Mindestniveaus ϵ_i angeben, die nicht überschritten werden sollen, so kann als Ersatzproblem von (3.1)

$$(3.33) \quad \min \{f_j(x), \text{ für ein } j \in \{1, \dots, l\} \mid x \in X'\},$$

wobei

$$(3.34) \quad X' := \{x \in X \mid f_i(x) \leq \epsilon_i \quad \forall i \in \{1, \dots, l\} \text{ mit } i \neq j\}.$$

betrachten werden. $x^0 \in X'$ ist notwendigerweise ein (lokal) effizienter Punkt von (3.1), falls x^0 die einzige Lösung von (3.33) ist. Eine gewisse Dialogfähigkeit wird durch unterschiedliche Wahl der Zielfunktion und der Mindestniveaus in (3.33) erreicht. Der Nachteil dieser Methode besteht darin, einen vernünftigen Bereich für die Niveaus ϵ_i anzugeben. Zum einen kann die zulässige Menge X' leer werden, falls das Niveau ϵ_i zu niedrig gewählt ist. Zum anderen spielen einige Funktionen keine Rolle mehr, falls ihre Niveaus zu hoch gewählt werden, so dass bei kleinen Veränderungen solcher Niveaus keine neuen Lösungen erzeugt werden.

(c) **Zieloptimierung und Normskalierung**

Der Ausgangspunkt für Methoden dieser Art ist die Annahme, dass der Entscheidungsträger ein seinen Wünschen gemäßes Ziel $\bar{y} \in \mathbb{R}^l$ angibt und dann effiziente Punkte ermitteln möchte, die diesem Ziel "möglichst nahe" kommen. Ist der Zielraum \mathbb{R}^l durch eine gewichtete l_p -Vektornorm der Form (3.25) metrisierbar, so erhalten wir folgende skalare Ersatzaufgabe:

$$(N_p^w) \quad \min \left\{ \sum_{i=1}^l w_i |f_i(x) - \bar{y}_i|^p \mid x \in X \right\}.$$

Für die gewichtete Maximumnorm erhalten wir die entsprechende Ersatzaufgabe:

$$(N_\infty^w) \quad \min \left\{ \max_{i=1, \dots, l} w_i (f_i(x) - \bar{y}_i) \mid x \in X \right\}.$$

Wegen Satz 13 ist für $p \in [1, \infty)$ jede Lösung von (N_p^w) , wobei $w \in \mathbb{R}_+^l \setminus \{0\}$, ein effizienter Punkt von (3.1).

Der Punkt \tilde{y} muss die Bedingung $\tilde{y}_i \leq f_i(x) \quad \forall x \in X, i \in \{1, \dots, l\}$ erfüllen. Diese Bedingung wird beispielsweise von einem Utopia-Punkt erfüllt.

Definition 22 Es sei $D = \mathbb{R}_+^l, f(X) + \mathbb{R}_+^l$ abgeschlossen und

$$(3.35) \quad \tilde{y}_i := \inf\{f_i(x) \mid x \in X\} > -\infty, \quad i = 1, \dots, l.$$

Den Punkt $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_l)$ bezeichnet man als Utopia-Punkt oder Idealpunkt.

Analog der Wichtungsmethode kann keine Aussage darüber getroffen werden, unter welchen Voraussetzungen über die Steuerung der Parameter (\tilde{y}, w, p) tatsächlich unterschiedliche effizienten Punkte ermittelt werden.

Die obige Idee kann verallgemeinert werden, indem wir einen beliebigen Ordnungskegel $D \subset \mathbb{R}^l$ und die Restriktionsmenge

$$(3.36) \quad X_{\tilde{y}} := \{x \in X \mid f(x) \in \tilde{y} - D\}$$

betrachten. Es ergibt sich folgende Ersatzaufgabe:

$$(3.37) \quad \min\{-\|f(x) - \tilde{y}\| \mid x \in X_{\tilde{y}}\}.$$

Der nachfolgende Satz sichert die Ermittlung der effizienten Punkte durch (3.37).

Satz 14 ([57], [14], [31]) Es seien Z ein Hilbertraum, halbgeordnet durch D mit $D \subseteq D^*$. Dann ist die Funktion $\phi(z) = -\|z\|$ streng monoton wachsend auf $-D$ bzw. die Funktion $\phi(z) = \|z\|$ streng monoton wachsend auf D .

Wir bemerken, dass diese Bedingung für $Z = \mathbb{R}^l$ mit $D = \mathbb{R}_+^l$ erfüllt ist.

(d) **Strafskalarisierung (Referenzpunkt-Methode)**

Diese Methode ist eine Kombination der Idee der Normskalarisierung und der Straffunktionen und geht auf [57] zurück. Hier sollen nun Methoden angegeben werden, die sichern, dass sich jedes Element von $E(X, D)$ hinreichend gut approximieren lässt.

Definition 23 (D_ϵ -approximatives Funktional) Es seien $Q \subseteq G$ mit $Q \neq \emptyset$ und G ein durch einen spitzen konvexen Kegel D halbgeordneter linearer Raum. Ein streng monoton wachsendes Funktional $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt D_ϵ -approximativ in $\bar{q} \in Q$, wenn ein konvexer Kegel $D_\epsilon \supset D$ existiert, so dass gilt

$$(3.38) \quad N_{\phi(\bar{q})} := \{q \in G \mid \phi(q) < \phi(\bar{q})\} \subset \bar{q} - (D_\epsilon \setminus (D_\epsilon \cap -D_\epsilon)).$$

Die Menge $E(M, D_\epsilon)$ ist als zugeordnete Effizienzmengenzu verstehen.

Satz 15 Es seien Q, G und ϕ entsprechend Definition 23. Wenn $\bar{q} \in E(Q, D_\epsilon) \subseteq E(Q, D)$ und ϕ ein D_ϵ -approximatives Funktional in \bar{q} ist, dann gilt

$$(3.39) \quad \bar{q} \in \arg \min_{q \in G} \phi(q).$$

Sei nun G ein Hilbertraum mit $D \subseteq D^*$, dann können mit Hilfe der in Wierzbicki et al. [60] angegebenen Methode der Penalty-Funktionale streng monoton und D_ϵ -approximative Funktionale mit hinreichend kleinem ϵ konstruiert werden. Für einen abgeschlossenen Kegel D in einem Hilbertraum G gelten folgende Eigenschaften:

$$(3.40) \quad \text{dist}(q, D) = \|q^{-D^*}\| \text{ für alle } q \in G,$$

wobei q^{-D^*} die Projektion des Elements q auf $-D^*$ bezeichnet und

$$(3.41) \quad q = q^D + q^{-D^*}; \quad \|q\|^2 = \|q^D\|^2 + \|q^{-D^*}\|^2 \quad \text{für alle } q \in G,$$

wobei q^D die Projektion des Elements q auf D bezeichnet. Mit anderen Worten, alle effizienten Lösungen, die effizient bezüglich D_ϵ sind, können in wirksamer Weise auf Effizienz bezüglich des Problems (VOP) und Kegels D getestet werden, indem die Funktion $\phi(f(x), \bar{q})$ mit $\rho > \epsilon^{-1}$ minimiert wird. Ist \bar{q} nicht D -minimal, aber nahe dem Optimum, bekommt man $\hat{q} = f(\hat{x})$ nah zu \bar{q} .

Satz 16 ([57]) Es seien G ein Hilbertraum und D ein spitzer konvexer abgeschlossener Kegel mit $D \subseteq D^*$. Für gegebene $\bar{q} \in G$ und $\rho \in \mathbb{R}_+$ sei

$$(3.42) \quad \phi(q) := -\|q - \bar{q}\|^2 + \rho\|(q - \bar{q})^{D^*}\|^2, \quad q \in G.$$

- (a) Das durch (3.42) definierte Funktional ϕ ist für $\rho > 1$ streng monoton wachsend auf G .
- (b) Wenn $q^0 \in E(Q, D_\epsilon)$ und $\bar{q} = q^0$, dann ist ϕ ein D_ϵ -approximatives Funktional mit $D_\epsilon := \{q \in G : \|q^D\| < \epsilon\|q\|\}$.

Beweis. Siehe [14], [57]

Kapitel 4

Einparametrische Optimierungsprobleme

Dieser Abschnitt ist der Theorie einparametrischer Optimierungsprobleme gewidmet. Dazu betrachten wir parametrische Probleme der Form

$$\mathcal{P}(t): \quad \min\{f(x, t) \mid x \in M(t)\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$M(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x, t) = 0, \quad i \in I, \quad g_j(x, t) \leq 0, j \in J\}, \\ I = \{1, \dots, m\}, \quad m < n, \quad J = \{1, \dots, s\}.$$

Die Untersuchung von $P(t)$ beinhaltet die Beschreibung von Lösungsmengen, nicht nur auf einer lokalen Ebene, sondern auch vom globalen Gesichtspunkt aus. Es gibt dafür zwei Zugänge. Der von Kojima und Hirabayashi [42] basiert auf einer geeigneten Erweiterung der Begriffe eines regulären Punktes und regulären Wertes für eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung, deren Nullstellen die Mengen der stationären Punkte widerspiegeln. Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf den von Jongen, Jonker und Twilt eingeführten Zugang beschränken.

4.1 Nichtdegenerierte kritische Punkte

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff eines nichtdegenerierten kritischen Punktes ein. Dazu betrachten wir das Problem

$$\mathcal{P}: \quad \min\{f(x) \mid x \in X\},$$

wobei die Problem beschreibenden Funktionen in Raum $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ liegen.

Definition 24 Sei $\bar{x} \in X$ ein kritischer Punkt für $f|_X$ mit den zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$. Der Punkt \bar{x} heißt nichtdegeneriert, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{ND1 } \bar{\mu}_j \neq 0, \quad j \in j_o(\bar{x}),$$

$$\text{ND2 } D^2L(\bar{x})|_{T_{\bar{x}}X} \text{ ist regulär.}$$

Definition 25 Es seien \bar{x} ein nichtdegenerierter kritischer Punkt und $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ die zugehörigen Multiplikatoren. Der lineare Index LI (Ko-Index LCI) wird als die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Multiplikatoren $\bar{\mu}_j, j \in J_o(\bar{x})$ definiert. Der quadratische Index QI (Ko-Index QCI) wird als die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Eigenwerte von $D_x^2L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})|_{T_{\bar{x}}X}$ definiert.

Das Verhalten der Zielfunktion über der zulässigen Menge X um den nichtdegenerierten kritischen Punkt \bar{x} wird durch die Tupel der vier Indizes (LI, LCI, QI, QCI) bestimmt. Insbesondere ist ein nichtdegenerierter kritischer Punkt ein lokaler Minimalpunkt (Maximalpunkt), falls $LI + QI = 0$ (bzw. $LCI + QCI = 0$).

Kritische Punkte können mindestens lokal durch ein Gleichungssystem charakterisiert werden. Nach der Definition 4 von kritischen Punkten ist leicht zu sehen, dass diese als Lösungsmenge eines Gleichungssystems aufgefasst werden können. Ein kritischer Punkt \bar{x} bildet mit den zugehörigen Multiplikatoren eine Nullstelle $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{|J_o|}$ der folgenden Abbildung:

$$(4.1) \quad H_{J_o(\bar{x})} : \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D_x f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i D_x h_i(x) + \sum_{j \in J_o(\bar{x})} \mu_j D_x g_j(x) \\ -H(x) \\ -G_{J_o(\bar{x})} \end{pmatrix}.$$

Handelt es sich um einen nichtdegenerierten kritischen Punkt \bar{x} , so ist die Abbildung $H_{J_o(\bar{x})}$ lokal invertierbar und es folgt, dass \bar{x} ein isolierter kritischer Punkt ist. Wir können einen zusätzlichen Parameter v (aus einem Banach-Raum) in alle Funktionen f, H, G so einfügen, dass die erweiterte Abbildung $(x, \lambda, \mu, v) \mapsto H_{J_o(\bar{x})}(x, \lambda, \mu, v)$ C^1 Fréchet differenzierbar wird. Der Satz über Implizite Funktionen (siehe Abschnitt 2.2 in [16]) kann angewendet werden damit eine C^1 lokale Abhängigkeit des kritischen Punktes und deren Lagrange Multiplikatoren von Parameter v erhalten wird. Dabei bleiben die Zahlen (LI, LCI, QI, QCI) und der lokale

Charakter des kritischen Punktes in einer bestimmten Umgebung konstant. Wir beschränken uns auf den Fall $t = v \in \mathbb{R}$. Dazu betrachten wir die Menge:

$$(4.2) \quad \Sigma_{krit} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \text{ ist kritischer Punkt für } P(t)\}.$$

Die interessante und wichtige Frage nach dem Verhalten eines kritischen Punktes eines Optimierungsproblems für einen festen Parameterwert in Abhängigkeit von der Veränderung der Parameter wird nun gestellt. Diese Frage hängt eng mit der lokalen Struktur der Menge Σ_{krit} zusammen. Um diese lokale Analyse durchzuführen, betrachten wir ein Paar (\bar{x}, \bar{t}) und die zugehörigen Multiplikatoren $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$. Man kann jetzt das System (4.1) auch in Abhängigkeit vom Parameter t und bezüglich \bar{x} betrachten:

$$(4.3) \quad H_{J_o(\bar{x}, \bar{t})} : \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D_x f(x, t) + \sum_{i \in I} \lambda_i D_x h_i(x, t) + \sum_{j \in J_o(\bar{x}, \bar{t})} \mu_j D_x g_j(x, t) \\ -H(x, t) \\ -G_{J_o(\bar{x}, \bar{t})} \end{pmatrix}.$$

Sei $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{krit}$, dann folgt $H_{J_o(\bar{x}, \bar{t})}(x, \lambda, \mu, t) = 0$. Gilt die Bedingung ND1, dann gibt es eine Umgebung $U_{(\bar{x}, \bar{t})}$ von (\bar{x}, \bar{t}) , in der die aktive Indexmenge $J_o(x, t)$ eine Untermenge von $J_o(\bar{x}, \bar{t})$ bleibt und die LICQ erfüllt ist. Lokal lässt sich Σ_{krit} als Projektion der Menge

$$(4.4) \quad \{(x, \lambda, \mu, t) \mid H_{J_o(\bar{x}, \bar{t})}(x, \lambda, \mu, t) = 0\}$$

in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ darstellen. Die Menge (4.4) bildet lokal eine Mannigfaltigkeit der Dimension 1, falls alle Zeilen der Jacobi-Matrix $DH_{J_o(\bar{x}, \bar{t})}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ linear unabhängig sind. Die Regularität der Matrix $D_{(x, \lambda, \mu)}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ impliziert schon die Unabhängigkeit der genannten Zeilen und ist - wegen des nachfolgenden Lemmas, äquivalent zu den Bedingungen ND1 und ND2.

Lemma 3 [41] *Es seien A eine symmetrische $(n \times n)$ -Matrix, B eine $(n \times k)$ -Matrix und C eine $(k \times k)$ -Matrix. Dann ist die Matrix*

$$(4.5) \quad \begin{pmatrix} A & B \\ CB^T & 0 \end{pmatrix}$$

nicht singulär genau dann, wenn C eine nicht singuläre Matrix ist, $\text{rank} B = k$ und $A|_{\text{Ker } B^T}$ ist nicht singulär.

Die Bezeichnung $A|_{\text{Ker } B^T}$ steht für die Einschränkung von A auf den linearen Unterraum $\text{Ker } B^T = \{y \in \mathbb{R}^n \mid B^T y = 0\}$. Die Matrix $D_{(x,\lambda,\mu)} H_{J_o(\bar{x},\bar{t})}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ besitzt eine ähnliche Gestalt wie C , wobei $A = D_x^2 L(\bar{x}, \bar{t}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ und B die $n \times (m + |J_o(\bar{x}, \bar{t})|)$ Matrix ist, deren Spalten die Vektoren $\{D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), i \in T, j \in J_o(\bar{x}, \bar{t})\}$ sind. Die obige Regularität sichert durch Anwendung des Satzes über Implizite Funktionen die Existenz einer Umgebung $U_{\bar{x}} \times U_{\bar{\lambda}} \times U_{\bar{\mu}} \times U_{\bar{t}}$ und einer eindeutigen Funktion $\phi : U_{\bar{t}} \rightarrow U_{\bar{x}} \times U_{\bar{\lambda}} \times U_{\bar{\mu}}$ derart, dass die Menge (4.4) durch die Gleichung $\phi(t) = (x, \lambda, \mu)$ in der Umgebung $U_{\bar{x}} \times U_{\bar{\lambda}} \times U_{\bar{\mu}} \times U_{\bar{t}}$ beschrieben wird.

4.2 Die Klasse von Jongen, Jonker und Twilt

In diesem Abschnitt betrachten wir das einparametrische Problem $\mathcal{P}(t)$. Wir nehmen an, dass die Problem beschreibenden Funktionen f, h_i, g_j im Raum $C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ liegen. Im Allgemeinen können wir nicht für einen festen Parameterwert \bar{t} erwarten, dass die Regularitätsbedingung LICQ in jedem Punkt der zulässigen Menge $M(\bar{t})$ erfüllt ist und alle kritischen Punkte für $f(\cdot, \bar{t})|_{M(\bar{t})}$ nichtdegeneriert sind. Das ist aber nicht der Fall, wenn sich der Parameterwert $t \in \mathbb{R}$ ändert. Andere Fälle von degenerierten Punkten müssen untersucht werden. Ausgangspunkt ist der nichtdegenerierte Fall selbst. Man betrachtet die Verletzung jeder einzelnen Bedingung, nämlich ND1, ND2 oder LICQ. Dafür geben wir in diesem Abschnitt die Definition von fünf Typen verallgemeinerter kritischer Punkte an.

Definition 26 (siehe [16], [35], [36]) *Es sei \bar{x} ein zulässiger Punkt des einparametrischen Optimierungsproblems $\mathcal{P}(t)$. Der Punkt (\bar{x}, \bar{t}) heißt ein verallgemeinerter kritischer Punkt (g.c. Punkt), falls die Vektoren $\{D_x f(\bar{x}, \bar{t}), D_x h_i(\bar{x}, \bar{t}), D_x g_j(\bar{x}, \bar{t}), i \in I, j \in J_o(\bar{x}, \bar{t})\}$ linear abhängig sind.*

Unter diesen Begriff fallen alle bisher eingeführten Definitionen bezüglich Optimalitätsbedingungen erster Ordnung, wie F-John-Punkt, stationärer oder kritischer Punkt. Wir definieren folgende Mengen:

$$(4.6) \quad \sum_{gc} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \text{ ist g.c. Punkt für } \mathcal{P}(t)\},$$

$$(4.7) \quad \sum_{stat} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \text{ ist stationärer Punkt für } \mathcal{P}(t)\},$$

$$(4.8) \quad \sum_{loc} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \text{ ist lokaler Minimalpunkt für } \mathcal{P}(t)\}.$$

In einer Umgebung eines kritischen Punktes (LICQ ist erfüllt) stimmen die Mengen \sum_{gc} und \sum_{krit} überein. Im Fall der Nichtdegeneriertheit ist die

Menge Σ_{gc} lokal eine nach t parametrisierte Kurve.

Wir geben im Folgenden die Definition der 5 Typen der verallgemeinerten kritischen Punkte an, die in Abbildung 4.1 skizziert sind. Eine ausführlichere Erläuterung findet man in [35] (siehe auch [16]).

In den folgenden Definitionen benutzen wir folgende Bezeichnungen:

$$(4.9) \quad \bar{z} := (\bar{x}, \bar{t}), \quad J_o(\bar{z}) := \{1, \dots, p\}, \quad p \leq s$$

$$(4.10) \quad \bar{\lambda} := (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \quad \bar{\mu} := (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p)$$

Definition 27 Ein g.c. Punkt $\bar{z} \in \Sigma_{gc}$ ist vom Typ 1, falls \bar{x} ein nichtdegenerierter kritischer Punkt des Problems $\mathcal{P}(\bar{t})$ ist.

In einer Umgebung von \bar{z} sind alle Punkte von Σ_{gc} nichtdegeneriert, und das Indextupel (LI, LCI, QI, QCI) bleibt konstant.

Definition 28 Ein g.c. Punkt $\bar{z} \in \Sigma_{gc}$ ist vom Typ 2, falls Folgendes gilt:

(2a) Die LICQ ist in \bar{z} erfüllt .

(2b) Alle Multiplikatoren $\bar{u}_j, j \in J_o(\bar{z})$, bis auf einen einzigen, sind verschieden von Null. Der verschwindende Multiplikator sei z.B. \bar{u}_p , wobei $p \in J_o(\bar{z})$.

(2c) $D_x^2 L(\bar{z})|_{T_{\bar{z}} M}$ ist regulär.

(2d) $D_x^2 L(\bar{z})|_{T_{\bar{z}}^{\neq} M}$ ist regulär, wobei

(4.11)

$$T_{\bar{z}}^{\neq} M = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid Dh_i(\bar{z})\xi = 0, Dg_j(\bar{z})\xi = 0, i \in I, j \in J_o^{\neq}(\bar{z})\}$$

(4.12)

$$J_o^{\neq}(\bar{z}) = \{j \in J_o(\bar{z}) \mid \bar{\mu}_j \neq 0\}.$$

Es seien

- $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+|J_o^{\neq}(\bar{z})|}$ definiert als $\Pi = (h_1, \dots, h_m, g_j, j \in J_o^{\neq}(\bar{z}))$, und
- W eine Matrix, deren Spalten eine Basis des linearen Unterraumes $T_{\bar{x}}^{\neq} M$ bilden.

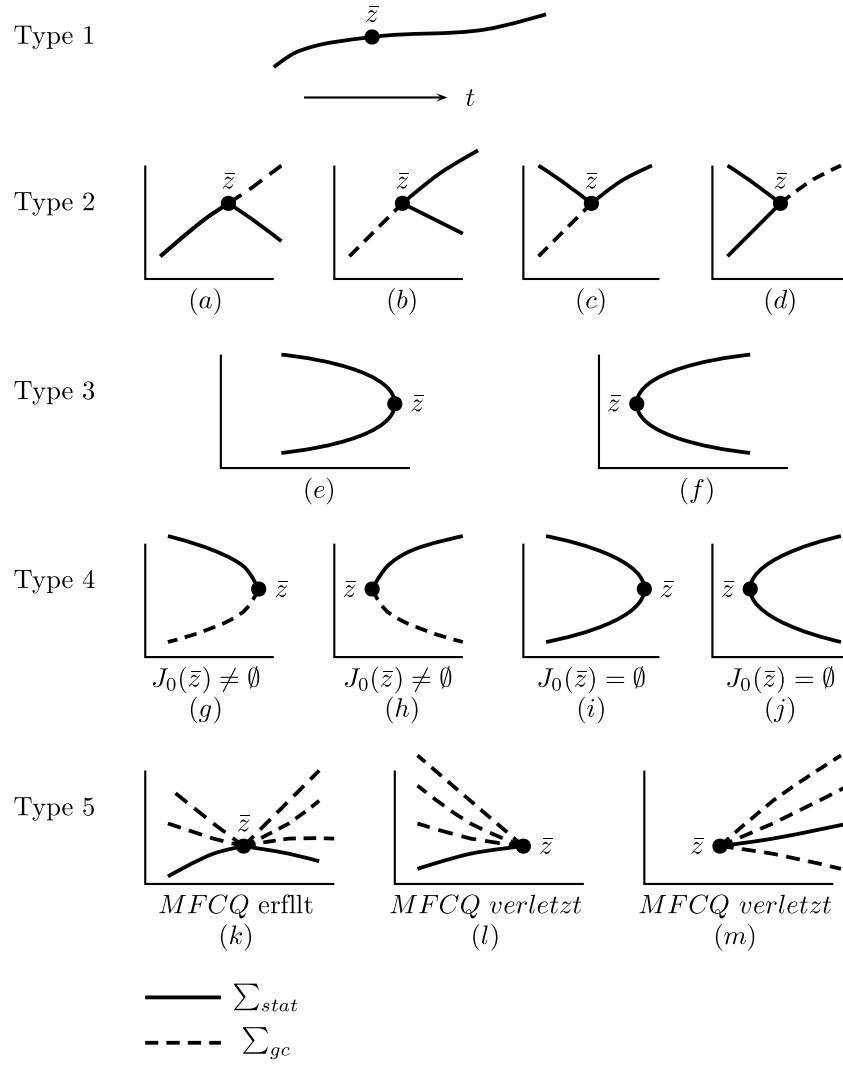


Abbildung 4.1: 5 Typen von Jongen, Jonker und Twilt

Dann ist die Zahl

$$(4.13) \quad \gamma = D_x g_p(\bar{z})(\alpha + \beta) + D_t g_p(\bar{z})$$

verschieden von Null, wobei

$$(4.14) \quad \alpha = -(D_x \Pi(\bar{z})^\dagger)^T \cdot D_t \Pi(\bar{z}),$$

$$(4.15) \quad \beta = -W(W^T \cdot D_x^2 L \cdot W)^{-1} W^T \cdot [D_x^2 L \cdot \alpha + D_t D_x^T L].$$

Hierbei ist $B^\dagger = (B^T B)^{-1} B^T$ die Moore-Penrose Inverse einer Matrix B , die nur linear unabhängige Spalten besitzt.

(2e) Es gilt

$$(4.16) \quad \gamma \neq 0.$$

Da der Multiplikator μ_p in der vorigen Definition verschwindet, kann man die Restriktion g_p lokal um \bar{z} einerseits als Gleichung betrachten und andererseits streichen. Damit entstehen zwei parametrische Optimierungsprobleme $P^*(t)$ und $\tilde{P}^*(t)$. Der Punkt \bar{x} ist ein nichtdegenerierter kritischer Punkt für $P^*(\bar{t})$ und $\tilde{P}^*(\bar{t})$, wegen der LICQ und der dritten und vierten Bedingung in Definition 28. Die Menge Σ_{gc} lässt sich lokal als Vereinigung von zwei Kurven $t \mapsto (x^*(t), t)$ und $t \mapsto (\tilde{x}^*(t), t)$ bilden. Diese beiden Kurven schneiden sich transversal in \bar{z} . Man kann zeigen, dass $d\tilde{x}^*(\bar{t})/dt = \alpha + \beta$ (siehe (4.14) und (4.15)), so dass (4.13) als die folgende Gleichung

$$(4.17) \quad \gamma = D_x g_p(\bar{z}) \dot{\tilde{x}}^*(\bar{t}) + D_t g_p(\bar{z}) = \frac{d}{dt} g_j(\tilde{x}^*(t), t)|_{t=\bar{t}} \neq 0$$

geschrieben werden kann. Die Beziehungen zwischen den jeweiligen Index-Tupel (LL,LCI,QI,QCI) auf jedem Zweig von Σ_{gc} hängt von zwei so genannten charakteristischen Zahlen ab. Diese sind $\delta = \delta_1 - \delta_2$ und $\text{sign}(\gamma)$, wobei δ_1 (bzw. δ_2) die Anzahl negativer Eigenwerte von $D_x^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{\bar{x}}^\neq M}$ (bzw. $D_x^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{\bar{x}} M}$) ist.

Definition 29 Ein g.c. Punkt $\bar{z} \in \Sigma_{gc}$ ist vom Typ 3, falls Folgendes gilt:

(3a) Die LICQ ist in \bar{z} erfüllt.

(3b) In (2.4) erhalten wir $\bar{\mu}_j \neq 0, j \in J_o(\bar{z})$.

(3c) $D_x^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{\bar{x}}M}$ hat genau einen Eigenwert, der gleich Null ist.

(3d) Es seien

- $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+|J_o(\bar{z})|}$ definiert als $\Pi = (h_1, \dots, h_m, g_j, j \in J_o(\bar{z}))$, und
- W eine Matrix, deren Spalten eine Basis des linearen Unterraumes $T_{\bar{x}}M$ bilden.
- $w \neq 0$ ein Vektor mit $W^T D_x^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) W \cdot w = 0$ und $v = W \cdot w$.

Seien

$$(4.18) \quad \beta_1 = v^T (D_x^3 L \cdot v) v - 3v^T D_x^2 L \cdot ((D_x^T \Pi)^\dagger)^T (v^T D_x^2 \Pi \cdot v)$$

$$(4.19) \quad \beta_2 = D_t(D_x L \cdot v) - D_t^T \Pi \cdot (D_x^T \Pi)^\dagger \cdot D_x^2 L v,$$

wobei

$$(4.20) \quad v^T D_x^2 \Pi v = (v^T D_x^2 h_1 v, \dots, v^T D_x^2 g_p v)^T.$$

Wir definieren

$$(4.21) \quad \beta := \beta_1 \cdot \beta_2.$$

Es gilt: $\beta \neq 0$.

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\mathcal{P} : \quad \min \{ \phi(x, \lambda, \mu, t) \mid (x, \lambda, \mu, t) \in \mathcal{X} \},$$

wobei

$$(4.22)$$

$$\phi(x, \lambda, \mu, t) = t,$$

$$(4.23) \quad \mathcal{X} = \{ (x, \lambda, \mu, t) \in \mathbb{R}^{n+m+|J_o(\bar{z})|+1} \mid \mathcal{H}_{J_o(\bar{x}, \bar{t})}(x, \lambda, \mu, t) = 0 \}.$$

Der Punkt $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t}) \in \mathcal{X}$ ist ein zulässiger Punkt von \mathcal{P} . Wegen der Gültigkeit von LICQ und ND1 bildet die Projektion von \mathcal{X} auf (x, t) die Menge Σ_{gc} . Unter der ersten und dritten Bedingung der Definition 29 ist die Gültigkeit der LICQ für die Menge \mathcal{X} im Punkt $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ äquivalent zur Bedingung $\beta_2 \neq 0$. Ebenfalls äquivalent dazu ist die Eigenschaft von $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$, kritischer Punkt von \mathcal{P} zu sein. Es kann gezeigt werden, dass dann $\beta_1 \neq 0$ äquivalent zur Bedingung ND2 der Nichtdegeneriertheit von $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ als kritischer Punkt ist. Die vierte Bedingung

der Definition 29 ist äquivalent zur Bedingung, dass $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$ ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von \mathcal{P} ist. Diese andere Charakterisierung gibt uns einen geometrischen Blick auf die lokale Struktur der Kurve \mathcal{X} um $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})$. Sie besitzt einen Maximalpunkt oder einen Minimalpunkt ($QI + QCI = 1$) bezüglich der Komponente t . Das lokale Verhalten des Indextupels (LI, LCI, QI, QCI) auf der \sum_{gc} Kurve hängt in diesem Fall von den Zahlen α und $sign(\beta)$ ab, wobei α die Anzahl der negativen Eigenwerte von $D_x^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{t})|_{T_{\bar{x}}M}$ und $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$ ist.

Definition 30 Ein g.c. Punkt $\bar{z} \in \sum_{gc}$ ist vom Typ 4, falls Folgendes gilt:

(4a) $m + |j_o(\bar{z})| = m + p > 0$.

(4b) Der von den Vektoren

$$\{D_x h_i(\bar{z}), D_x g_j(\bar{z}), i \in I, j \in J_o(\bar{z})\}$$

erzeugte lineare Unterraum hat die Dimension $m + p - 1$.

(4c) $m + p - 1 < n$.

Nach (4b) existieren Zahlen $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j, i \in I, j \in J_o(\bar{z})$, nicht alle gleich Null, so dass

$$(4.24) \quad \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i D_x h_i(\bar{z}) + \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j D_x g_j(\bar{z}) = 0.$$

Dabei sind alle λ_i, μ_j in (4.24) bis auf ein gemeinsames Vielfaches eindeutig bestimmt.

(4d) Es seien

$$(4.25) \quad L(z) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i D_x h_i(z) + \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j D_x g_j(z),$$

wobei die Zahlen $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j$ in (4.25) die Gleichung (4.24) erfüllen, und W eine Matrix, deren Spalten eine Basis des $(n - m - |J_o(\bar{z})| + 1)$ -dimensionalen Unterraumes

$$T = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid Dh_i(\bar{z})\xi = 0, Dg_j(\bar{z})\xi = 0, i \in I, j \in J_o(\bar{z})\}$$

bilden. Die Matrix

$$(4.26) \quad A = D_t L(\bar{z}) \cdot W^T \cdot D_x^2 L(\bar{z}) \cdot W$$

ist regulär.

(4e) Es sei $w = W^T \cdot D_x^T f(\bar{z})$. Dann gilt:

$$(4.27) \quad \alpha = w^T A^{-1} w \neq 0$$

Es ist zu bemerken, dass α unabhängig von der Wahl der Matrix W ist.

Sei $p \in J_o(\bar{z})$ (falls $J_o(\bar{z}) = \emptyset$, sei $p \in I$) mit $\bar{\mu}_p \neq 0$. Wir betrachten das Problem

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \quad \min\{\Psi(x, \lambda, \mu, t, \lambda_o) = t \mid \mathcal{G}(x, \lambda, \mu, t, \lambda_o) = 0\},$$

wobei

$$\mathcal{G}(x, \lambda, \mu, t, \lambda_o) = \begin{pmatrix} D_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, t, \lambda_o) \\ h_1(x, t) \\ \vdots \\ h_m(x, t) \\ g_1(x, t) \\ \vdots \\ g_p(x, t) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, t, \lambda_o) = \lambda_o f(x, t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x, t) + \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j g_j(x, t) + \bar{\mu}_p g_p(x, t).$$

Rechnerische Überlegungen zeigen, dass unter der Gültigkeit der ersten drei Voraussetzungen der vorigen Definition ihre letzten zwei Bedingungen äquivalent dazu sind, dass der Punkt $(\bar{x}, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{p-1}, \bar{t}, 0) \in \mathbb{R}^{n+m+\bar{p}+1}$ ein nichtentarteter kritischer Punkt von $\tilde{\mathcal{P}}$ ist. Somit ist die LICQ in diesem Punkt erfüllt.

Die Zahlen $\text{sign}(\alpha)$, β , $\text{sign}(\beta)$ und γ sind in diesem Fall die charakterisierenden Zahlen, von denen das lokale Verhalten des Indextupels (LI, LCI, QI, QCI) in den nichtdegenerierten Punkten von Σ_{gc} abhängt, wobei $\alpha = w^T A^{-1} w$, β die Anzahl positiver Eigenwerte von A ist, $\delta = D_t L$ und γ die Anzahl der negativen Multiplikatoren $\mu_j, j \in J_o(\bar{z}) \setminus \{p\}$ sind. Im Fall $|J_o(\bar{z})| \neq 0$ gilt $\mu_j \neq 0, j = 1, \dots, p$ und wir können die Zahlen μ_j 's normalisieren, indem wir $\mu_p = 1$ setzen.

Definition 31 Ein g.c. Punkt $\bar{z} \in \Sigma_{gc}$ ist vom Typ 5, falls Folgendes gilt:

$$(5a) \quad |I| + |j_o(\bar{z})| = n + 1$$

(5b) Die Vektoren $\{Dh_i(\bar{z}), Dg_j(\bar{z}), i \in I, j \in J_o(\bar{z})\}$ sind linear unabhängig (es ist zu bemerken, dass die Ableitungen in allen Variablen von \mathbb{R}^{n+1} zu berücksichtigen sind).

(5c) Wegen (5a) und (5b) existieren, bis auf eine multiplikative Konstante, eindeutig bestimmte Zahlen $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j, i \in I, j \in J_o(\bar{z})$, nicht alle gleich Null, so dass (4.24) erfüllt ist.

(5d) $\bar{\mu}_j \neq 0$ für jedes $j \in \{1, \dots, p\}$.

(5e) Nach (5a) und (5b) existieren Zahlen $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_j, i \in J_o(\bar{z})$ mit

$$(4.28) \quad Df(\bar{z}) + \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i Dh_i(\bar{z}) + \sum_{j=1}^p \bar{\beta}_j Dg_j(\bar{z}) = 0.$$

(5f) Wir betrachten die $p \times p$ -Matrix Δ deren Elemente wie folgt definiert sind:

$$(4.29) \quad \Delta_{ij} = \beta_i - \beta_j \cdot \frac{\mu_i}{\mu_j} \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Es gilt $\Delta_{ij} \neq 0, \forall i, j \in J_o(\bar{z}), i \neq j$.

Man kann leicht sehen, dass unter (4.24) (siehe (5c)) und (4.28) Folgendes gilt
(4.30)

$$D_x f(\bar{z}) + \sum_{i=1}^m (\bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_q \cdot \frac{\bar{\lambda}_i}{\bar{\mu}_q}) D_x h_i(\bar{z}) + \sum_{j=1}^p (\bar{\beta}_j - \bar{\beta}_q \cdot \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_q}) D_x g_j(\bar{z}) = 0 \quad q \in J_o(\bar{z}).$$

Da die Vektoren $\{D_x h_i(\bar{z}), D_x g_j(\bar{z}), i \in I, j \in J_o(\bar{z}) \setminus \{q\}\}$ für $q \in J_o(\bar{z})$ linear unabhängig sind, folgt aus (5f) und der Gleichung (4.30), dass \bar{z} ein nichtentarteter kritischer Punkt ist, wenn die Ungleichung g_q gestrichen wird. Die charakterisierenden Zahlen sind hier $\gamma_j, \delta_j, j \in J_o(\bar{z})$, wobei $\gamma_j = \text{sign}(\bar{\mu}_j \cdot D_t L(\bar{z}))$ und δ_j die Anzahl der negativen Zahlen der Form $\Delta_{ij}, i \in J_o(\bar{z}) \setminus \{j\}$ sind. Hier ist $L(z)$ genauso definiert wie in der vorigen Singularität vom Typ 4. Es gibt insgesamt $|J_o(\bar{z})|$ Zweige, die von \bar{z} ausgehen. Betrachtet man die Mengen

(4.31)

$$M_q = \{z \mid h_i(z) = 0, g_j(z) = 0, i \in I, j \in J_o(\bar{z}) \setminus \{q\}\}, \quad q = 1, \dots, p,$$

(4.32)

$$M_q^- = \{x \in M_q \mid g_p(z) \leq 0\},$$

dann lässt sich die Menge Σ_{gc} lokal als Vereinigung von Mengen $M_q^-, q = 1, \dots, p$ darstellen und das Indextupel (LI, LCI, QI, QCI) auf dem Zweig $M_q^- \setminus \{\bar{z}\}$ hat die Form $(\delta_q, p - 1 - \delta_q, 0, 0)$.

Nach der ausführlichen Definition der 5 verallgemeinerten kritischen Punkte sind wir in der Lage, die Regularität im Sinne von Jongen, Jonker und Twilt (kurz JJT-Regularität) anzugeben. Für die problembeschreibenden Funktionen des einparametrischen Optimierungsproblems $\mathcal{P}(t)$ sei die Abbildung $(f, H, G) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{m+p+1}$ gegeben. Wir benutzen die Bezeichnung $\Sigma_{gc}(\mathcal{P}(t))$ für die Menge der verallgemeinerten kritischen Punkte des Problems $\mathcal{P}(t)$. Falls es eindeutig ist, welches Problem $\mathcal{P}(t)$ behandelt wird, schreiben wir einfach Σ_{gc} . Mit $\Sigma_{gc}^i, i = 1, \dots, 5$ bezeichnen wir die Untermengen von Σ_{gc} , die aus den Punkten vom Typ i bestehen. Für die Einführung der JJT-Regularität definieren wir die Menge \mathcal{F} wie folgt:

(4.33)

$$\mathcal{F} := \left\{ (f, H, G) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{1+m+s} \mid \Sigma_{gc}(\mathcal{P}(t)) = \bigcup_{i=1}^5 \Sigma_{gc}^i(\mathcal{P}(t)) \right\}.$$

Definition 32 Ein durch $(f, H, G) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{1+m+s}$ definiertes Problem $\mathcal{P}(t)$ heisst JJT-regulär, falls $(f, H, G) \in \mathcal{F}$.

Im folgenden Abschnitt geben wir die wichtigsten Eigenschaften an, die bezüglich dieser JJT-Regularität bekannt sind. Wie der folgende Satz zeigt, liefert sie uns auch nähere Informationen über die globale Struktur der Menge Σ_{gc} .

Satz 17 (Jongen-Jonker-Twilt, [35]) Sei $(f, H, G) \in \mathcal{F}$. Dann gilt:

$\Sigma_{gc} = \overline{\Sigma}_{gc}^1$ (Abschließung von Σ_{gc}^1), und die Mengen Σ_{gc}^i sind für $i = 2, 3, 4$ und 5 diskret. Σ_{gc} ist die Vereinigung von 1-dimensionalen C^2 -Mannigfaltigkeiten.

Von natürlichem Interesse ist die Struktur der Menge der stationären Punkte. Dazu betrachten wir die Menge

$$(4.34) \quad \Sigma_{reg} := \{(x, t) \in \Sigma_{gc}^1 \mid LI = 0\},$$

wobei LI die Anzahl der negativen $\mu_j, j \in J_o(x, t)$ ist. Wir bemerken, dass Folgendes gilt:

$$(4.35) \quad \Sigma_{reg} \subset \Sigma_{stat} \subset \overline{\Sigma}_{reg} \subset \Sigma_{gc}.$$

Satz 18 ([35],[16]) Sei $(f, H, G) \in \mathcal{F}$. Dann ist die Menge $\bar{\Sigma}_{reg}$ eine eindimensionale (stückweise C^2) Mannigfaltigkeit mit Rand. $\bar{z} \in \bar{\Sigma}_{reg}$ ist ein Randpunkt genau dann, wenn in \bar{z} Folgendes gilt: $J_0(\bar{z}) \neq \emptyset$ und die MFCQ ist verletzt.

Der nächste Satz beleuchtet die Wichtigkeit der MFCQ innerhalb von $\bar{\Sigma}_{reg}$.

Satz 19 ([16], [35]) Sei $\bar{z} \in \bar{\Sigma}_{reg}$ und $(f, H, G) \in \mathcal{F}$. Dann ist die MFCQ in \bar{z} genau dann verletzt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) \bar{z} ist vom Typ 4.
- (b) \bar{z} ist vom Typ 5 und alle $\mu_j, j \in J_0(\bar{z})$ in (4.24) haben das gleiche Vorzeichen.

Als weitere Eigenschaft der JJT-Regularität ist ihr generischer Charakter von Bedeutung.

Satz 20 ([35]) Die Funktionenmenge \mathcal{F} ist offen und dicht im Funktionenraum $C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{1+m+s}$ bezüglich der C_s^3 -Topologie.

Wie kann, ausgehend von beliebigen Daten $(f, H, G) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{m+s+1}$ mit beliebig kleinen Störungen, die Menge \mathcal{F} erreicht werden? Die Antwort dazu liefert der unten angegebene Störungssatz mit Hilfe des parametrisierten Sard Lemmas. Für den Beweis des Satzes wurde vom folgenden Begriff Gebrauch gemacht.

Definition 33 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $k \geq 1, f_i \in C^k(U, \mathbb{R}), i = 1, \dots, n$, $g_j \in C^k(U, \mathbb{R}), j = 1, \dots, m$,

$$F^1 = \{x \in U \mid f_i(x) = 0, \quad 1, \dots, l\}$$

$$F^2 = \{x \in U \mid g_j(x) = 0, \quad 1, \dots, m\}.$$

Seien die Mengen $\{Df_i, i = 1, \dots, l\}, \{Dg_j, j = 1, \dots, m\}$ für jedes $x \in F^1$ bzw. $x \in F^2$ linear unabhängig, d.h. F^1 bzw. F^2 ist eine C^1 -Mannigfaltigkeit der Dimension $n - l$ bzw. $(n - m)$. Dann schneiden sich F^1 und F^2 transversal ($F^1 \pitchfork F^2$), falls $\{Df_i(x), Dg_j(x), i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m\}$ eine linear unabhängige Menge für alle $x \in F^1 \cap F^2$ ist.

Lemma 4 (Parametrisiertes Theorem von Sard, [52])

Sei $\phi \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^r)$, $k > \max\{0, n - r\}$, $\phi : (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \phi(x, z) \in \mathbb{R}^r$ und 0_r ein regulärer Wert von ϕ (d.h. $\text{Rang}(D\phi(x, z)) = r$, für alle $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ mit $\phi(x, z) = 0$). Dann gilt:

für fast alle $\bar{a} \in \mathbb{R}^p$ ist 0_r ein regulärer Wert von $\phi_{\bar{a}}$, mit $\phi_{\bar{a}}(x) = \phi(x, \bar{a})$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\phi(x, \bar{a}) = 0$ gilt

$$\text{Rang}(D\phi_{\bar{a}}(x)) = \text{Rang}(D_x\phi(x, \bar{a})) = r.$$

Satz 21 ([50]) Sei $(f, H, G) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})^{1+m+s}$. Dann gilt: Für fast alle

$$(b, A, c, D, e, F) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{sn}$$

ist die Abbildung

$$(x, t) \rightarrow (f(x, t) + b^T x + \frac{1}{2} x^T A x, H(x, t) + c + D x, G(x, t) + e + F x)$$

ein Element von \mathcal{F} .

4.2.1 Über Kurvenverfolgungsalgorithmen und Sprünge (Jumps)

Basierend auf der Theorie der parametrischen Optimierung wollen wir Algorithmen für die numerische Verfolgung der Lösungskurven angeben. Dazu erinnern wir zunächst an das Einbettungsprinzip (siehe [1], [10], [16]):

Man bilde ein einparametrisches Optimierungsproblem

$$\tilde{P}(t) : \min \{ f(\tilde{x}, t) \mid \tilde{x} \in \tilde{M}(t) \}, \quad t \in [0, 1],$$

wobei

$$(4.36) \quad \tilde{M}(t) = \{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \mid h_i(\tilde{x}, t) = 0, i \in I, g_j(\tilde{x}, t) \leq 0, j \in \tilde{J} \}$$

$$(4.37) \quad \tilde{n} \geq n, \tilde{J} := \{1, \dots, \tilde{s}\}, \tilde{s} \geq s,$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Ein lokaler Minimalpunkt für $\tilde{P}(0)$ ist bekannt (sowie zugehörige Lagrange-Multiplikatoren) und einfacher zu berechnen,
- $\tilde{P}(t)$ hat einen globalen Minimalpunkt $\forall t \in [0, 1]$,
- $\tilde{P}(1)$ ist äquivalent zu (P).

Unter einem Lösungsalgorithmus vom $\mathcal{P}(t), t \in [0, 1]$ versteht man die Lösung folgender Probleme:

1. Finde einen lokalen Minimalpunkt $x(t)$ für $\mathcal{P}(t), t \in [0, 1]$ oder
2. Finde einen stationären Minimalpunkt $x(t)$ für $\mathcal{P}(t), t \in [0, 1]$ oder
3. Finde einen g.c. Punkt $x(t)$ für $\mathcal{P}(t), t \in [0, 1]$.

Mit anderen Worten: man finde eine Diskretisierung (hinreichend fein)

$$(4.38) \quad 0 = t_0 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < t_N$$

von $[0, 1]$ und zugeordnete Punkte $(x(t_i), t_i) \in \Sigma_{loc}, \Sigma_{stat}$ oder Σ_{gc} bzw. hinreichend gute Approximationen von $x(t_i), i = 1, \dots, N$.

Wir geben eine Zusammenfassung der Algorithmen, die wir zur Berechnung der Diskretisierung (4.38) des Intervalls $[0, 1]$ und der zugehörigen Punkte aus $\Sigma_{loc}, \Sigma_{stat}$ und Σ_{gc} verwenden: PATH II und PATH III (aktive Indexmengenstrategie) bzw. JUMP I. Eine ausführliche Behandlung dieser Algorithmen findet man in [16].

Der Algorithmus Path II

Dieser Algorithmus berechnet numerisch eine kompakte Zusammenhangskomponente in Σ_{stat} . Es wird eine aktive Indexmenge Strategie verwendet. An der Stelle des Problems $\mathcal{P}(t)$ wird folgendes Hilfsproblem verwendet:

$$\mathcal{P}^{\tilde{J}}(t) : \min \{f(x, t) \mid h_j(x, t) = 0, i \in I, g_j(x, t) = 0, j \in \tilde{J}\}, \quad \text{mit } \tilde{J} \subset J.$$

Durch ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren mit zusätzlichen Regeln wird das zu $\mathcal{P}^{\tilde{J}}(t)$ entsprechende KKT-System $H^{\tilde{J}}(x, \lambda, \mu, t) = 0$ gelöst, wobei

$$(4.39) \quad H^{\tilde{J}} : \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D_x f(x, t) + \sum_{i \in I} \lambda_i D_x h_i(x, t) + \sum_{j \in \tilde{J}} \mu_j D_x g_j(x, t) \\ h_i(x, t), i \in I \\ g_j(x, t), j \in \tilde{J} \end{pmatrix}.$$

Der Algorithmus Path III

Path III beschreibt numerisch eine kompakte Zusammenhangskomponente in Σ_{gc} . Wir starten dabei mit einem Punkt $(x^0, t^0) \in \Sigma_{gc}^1$ und möchten die Zusammenhangskomponente bestimmen, die durch (x^0, t^0) längs des Intervalls $[t_a, t_b], t_a < t^0 < t_b$ geht.

Sprünge in der Menge von lokalen Minimalpunkten und der Algorithmus Jump I

Falls (x, t) ein Rückkehrpunkt ist, wollen wir in Folgendem die Ergebnisse der Untersuchung in [16] über die Existenz eines Sprungs $w \in \mathbb{R}^n$ in (x, t) angeben.

Typ 2 Sei $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^2$. Hier sind drei Fälle möglich. Sei L die Lagrange Funktion (siehe (2.8)). In den Fällen I und II sind $D^2L(\bar{z})|_{T(\bar{z})}$ und $D^2L(\bar{z})|_{\tilde{T}(\bar{z})}$ positiv definit; aber im Fall III ist $D^2L(\bar{z})|_{T(\bar{z})}$ nicht positiv definit. Im Fall III gilt

$$(4.40) \quad \min\{\tilde{\zeta}^T D^2L(z)\tilde{\zeta} \mid \|\tilde{\zeta}\| = 1, \tilde{\zeta} \in \tilde{T}(\bar{z}), Dg_{\tilde{j}}(z)\tilde{\zeta} \geq 0\} < 0.$$

In I und II können wir die Zusammenhangskomponente in Σ_{loc} weiter verfolgen entweder $g_{\tilde{j}}$ als Ungleichung (I) oder ohne $g_{\tilde{j}}$ (II).

In III endet die Zusammenhangskomponente in \bar{z} , solange t wächst. Die Lösung von (4.40) liefert eine quadratische Abstiegsrichtung $\tilde{\zeta}$. Somit kann man einen lokalen Minimalpunkt \tilde{x} mit $\tilde{x} \neq x$ finden. Dann kann man die Kurve in \tilde{x} weiter verfolgen. Damit hat man einen Sprung realisiert. Da das Problem im Fall III nicht einfach zu lösen ist, kann man den Vorschlag von Rückmann (s. [50]) benutzen:

Sei t hinreichend nahe \bar{t} , $t < \bar{t}$ und seien $(x^o(t), t)$ bzw. $(x^1(t), t)$ ein lokaler Minimalpunkt bzw. ein Element aus $\Sigma_{stat} \setminus \Sigma_{loc}$. Dann gilt:

$$(4.41) \quad r(t) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{x^o(t) - x^1(t)}{\|x^o(t) - x^1(t)\|}$$

existiert, und $\epsilon r(t)$ ($\epsilon \in \{-1, 1\}$) ist eine zulässige Abstiegsrichtung im Punkt \bar{x} für das Problem $P(t)$ (s. Abbildung 4.2).

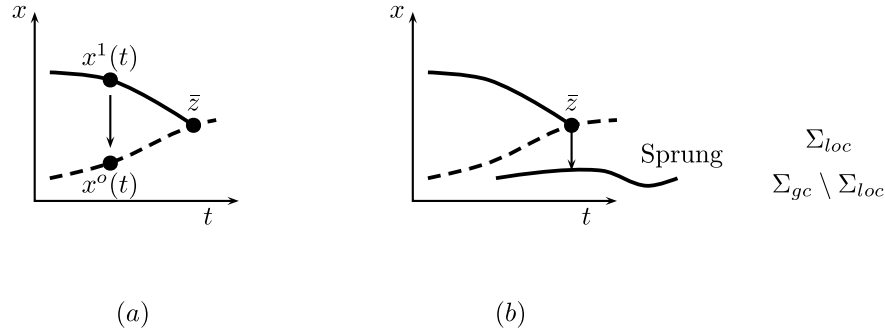


Abbildung 4.2: Sprung in Punkten vom Typ 2

Typ 3 Sei $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^3$. Sei t hinreichend nahe bei \bar{t} , $t < \bar{t}$. Seien $(x^m(t), t)$ und $(x^s(t), t)$ ein lokaler Minimalpunkt bzw. ein Element von $\Sigma_{stat} \setminus \Sigma_{loc}$. Dann gilt:

$$(4.42) \quad u(t) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{x^s(t) - x^m(t)}{\|x^s(t) - x^m(t)\|}$$

existiert und $\epsilon u(t)$ ($\epsilon \in \{-1, 1\}$) ist eine zulässige Abstiegsrichtung (kubische Abstiegsrichtung) im Punkt \bar{x} für das Problem $P(t)$. Beweis in [16] (siehe Abbildung 4.3).

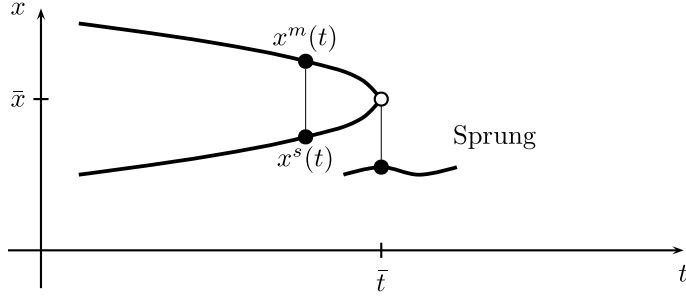


Abbildung 4.3: Sprung in Punkten vom Typ 3

Typ 4 Sei $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^4$. Dann existiert eine C^∞ -lokale Koordinatentransformation, so dass lokal $M(t)$ folgende kanonische Form hat:

Situation 1: ($J_o(\bar{z}) = \emptyset$)

$$(4.43) \quad v = - \sum_{i_1=1}^k y_{i_1}^2 + \sum_{i_2=k+1}^{n-m+1} y_{i_2}^2$$

$$y_l = 0, l = n - m + 2, \dots, n.$$

Situation 2: ($J_o(\bar{z}) \neq \emptyset$)

$$(4.44) \quad \delta \cdot v = - \sum_{i_1=1}^k y_{i_1}^2 + \sum_{i_2=k+1}^c y_{i_2}^2 - \sum_{i_3=c+1}^{c+d} y_{i_3}^2 + \sum_{i_4=c+d+1}^{c+d+e} y_{i_4}^2$$

$$y_l \geq 0, l = c + 1, \dots, c + d + e,$$

$$y_l = 0, l = c + d + e + 1, \dots, n,$$

$$c = n - m - |J_o(\bar{z})| + 1, \delta \in \{-1, 1\},$$

$$d + e = |J_o(\bar{z})| - 1, c \neq 0.$$

\bar{z} ist ein quadratischer Rückkehrpunkt wie ein Punkt vom Typ 3, aber die Situation ist schwieriger. Nach einem Punkt $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^4 \cap \overline{\Sigma_{loc}}$ geht ein lokaler Minimalpunkt in einen lokalen Maximalpunkt über. Für t hinreichend nahe bei \bar{t} , $t < \bar{t}$, bestimmen wir einen lokalen Maximalpunkt $(x_{max}(t), t)$ nach dem Rückkehrpunkt \bar{z} sowie eine lineare Abstiegsrichtung r im Punkt $x_{max}(t)$ für $P(t)$. Dann wenden wir ein Abstiegsverfahren mit Startpunkt $x_{max}(t)$ und Richtung r an, um einen lokalen Minimalpunkt $\tilde{x}_{min}(t)$ für

$P(t)$ zu finden. Sei $x_{\min}(t)$ der lokale Minimalpunkt von $P(t)$, der nach dem Rückkehrpunkt \bar{z} in $x_{\max}(t)$ übergeht. Es gibt dann zwei Fälle:

Fall 1 Der Wert der Zielfunktion f nimmt ab.

Dann gilt $\tilde{x}_{\min}(t) \neq x_{\min}(t)$, d.h. der Sprung auf eine andere Zusammenhangskomponente ist erfolgreich.

Fall 2 Der Wert der Zielfunktion f nimmt zu.

In diesem Fall wird die zugehörige Zusammenhangskomponente der Restriktionsmenge leer und das Abstiegsverfahren führt wieder zum Punkt $x_{\min}(t)$, d.h. $\tilde{x}_{\min}(t) = x_{\min}(t)$. Wir bleiben auf derselben Zusammenhangskomponente, ein Sprung ist nicht möglich.

Folgender Satz liefert ein Entscheidungskriterium über die Existenz eines Sprunges in einem Punkt vom Typ 4.

Satz 22 ([34]) Seien $f, g_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j \in J = \{1, \dots, s\}$ und $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^4$ mit $J_0(\bar{z}) = \{1, \dots, p\}$, $p \geq 1$. $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p$ seien die bis auf ein gemeinsames Vielfaches eindeutig bestimmten Lagrange-Multiplikatoren, die zu \bar{z} gehören. Für

$$(4.45) \quad \mathcal{L}(z) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_p} g_j(z) + g_p(z)$$

sei $D_t \mathcal{L}(\bar{z}) \neq 0$. Ferner sei $\delta = \text{sign}(-D_t \mathcal{L}(\bar{z}))$. Dann existiert in Umgebung vom \bar{z} ein C^∞ -Diffeomorphismus $\psi : (x, t) \rightarrow (\psi_1(x, t), \psi_2(t))$, $D\psi_2(t) > 0$, so dass

$$(i) \quad \psi(\bar{x}, \bar{t}) = (0_n, 0),$$

(ii)

$$\begin{aligned} g_p(x, t) &= g_p \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n, v) \\ &= \delta v - \sum_{i_1=1}^k y_{i_1} + \sum_{i_2=k+1}^{p-1} y_{i_2} - \sum_{i_3=p}^{p+l} y_{i_3}^2 + \sum_{i_4=p+l+1}^n y_{i_4}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

mit $y_1, \dots, y_{p-1} \geq 0$ und $\delta \in \{-1, +1\}$. Dabei ist k die Anzahl der negativen $\bar{\alpha}_j$, $\bar{\alpha}_j = \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_p}$, $j = 1, \dots, p-1$, und l ist die Anzahl der negativen Eigenwerte von $D_x^2 \mathcal{L}|_{T(\bar{z})}$,
 $T(\bar{z}) = \{w \in \mathbb{R}^n | D_x g_j(\bar{x}, \bar{t})w = 0, j = 1, \dots, p-1\}$.

Kriterium 1 ([16]) Nach einem Rückkehrpunkt $\bar{z} \in \Sigma_{gc} \cap \bar{\Sigma}_{loc}$ geht ein lokaler Minimalpunkt in einen lokalen Maximalpunkt über. Im Fall $\delta = 1$ nimmt der Wert der Zielfunktion f ab und der Sprung zu einer anderen Zusammenhangskomponente in Σ_{loc} ist möglich. Im anderen Fall $\delta = -1$ nimmt der Wert der Zielfunktion f zu und der Sprung zu einer anderen Zusammenhangskomponente ist nicht möglich. Wir bemerken, dass in diesem Fall die entsprechende Komponente der zulässigen Menge leer wird.

Typ 5 Sei \bar{z} ein Punkt vom Typ 5.

Falls die Bedingung MFCQ erfüllt ist, so gibt es eine Fortsetzung in Σ_{loc} . Falls MFCQ verletzt ist, so gibt es keine Fortsetzung und wir haben keinen Vorschlag für einen Sprung.

Der Algorithmus Jump I

Jump I arbeitet in Σ_{loc} . Ausgehend von dem bekannten lokalen Minimalpunkten x^0 für $P(0)$ berechnen wir mit PATH II eine kompakte Zusammenhangskomponente in $\bar{\Sigma}_{loc}$ für wachsende t . Falls ein Rückkehrpunkt auftritt, versuchen wir, mit einem Abstiegsverfahren auf eine andere Zusammenhangskomponente zu springen. Leider können wir nicht in jedem Rückkehrpunkt eine Abstiegsrichtung finden. Der Algorithmus Jump I ist in [16] ausführlich erläutert.

Sprünge in der Menge der verallgemeinerten kritischen Punkte und der Algorithmus Jump II*

Jump II* dient zur Bestimmung von so viel Zusammenhangskomponenten von Σ_{gc} wie möglich. Er bietet mehr Möglichkeiten an, von einer Zusammenhangskomponente von Σ_{gc} auf eine andere zu springen.

Sei $C = C(x^0, 0)$ eine Zusammenhangskomponente in Σ_{gc} mit $(x^0, t_0) \in \Sigma_{gc}^1$ und betrachten $C|_{[t_A, t_B]}$. Durch Anwendung von Algorithmus PATH III mit dem Startpunkt $(x^0, t_0) \in \Sigma_{gc}^1$ nehmen wir an, dass $C|_{[t_A, t_B]}$ numerisch vollständig beschrieben ist und wir haben eine (hinreichend feine) Diskretisierung vom Intervall $[t_A, t_B]$:

$$t_{-q_1} < \dots < t_0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{r_1}$$

und die zugehörige Menge von g.c. Punkten

$$C|_{[t=t_i]} := \{(x, t_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (x, t_i) \in C\},$$

wobei $t_{-q_1} \in [t_A, t_0], t_{r_1} \in (t_0, t_B]$. $C_{|[t=t_i]}, i \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\}$ ist dann eine endliche Menge.

Für alle $t_i, i \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\}$ kann man einfach Punkte $\hat{x}(t_i)$ und $\bar{x}(t_i)$ berechnen mit

$$\begin{aligned} f(\hat{x}(t_i), t_i) &\leq f(x, t_i) & \forall (x, t_i) \in C_{|[t=t_i]} \\ f(\bar{x}(t_i), t_i) &\leq f(x, t_i) & \forall (x, t_i) \in C_{|[t=t_i]}. \end{aligned}$$

$\hat{x}(t_i)$ und $\bar{x}(t_i)$ müssen nicht eindeutig bestimmt sein.

Es gibt folgende Möglichkeiten, um zu einer anderen Zusammenhangskomponente in Σ_{gc} zu springen:

Situation 1:

$$(4.46) \quad \exists i_o \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\} \quad \text{mit } (\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \Sigma_{gc}^1 \setminus \Sigma_{stat}.$$

Die Abstiegsrichtung $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$ kann wie üblich berechnet werden, d.h. durch Lösung von:

$$(4.47) \quad \begin{aligned} D_x f(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \xi &< 0, & D_x h_i(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \xi &= 0 \quad i \in I, \\ D_x g_j(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \xi &\leq 0, & j &\in J_o(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \end{aligned}$$

(für $(\bar{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \Sigma_{gc}^1 \setminus \Sigma_{stat}$, betrachten wir $-f(x, t_{i_o})$).

Situation 2:

$$(4.48) \quad \exists i_o \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\} \quad \text{mit } (\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \Sigma_{stat}^1 \setminus \Sigma_{loc}$$

Die Abstiegsrichtung $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$ kann nicht wie in (4.47) berechnet werden, aber es existiert ein $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$ mit

$$(4.49) \quad \min \left\{ \xi^T D_x^2 L(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \xi \quad \left| \quad \begin{aligned} \|\xi\| &= 1, D_x h_i(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \xi = 0, \quad i \in I \\ D_x g_j(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \xi &\leq 0, \quad j \in J_o(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \end{aligned} \right. \right\}.$$

Wegen (4.48) ist $D_x^2 L(x(t_{i_o}), t_{i_o})|_{T(x(t_{i_o}), t_{i_o})}$ nicht singulär und nicht positiv definit, und wir haben in (4.49) ein nicht einfach zu lösendes Problem. Die Abstiegsrichtung kann genauso wie in (4.41) berechnet werden ([50]). (Für $(\bar{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \Sigma_{gc}^1 \setminus \Sigma_{loc}$, betrachten wir $-f(x, t_{i_o})$).

Situation 3

(4.50)

$$\exists i_o \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\} \quad \text{mit} \quad (\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \Sigma_{gc}^2 \cap \Sigma_{stat},$$

und $(\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o})$ ist ein Rückkehrpunkt in Σ_{stat}

Man nehme als Abstiegsrichtung die in (4.41) angegebene Abstiegsrichtung.

Situation 4

$$(4.51) \quad \exists i_o \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\} \quad \text{mit} \quad (\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \Sigma_{gc}^3.$$

Man nehme als Abstiegsrichtung die in (4.42) angegebene Abstiegsrichtung.

Situation 5

$$(4.52) \quad \exists i_o \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\} \quad \text{mit} \quad (\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \overline{\Sigma}_{loc}^4,$$

und $\delta = 1$ (siehe Abbildung 1.1) oder die Zielfunktionswerte nehmen ab, wobei δ wie in Satz 22 definiert ist. Man berechne einen Punkt $(x_{\max}(t), t)$ (Abbildung 1.1). $x_{\max}(t)$ ist ein lokaler Maximalpunkt für $P(t)$ und auch Startpunkt des Abstiegsverfahrens, um eine andere Zusammenhangskomponente in Σ_{gc} zu bestimmen.

Situation 6

$$(4.53) \quad \exists i_o \in \{-q_1, \dots, 0, \dots, r_1\} \quad \text{mit} \quad (\hat{x}(t_{i_o}), t_{i_o}) \in \Sigma_{gc}^4 \setminus \overline{\Sigma}_{loc}.$$

Analog wie in Situation 5, gibt es immer eine Abstiegsrichtung damit der Sprung zur einer anderen Zusammenhangskomponente von Σ_{gc} möglich ist. Diese Abstiegsrichtung ist sehr technisch und wurde in [23] angegeben.

Kapitel 5

Anwendung des Einbettungsprinzips in der Vektroptimierung

Im Mittelpunkt unserer Untersuchungen steht das mehrkriterielle Optimierungsproblem, in einer beliebigen nichtleeren Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Zu dessen Lösung betrachten wir ein Dialogverfahren, in dem der Entscheidungsträger in jedem Schritt seine Wünsche äußert. Bei der Bestimmung einer Lösung, die den Entscheidungsträger zufriedenstellt, müssen wir ein im Allgemeinen nichtkonvexes und nicht triviales skalares Optimierungsproblem lösen. Zur Lösung dieses Problems werden wir in diesem Kapitel zwei Klassen einparametrischer Optimierungsprobleme, die wir als "verallgemeinerte innere Einbettungen" bezeichnen, bezüglich eines konvexen Ordnungskegels $D \subset \mathbb{R}^l$ untersuchen. Dabei spielen polyedrische Kegel wie $D = \mathbb{R}_+^l$ eine grosse Rolle. Im Gegensatz zu der in [20] untersuchten Standardeinbettung sind die in diesem Kapitel betrachteten Einbettungen durch die Skalarisierungen der Vektroptimierungsprobleme mittels streng monotoner skalarisierender Funktionen, die in der Literatur eine große Rolle spielen, motiviert. Diese Untersuchung wird unter dem Gesichtspunkt der Theorie der einparametrischen Optimierungsprobleme durchgeführt. Sie umfasst z.B. Fragestellungen nach der Art der Singularitäten, die für die verschiedenen Einbettungen auftreten können, und nach den Bedingungen, unter denen eine Zusammenhangskomponente in der Menge stationärer oder verallgemeinerter kritischer Punkte mit Hilfe von Kurvenverfolgungsmethoden numerisch beschrieben werden kann.

5.1 Das Hauptproblem

In dieser Arbeit wollen wir uns auf das Vektoroptimierungsproblem

$$(\mathcal{VOP}) \quad \min \{ \mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x)) \mid x \in M \}$$

konzentrieren, wobei sich die Restriktionsmenge M durch endlich viele Ungleichungen in der Form

$$(5.1) \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, \quad j \in J\}$$

mit

$$(5.2) \quad J := \{1, \dots, s\}, \quad L := \{1, \dots, l\}$$

schreiben lässt. Ferner werden wir annehmen, dass die Funktionen $f_k, g_j, k \in L, j \in J$ aus $C^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind, wobei $q \in \{2, 3\}$.

Sei nun $\mu^1 \in \mathbb{R}^l$ der Wunsch des Entscheidungsträgers in einem bestimmten Schritt unseres Dialog-Verfahrens (siehe Einleitung). Die Zahlen $\mu_k^1, k \in L_1$ und $\mu_k^1, k \in L \setminus L_1$ beschreiben jeweils die so genannten aspiration und reservation level. Der Entscheidungsträger ist dann „zufrieden“, falls wir ausgehend von einem Startpunkt $x^0 \in M$ das folgende äquivalente Problem lösen:

$$(5.3) \quad \text{„finde } \hat{x} \in M \text{ mit } \hat{x} \in M_{\mu^1}\text{“},$$

wobei

$$(5.4) \quad M_{\mu^1} := \left\{ x \in M \mid \mathbf{f}(x) \leq_D \mu^1 \right\} \quad \mu^1 \in \mathbb{R}^l,$$

und \leq_D eine Halbordnung bezüglich des konvexen Kegels D in \mathbb{R}^l ist.

Definition 34 (i) Der Wunsch $\mu^1 \in \mathbb{R}^l$ heißt *realistisch*, falls $M_{\mu^1} \neq \emptyset$.

(ii) Ein Punkt $\hat{x} \in M_{\mu^1}$ heißt *Goal-Realizer*.

Definition 35 Sei $\mu \in \mathbb{R}^l$. Die Menge

$$(5.5) \quad S_\mu = (\mu - D) \cap \mathbf{f}(M).$$

wird als *Ausschnitt von $\mathbf{f}(M)$* bezeichnet.

Wir gehen von der Aufgabe (\mathcal{VOP}) aus und setzen Folgendes voraus:

(C1) M ist eine nichtleere Teilmenge des \mathbb{R}^l und kompakt.

(C2) μ^1 ist ein realistischer Wunsch.

Bemerkung 4 Die Bedingung (C1) ist natürlich und sichert uns die Kompaktheit der Bildmenge $\mathbf{f}(M) = \{\mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^l \mid x \in M\}$. Falls die Menge M nicht kompakt ist, betrachten wir die Menge $M \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq q\} \neq \emptyset$, wobei $q > 0$ hinreichend groß ist. Dagegen ist (C2) technischer Art.

Obwohl wir an der Bestimmung eines realistischen Wunsches interessiert sind, wollen wir aber nicht ausschließen, dass dies zugleich ein effizienter Punkt ist. Die Existenz eines effizienten Punktes in $\mathbf{f}(M)$ kann mit Hilfe nachstehenden Satzes gesichert werden.

Satz 23 (Ehrgott[7], Jahn[31], Göpfert und Nehse[14]) Es sei Y eine nichtleere Untermenge des \mathbb{R}^l . Weiterhin sei \mathbb{R}^l durch einen abgeschlossenen Kegel D partiell geordnet. Y habe einen kompakten Ausschnitt (section), d.h., es gebe ein $y^o \in Y$ mit

$$(5.6) \quad Y_{y^o} = \{y \in Y \mid y \leq_D y^o\} = (y^o - D) \cap Y$$

kompakt. Dann ist die Menge der effizienten Punkte von Y nicht leer ($E(Y, D) \neq \emptyset$).

Als Folgerung aus Satz 23 ergibt sich das folgende Resultat bezüglich. unseres Vektoroptimierungsproblems (VOP).

Satz 24 Es seien die Bedingungen (C1) und (C2) erfüllt. Ist der Kegel D abgeschlossen, so ist $E(\mathbf{f}(M), D) \neq \emptyset$.

Beweis. Aus (C1) und der Stetigkeit der Vektorfunktion \mathbf{f} folgt die Kompaktheit von $\mathbf{f}(M)$. Da (C2) erfüllt ist, existiert ein $\hat{x} \in M$ mit $\mathbf{f}(\hat{x}) \in (\mu^1 - D) \cap \mathbf{f}(M) = S_{\mu^1}$. S_{μ^1} ist nicht leer und somit ein Ausschnitt von $\mathbf{f}(M)$. S_{μ^1} ist kompakt, da $\mu^1 - D$ abgeschlossen ist \square

Mit Hilfe des Satzes 12 können wir unmittelbar die Existenz von effizienten Punkten in der Menge der zulässigen Entscheidungen M bezüglich unseres Problems (VOP) sichern:

Folgerung 1 Es sei D ein abgeschlossener Kegel in \mathbb{R}^l und M erfülle die Bedingung (C1), so gilt $E(M, D) \neq \emptyset$.

Mit Hilfe der Definition 20 der Kegel-Halbsteitigkeit können wir die Kompaktheit von M_{μ^1} sichern.

Satz 25 Seien \mathbf{f} die multikriterielle Bewertungsfunktion unseres Vektoroptimierungsproblems (\mathcal{VOP}) und D ein konvexer abgeschlossener Ordnungskegel. Dann ist M_{μ^1} kompakt.

Beweis. Wegen Definition 20 und der Stetigkeit von \mathbf{f} ist $f^{-1}(\mu^1 - D)$ abgeschlossen. Die Behauptung folgt dann aus $M_{\mu^1} = M \cap f^{-1}(\mu^1 - D)$ und der Abgeschlossenheit von $f^{-1}(\mu^1 - D)$ \square

Für weitere Untersuchungen in unserer Arbeit wollen wir für das Vektoroptimierungsproblem (\mathcal{VOP}) noch Folgendes voraussetzen:

(C3) Der konvexe Ordnungskegel D ist abgeschlossen.

Um das in jedem Dialogschritt auftretende Problem (5.3) zu lösen, schlagen wir folgende Skalarisierung vor:

$$(P_\mu) \quad \min \{ \psi \circ \mathbf{f}(x) \mid x \in M_\mu \}, \quad \mu \in \mathbb{R}^l,$$

wobei ψ eine über $\mathbf{f}(M_\mu)$ streng monoton wachsende Funktion ist (siehe Definition 21). Es sei bemerkt, dass der Vektor $\mu \in \mathbb{R}^l$ einen beliebigen Wunsch des Entscheidungsträgers darstellt. Für das skalare Optimierungsproblem P_μ bezeichnen wir mit $\psi_{glob}(P_\mu)$ ($\psi_{loc}(P_\mu)$) die Menge seiner globalen bzw. lokalen Minimalpunkte. Aus Satz 13 ergibt sich:

$$(5.7) \quad \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}^l} \psi_{glob}(P_\mu) \subseteq E(M, D),$$

$$(5.8) \quad \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}^l} \psi_{loc}(P_\mu) \subseteq E_{loc}(M, D).$$

Aus $\mu \in \mathbb{R}^l, l \geq 2$ ersehen wir, dass das Problem P_μ multiparametrisch ist. Wir betrachten die in Guddat et al. [17] für den Kegel \mathbb{R}_+^l behandelten multiparametrischen Probleme $P_1(\mu)$, $P_2(\mu)$ und $P_3(\mu)$. Hier verwenden wir die in [17] benutzte Schreibweise:

$$(P_1(\mu)) \quad \min \left\{ \delta \sum_{i=1}^l \lambda_i^o (f_i(x) - \mu_i) + v \mid x \in M, \lambda_i^o (f_i(x) - \mu_i) \leq v, i = 1, \dots, l \right\},$$

$$(P_2(\mu)) \quad \min \left\{ \frac{1}{\rho} \ln \left[\sum_{i=1}^l \lambda_i^o \left(\frac{\bar{q}_i - f_i(x)}{\bar{q}_i - \mu_i} \right)^\rho \right] \mid x \in M \right\},$$

$$(P_3(\mu)) \quad \min \{ v \mid x \in M, f_j(x) - v \leq \mu_j, j = 1, \dots, l \}.$$

Dann können wir einen wesentlichen Unterschied zu dem in unserer Arbeit betrachteten Problem P_μ feststellen:

- Obwohl $P_1(\mu)$ durch eine streng monotone wachsende Funktion (siehe Wierzbicki [59])

$$(5.9) \quad s(\mathbf{f}(x), \mu) = \max_{i \in \{1, \dots, l\}} \lambda_i^o (f_i(x) - \mu_i) + \delta \sum_{i=1}^l \lambda_i^o (f_i(x) - \mu_i)$$

motiviert ist, wobei $\lambda_i > 0$, $i \in L$ und $\delta \in (0, 1)$ fest ist, muss ein lokaler Minimalpunkt von $P_1(\mu)$ nicht notwendig ein Goal-Realizer sein. Dies ist nur der Fall, falls $\lambda^o = (1, \dots, 1)$ und der Parameter v verschwindet. Zudem liegt die zugehörige Restriktionsmenge in einem Raum höherer Dimension (\mathbb{R}^{n+1}).

- $P_2(\mu)$ eignet sich nur zur Bestimmung eines effizienten Punktes. Verlangt man zusätzlich $\mathbf{f}(x) \leq \mu^1$, dann erhalten wir ein Problem vom Typ P_μ .
- Ein lokaler Minimalpunkt von $P_3(\mu)$ ist ein lokaler schwach effizienter Punkt. Er ist ein Goal-Realizer nur, wenn der Parameter v verschwindet.

Unser Hauptproblem P_μ ermöglicht die Kombination zweier Ziele, nämlich die Bestimmung eines Goal-Realizers, der zugleich ein effizienter Punkt sein kann.

Um Kurvenverfolgungsalgorithmen anwenden zu können, wurde in [17] mit Hilfe einer Dialog-Prozedur eine Reduzierung von P_μ zu einer Folge einparametrischer Optimierungsprobleme vorgeschlagen. Dies wurde durch die Betrachtung bestimmter Punkte μ^o und μ^1 aus \mathbb{R}^l und deren Verbindungsstrecke $\{\mu \in \mathbb{R}^l \mid \mu^o + t(\mu^1 - \mu^o), t \in [0, 1]\}$ erreicht. Auf dieser Weise erhalten wir einparametrische Optimierungsprobleme folgender Art:

$$(5.10) \quad P_u(t) := P_{(\mu^o + t(\mu^1 - \mu^o))},$$

wobei

$$(5.11) \quad u(t) := \mu^o + t(\mu^1 - \mu^o), \quad t \in [0, 1].$$

In dieser Arbeit erweitern wir dieses Konzept, indem wir eine Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}^l$ betrachten, wobei I ein beliebiges Intervall in \mathbb{R} ist. Im nächsten Abschnitt werden wir Eigenschaften der Funktion u untersuchen. Der Punkt μ^o in (5.10) kann ein während der Dialog-Prozedur berechneter und nicht zufriedenstellender Wunsch des Entscheidungsträgers sein.

5.2 Verallgemeinerte Einbettungen basierend auf streng monoton wachsende Skalarisierungsfunktionen

Im Abschnitt 5.1 wurde bereits angedeutet (siehe (5.10)), wie aus dem Hauptproblem P_μ mit Hilfe der Dialogprozedur einparametrische Probleme konstruiert werden können. Das Ziel ist es nun, diese Einbettungen unter dem Gesichtspunkt der Theorie der einparametrischen Optimierungsprobleme zu untersuchen. Hinter dieser Herangehensweise steht die Benutzung der Kurvenverfolgungsmethode für die Berechnung eines Goal-Realizers.

Betrachtet wird zunächst das folgende einparametrische Optimierungsproblem

$$(P_u(t)) \quad \min \{ \psi \circ \mathbf{f}(x) \mid x \in M_u(t) \},$$

wobei

$$(5.12) \quad M_u(t) = \{x \in M \mid \mathbf{f}(x) \leq_D \mathbf{u}(t)\}$$

unter den Voraussetzungen (C1) - (C3) und

(C4) ψ ist eine auf $\mathbf{f}(M)$ streng D -monoton wachsende Funktion mit $\psi \circ \mathbf{f} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $k \geq 3$

(C5) $\mathbf{u} \in C^k(I; \mathbb{R}^l)$ mit $k \geq 1$ mit folgenden Eigenschaften:

- I ist ein Intervall in \mathbb{R} mit $[0, 1] \subseteq I$
- $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_l(t))$
- $\mathbf{u}(0) = \mu^0$ und $\mathbf{u}(1) = \mu^1$ (der realistische Wunsch).

Betrachtet man die Restriktionsmenge $M_u(t)$ mit der Funktion (5.11), dann kann im nichtkonvexen Fall die Restriktionsmenge für einen gewissen Parameterwert $\bar{t} \in I$ leer werden, wie man anhand der Abbildung 5.1 deutlich erkennen kann, wenn man den Kegel $-D$ entlang der Verbindungsstrecke $[\mu^0, \mu^1]$ verschiebt. Wendet man die im Kapitel 4 beschriebenen Kurvenverfolgungsmethoden an, so können in diesem Fall Singularitäten vom Typ 5 auftreten, bei der die MFCQ verletzt ist (siehe Abbildung 4.1 (l)(m)). Die Diskretisierung des Intervalls $[0, 1]$ kann in diesem Fall nicht berechnet werden. Somit kann auch kein Goal-Realizer gefunden werden. Es stellt sich zunächst folgende Frage:

- Frage 1: Für welche Funktionen $u : I \longrightarrow \mathbb{R}^l$ mit $u(1) = \mu^1$ gilt

$$(5.13) \quad M_u(t) \neq \emptyset, \quad \forall t \in I \supseteq [0, 1]?$$

Zur Beantwortung der Frage 1 wollen wir zunächst in der nächsten Definition den Begriff einer monoton fallenden Funktion aus $C^0(I, \mathbb{R}^l)$ bezüglich eines konvexen Kegels D einführen.

5.2.1 D -monoton fallende Kurven

Definition 36 Sei $u : I \longrightarrow Y$ eine auf dem Intervall I stetige Funktion mit $Y \subseteq \mathbb{R}^l$ und $I \subset \mathbb{R}$. Die Funktion u heißt D -monoton fallend auf I , falls für jedes $t_1, t_2 \in I$ Folgendes gilt:

$$(5.14) \quad t_1 \leq t_2 \implies u(t_1) - u(t_2) \in D \quad (u(t_2) \leq_D u(t_1)).$$

Die Menge aller solchen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(I)$.

Nun können wir mittels nachstehenden Satzes eine Antwort auf Frage 1 liefern.

Satz 26 Sei $D \subset \mathbb{R}^l$ ein konvexer Kegel und u eine auf dem Intervall I D -monoton fallende Funktion. Weiterhin gebe es ein $\bar{t} \in I$ mit $M_u(\bar{t}) \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$(i) \quad M_u(t) \neq \emptyset, \quad \forall t \leq \bar{t}, \quad t \in I.$$

$$(ii) \quad t_1 \leq t_2 \implies M_u(t_1) \supseteq M_u(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \leq \bar{t}.$$

Beweis. (i) folgt aus (ii) und der Voraussetzung $M_u(\bar{t}) \neq \emptyset$. Wir beweisen (ii). Sei $t_1 \leq t_2$ und $x \in M_u(t_2)$. Wir zeigen, dass $x \in M_u(t_1)$. Wegen der Zulässigkeit von x in $M_u(t_2)$ und (5.12) gilt $f(x) \leq_D u(t_2)$, d.h.:

$$(5.15) \quad d_1 = u(t_2) - f(x) \in D.$$

Da u eine D -monoton fallende Funktion ist, gilt:

$$(5.16) \quad d_2 = u(t_1) - u(t_2) \in D.$$

Wegen der Konvexität des Kegels D (vgl. Satz 8) gilt $d_1 + d_2 = u(t_1) - f(x) \in D$, d.h. $f(x) \leq_D u(t_1)$. Aus (5.12) folgt $x \in M_u(t_1)$ \square

Folgerung 1 Seien (C2) und (C5) mit $u \in \mathfrak{U}(I)$ erfüllt. Dann gilt:

$$(5.17) \quad M_u(t) \neq \emptyset, \quad \forall t \leq 1.$$

Wie können die Elemente aus $\mathfrak{U}(I)$ aussehen? Der nachstehende Satz liefert eine Antwort.

Satz 27 Seien $D \subseteq \mathbb{R}^l$ ein konvexer Kegel und $\mu^1 \in \mathbb{R}^l$ der realistische Wunsch des Entscheidungsträgers. Dann ist die durch

$$(5.18) \quad u_d(t) := \mu^1 + (1 - t)d, \quad d \in D, d \neq 0, \quad t \in (-\infty, 1].$$

definierte Funktion u_d D -monoton fallend.

Beweis. Sei $t_1 \leq t_2$. Dann folgt $u_d(t_1) - u_d(t_2) = (t_2 - t_1)d \in D$, da D ein Kegel ist. Somit ist $u_d \in \mathfrak{U}(-\infty, 1]$ \square

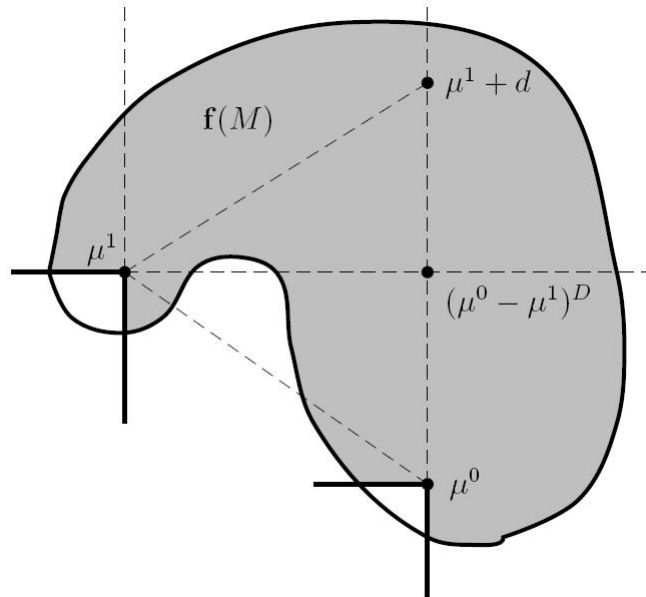


Abbildung 5.1: Konstruktion nichtleerer Abschnitte

Einige Beispiele D -monoton fallender Kurven

Beispiel 3 Seien $\mu^1 \in \mathbb{R}^l$ der Wunsch des Entscheidungsträgers und $x^0 \in M$ so gewählt, dass $\mathbf{f}(x^0) - \mu^1 \notin -D$. Wir definieren eine Kurve in \mathbb{R}^l durch

$$(5.19) \quad \mathfrak{r}(t) := \mu^1 + (1 - t)(\mathbf{f}(x^0) - \mu^1)^D, \quad t \in (-\infty, 1].$$

Hierbei beschreibt $(\mathbf{f}(x^0) - \mu^1)^D$ die Projektion des Vektors $\mathbf{f}(x^0) - \mu^1$ auf den Kegel D . Wegen Satz 27 ist die Funktion \mathfrak{r} D -monoton fallend.

Betrachtet man nun speziell den Kegel $D = \mathbb{R}_+^l$, dann erhält man

$$(5.20) \quad (f(x^0) - \mu^1)^D = \left(\max\{f_1(x^0) - \mu_1^1, 0\}, \dots, \max\{f_l(x^0) - \mu_l^1, 0\} \right).$$

Beispiel 4 Sei $D = \mathbb{R}_+^l$ und $x^0 \in M$. Wir definieren die Funktion

$$(5.21) \quad u_d(t) := \mu^1 + (1-t)d(x^0, \mu^1), \quad d(x^0, \mu^1) \in \mathbb{R}^l,$$

wobei

$$(5.22) \quad d_j(x^0, \mu^1) := |f_j(x^0) - \mu_j^1|, \quad j \in \{1, \dots, l\}.$$

Dann ist u_d D -monoton fallend.

Bemerkung 5 Der in den Beispielen 3 und 4 betrachtete Punkt x^0 kann beliebig aus dem \mathbb{R}^n gewählt werden.

Mit den in (5.20) und (5.21) angegebenen Beispielen lässt sich die Restriktionsmenge konkret für den Kegel \mathbb{R}_+^l wie folgt ausdrücken:

$$(5.23) \quad M_r(t) = \left\{ x \in M \mid f_i(x) - \mu_i^1 + (t-1) \max\{f_i(x^0) - \mu_i^1, 0\} \leq 0, \quad i \in L \right\},$$

$$(5.24) \quad M_{u_d}(t) = \left\{ x \in M \mid f_i(x) - \mu_i^1 + (t-1)|f_i(x^0) - \mu_i^1| \leq 0, \quad i \in L \right\}.$$

5.2.2 Singularitäten

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Art der Singularitäten, die bei der Kurvenverfolgung mit dem Problem $P_u(t)$ auftreten können.

Wir konzentrieren uns auf den Fall, in dem der Ordnungskegel D polyedrisch ist. In diesem Falle lässt sich D (siehe Definition 14) mit Hilfe endlich vieler Elemente $y^j \in \mathbb{R}^l, j = 1, \dots, s$ in der Form

$$(5.25) \quad D = \{y \in \mathbb{R}^l \mid y = \sum_{j=1}^q \alpha_j y^j, \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, q\}$$

darstellen. Nach Lemma 1 hat man die Darstellung

$$(5.26) \quad D = \{y \in \mathbb{R}^l \mid \langle w, y \rangle \geq 0, \forall w \in D^*\}$$

mit Hilfe des polaren Kegels D^* . Nach Weyl (siehe Lemma 2) ist D^* polyedrisch. Damit gibt es $w^j, j = 1, \dots, q$, mit

$$(5.27) \quad D = \{y \in \mathbb{R}^l \mid \langle w^j, y \rangle \geq 0, j = 1, \dots, q\}, \quad \text{bzw.}$$

$$(5.28) \quad D = \{y \in \mathbb{R}^l \mid W^T y \geq 0\},$$

wobei W eine $l \times q$ -Matrix ist mit $W = [w^1, \dots, w^q]$.

Die Restriktionsmenge von $P_u(t)$ bezüglich D lässt sich dann wie folgt angeben:

$$(5.29) \quad M_{\bar{u}}(t) = \{x \in M \mid \bar{f}_j(x) \leq \bar{u}_j(t), j = 1, \dots, q\}, \quad t \in (-\infty, 1] \quad \text{bzw.}$$

$$(5.30) \quad M_{\bar{u}}(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x, t) \leq 0, j = 1, \dots, s + q\}, \quad t \in (-\infty, 1],$$

wobei

$$(5.31) \quad \bar{f}_j(x) := \langle w^j, f(x) \rangle, \quad \bar{u}_j(t) := \langle w^j, u(t) \rangle, \quad j = 1, \dots, q$$

$$(5.32) \quad g_j(x, t) := \begin{cases} g_j(x), & \text{für } j \in J \\ \bar{f}_i(x) - \bar{u}_i(t), & \text{für } j = s + i, \quad i = 1, \dots, q. \end{cases}$$

Nimmt man an, dass

$$\text{Ker } W^T = \{y \mid Ay = 0\} = \{0\}$$

(d.h. D ist ein spitzer Kegel), so lässt sich dieser Fall mit Hilfe des nachstehenden Lemmas auf den Fall der Pareto-Ordnung $D = \mathbb{R}_+^l$ zurückführen.

Lemma 5 Sei D ein nichttrivialer Kegel mit $\text{int } D \neq \emptyset$ und $D = \{d \in \mathbb{R}^l \mid Ad \geq 0\}$, wobei A eine $q \times l$ -Matrix mit $\text{Ker } A = \{0\}$ ist. Dann gilt

$$(a) \quad E(f(M), D) = \{y \in f(M) \mid Ay \in E(A(f(M)), \mathbb{R}_+^q)\},$$

$$(b) \quad E_w(f(M), D) = \{y \in f(M) \mid Ay \in E_w(A(f(M)), \mathbb{R}_+^q)\}.$$

Beweis.

(a) Folgt aus dem Lemma 2.3.4 in [51] für $Y = f(M)$.

- (b) Sei $\check{y} \in \mathbf{f}(M)$. Wegen Definition 17 gilt $\check{y} \notin E_w(\mathbf{f}(M), D)$ genau dann, wenn ein $y \in \mathbf{f}(M)$ existiert mit $y \in (\check{y} - \text{int } D) \cap \mathbf{f}(M)$. Und das gilt genau dann, wenn $\check{y} - y \in \text{int } D$. Da $\text{Ker } A = \{0\}$ gilt $\check{y} - y \in \text{int } D$ genau dann, wenn $A\check{y} > Ay$. D.h. $\check{y} \notin E_w(\mathbf{f}(M), D)$ genau dann, wenn $A\check{y} \notin E_w(A(\mathbf{f}(M)), \mathbb{R}_+^q)$ \square

Bemerkung 6 Wegen Definition 19 erhält man lokal die gleichen Ergebnisse wie in Lemma 5 für $E_{loc}(\mathbf{f}(M), D)$ und $E_{locw}(\mathbf{f}(M), D)$. Die Menge $E(M, D)$ der effizienten bzw. $E_w(M, D)$ der schwach effizienten Punkte in M lassen sich mit Hilfe von $E(\mathbf{f}(M), D)$ bzw. $E_w(\mathbf{f}(M), D)$ wie in (3.15) bzw. (3.16) (vgl. Definition 18) angeben. Das gleiche gilt für die Mengen $E_{loc}(M, D)$ und $E_{locw}(M, D)$ (vgl. (3.17 und (3.18)).

Lemma 6 Sei D ein polyedrischer Kegel mit $D = \{d \in \mathbb{R}^l \mid Ad \geq 0\}$, wobei A eine $q \times l$ -Matrix ist. Ist u auf dem Intervall I D -monoton fallend, so ist \bar{u} definiert durch

$$(5.33) \quad \bar{u}(t) := A(u(t)) \quad \forall t \in I$$

auf I \mathbb{R}_+^q -monoton fallend.

Beweis. Sei $t_1 \leq t_2$. Aus u D -monoton fallend folgt $u(t_1) - u(t_2) \in D$. Wegen Definition von D ist $A(u(t_1) - u(t_2)) \geq 0$, d.h. $A(u(t_1)) \geq_{\mathbb{R}_+^q} A(u(t_2))$ \square

Nun sind wir in der Lage mit Hilfe des Lemmas 5 das ursprüngliche Vektoroptimierungsproblem (VOP) bezüglich eines polyedrischen Kegels D mit einem neuen zu identifizieren, das aus q -Zielen besteht:

$$(\overline{VOP}) \quad \min \{ \bar{\mathbf{f}}(x) = (\bar{f}_1(x), \dots, \bar{f}_q(x)) \mid x \in M \},$$

wobei die Funktionen $f_k, k \in Q := \{1, \dots, q\}$ durch (5.31) definiert sind und $D = \mathbb{R}_+^q$ der zugehörige Ordnungskegel ist. Wegen Lemma 6 ist das zugehörige einparametrische Problem

$$P_{\bar{u}}(t) \quad \min \{ \psi \circ \bar{\mathbf{f}}(x) \mid x \in M_{\bar{u}}(t) \},$$

wobei

$$(5.34) \quad M_{\bar{u}}(t) = \{ x \in M \mid \bar{\mathbf{f}}(x) \leq A(u(t)) \}$$

mit der in (5.33) definierten Kurve wohldefiniert, d.h. für die Restriktionsmenge $M_{\bar{u}}(t)$ gelten die Aussagen des Satzes 26.

Weiterhin bezeichnen wir die g.c. Punkte von $P_{\bar{u}}(t)$ mit $\sum_{gc}(P_{\bar{u}}(t))$. Wir interessieren uns nun für Punkte aus $\sum_{gc}(P_{\bar{u}}(t))$, in denen die MFCQ verletzt ist. Aus dem Kapitel 4 (vgl. Satz 19) wissen wir, dass solche Punkte unter der JTT-Regularität von $P_{\bar{u}}(t)$ Singularitäten vom Typ 4 oder 5 sind. Sei

$$(5.35) \quad J_o^{\bar{f}}(x, t) := \{s + j \mid \bar{f}_j(x) = \bar{u}_j(t), \quad j \in Q\}, \quad t \in (-\infty, 1]$$

die Menge der in $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ aktiven Restriktionen, die von den Zielfunktionen $\bar{f}_i, i \in Q$ abhängen. Mit

$$(5.36) \quad J_o^G(x) = \{j \in J \mid g_j(x) = 0\}.$$

bezeichnen wir die Menge der in x aktiven Ungleichungsrestriktionen, die die Menge M beschreiben. Dann gilt:

Satz 28 *Sei D ein nichttrivialer polyedrischer Kegel mit $\text{int } D \neq \emptyset$ und $D = \{d \in \mathbb{R}^l \mid Ad \geq 0\}$, wobei A eine $q \times l$ -Matrix mit $\text{Ker } A = \{0\}$ ist und $\bar{x} \in E_{locw}(M, D) \cap M_{\bar{u}}(\bar{t})$.*

Falls $J_o^G(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $J_o^{\bar{f}}(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$, dann ist die MFCQ für das Problem $P_{\bar{u}}(\bar{t})$ an der Stelle $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{t})$ nicht erfüllt.

Beweis. Wir betrachten das Problem $P_{\bar{u}}(\bar{t})$ und nehmen an, dass die MFCQ an der Stelle \bar{z} erfüllt ist. Da $J_o^{\bar{f}}(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$, existieren ein Index $\hat{j} \in Q$ mit

$$(5.37) \quad g_{s+\hat{j}}(x, t) = \bar{f}_{\hat{j}}(x) - \bar{u}_{\hat{j}}(t)$$

und ein Vektor $\tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$(5.38) \quad D_x g_{s+\hat{j}}(\bar{x}, \bar{t}) \tilde{\zeta} = D_x \bar{f}_{\hat{j}}(\bar{x}) \tilde{\zeta} < 0.$$

Setzen wir

$$(5.39) \quad \phi(\lambda) = g_{s+\hat{j}}(\bar{x} + \lambda \tilde{\zeta}, \bar{t}), \quad \text{mit } \tilde{\zeta} = \frac{\tilde{\zeta}}{\|\tilde{\zeta}\|},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi'(\lambda) &= D_x \bar{f}_{\hat{j}}(\bar{x} + \lambda \tilde{\zeta}) \tilde{\zeta} \\ \phi(\lambda) &= \phi(0) + \lambda \left[\phi'(0) + \frac{o(|\lambda|)}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Wegen $\phi'(0) = D_x \bar{f}_{\hat{j}}(\bar{x}) \tilde{\zeta} < 0$ und $\frac{o(|\lambda|)}{\lambda} \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0$ existiert ein $\bar{\lambda} > 0$, so dass

$$\phi'(0) + \frac{o(|\lambda|)}{\lambda} \leq \frac{1}{2} \phi'(0) \quad \text{für alle } \lambda \in (0, \bar{\lambda}).$$

Schließlich haben wir

$$\phi(\lambda) \leq \phi(0) + \frac{1}{2}\phi'(0)\lambda < \phi(0).$$

Wegen (5.39) erhalten wir

$$\bar{f}_j(\bar{x} + \lambda\tilde{\xi}) < \bar{f}_j(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}).$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen $g_j, j \in J$, existiert ein $\check{\lambda} > 0$, so dass $g_j(\bar{x} + \lambda\tilde{\xi}) \leq 0$ für alle $j \in J$ und $\lambda \in (0, \check{\lambda})$. Setzt man $\lambda_1 = \min\{\bar{\lambda}, \check{\lambda}\}$, so folgt insgesamt

$$(5.40) \quad \bar{f}_j(\bar{x} + \lambda\tilde{\xi}) < \bar{f}_j(\bar{x}) \quad \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}_1) \quad \text{und} \quad \bar{x} + \lambda\tilde{\xi} \in M.$$

Wegen (5.40) kann \bar{x} kein lokaler schwach effizienter Punkt von \overline{VOP} bezüglich $D = \mathbb{R}_+^q$ sein, was wegen Lemma 5 $\bar{x} \in E_{locw}(M, D)$ widerspricht \square

Wir haben angenommen, dass der Ordnungskegel D polyedrisch und spitz ist. Somit folgt aus Satz 7, dass D scharf ist. Unter dieser Voraussetzung kann man zeigen (siehe [61]), dass der Polarkegel D^* nichtleer ist und einen nichtleeren Unterraum besitzt. Der Polarkegel lässt sich jetzt mit Hilfe der "Kantenvektoren" ausdrücken.

Definition 37 [40] Seien K ein polyedrischer Kegel und L das Orthogonalkomplement des in K enthaltenen maximalen linearen Unterraumes. Ein Einheitsvektor $w \in K \cap L$ heißt Kantenvektor von $K \cap L$, falls w sich nicht durch Vektoren aus $(K \cap L) \setminus C(w)$ positiv kombinieren lässt, d.h. es existieren keine Vektoren $x, y \in (K \cap L) \setminus C(w)$ und Zahlen $\alpha, \beta \geq 0$ mit $w = \alpha x + \beta y$, wobei $C(w)$ der eindimensionale Kegel ist, der von w erzeugt wird.

Seien nun $v_i, i = 1, \dots, p$ die Kantenvektoren des negativen Polarkegels $-D^*$ von D , dann lässt sich $-D^*$ (siehe [39]) wie folgt darstellen:

$$(5.41) \quad -D^* = \{x \in \mathbb{R}^l \mid x = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i, \alpha_i \geq 0\}.$$

Wir betrachten folgende Matrix, deren Spalten sich aus den Kantenvektoren v_i und der Ableitungen von $\mathbf{f}(x)$ zusammensetzen:

$$(5.42) \quad F(x) = [\nabla \mathbf{f}(x)^T v_1, \dots, \nabla \mathbf{f}(x)^T v_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}.$$

Sei $C(x)$ der von den Spaltenvektoren von $F(x)$ erzeugte Kegel,

$$(5.43) \quad C(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = F(x)\xi, \xi \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^p\}.$$

Der Polarkegel und der offene Polarkegel von $C(x)$ sind wie folgt angegeben:

$$(5.44) \quad P(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid F(x)^T y \geq 0\}$$

$$(5.45) \quad P_o(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid F(x)^T y > 0\}.$$

Das folgende Lemma als Folgerung aus den Ergebnissen von Tamura und Miura[40] sichert das Erfülltsein der Voraussetzung $J_o^{\bar{f}}(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$ des obigen Satzes an jedem (schwach) effizienten Punkt.

Lemma 7 *Sei D ein Ordnungskegel mit $\text{int}(D) \neq \emptyset$, wobei sein negativer Polarkegel $-D^*$ wie in (5.41) definiert ist. Weiterhin gelte $P_o(x) \neq \emptyset$ für $x \in E_{locw}(M, D)$. Dann gilt*

$$(5.46) \quad x \in \partial M.$$

Beweis. Die Behauptung ist für $\text{int}(M) = \emptyset$ trivial. Sei $x \in E_{locw}(M, D)$, dann ist x wegen der Äquivalenz der Definition 19 und Definition 2.1 (in [40]) ein lokaler nichtdominierter Punkt (im Sinne der Definition 2.1 in [40]). Aus $P_o(x) \neq \emptyset$ und $\text{int}(M) = \emptyset$ folgt durch die Anwendung des Lemma 3.1 ([40]), dass jeder schwach effiziente Punkt x auf dem Rand von M liegt \square

Folgerung 2 *Es gilt*

$$(5.47) \quad E_{locw}(M, D) \subseteq \partial M.$$

Der Einfachheit halber dürfen wir immer das Problem (\mathcal{VOP}) mit dem Kegel $D = \mathbb{R}_+^l$ betrachten (vgl. Lemma 5), falls der Ordnungskegel des ursprünglichen Problems ein beliebiger spitzer polyedrischer Kegel ist. Wir können dann die Indexmengen L mit Q identifizieren.

Seien

$$(5.48) \quad \Sigma_{loceff} := \{(x, t) \in \Sigma_{gc} \mid x \in E_{loc}(M)\},$$

$$(5.49) \quad \Sigma_{locw} := \{(x, t) \in \Sigma_{gc} \mid x \in E_{locw}(M)\}.$$

die Mengen der lokal schwachen bzw. effizienten Punkte.

Als Folgerung des Satzes 28, können wir unter der Annahme der JJT-Regularität des Problems $(\psi \circ f, G, f_u)$ das Verhalten der Indexmenge $J_o(z)$ in einem Punkt vom Typ 2 und 4 beschreiben.

Verhalten in einem Punkt vom Typ 2 und 4

In [16] wurde gezeigt, dass bei der Verfolgung einer Kurve in $\sum_{loc}(\mathcal{P}(t))$ für ein beliebiges einparametrisches Optimierungsproblem $\mathcal{P}(t)$ drei Situationen in einem Punkt \bar{z} vom Typ 2 auftreten können. Da bei einer geeigneten Wahl der Skalierung $\psi \circ f(x)$ eine Beziehung zwischen den lokalen Minimalpunkten von $(P_u(t))$ und den lokal bzw. schwach effizienten Punkten von \mathcal{VOP} existiert, können wir die Ergebnisse aus [16] unter dem Gesichtspunkt der Kurvenverfolgung in \sum_{loceff} auf das Problem $(P_u(t))$ übertragen.

Die Situationen I und II sind durch die positive Definitheit der Matrizen $D_x^2 L(\bar{z})|_{T_{\bar{z}} M_u}$ und $D_x^2 L(\bar{z})|_{T_{\bar{z}}^\perp M_u}$ gekennzeichnet. Die Räume $T_{\bar{z}} M_u$ und $T_{\bar{z}}^\perp M_u$ sind wie in (2.9) und (4.11) definiert. Bei der Situation III ist die Matrix $D_x^2 L(\bar{z})|_{T_{\bar{z}} M_u}$ positiv definit, aber $D_x^2 L(\bar{z})|_{T_{\bar{z}}^\perp M_u}$ ist nicht positiv definit. Die Abbildung 5.2 zeigt die 3 Fälle für $P_u(t)$. In den Situationen I und II (siehe (a) und (b)) können wir eine Zusammenhangskomponente von lokal effizienten Punkten weiterverfolgen, indem entweder $J_o^G(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $J_o^f(\bar{x}, \bar{t}) = \emptyset$ oder $J_o^G(\bar{x}) = \emptyset$ und $J_o^f(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$, sonst wäre wegen Satz 28 der Punkt (\bar{z}) ein Punkt vom Typ 4 oder 5. In der Situation III können wir mit Sicherheit eine Zusammenhangskomponente von lokal effizienten Punkten bis \bar{z} bei wachsendem t verfolgen. Nach dem Passieren des Punktes \bar{z} ist eine Fortsetzung in \sum_{loceff} möglich. Dieser Sachverhalt wurde am Beispiel der gewichteten Summe $g_\alpha(x) = \alpha^T f(x)$ in [28] (Abbildung 4.6) erklärt.

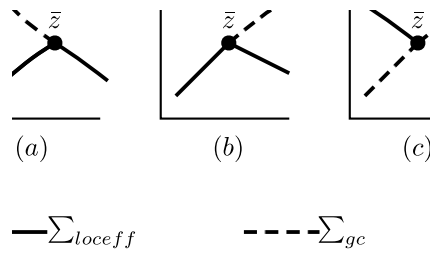


Abbildung 5.2: Type 2: Situationen I, II und III

Beim Passieren eines Punktes vom Typ 4 wird eine Zusammenhangskomponente von lokal Minimalpunkten (bezüglich der streng monoton wachsenden Skalierung $\psi \circ f(x)$) in einer von lokalen Maximalpunkten fortgesetzt. Hier können wir eine Zusammenhangskomponente von lokal effizienten Punkten mit entweder $J_o^G(\bar{x}) \neq \emptyset$ und $J_o^f(\bar{x}, \bar{t}) = \emptyset$ oder

$J_o^G(\bar{x}) = \emptyset$ und $J_o^f(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$ weiterverfolgen bis \bar{z} . Im Fall $\delta = \text{sign}(-D_t \mathcal{L}(\bar{z})) = -1$, wobei \mathcal{L} wie in (4.45) definiert ist, ist kein Sprung zu einer anderen Zusammenhangskomponente möglich. In diesem Fall muss wegen der Definition von δ und Kriterium 1 $J_o^f(\bar{z}) \neq \emptyset$ gelten (siehe Abbildung 5.3).

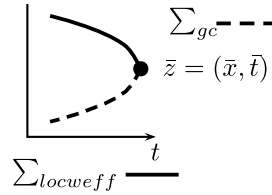


Abbildung 5.3: Verhalten am Punkt vom Typ 4 ohne Sprung, $f_j(\bar{x}) = u_j(\bar{t})$

Wegen Satz 28 wissen wir, dass Rückkehrpunkte vom Typ 4 bei der Kurvenverfolgung auftreten können. Jetzt stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen das Auftreten eines solchen g.c. Punktes vermieden werden kann. Untenstehender Satz liefert eine Antwort.

Satz 29 Sei (\bar{x}, \bar{t}) ein g.c. Punkt von $(P_u(t))$ bezüglich $D = \mathbb{R}_+^l$ und die Vektorzielfunktion $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_l) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ von \mathcal{VOP} gegeben. Weiterhin sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(5.50) \quad Df(\bar{x}) = 0$$

$$(5.51) \quad |J_o^f(\bar{x}, \bar{t})| = |L|.$$

Dann gilt $(\bar{x}, \bar{t}) \notin \Sigma_{gc}^4(P_u(t))$.

Beweis.

- (a) Sei $Df(\bar{x}) = 0$. Dann können wir annehmen, dass $J_o(\bar{x}, \bar{t}) \neq \emptyset$, sonst wären wir wegen Definition 30 (4a) fertig. O.B.d.A sei $J_o(\bar{x}, \bar{t}) = \{1, \dots, p\}$.

Wir betrachten eine Matrix W , deren Spalten eine Basis des Tangentialraumes $T = \bigcap_{j \in J_o(\bar{x}, \bar{t})} \text{Ker } D_x g_j(\bar{x}, \bar{t})$ bildet. Die Funktionen $g_j(\bar{x}, \bar{t})$ sind wie in (5.32) definiert. Es genügt zu zeigen, dass der Gradient $D_x f(\bar{x}, \bar{t})$ der Zielfunktion $f(\bar{x}, t) = \psi \circ f(\bar{x})$ ein Element des Normalraumes $\mathcal{N} = T^\perp$ ist.

Für alle $\xi \in T$ gilt

$$(5.52) \quad D_x f(\bar{x}, \bar{t}) \xi = D_y \psi(f(\bar{x})) Df(\bar{x}) \xi.$$

Wegen $Df(\bar{x}) = 0$ gilt trivialerweise $D_x f(\bar{x}, \bar{t}) \xi = 0$. Somit ist $W^T D_x^T f(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ und die Bedingung (4.27) aus der Definition 30 kann

nicht erfüllt werden. Sei $|J_o^f(\bar{x}, \bar{t})| = |L|$. Dann ist der Tangentialraum T eine Teilmenge von

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid D_x f_i(\bar{x})\xi = 0, \quad i \in L\},$$

d.h. für beliebiges $\xi \in T$ gilt $Df(\bar{x})\xi = 0$. Aus (5.52) erhalten wir $D_x f(\bar{x}, \bar{t})\xi = 0$ und der Rest folgt mit der gleichen Begründung wie oben.

Später werden wir sehen, dass der Satz 29 eine grosse Rolle für eine bessere Startbedingung spielen wird.

5.2.3 Die Startsituation

Wir sind nun an der Art der Singularitäten interessiert, die im Startpunkt $z^0 = (x^0, 0)$ auftreten können. Für einen beliebigen Punkt $x^0 \in M$ können wir annehmen, dass die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(C6) \quad \exists \tilde{j} \in L, \text{ so dass } f_{\tilde{j}}(x^0) - \mu_{\tilde{j}}^1 > 0.$$

Bemerkung 7 Die Bedingung (C6) ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Falls sie nicht erfüllt ist, dann muss x^0 der gesuchte Goal-Realizer sein.

Wir betrachten zunächst die Einbettungen die mit Hilfe der in (5.19) und (5.21) definierten D -monoton fallenden Kurven definiert sind. Der folgende Satz liefert uns eine Antwort über die Art der Singularitäten, die am Startpunkt auftreten können.

Satz 30 (Startsituation) Das Problem $(\psi \circ f, G, f_u)$ sei JJT-regulär, wobei ψ eine streng monoton wachsende Funktion in \mathbb{R}^l und u eine der in (5.19) und (5.21) definierte Kurve $\mathfrak{r}(t)$ bzw. $u_d(t)$ bezüglich $D = \mathbb{R}_+^l$ ist. Weiterhin seien die Bedingungen (C6) erfüllt. Ist $(x^0, 0) \notin \Sigma_{gc}^1$, dann gilt:

- (i) $(x^0, 0) \in \Sigma_{gc}^2 \cup \Sigma_{gc}^4 \cup \Sigma_{gc}^5$.
- (ii) Falls $x^0 \in E_{locw}(M)$ und $J_o^G(x^0) \neq \emptyset$, dann $(x^0, 0) \in \Sigma_{gc}^4 \cup \Sigma_{gc}^5$ und die MFCQ ist nicht erfüllt.
- (iii) Falls $(x^0, 0) \in \Sigma_{loc}$ und $J_o^G(x^0) \neq \emptyset$, dann $(x^0, 0) \in \Sigma_{gc}^4 \cup \Sigma_{gc}^5$ und für $(x^0, 0) \in \Sigma_{loc}^5$ existiert keine Fortsetzung in Σ_{loc} für wachsendes t .
- (iv) Falls $z^0 = (x^0, 0) \in cl \Sigma_{loc} \cap \Sigma_{gc}^4$, dann ist kein Sprung möglich.

Beweis.

(i) Wegen der Bedingung (C6), es existiert ein \tilde{k} , so dass

$$(5.53) \quad f_{\tilde{k}}(x^o) - \mu_{\tilde{k}}^1 > 0.$$

Aus (5.53) folgt $(f(x^o) - \mu^1)_{\tilde{k}}^{\mathbb{R}^l_+} = f_{\tilde{k}}(x^o) - \mu_{\tilde{k}}^1 > 0$ bzw. $d(x^o, \mu^1)_{\tilde{k}} = |f_{\tilde{k}}(x^o) - \mu_{\tilde{k}}^1|$, wobei $(f(x^o) - \mu^1)_{\tilde{k}}^{\mathbb{R}^l_+}$ für die \tilde{k} -te Koordinate des Projektionsvektors $(f(x^o) - \mu^1)^{\mathbb{R}^l_+}$ steht. Mit den in (5.20) und (5.21) definierten Kurven erhalten wir

$$(5.54) \quad g_{s+\tilde{k}}(x^o, t) = f_{\tilde{k}}(x^o) - \mu_{\tilde{k}}^1 + (t-1)(f(x^o) - \mu^1)_{\tilde{k}}^{\mathbb{R}^l_+} \begin{cases} < 0 & \text{falls } t < 0, \\ > 0 & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

bzw.

$$(5.55) \quad g_{s+\tilde{k}}(x^o, t) = f_{\tilde{k}}(x^o) - \mu_{\tilde{k}}^1 + (t-1)|f_{\tilde{k}}(x^o) - \mu_{\tilde{k}}^1| \begin{cases} < 0 & \text{falls } t < 0 \\ > 0 & \text{falls } t > 0, \end{cases}$$

Wegen (5.54) bzw. (5.55) sind die Zahlen LI und LCI in einer gewissen Umgebung von $(x^o, 0)$ nicht konstant. Daraus folgt $(x^o, 0) \notin \Sigma_{gc}^1 \cup \Sigma_{gc}^3$.

(ii) Mit Hilfe von (5.54) bzw. (5.55) erhalten wir

$$(5.56) \quad g_{s+\tilde{k}}(x^o, 0) = 0.$$

Somit gilt $J_o^f(x^o, 0) \neq \emptyset$. Man erhält die Behauptung mit Satz 28, d.h. die MFCQ ist in $(x^o, 0)$ nicht erfüllt.

(iii) Da $x^o \in \phi_{loc}(P_u(0))$ folgt aus der Beziehung (5.8), dass $x^o \in E_{locw}(M)$. Mit Hilfe des Satzes 28 folgt die Behauptung.

(iii) Sei $z^o = (x^o, 0) \in cl \Sigma_{loc} \cap \Sigma_{gc}^4$. Wegen (5.56) folgt $s+j \in J_o(x^o, 0)$ für $f_j(x^o) - \mu_j^1 \neq 0$ und ein gewisses $j \in L$, falls man die Einbettung $P_{u_d}(t)$ betrachtet. Für $P_{\tau}(t)$ genügt die Bedingung $f_j(x^o) - \mu_j^1 > 0$, um $s+j \in J_o(x^o, 0)$ zu erhalten. In beiden Fällen gilt $D_t g_{s+j}(z^o) = |f_j(x^o) - \mu_j^1| > 0$ bzw. $D_t g_{s+j}(z^o) = f_j(x^o) - \mu_j^1 > 0$. Daraus folgt durch Anwendung vom Kriterium 1:

$$\text{sign} \left(-D_t \sum_{j \in J_o^f(z^o)} \mu_j g_j(z) \right)_{|z=z^o} < 0,$$

Ein Sprung ist in diesem Fall nicht möglich \square

Folgerung 3 Falls die Bedingung (5.53) erfüllt ist, gilt $J_o^f(x^o, 0) \neq \emptyset$.

Satz 31 Sei $x^o \in M$ mit

$$(5.57) \quad f(x^o) \geq \mu^1.$$

Dann gilt $(x^o, 0) \notin \Sigma_{gc}^4(\mathcal{P}_\mu(t))$.

Beweis. Die Gleichung (5.56) gilt nicht nur für die Indizes, die (5.53) erfüllen, sondern auch trivialerweise für diejenige $\tilde{k} \in L$, für die $f_{\tilde{k}}(x^o) = \mu_{\tilde{k}}^1$ erfüllt ist. Somit gilt $|J_o^f(x^o, 0)| = l$. Aus dem Satz 29 folgt die Behauptung.

Aus dem obigen Satz 31 können wir also feststellen, dass Punkte vom Typ 4 nur im Falle einer "Nichtvergleichbarkeit" vom Vektorpaar $\{f(x^o), \mu^1\}$ auftreten können. Unter Nichtvergleichbarkeit verstehen wir das Nichterfülltsein weder von $f(x^o) \leq \mu^1$ noch $\mu^1 \leq f(x^o)$.

Im Allgemeinen kann man nicht davon ausgehen, dass die Wünsche des Entscheidungsträgers die Bedingung (5.57) immer erfüllen, so dass wir das Auftreten eines g.c. Punktes oder Rückkehrpunktes vom Typ 4 am Startpunkt nicht ausschließen können (vgl. Satz 31 und Satz 30). Um eine bessere Startsituation vorzuschlagen, betrachten wir das in (3.37) definierte Problem $P_{\bar{y}}$ (Normskalierung), wobei $\bar{y} \in \mathbb{R}^l$ ein Referenzpunkt ist. Meistens wird an der Stelle von \bar{y} ein Utopia-Punkt (siehe Definition 22) genommen. Wählt man den Referenzpunkt in Abhängigkeit eines reellen Parameters $t \in \mathbb{R}$, so lässt sich folgende Einbettung gewinnen:

$$P'_u(t) : \quad \min \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{u}(t)\|^2 \mid x \in M'_u(t) \right\},$$

wobei

$$M'_u(t) = \{x \in M \mid \mathbf{f}(x) \leq_D \mathbf{u}(t), \quad k \in L\}, \quad t \in (-\infty, 1].$$

Nachstehender Satz liefert einige Eigenschaften von $P'_u(t)$.

Satz 32 Seien die Bedingungen (C1) und (C2) erfüllt. Weiterhin sei die Kurve \mathbf{u} D -monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty, 1]$ und erfülle die Bedingung (C5) mit $\mathbf{u}(0) = \mu^0 = f(x^o)$ und $x^o \in M$. Dann gilt:

$$(i) \quad \psi_{glob}(P'_u(t)) \subseteq E(M, D) \text{ für alle } t \in (-\infty, 1],$$

$$(ii) (x^o, 0) \notin \Sigma_{gc}^4(P'_u(t)).$$

Beweis.

- (i) Sei $\check{x}(\bar{t}) \in \psi_{glob}(P'_u(\bar{t}))$ für ein beliebiges $\bar{t} \in (-\infty, 1]$. Dann löst $\check{x}(\bar{t})$ die entsprechende Ersatzaufgabe (3.37) (Normskalierung), wobei die Restriktionsmenge $M'_u(\bar{t})$ die Rolle von (3.36) spielt und $\bar{y} = \check{x}(\bar{t})$. Der Rest folgt aus Satz 14.
- (ii) Wegen $u(0) = \mu^o = f(x^o)$ verschwindet der Gradient der Zielfunktion von $(P'_u(t))$ und somit kann die Bedingung (4.27) aus der Definition 30 nicht erfüllt werden.

Die Bedingung (ii) aus Satz 32 ist auch erfüllt, wenn wir für eine beliebige streng monoton wachsende Skalierung $\psi \circ f$ und einen zulässigen Startpunkt $x^o \in M$ folgende Einbettung betrachten :

$$P''_u(t) : \min \left\{ \alpha(t) \psi \circ f(x) + (1 - \alpha(t)) \|x - x^o\|^2 \mid x \in M''_u(t) := M'_u(t) \right\}.$$

Hierbei ist $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \alpha(x) \leq 1, \quad x \in [0, 1],$
- $\alpha(0) = 0$ und $\alpha(1) = 1,$
- $\alpha(t) = 0$, falls $t < 0$.

Die Funktion α kann wie folgt gewählt werden:

$$(5.58) \quad \alpha(t) := \max^p \{0, t\}, \quad p \geq 4.$$

Bemerkung 8 Die Einbettungen $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ haben gegenüber $P_{u_d}(t)$ und $P_\tau(t)$ wegen Satz 32 (ii) einen Vorteil bezüglich der Startsituation.

Wegen Satz 29 und 30 kann der Startpunkt eine Singularität vom Typ 2 oder 5 sein, falls wir annehmen, dass die Probleme $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ mit den entsprechenden Zielfunktionen

$$(5.59) \quad f_1(x, t) = -\frac{1}{2} \|f(x) - u(t)\|^2$$

$$(5.60) \quad f_2(x, t) = \alpha(t) \psi \circ f(x) + (1 - \alpha(t)) \|x - x^o\|^2$$

JJT-regulär sind. Numerisch können wir aber nicht in den Singularitäten starten, da $DH^v \tilde{J}, v = 1, 2$ für die in (4.39) definierten entsprechenden Abbildungen $H_v^{\tilde{J}}, v = 1, 2$

(5.61)

$$H_v^{\tilde{J}} : \begin{pmatrix} x \\ \mu \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D_x f_v(x, t) + \sum_{j \in \tilde{J}^G} \mu_j D_x g_j(x, t) + \sum_{j \in \tilde{J}^f} \mu_j D_x g_j(x, t) \\ g_j(x, t), j \in \tilde{J}^G \\ f_k(x) - u_k(t), k \in \tilde{J}^f \end{pmatrix}$$

an der Stelle $(x^0, u^0, 0)$ nicht regulär sind. Hierbei steht $\tilde{J} = \tilde{J}^G \cup \tilde{J}^f$ für die aktive Indexmenge und $u^0 \in \mathbb{R}^{|\tilde{J}|}$ für den Vektor der Lagrange-Multiplikatoren im Startpunkt. Wegen der Bedingung (C6) (siehe auch Folgerung 3) ist kaum zu erwarten, dass $\tilde{J}^f = \emptyset$. Startet man in einem Punkt im relativen Inneren von M , dann liefert folgender Satz eine bessere Startsituation für $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ bezüglich des Kegels $D = \mathbb{R}_+^l$:

Satz 33 Seien die Voraussetzungen aus Satz 30 erfüllt und $x^0 \in riM$ mit $f_k(x^0) - u_k^1 \neq 0 \quad \forall k \in L$. Dann existiert ein $t_0 < 0$, so dass $(x^0, t_0) \in \sum_{gc}^1(P''_u(t))$ gilt.

Beweis. Aus $x^0 \in riM$ folgt $g_j(x^0, t_0) = g_j(x^0) < 0$. Somit ist $J^G(x^0, t_0) = \emptyset$. Für jedes $j \in L$ erhalten wir wegen (5.54) bzw. (5.55) $g_{s+j}(x^0, t_0) < 0$ für ein $t_0 < 0$. Somit ist $J^f(x^0, t_0) = \emptyset$ und $J_0(x^0, t_0) = \emptyset$. Wegen der Definition der Funktion $\alpha(\cdot)$ gilt für die Zielfunktion f_2 , $D_x f_2(x^0, t_0) = 0$ und $D_x^2 f_2(x^0, t_0)$ ist eine positiv definite Matrix. Der Punkt (x^0, t_0) ist ein nichtentarteter kritischer Punkt von $(P''_u(t_0))$, woraus die Behauptung folgt.

5.2.4 Eine modifizierte Standard-Einbettung

Betrachtet man das Problem $P''_u(t)$, so stellt man im Falle $x^0 \notin ri(M)$ fest, dass die gleichen Schwierigkeiten wie im Satz 30 auftreten können. Die nachstehende Einbettung geht auf [16] und [20] zurück und eignet sich für den Fall, dass kein zulässiger Punkt $x^0 \in M$ bekannt ist. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Einbettungen vom Typ $P_u(t)$ handelt es sich hier um ein "unzulässiges Kurvenverfolgungsverfahren", bei dem der Startpunkt $x^0 = x(0)$ und damit alle nachfolgenden Iterierten $x(t), t \leq 1$, nicht notwendig zulässig sein müssen.

$$P^s(t) : \min \left\{ t\psi \circ f(x) + (1-t) \|x - x^0\|^2 \mid x \in M^s(t) \right\},$$

$$M^s(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} t g_j(x) + (t-1) g_j^0 & \leq 0, \quad j \in J \\ t(f_k(x) - \mu^1) + (t-1) f_k^0 & \leq 0, \quad k \in L \\ \|x\|^2 - p & \leq 0 \end{array} \right\}, \quad t \in [0, 1],$$

wobei p hinreichend groß ist, $g_j^o > 0, j \in J, f_k^o > 0, k \in L$ mit $g_{j_1}^o \neq g_{j_2}^o, j_1, j_2 \in J, j_1 \neq j_2$ und $f_{k_1}^o \neq f_{k_2}^o, k_1, k_2 \in L, k_1 \neq k_2$. Einer der Vorteile dieser Art von Einbettungen liegt in den besseren Startbedingungen. Wir können nicht zu $t = 0$ in Σ_{stat} zurückkehren, wie es der folgende Satz bestätigt.

Satz 34 (Eigenschaften von $P^s(t)$) *Es gilt:*

- (i) $M^s(t) \neq \emptyset$ und für alle $t \in [0, 1]$ kompakt.
- (ii) x^o ist ein globaler Minimalpunkt, der einzige stationäre und nichtdegenerierter Punkt für $P^s(0)$.

Beweis. Siehe [16], [20].

Unter der JJT-Regularitätsvoraussetzung können jedoch für den nicht-konvexen Fall alle Singularitäten bezüglich des Intervalls $(0, 1]$ auftreten. Ein Punkt vom Typ 4 (Fall II) kann auftreten, und somit wäre kein Sprung in eine andere Zusammenhangskomponente von Σ_{stat} möglich. Ein Punkt vom Typ 5, der die MFCQ verletzt, kann auftreten und kein Sprung wäre in diesem Fall möglich.

5.2.5 Penalty-Skalarisierung und deren Einbettung

Die bisher betrachteten Einbettungen $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ basierend auf der Charakterisierung über Zielfunktionenniveaus. In Wierzbicki [59] wurde gezeigt, dass diese Charakterisierung numerisch nicht robust ist, obwohl diese Klasse sehr reich und nicht von a priori Informationen abhängt und konzeptionell einfach ist. Dieser Nachteil kann überwunden werden, wenn die Restriktionen durch Penalty-Funktionen ersetzt werden. Das führt uns zum Konzept einer "achievement function" bzw. D_ϵ -approximativen Funktion (siehe Definition 23 oder Definitionen B4 und B5 in [59]).

Es sei D ein spitzer konvexer abgeschlossener Kegel mit $D \subseteq D^*$. Für ein gegebenes $\bar{y} \in \mathbb{R}^l$ ist die Funktion

$$(5.62) \quad \phi(x, t) = -\|f(x) - \bar{y}\|^2 + \alpha(t) \left\| (f(x) - \bar{y})^{D^*} \right\|^2, \quad t \in [0, 1]$$

wegen Satz 16 streng monoton wachsend für jedes \bar{t} mit $\alpha(\bar{t}) > 1$. Dann kann folgender Ansatz zur Ermittlung eines Goal-Realizer für das Vektoroptimierungsproblem (\mathcal{VOP}) eingesetzt werden:

S1 Der Entscheidungsträger gibt für $i = 1, \dots, l$ ein Niveau μ_i^1 vor, das von der Funktion f_i möglichst gut erreicht werden soll.

S2 Durch Lösung von

$$P_1^p(t) : \min \left\{ -\|f(x) - u(t)\|^2 + \alpha(t) \left\| (f(x) - u(t))^{D^*} \right\|^2 \mid x \in M \right\}, t \in [0, 1)$$

mit $\alpha(t) := (\frac{t}{1-t})^2$, wobei die Funktion $u \in \mathcal{U}([0, 1])$ die Bedingung (C5) erfüllt, erhält man einen Goal-Realizer $\hat{x} \in M$ und den zugehörigen Funktionswert $f(\hat{x}) := \hat{\mu}^1$.

S3 Sind weitere Lösungen erwünscht, so gehe zu S1; andernfalls Stop.

Wir stellen fest, dass die im Schritt 2 betrachtete Penalty-Einbettung $P_1^p(t)$ folgende Nachteile besitzt:

- Sie ist für $t = 1$ nicht definiert, und es kann somit in Schritt 2 keinen Goal-Realizer liefern. An der Stelle, die Diskretisierung 1.2 zu finden, müsste das Ziel im folgenden Sinne umformuliert werden: Man finde eine Folge $\{t_k\}, k = 0, 1, \dots$, mit $t_k \in [0, 1), t_k < t_{k+1}$ und $\{t_k\}$ strebt gegen 1 mit den entsprechenden Punkten $x(t_k)$ (lokale Minimalpunkte, stationäre Punkte oder g.c. Punkte), so dass $\lim_{t_k \rightarrow 1} x(t_k) = \hat{x}$ und $\hat{x} \in M$.
- Die JJT-Regularität verlangt eine hohe Differenzierbarkeit, so dass es keinen Sinn ergibt, obiges Problem unter dieser Voraussetzung zu betrachten.

Für die Lösung der Aufgabe im Schritt 2 sei vorausgesetzt, dass der Ordnungskegel D ein spitzer polyedrischer Kegel ist. O.B.d.A. nehmen wir stellvertretend den Kegel $D = \mathbb{R}_+^l$ (vgl. Definition des Problems $\overline{\mathcal{VOP}}$). Dann lässt sich das Problem $P_1^p(t)$ konkret wie folgt angeben

$$P_1^p(t) : \min \{ f_1^p(x, t) \mid x \in M \}, t \in [0, 1),$$

wobei

$$f_1^p(x, t) := -\|f(x) - u(t)\|^2 + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \sum_{j \in L} (\max\{f_j(x) - u_j(t), 0\})^2.$$

Wir bemerken, dass die Zielfunktion $f_1^p(x, t)$ für jedes festes $\bar{t} \gg \frac{1}{2}$ streng monoton wachsend ist, da $\alpha(t) > 1$ für $t > \frac{1}{2}$ (vgl. Satz 16) gilt.

Um mit den obigen Nachteilen umzugehen, betrachten wir folgendes Problem

$$\tilde{P}_1^p(t) : \quad \min \left\{ -\|f(x) - u(t)\|^2 + \|w\|^2 \mid x \in \tilde{M}_1^p(t) \right\}, t \in [0, 1],$$

wobei

$$\tilde{M}_1^p(t) := \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|L|} \mid \begin{array}{l} t(f_j(x) - u_j(t)) + (1-t)w_j \leq 0, \quad j \in L \\ x \in M \end{array} \right\}.$$

Die Probleme $P_1^p(t)$ und $\tilde{P}_1^p(t)$ sind dann im folgendem Sinne äquivalent:

Satz 35 (i) Falls $x \in \mathbb{R}^n$ ein stationärer Punkt (globaler, lokaler Minimalpunkt) für $P_1^p(t)$, $t \in (0, 1)$ ist, so ist $(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ ein stationärer Punkt (globaler, lokaler Minimalpunkt) für $\tilde{P}_1^p(t)$ mit

$$(5.63) \quad w_j = \frac{t}{1-t} \max\{f_j(x) - u_j(t), 0\}, \quad j \in L.$$

(ii) Ist $(x, w) \in \mathbb{R}^n$ ein stationärer Punkt (globaler, lokaler Minimalpunkt) für $\tilde{P}_1^p(t)$, $t \in (0, 1)$, so ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein stationärer Punkt (globaler, lokaler Minimalpunkt) für $P_1^p(t)$.

Beweis. Unser Vorgehen beim Beweis soll jetzt ganz wesentlich in einer Übertragung desjenigen aus [11] auf den Fall des Problems $P_1^p(t)$ bzw. $\tilde{P}_1^p(t)$ mit den Ungleichungsnebenbedingungen $g_j, j \in J$ bestehen. Da der Beweis mit den gleichen Überlegungen wie beim Beweis des Satzes 3.1 in ([11]) verläuft, genügt es zu zeigen: (i) Ist x ein stationärer Punkt für $P_1^p(t)$, so ist (x, w) ein stationärer Punkt für $\tilde{P}_1^p(t)$, und es gilt (5.63). Sei x ein stationärer Punkt für $P_1^p(t)$, dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $v_j, j \in J$, so dass

$$\begin{aligned} & -2(f(x) - u(t))Df(x) + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \sum_{i \in L} D(\max\{f_i(x) - u_i(t), 0\}^2) \\ & + \sum_{j=1}^s v_j g_j(x) = 0, \\ & v_j g_j(x) = 0, \quad v_j \geq 0, \quad j \in J. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} D(\max\{f_j(x) - u_j(t), 0\}^2) &= 2 \sum_{j \in L^+} (f_j(x) - u_j(t)) Df_j(x), \quad \text{wobei} \\ L^+(t) &:= \{j \in L \mid f_j(x) - u_j(t) > 0\}, \end{aligned}$$

erhalten wir

$$-2(f(x) - u(t))Df(x) + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \sum_{j \in L^+} (f_j(x) - u_j(t))Df_j(x) + \sum_{j=1}^s v_j g_j(x) = 0.$$

Sei nun (x, w) ein stationärer Punkt von $\tilde{P}_1^p(t)$, dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\mu_i, i \in L$ und $\lambda_j, j \in J$, so dass

$$\begin{aligned} -2(f(x) - u(t))Df(x) + t \sum_{i \in L} \mu_i Df_i(x) + \sum_{j=1}^s \lambda_j g_j(x) &= 0, \\ 2w_i + (1-t)\mu_i &= 0, \quad i \in L, \\ \mu_i(t(f_i(x) - u_i(t)) + (1-t)w_i) &= 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad i \in J, \\ \lambda_j g_j(x) &= 0, \lambda_j \geq 0, \quad j \in J. \end{aligned}$$

Setzt man $\mu_i = -\frac{2}{1-t}w_i, i \in L, \lambda_j = v_j, j \in J$, so erhält man nach kleiner Umrechnung die Bedingungen eines stationären Punktes für $\tilde{P}_1^p(t)$ in (x, w) , und w ist wie in (5.63) definiert \square

Bemerkung 9 Die Modifizierung des Problems $P_1^p(t)$ mit dem Ziel eine bessere Startsituation an einem Punkt $x^0 \in \text{ri}M$ zu erhalten und beliebige streng monoton wachsende Skalarisierungen $\psi \circ f(x)$ für das Vektoroptimierungsproblem (VOP) zu betrachten liefert folgendes Problem:

$$P_2^p(t) : \quad \min \{ f_2^p(x, t) \mid x \in M \}, t \in [0, 1)$$

wobei

$$f_2^p(x, t) := t\psi \circ f(x) + (1-t)(x - x^0)^T A(x - x^0) + \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 \sum_{j \in L} (\max\{f_j(x) - u_j(t), 0\})^2$$

und A eine fest gewählte positiv definite $n \times n$ Matrix ist. Als Beispiel können wir $A = I^n$ nehmen (I^n bezeichnet die Einheitsmatrix).

Das assoziierte Problem wird wie folgt angegeben

$$(\tilde{P}_2^p(t)) \quad \min \left\{ F_{(A, x^0, w^0, t)}(x, w, t) \mid x \in \tilde{M}_2^p(t) \right\}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_{(A, x^0, w^0, t)}(x, w, t) &:= t\psi \circ f(x) + (1-t)(x - x^0)^T A(x - x^0) + (w - w^0)^T (w - w^0) \\ \tilde{M}_2^p(t) &= \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}^{n+s+|L|} \mid \begin{array}{l} t(f_k(x) - u_j(t)) + (t-1)(w_j - w_j^0) \leq 0, j \in L \\ x \in M \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Die Äquivalenz der beiden Probleme $P_2^p(t)$ und $\tilde{P}_2^p(t)$ im Sinne vom Satz 35 erhalten wir analog mit

$$(5.64) \quad w_j = w_j^0 - \frac{t}{1-t} \max\{f_j(x) - u_j(t), 0\}, \quad j \in L.$$

Sei $x \in M$. Durch

$$(5.65) \quad J_+(x) = \{j \in J_o(x) \mid \mu_j > 0\}$$

bezeichnen wir die Menge aller positiven Lagrange-Multiplikatoren in x . Dann können wir unmittelbar aus Satz 35 folgendes Resultat schlussfolgern:

Korollar 1 Falls (x, w) ein stationärer Punkt für $\tilde{P}_k^p(t)$, $t \in [0, 1)$, $k \in \{1, 2\}$ mit $\tilde{J}_+^f(x) \neq \emptyset$ ist, dann gilt $f_j(x) > u_j(t)$, $j \in \tilde{J}_o^f(x, w, t)$ und $f_j(x) < u_j(t)$, $j \in J \setminus \tilde{J}_o^f(x, w, t)$, wobei $\tilde{J}_o^f(x, w, t)$ die von der Vektorzielfunktion f abhängige aktive Indexmenge an der Stelle (x, w, t) ist.

Es stellt sich nun die Frage nach der Art der Singularitäten, die auftreten können, falls die Probleme $\tilde{P}_i^p(t)$, $i = 1, 2$, JJT-regulär sind. Sei

$$\tilde{\Sigma}_{gc} := \left\{ (x, w, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|L|} \times \mathbb{R} \mid (x, w) \text{ ist ein g.c. Punkt für } \tilde{P}_k^p(t), k \in \{1, 2\} \right\}.$$

Dann erhalten wir folgendes Resultat.

Korollar 2 Seien die Probleme $\tilde{P}_k^p(t)$, $k \in \{1, 2\}$ JJT-regulär. Dann gilt

$$(i) \text{ Ist } x \in riM, \text{ so } (x, w, t) \in \tilde{\Sigma}_{gc}^1|_{(0,1)} \cup \tilde{\Sigma}_{gc}^2|_{(0,1)} \cup \tilde{\Sigma}_{gc}^3|_{(0,1)}.$$

$$(ii) \text{ Ist } (x, w, t) \in \tilde{\Sigma}_{gc}^4|_{(0,1)}, \text{ so } |J_o^f(x, w, t)| \neq |L|.$$

Beweis. (i) Es gilt $J_o^G(x, w, t) = \emptyset$, da $x \in riM$. Die Behauptung folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $D_{(x,w)}\tilde{g}_j(x, w, t)$, $j \in J_o(x, w, t)$, wobei $\tilde{g}_j(x, w, t) := t(f_j(x) - u_j(t)) + (1-t)w_j$ bzw. $\tilde{g}_j(x, w, t) := t(f_k(x) - u_j(t)) + (t-1)(w_j - w_j^0)$.

(ii) Sei $(x, w, t) \in \tilde{\Sigma}_{gc}^4|_{(0,1)}$. Dann gilt $x \notin riM$, wegen (i). Daraus folgt $\emptyset \neq J_o^G(x, w, t)$. Es sei angenommen $|J_o^f(x, w, t)| = |L|$. Wir nutzen die gleichen Überlegungen aus dem Beweis des Satzes 29. Der Tangentialraum T ist eine Teilmenge von

$$(5.66) \quad \{(\xi_x, \xi_w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|L|} \mid tD_x f_j(x)\xi_x = 0, (1-t)w_j\langle e_j, \xi_w \rangle = 0, j \in L\},$$

wobei $e_j \in \mathbb{R}^{|L|}$, $j \in L$ die Einheitsvektoren sind.

$$(5.67) \quad D_{(x,w)}f(\bar{x}, w, t)\xi = -2(f(x) - u(t))Df(x)\xi_x + 2\langle w, \xi_w \rangle.$$

Wegen (5.66) folgt $D_{(x,w)}f(\bar{x}, w, t)\xi = 0$ und $2\langle w, \xi_w \rangle = 2\sum_{j=1}^L w_j \langle e_j, \xi_w \rangle = 0$. Somit kann die Bedingung (4.27) aus der Definition 30 nicht erfüllt werden, was aber zum Widerspruch unserer Annahme führt \square

Wir übernehmen die in [11] eingeführten Bezeichnungen und betrachten für einen gegebenen stationären (bzw. g.c.) Punkt $\tilde{x} \in$ von $P_i^p(\tilde{t})$, $i = 1, 2$ folgende Indexmengen:

$$\begin{aligned} L^+ &:= L^+(\tilde{x}) = \{j \in L \mid f_j(\tilde{x}) > u_j(\tilde{t})\}, \\ L^- &:= L^-(\tilde{x}) = \{j \in L \mid f_j(\tilde{x}) \leq u_j(\tilde{t})\}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \Sigma_{stat}^{J^+} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \Sigma_{stat}(P_1^{J^+}(t)) \text{ bzw. } \Sigma_{stat}(P_2^{J^+}(t))\}$. Die Probleme $P_1^{J^+}(t)$ und $P_2^{J^+}(t)$ definiert man mit Hilfe von $P_1^p(t)$ und $P_2^p(t)$, indem man $L := L^+$ setzt. Die entsprechenden äquivalenten Probleme im Sinne von Satz 35 sind wie folgt angegeben:

$$\tilde{P}_1^{L^+}(t) : \quad \min \left\{ -\|f(x) - u(t)\|^2 + \|w\|^2 \mid x \in \tilde{M}_1^{L^+}(t) \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

bzw.

$$\tilde{P}_2^{L^+}(t) \quad \min \left\{ F_{(A, x^0, w^0, t)}(x, w, t) \mid x \in \tilde{M}_2^{L^+}(t) \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\tilde{M}_1^{L^+}(t) := \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|L|} \mid \begin{array}{l} t(f_j(x) - u_j(t)) + (1-t)w_j \leq 0, \quad j \in L^+ \\ x \in M \end{array} \right\}$$

bzw.

$$\tilde{M}_2^{L^+}(t) = \left\{ (x, w) \in \mathbb{R}^{n+s+|L|} \mid \begin{array}{l} t(f_k(x) - u_j(t)) + (t-1)(w_j - w_j^0) \leq 0, \quad j \in L \\ x \in M \end{array} \right\}.$$

Für die Lösung von $P_1^p(t)$ bzw. $P_2^p(t)$ (vgl. [11]) wird eine Folge von Problemen vom Typ $P_i^{L^+}(t)$, $i = 1, 2$ bzw. $\tilde{P}_i^{L^+}(t)$, $i = 1, 2$ gelöst. Dabei kann der Wechsel der Indexmenge L^+ leicht gesteuert werden. Unter Berücksichtigung des Gedankens der Bemerkungen 3.1 – 3.6 in [11] haben wir Folgendes hervorzuheben:

Folgerung 4 (i) *Schlecht konditionierte Probleme und ein Punkt vom Typ 3:*
Es trete bei der Verfolgung einer Zusammenhangskomponente von lokalen Minimalpunkten x^k von $P_i^{L+}(t)$, $i = 1, 2$ ein Punkt \bar{x} vom Typ 3 für $\bar{t} = 1$ auf. Dieser Fall kann offenbar im konvexen Fall nicht eintreten. Dann gilt für schlecht konditionierte Probleme:

$$\frac{\Gamma(x^k, t_k)}{\gamma(x^k, t_k)} > 0 \quad \text{für } t_k < \bar{t},$$

und

$$\lim_{t_k \rightarrow \bar{t}} \frac{\Gamma(x^k, t_k)}{\gamma(x^k, t_k)} = +\infty,$$

wobei $\Gamma(x^k, t_k)$ und $\gamma(x^k, t_k)$ jeweils den größten und kleinsten Eigenwert der zu $P_i^{L+}(t)$, $i = 1, 2$, gehörigen Hesse-Matrix der Zielfunktion ist.

- (ii) *Eine bessere Startsituation für $P_2^{L+}(0)$ bzw. $\tilde{P}_2^{L+}(0)$ kann gesichert werden, falls $x^0 \notin \text{ri}M$. Zudem kann man für den nicht konvexen Fall die Erfüllbarkeit der MFCQ in (x, t) für $x \in \partial M$ nicht sichern. Lässt man ein "unzulässiges Verfahren" zu, indem die Restriktionen $g_j(x) \leq 0$, $j \in J$ durch $tg_j(x) + (1-t)w_j$, $j \in J$ bzw. $tg_j(x) + (1-t)(w_j - w_j^0)$, $j \in J$ ersetzt werden, so erhält man eine Art von Einbettung, die bereits in [11] betrachtet wurde.*
- (iii) *Der Term $\|w(t)\|$ kann gegen $+\infty$ tendieren, wenn wir eine Zusammenhangskomponente in der Menge der lokalen Minimalpunkte verfolgen und t sich dem Wert 1 annähert. In diesem Fall können wir keinen g.c. Punkt und demzufolge keinen Goal-Realizer des Problems $\mathcal{P}_u(t)$ ermitteln. Hier erweitern wir den Konvergenzradius, obwohl wir im Allgemeinen keinen Startpunkt kennen.*
- (iv) *Betrachtet man eine Kompaktifizierung der zulässigen Menge im (x, w) -Raum, so kann man echte nichtkonvexe Vektroptimierungsprobleme mit Hilfe der Penalty-Einbettung lösen (vgl. Beispiel 4.1 in [11]).*

5.2.6 Charakterisierung der Rückkehrpunkte ohne Sprungmöglichkeit

Aufbauend auf den in [13] angegebenen Ergebnissen möchten wir im folgenden begründen, warum im allgemeinen ein Kurvenverfolgungsalgorithmus mit den inneren Einbettungen vom Typ $P_u(t)$ bzw. $P_u''(t)$ nicht

erfolgreich sein können.

Wir möchten zunächst einige Eigenschaften, die in einem Rückkehrpunkt ohne Sprungmöglichkeit erfüllt sind, angeben.

Lemma 8 *Seien $P_u(t)$ bzw. $P_u''(t)$ JJT-regulär bezüglich $(-\infty, 1]$. Falls in einem Punkt \bar{z} kein Sprung möglich ist, dann sind folgende Bedingungen erfüllt:*

- (a) *MFCQ ist in \bar{z} nicht erfüllt,*
- (b) *\bar{z} ist ein Punkt vom Typ 4 oder 5,*
- (c) *\bar{z} ist ein Endpunkt einer Zusammenhangskomponente in $\overline{\Sigma_{loc}}$,*
- (d) *Die Lösungsmenge des Gleichungssystems*

$$(5.68) \quad \sum_{j \in J_o(\bar{z})} \bar{\mu}_j Dg_j(\bar{z}) = 0$$

$$(5.69) \quad \sum_{j \in J_o(\bar{z})} \bar{\mu}_j > 0$$

$$(5.70) \quad \bar{\mu}_j \geq 0, \quad j \in J_o(\bar{z})$$

besitzt die Gestalt

$$\{\lambda \bar{\mu} \mid \lambda > 0\},$$

wobei $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{|J_o(\bar{z})|}$ und $\bar{\mu} \neq 0$,

- (e) *$\forall j \in J_o(\bar{z})$ gilt $\bar{\mu}_j > 0$,*
- (f) *$\sum_{j \in J_o(\bar{z})} \bar{\mu}_j D_t g_j(\bar{z}) > 0$,*
- (g) *Das Vorzeichen von $\sum_{j \in J_o(\bar{z})} \bar{\mu}_j D_t g_j(\bar{z})$ hängt nicht vom $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^{|J_o(\bar{z})|}$ ab, wobei μ das Gleichungssystem (5.68) erfüllt.*

Beweis. Zu (f): ist \bar{z} ein Punkt vom Typ 4, dann kann man leicht mit Hilfe der Definition 30 (4e) zeigen, dass $\sum_{j \in J_o(\bar{z})} \bar{\mu}_j D_t g_j(\bar{z}) \neq 0$. Ist \bar{z} ein Punkt vom Typ 5, so gilt wegen Definition 31 (5b), dass $0 \neq (D_t g_1(\bar{z}), \dots, D_t g_{n+1}(\bar{z}))$. Aus den ersten Aussagen folgt $J_o^f(\bar{z}) \neq \emptyset$. Für $j \in J_o(\bar{z}) \setminus J_o^f(\bar{z})$ erhalten wir $D_t g_j(\bar{z}) = 0$. Gilt $p \in J_o^f(\bar{z})$, so existiert ein $i \in L$ mit $p = s + i$, so dass $g_p(z) = f_i(x) - u_i(t)$. Für die betrachteten Kurven (5.19) und (5.21) gilt $D_t(u_i(\bar{t})) < 0$. Daraus folgt $D_t g_p(\bar{z}) > 0$ und somit folgt die Behauptung. Die Aussagen (a) und (d) sind äquivalent. (e) folgt aus (d) und Definition 30 (4c).

Definition 1 ([13]) Sei $P_u(t)$ bzw. $P_u''(t)$ JJT-regulär bzgl. $(-\infty, 1]$ und $\bar{z} \in \Sigma_{gc}$. Der g.c. Punkt \bar{z} heißt Rückkehrpunkt in negativer Richtung (bzw. positiver Richtung), falls eine Umgebung $V(\bar{z})$ existiert, so daß

$$\forall (\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc} \cap V(\bar{z}), \text{ gilt } t \leq \bar{t} \quad (t \geq \bar{t}).$$

Die Abbildungen 1.2 (a) und (b) zeigen Rückkehrpunkte in negativer Richtung und positiver Richtung.

Satz 36 Sei $P_u(t)$ bzw. $P_u''(t)$ JJT-regulär bzgl. $(-\infty, 1]$. Dann ist jeder Rückkehrpunkt $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^4$ und $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^5$ mit MFCQ verletzt ein Rückkehrpunkt in negativer Richtung.

Beweis.

Teil 1: $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^5$

Sei $J_o(\bar{z}) = \{1, \dots, p\}$ und $p \in J_o^f(\bar{z})$ mit $p = s + i$ (Wegen Lemma 8 (f) gilt $J_o^f(\bar{z}) \neq \emptyset$). Wegen der Bedingungen ((5a)) und ((5b)) (Definition 30) ist die Menge $\{D_x g_j(\bar{z}), j = 1, \dots, p-1\}$ linear unabhängig. Es existiert dann eine eindeutig bestimmte Lösung $\bar{u}^p = (\bar{u}_1^p, \dots, u_{p-1}^p)$ von

$$D_x \psi \circ f(\bar{z}) + \sum_{j=1}^{p-1} \bar{\mu}_j^p D_x g_j(\bar{z}) = 0.$$

Aus ((5c)) folgt $\bar{\mu}_j^p \neq 0$ für $j = 1, \dots, p-1$. Wir betrachten nun das System:

$$(5.71) \quad \begin{bmatrix} D_x \psi \circ f(x, t) + \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j^p D_x g_j(x, t) \\ g_1(x, t) \\ \vdots \\ g_{p-1}(x, t) \end{bmatrix} = 0.$$

Der Satz über implizite Funktionen liefert eine eindeutig bestimmte Funktion:

$$(5.72) \quad (x^p(t), u^p(t)) : (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+p-1},$$

so daß

$$(a) \quad x^p(\bar{t}) = \bar{x}, \quad u^p(\bar{t}) = \bar{u}^p,$$

(b) für jedes $t \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon)$ ist der Vektor $(x^p(t), u^p(t), t)$ eine Lösung vom Gleichungssystem (5.71).

Falls

$$(5.73) \quad g_p(x^p(t), t) = f_i(x^p(t)) - u_i(t) \leq 0,$$

dann ist $(x^p(t), t)$ ein g.c. Punkt. Aus (5.73) folgt, daß die Kurve $(x^p(t), t)$ sowohl für $t \in (\bar{t}, \bar{t} + \epsilon)$ als auch für $t \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t})$ in Σ_{gc} liegt. Es genügt zu zeigen

$$\frac{d}{dt}g_p(x^p(\bar{t}), \bar{t}) > 0.$$

D.h. g_p wird größer als Null und $(x^p(t), t)$ unzulässig. Es gilt

$$(5.74) \quad \frac{d}{dt}g_p(x^p(\bar{t}), \bar{t}) = D_x g_p(\bar{x}, \bar{t}) \dot{x}^p(\bar{t}) + D_t g_p(\bar{x}, \bar{t}).$$

Wegen (5.72) (a), (b) gilt $\frac{d}{dt}g_j(x^p(\bar{t}), \bar{t}) = 0$, $j = 1, \dots, p-1$. Daraus folgt

$$(5.75) \quad D_x g_j(\bar{z}) \dot{x}^p(\bar{t}) = -D_t g_j(\bar{z}) = 0, \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Da die MFCQ nicht erfüllt ist und wegen Folgerung 8 (e), existiert ein $\bar{\mu}_j > 0$, $j \in J_o(\bar{z})$, so daß

$$(5.76) \quad \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j D_x g_j(\bar{z}) = 0$$

gilt. Wir multiplizieren (5.76) mit $\dot{x}^p(\bar{t})$ und setzen wir (5.75) ein. Dann erhalten wir

$$(5.77) \quad - \sum_{j=1}^{p-1} \bar{\mu}_j D_t g_j(\bar{z}) + \bar{u}_p D_x g_p(\bar{z}) \dot{x}^p(\bar{t}).$$

Da $D_t g_j(\bar{z}) = 0$, $j = 1, \dots, p-1$, folgt

$$(5.78) \quad \bar{u}_p D_x g_p(\bar{z}) \dot{x}^p(\bar{t}) = 0.$$

Die Gleichung (5.74) ist dann äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}g_p(x^p(\bar{t}), \bar{t}) = D_t g_p(\bar{x}, \bar{t}) = -D_t u_i(\bar{t}) > 0,$$

woraus sich die erste Behauptung ergibt.

Teil 2: $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^4$

Sei $J_o(\bar{z})$ wie oben definiert und $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ ein Vektor der das System (5.68) erfüllt. Wir betrachten den im Teil 1 definierten Vektor $u^p = (u_1, \dots, u_{p-1})$. Wir haben dann mit folgendem Optimierungsproblem zu tun:

$$(\hat{P}) \quad \min\{\hat{F}(x, u^p, t, u_o) \mid (x, u^p, t, u_o) \in \hat{M}\},$$

wobei

$$\hat{M} = \{(x, u^p, t, u_o) \in \mathbb{R}^{n+p+1} \mid Y(x, u^p, t, u_o) = 0\}.$$

Da der Punkt $(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)$ ein nichtentarteter g.c. Punkt für (\hat{P}) ist, sind folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\text{Rang}(DY(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)) = n + p$,
2. $\exists \lambda_j, \quad j = 1, \dots, n + p$, so daß $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \neq 0$ und

$$D\hat{F}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) = \lambda^T DY(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0),$$

3. Die Zahl

$$(5.79) \quad D^2\hat{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)|_{T_{(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)}\hat{M}}$$

ist ungleich Null, wobei \hat{L} die zu (\hat{P}) gehörige Lagrange-Funktion ist.

Die Restriktionsmenge \hat{M} ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Der Punkt vom Typ 4 ist ein quadratischer Rückkehrpunkt und dessen Richtung läßt sich durch das Vorzeichen von (5.79) feststellen. Falls die Zahl (5.79) positiv (negativ) ist, dann ist \bar{z} ein Rückkehrpunkt in positiver (negativer) Richtung. Es genügt also zu zeigen, daß (5.79) negativ ist.

Die Jacobi-Matrix von Y in Punkt $(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)$ liefert

$$DY(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) = \begin{bmatrix} D_x^2\mathcal{L} & D_x^T g_1(\bar{z}) & \cdots & D_x^T g_{p-1}(\bar{z}) & D_{xt}\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) & D_x^T f(\bar{z}) \\ D_x g_1(\bar{z}) & & & & D_t g_1(\bar{z}) & \\ \vdots & & 0 & & \vdots & 0 \\ D_x g_p(\bar{z}) & & & & D_t g_p(\bar{z}) & \end{bmatrix},$$

wobei

$$(5.80) \quad \mathcal{L}(x, u_1, \dots, u_{p-1}, t, u_o) = u_o \psi \circ f(z) + \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j g_j(z) + u_p g_p(z).$$

Wegen der Definition von $P_u(t)$ bzw. $P_u''(t)$, $\bar{\mu}_j > 0$ für $j = 1, \dots, p$ und Lemma 8 (f) gilt:

$$(5.81) \quad D_t \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) = \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j D_t g_j(\bar{z}) > 0.$$

Der Gradient von \hat{F} liefert:

$$\begin{aligned} D_t \hat{F}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) &= 1 \\ D_{(x, u^p, u_0)} \hat{F}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) &= 0_{n+p}. \end{aligned}$$

0_{n+p} ist der Nullvektor in \mathbb{R}^{n+p} .

Somit gilt:

$$D\hat{F}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) = (0_n, 0_{p-1}, 1, 0).$$

Es gilt folgende Beziehung :

$$\begin{aligned} D\hat{F}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) &= \frac{1}{D_t \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)} (0_n, \bar{u}) DY(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) \\ &= \frac{1}{\bar{u}_p g_p(x^o)} (0_n, \bar{u}) DY(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0). \end{aligned}$$

Sei

$$(5.82) \quad \hat{L}(x, u^p, t, u_0) = \hat{F}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) + \lambda DY(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0),$$

die Lagrange-Funktion in $(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (5.83) \quad \hat{L}(x, u^p, t, u_0) &= t - \frac{1}{\bar{u}_p g_p(x^o)} \sum_{j=1}^p \bar{\mu}_j g_j(z) \\ &= t - \frac{1}{\bar{u}_p g_p(x^o)} \mathcal{L}(x, \bar{u}^p, t, 0). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lambda = -\frac{1}{\bar{u}_p g_p(x^o)} (0_n, \bar{u}).$$

Für die Hesse-Matrix gilt

$$D\hat{L}^2(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) = -\frac{1}{\bar{u}_p g_p(x^o)} \mathcal{L}^2(x, \bar{u}^p, t, 0).$$

Sei $(w_x, w_{u^p}, w_t, w_{u_o}) \in \mathbb{R}^{n+p+1}$ der Vektor, der den Tangentialraum von \hat{M} in $(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)$ erzeugt. Dann gilt

$$(5.84) \quad DY(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) \begin{pmatrix} w_x \\ w_{u^p} \\ w_t \\ w_{u_o} \end{pmatrix} = 0_{n+p}.$$

Man kann leicht Prüfen, daß $w_t = 0$ und $w_{u_o} \neq 0$. Die Multiplikation von (5.84) mit dem Vektor $(w_x, 0_p)$ liefert

$$(5.85) \quad w_x^T D^2 \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) w_x + w_x^T D_x^T \psi \circ f(\bar{z}) w_{u_o} = 0.$$

Wir bemerken, daß die Lagrange-Funktion $\hat{L}(x, u^p, t, u_o)$ vom Problem (\hat{P}) an Stelle $(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)$ nicht von den Variablen $u^p \in \mathbb{R}^{p-1}$ und u_o abhängen. Unter Berücksichtigung von $w_t = 0$ folgt

$$(w_x, w_{u^p}, w_t, w_{u_o})^T D^2 \hat{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) \begin{pmatrix} w_x \\ w_{u^p} \\ w_t \\ w_{u_o} \end{pmatrix} = - \frac{w_x^T D^2 \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0) w_x}{u_p g_p(x^o)}.$$

Wir setzen (5.85) in die letzte Gleichung ein und erhalten

$$(5.86) \quad D^2 \hat{L}(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)|_{T_{(\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)} \hat{M}} = \frac{w_x^T D_x^T \psi \circ f(\bar{z}) w_{u_o}}{u_p g_p(x^o)},$$

Aus den Eigenschaften eines Tangentialraumes folgt die Existenz einer Abbildung $(x(\tau), u^p(\tau), t(\tau), u_o(\tau))$ auf einer Umgebung $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ von Null, so daß gilt:

- (a) $Y(x(\tau), u^p(\tau), t(\tau), u_o(\tau)) = 0$ für alle $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$,
- (b) $(x(0), u^p(0), t(0), u_o(0)) = (\bar{x}, \bar{u}^p, \bar{t}, 0)$,
- (c) $(\dot{x}(0), \dot{u}^p(0), \dot{t}(0), \dot{u}_o(0)) = (w_x, w_{u^p}, w_t, w_{u_o})$.

Wir bemerken, daß $w_{u_o} \neq 0$ und wegen (5.86) $w_x^T D_x^T \psi \circ f(\bar{z}) \neq 0$.

O.B.d.A sei $w_{u_o} = -1$. Wir zeigen, daß

$$(5.87) \quad w_x^T D_x^T \psi \circ f(\bar{z}) w_{u_o} < 0.$$

Für jedes $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt:

(5.88)

$$u_o(\tau) D_x^T \psi \circ f(x(\tau), t(\tau)) - \sum_{j=1}^{p-1} \mu_j(\tau) D_x^T g_j(x(\tau), t(\tau)) - \bar{u}_p D_x g_p(x(\tau), t(\tau)) = 0.$$

Da $w_{u_o} = -1$ und $\bar{\mu}_j > 0$, $j = 1, \dots, p$, für $\tau < 0$ sind folgende Ungleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} u_o(\tau) &> 0 \\ \frac{\mu_j(\tau)}{u_o(\tau)} &> 0, \quad j = 1, \dots, p-1 \\ \frac{u_p}{u_o(\tau)} &> 0 \end{aligned}$$

Aus den letzten Ungleichungen und (5.88) folgt, daß die Punkte $(x(\tau), t(\tau))$, $\tau < 0$ stationäre Punkte für $P_u(t(\tau))$ bzw. $P_u''(t(\tau))$ sind. Da (\bar{x}, \bar{t}) ein Punkt vom Typ 4 ohne Sprungmöglichkeiten ist, folgt daß $(x(\tau), t(\tau))$, $\tau < 0$ lokale Minimalpunkte sind. Für $\tau > 0$ erhalten wir lokale Maximumpunkte für $P(t(\tau))$. Für (\bar{x}, \bar{t}) gilt:

$\exists V_{\bar{z}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, so daß $\forall (x_1, t_1) \in \Sigma_{stat} \cap V_{\bar{z}}$ und $\forall (x_2, t_2) \in (\Sigma_{gc} \setminus \Sigma_{stat}) \cap V_{\bar{z}}$ gilt $\psi \circ f(x_1, t_1) < \psi \circ f(x_2, t_2)$. Daraus folgt

$$(5.89) \quad D_t \psi \circ f(x(0), t(0)) = w_x^T D_x^T \psi \circ f(\bar{z}) > 0.$$

5.3 Über die Existenz einer Lösungskurve und die Rolle der Mangasarian-Fromovitz-Bedingung

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Existenz der Lösungskurve zu den im Abschnitt 5.2 betrachteten Problemen $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$, $P_1^{L+}(t)$ und $P_2^{L+}(t)$ bzw. $\tilde{P}_1^{L+}(t)$ und $\tilde{P}_1^{L+}(t)$. Unter einem Lösungsalgorithmus von obigen Problemen bezüglich eines Intervalls $I \subseteq [0, 1]$ wollen wir die Bestimmung eines zulässigen Punktes (g.c. Punktes) $x(t) \in M_\mu(t)$ für jedes Problem $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$, $P_1^{L+}(t)$ und $P_2^{L+}(t)$ für jeden Parameter $t \in I$ verstehen. O.B.d.A. beschränken wir uns nur auf das Problem $P_u(t)$ und seine Modifizierungen ($P'_u(t)$ und $P''_u(t)$) unter den Standardvoraussetzungen. Unter einer Lösung von $P_u(t)$ wollen wir eine stetige Abbildung $x(\cdot)$ verstehen, die jedem Parameter t eindeutig eine Lösung $x(t)$ von $P_u(t)$ zuordnet. Zudem hat $x(t)$ wegen seiner Zulässigkeit in $M_\mu(t)$ die Eigenschaft

$$(5.90) \quad f(x(t)) \in (u(t) - D) \cap f(M),$$

wobei D ein abgeschlossener konvexer Kegel ist. Definieren wir die folgende Punkt-Menge-Abbildung

$$(5.91) \quad \Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^{|L|}$$

durch

$$(5.92) \quad \Gamma(t) := (u(t) - D) \cap f(M),$$

die wir als “Abschnittsabbildung” bezeichnen wollen (vgl. die Abbildung 5.1). So ist die Bestimmung einer Lösungskurve äquivalent zur Bestimmung einer Zuordnung, die jedem Parameter t eindeutig einen Punkt $f(x(t)) \in \Gamma(t)$ zuordnet. Diese Zuordnung ist wegen der Stetigkeit der Vektorfunktion f stetig. Mit anderen Worten ist die Bestimmung einer Lösungskurve äquivalent zur Bestimmung einer Auswahlfunktion der Punkt-Menge-Abbildung Γ .

Im Gegensatz zu [46], [47], [48] sind wir nur an der hinreichenden Bedingung über die Existenz solcher Funktionen interessiert. In [6] wurden hinreichenden Bedingungen für die Lipschitz-Stetigkeit und Differenzierbarkeit dieser Kurve untersucht. Für weitere Details zur Existenz einer Auswahlfunktion für eine Punkt-Menge-Abbildung verweisen wir auf [2] und [3].

5.3.1 Unterhalbstetigkeit der “Abschnittsabbildung” Γ

Im Folgenden diskutieren wir hinreichende Bedingungen an, unter denen der vereinfachte Satz von Michael ([3], Satz 2.3.1) anwendbar ist:

Satz 37 *Es seien folgende Bedingungen erfüllt:*

- (B1) Λ ist ein kompakter metrischer Raum,
- (B2) X ist ein Banachraum,
- (B3) $\Phi : \Lambda \longrightarrow 2^X$ ist unterhalbstetig (nach Berge), und
- (B4) die Bilder $\Phi(t)$ sind für alle $t \in \Lambda$ nicht leer und konvex,

dann existiert eine Funktion $\varphi \in C(\Lambda, X)$ mit $\varphi(t) \in \Phi(t)$ für alle $t \in \Lambda$.

Nun betrachten wir das Problem vom Typ $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ auf $I = [t_o, 1]$ mit $t_o < 0$. So sind die Voraussetzungen (B1) und (B2) des Satzes 37 erfüllt, und wir erhalten:

Folgerung 5 Seien die Bedingungen (B3) und (B4) des Satzes 37 für die “Abschnittsabbildung Γ ” erfüllt, dann existiert eine Lösungskurve $x \in C(I, \mathbb{R}^{|L|})$ mit $x(t) \in \Gamma(t)$ für alle $t \in I$.

Die Klasse der Probleme $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$, für die eine solche Lösungskurve (Auswahlfunktion) existiert, ist verhältnismäßig klein und wird hauptsächlich durch die Bedingungen (B3) und (B4) bestimmt. Im nichtkonvexen Fall kann man im Allgemeinen die Existenz dieser Kurve nicht sichern. Dazu kann man das in ([3], (A4)) angegebene Beispiel betrachten: $\Phi(t) := \{x \in \Lambda \mid \|x - t\| \geq \frac{1}{2}\}$; Φ ist stetig, aber besitzt keine stetige Auswahlfunktion, da sie sonst wegen des Brouwer’schen Fixpunktsatzes einen Fixpunkt besitzen würde. Somit kann eine einfache Kurvenverfolgung mit dem Algorithmus PATH III im Allgemeinen nicht erfolgreich sein. Unter einem einfachen Kurvenverfolgungsalgorithmus verstehen wir einen Algorithmus ohne Jumps (bzw. JUMP II). Die Verletzung der Bedingung (B3) kann z.B. mit Hilfe des folgenden Korollars festgestellt werden:

Korollar 3 Seien $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ JJT-regulär, $\bar{x} \in E_{locw}(M, D) \cap M_{\bar{u}}(\bar{t})$ und $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{t}) \in \Sigma_{gc}^5$. Weiterhin erfülle \bar{z} die weiteren Voraussetzungen des Satzes 28, dann ist die Bedingung (B3) genau an der Stelle \bar{t} verletzt.

Beweis. Wegen Satz 28 und der JJT-Regularität von $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ ist die MFCQ in \bar{z} wegen Satz 19 verletzt. Zusammen mit dem Satz 18 stellt sich heraus, dass ein Zusammenhangskomponent der lokalen Minimalpunkte in \bar{z} endet. Aus der lokalen Beschreibung (4.44) der zulässigen Menge $M_\mu(t)$ wissen wir, dass genau $n + 1$ Gleichungen aktiv sind. Dann muss $\delta = -1$ und $d = 0$ gelten. In diesem Fall wird die zulässige Menge leer, sobald wir den Wert \bar{t} durchlaufen. Somit kann die Abbildung Γ an der Stelle \bar{t} nicht unterhalbstetig sein. \square

Im nächsten Abschnitt wollen wir hinreichende Bedingungen untersuchen, unter denen eine verhältnismäßig größere Klasse konvexer und nichtkonvexer lösbaren Probleme gewonnen werden kann.

5.3.2 Die Rolle der MFCQ und die Enlarged MFCQ

Wir betrachten erneut die Probleme $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ bezüglich eines spitzen polyedrischen Ordnungskegels D und nehmen stellvertretend den Kegel $D = \mathbb{R}_+^l$ (vgl. Lemma 5).

Definition 38 Die Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification (MFCQ) ist in einem Punkt $\bar{x} \in M_\mu(t)$ erfüllt, falls ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ existiert mit:

$$\begin{aligned} Dg_j(\bar{x})\xi &< 0, \quad j \in J_o^G(\bar{x}, \bar{t}) \\ Df_j(\bar{x})\xi &< 0, \quad j \in J_o^f(\bar{x}, \bar{t}). \end{aligned}$$

Bemerkung 10 Die obige Definition hängt vom Kegel D ab. Enthält $M_\mu(t)$ Gleichungsrestriktionen, und dies ist z.B. der Fall, wenn wir den im Beispiel 1(d) definierten Kegel betrachten, dann müssen wir noch verlangen, dass die Vektoren $\{Dh_i(\bar{x}), i \in I\}$ linear unabhängig und $Dh_i(\bar{x})\xi = 0, \quad i \in I$ sind.

Definition 39 Sei $K \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Das Problem $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ oder $P''_u(t)$ heißt Kojima-Hirabayashi-regulär (Bezeichnung: KH-regulär) bezüglich K , falls $0 \in \mathbb{R}^{n+\bar{m}+\bar{s}}$ ein Regulärwert von $\mathcal{H}|_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\bar{m}} \times \mathbb{R}^{\bar{s}} \times K}$ (vgl. (2.7)) ist. Hierbei steht \bar{m} für die Anzahl der Gleichungen und \bar{s} für die Anzahl der Ungleichungen, die die Menge $M_\mu(t)$ beschreiben (vgl. (5.12)).

Als Folgerung aus den Ergebnissen in [9] geben wir zwei Sätze an, die die Bedeutung des Erfülltseins der MFCQ-Bedingung für die Existenz einer Verbindungskurve hervorhebt:

Satz 38 Es seien folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ sind bezüglich $[0, 1]$ KH-regulär.
- (ii) Es existiert ein $t_1 > 0$ und eine stetige Funktion $x : [0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $x(t)$ der einzige stationäre Punkt von $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ ist.
- (iii) Die MFCQ ist für alle $x \in M_u(t)$, $t \in [0, 1]$ erfüllt.

Dann existiert ein PC^1 -Pfad in Σ_{stat} , der $(x^0, 0)$ mit einem gewissen Punkt $(x^*, 1)$ verbindet.

Beweis. Wegen Bedingung (C5) und Satz 26 ist $M_u(t)$ nicht leer. Infolge (C1) existiert eine kompakte Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M_u(t) \subseteq C$ für alle $t \in [0, 1]$. Mit (i) – (iii) sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Ergebnisse aus [9] erfüllt \square

Nimmt man unter Betrachtung der Menge Σ_{stat} an, dass die Probleme $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ JJT-regulär sind (vgl. [49]), so ist Null ein regulärer Wert der Kojima-Abbildung \mathcal{H} . Diese Tatsache liefert folgendes Ergebnis:

Korollar 4 Es seien die Bedingungen (ii), (iii) erfüllt und die Probleme $P_u(t)$ bzw. $P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ bezüglich $[0, 1]$ JJT-regulär. Dann existiert ein PC^2 -Pfad $K(x^0, 0)$ in Σ_{stat} , der $(x^0, 0)$ mit einem gewissen Punkt $(x^*, 1)$ verbindet.

Wir fragen nun nach der hinreichenden Bedingung unter der die MFCQ für alle $x \in M_u(t)$, $t \in (-\infty, 1]$ erfüllt ist. Diese Bedingung bezeichnen wir, genauso wie in [16] und [19], als erweiterter MFCQ (EnMFCQ). Dazu betrachten wir das skalarisierte Problem

$$(P_\mu) \quad \min \{ \psi \circ f(x) \mid x \in M_\mu \} \quad \mu \in \mathbb{R}^l,$$

dessen Zulässigkeitsbereich durch die zusätzliche Restriktionsungleichung $g_{s+1}(x) \leq r$ mit $g_{s+1} \in C^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ erweitert wird. Es sei

$$C(r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_{s+1}(x) \leq r\}$$

eine kompakte Menge mit $\text{int}(C(r)) \neq \emptyset$ (vgl. $g_{s+1}(x) = \|x\|^2$) für alle $r \in [r_1, r_2]$, $r_1 < r_2$. Wir bezeichnen diese Restriktionsmenge mit $M_\mu^r := M_{\mu^1} \cap C(r)$.

Definition 40 (EnMFCQ) ([16]) Wir sagen, dass das skalarisierte Problem (P_μ) mit der zusätzlichen Restriktionsungleichung $g_{s+1}(x) \leq r$ die EnMFCQ auf $C(r)$ erfüllt, falls für alle $r \in [r_1, r_2]$ und jedes $x \in C(r)$ Folgendes gilt: Es existiert ein Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$, so dass:

$$(5.93) \quad g_j(x) + Dg_j(x)\xi < 0, \quad j \in \{j \in J \mid g_j(x) \geq 0\}$$

$$(5.94) \quad f_k(x) - \mu_k + Df_k(x)\xi < 0, \quad k \in \{k \in L \mid f_k(x) \geq \mu_k\}$$

$$(5.95) \quad Dg_{s+1}(x)\xi < 0, \quad \text{falls } g_{s+1}(x) = r$$

Die Definition 40 ist eine Erweiterung der MFCQ auf einer geeigneten Umgebung von M . Sie sichert somit das Erfülltsein der MFCQ.

Es stellt sich nun die interessante Frage nach der Erfüllbarkeit dieser stärkeren Bedingung. Nachstehender Satz liefert eine Antwort.

Satz 39 Sei D ein Ordnungskegel mit $\text{int}(D) \neq \emptyset$ und $M_\mu^r \neq \emptyset$. Dann ist die EnMFCQ für jedes $x \in E_{locw}(M_\mu^r, D)$ nicht erfüllt.

Beweis. Die Menge M_μ^r ist wegen der Bedingung (C1) kompakt. Da die Vektorfunktion f stetig ist, ist $f(M)$ kompakt. Aus dem Existenz-Satz 2.15 in [14] folgt, dass die Menge $E_{locw}(M_\mu^r, D)$ nichtleer ist und es gilt $E_{locw}(M_\mu^r, D) \subseteq E_{locw}(M, D)$. Da $x \in E_{locw}(M_\mu^r, D)$, folgt notwendig aus Satz 3.2 in [44]

(vgl. auch Beweis des Korollars 3.3 in [44] sowie Satz 7.3 in [32]), dass für jedes $x \in E_{locw}(M_{\mu}^r, D)$ Folgendes gilt:

$$(5.96) \quad (Df(x)(u), Dg(x)(u) + g(x)) \notin -int(\mathbb{R}_+^l, \mathbb{R}_+^{s+1}) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Die Bedingung (5.96) tritt ein, wenn für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ entweder $Df(x)(u) \notin -int(\mathbb{R}_+^l)$ oder $Dg(x)(u) \notin -int(\mathbb{R}_+^s)$ oder beides gilt. In allen drei Fällen ist die Bedingung für das Erfülltsein der EnMFCQ verletzt \square

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Erkenntnis, dass Singularitäten $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ vom Typ 4 und 5 nicht auszuschließen sind. Sie können insbesondere eintreten, wenn $int(D) \neq \emptyset$ und $x \in E_{locw}(M, D)$. Die Sprünge in der Menge \sum_{gc} und der Algorithmus Jump II* aus dem Abschnitt 4.2.1 haben eine große Rolle bei der Bestimmung eines Goal-Realizers zu spielen.

Kapitel 6

Regularisierungen

In diesem Kapitel beantworten wir die Frage, unter welchen Bedingungen die betrachteten Probleme $P_u(t)$, $P'_u(t)$, $P''_u(t)$, $P^s(t)$, $P_i^p(t)$, $i = 1, 2$, JJT-regulär sind. Dies ist die Rechtfertigung der Annahme in der Hauptfrage 3. Im Folgenden beschränken wir uns darauf, die Regularisierung für die Probleme $P_u(t)$ ($P'_u(t)$ und $P''_u(t)$ als Spezialfälle) zu zeigen. Für die Regularisierung der Probleme $P^s(t)$ und $P_i^p(t)$, $i = 1, 2$ verweisen wir auf [20] und [19].

6.1 Verallgemeinerte Einbettungen und die Klasse \mathcal{F}

Satz 40 Sei ψ eine streng monoton wachsende Funktion in \mathbb{R}^l und $A \in \mathcal{A}^n \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$. Hierbei bezeichnet \mathcal{A}^n die Menge aller symmetrischen (n, n) -Matrizen. Weiterhin, seien $c, a_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, s + |L|$, $d \in \mathbb{R}_+^l \setminus \{0\}$ und $\mu^1 \in \mathbb{R}^l$, wobei μ^1 das Ziel des Entscheidungsträgers bezeichnet. Wir definieren

$$b := \left(b_1, \dots, b_s, d_1, \dots, d_{|L|} \right)^T \in \mathbb{R}^{s+|L|},$$

$$\mathcal{B} := (a_1, \dots, a_{s+|L|}, b).$$

Betrachtet man das gestörte Problem definiert durch

$$(P_{u(A, \mathcal{B})}(t)) \quad \min \left\{ \psi \circ f(x) + x^T A x + c^T x \mid x \in M_u(\mathcal{B}, t) \right\},$$

wobei

$$M_u(\mathcal{B}, t) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{ll} g_j(x) + a_j^T x + b_j & \leq 0, \quad j \in J \\ f_l(x) + a_l^T x - \mu_l^1 + (t-1)d_l & \leq 0, \quad l \in L \end{array} \right\}.$$

Dann gilt für fast alle $(A, \mathcal{B}) \in \mathcal{A}^n \times \mathbb{R}^{(s+|L|)(n+1)}$, dass das Problem $P_{u(A, \mathcal{B})}(t) \Big|_{t \neq 1, t \in R}$

JJT-regular ist, d.h. $P_{u(A, \mathcal{B})}(t) \Big|_{t \neq 1, t \in R} \in \mathcal{F}$.

“Für fast alle” bedeutet: jede Lebesgue-messbare Teilmenge

$$\{(A, \mathcal{B}) \in \mathcal{A}^n \times \mathbb{R}^{(s+|L|)(n+1)} \mid P_{u(A, \mathcal{B})}(t) \notin \mathcal{F}\}$$

hat das Lebesgue-Maß Null.

Hauptidee des Beweises

Der Beweis verläuft mit den gleichen Techniken wie im Beweis des Satzes 5.1 in Rückmann, Tammer[49]. Wir verifizieren für unseren speziellen Fall dessen Hauptidee:

- **Schritt 1:** Wir zeigen, dass für fast alle $(A, \mathcal{B}) \in \mathcal{A}^n \times \mathbb{R}^{(s+|L|)(n+1)}$ jeder kritischer Punkt von $P_{u(A, \mathcal{B})}(t)$, der die (LICQ) erfüllt, entweder ein Punkt vom Typ 1, Typ 2 oder Typ 3 ist.
- **Schritt 2:** Wir zeigen danach, dass für fast alle $(A, \mathcal{B}) \in \mathcal{A}^n \times \mathbb{R}^{(s+|L|)(n+1)}$ die Menge derjenigen zulässigen Punkte, die die LICQ nicht erfüllen, die Vereinigung nulldimensionaler Mannigfaltigkeiten ist. Außerdem zeigen wir für ein festes Element aus (A, \mathcal{B}) , dass jeder dieser Punkte entweder ein Punkt vom Typ 4 oder 5 ist.

Zunächst geben wir einige vorbereitende Ergebnisse zum Hauptbeweis.

Lemma 2 (vgl.[49]) Es seien $\mathcal{M}^n \subset \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ die Menge aller symmetrischen (n, n) -Matrizen, $\bar{I} \subset \{1, \dots, n\}$ eine Indexmenge und

$$\mathcal{A}^n(\bar{I}) := \left\{ A \in \mathcal{M}^n \mid \begin{array}{l} \text{rank}(A) = \text{Card}(\bar{I}) \text{ und die Spalten von } A, \text{ deren} \\ \text{Indizes zu } \bar{I} \text{ gehören, sind linear unabhängig.} \end{array} \right\}.$$

Dann gilt:

$\mathcal{A}^n(\bar{I})$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Kodimension

$$\text{Cod}(\mathcal{A}^n(\bar{I})) = \frac{1}{2}(n - \text{Card}(\bar{I}))(n - \text{Card}(\bar{I}) + 1).$$

Wir definieren die von der Vektorfunktion f abhängigen und gestörten Ungleichungsrestriktionen wie folgt:

$$g_{s+l}(x, t, \mathcal{B}) := f_l(x) + a_l^T x - \mu_l^1 + (t - 1)d_l, \quad l \in L.$$

Lemma 3 Seien $g_j \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j \in J_o(x, t, \mathcal{B}) := \{j \in J \cup L \mid g_j(x, t, \mathcal{B}) = 0\}$ und $|J_o(x, t, \mathcal{B})| = p$. \mathcal{B} und $M_I(\mathcal{B}, t)$ seien wie oben definiert und

$$M(\mathcal{B}) := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} x \in M(\mathcal{B}, t) \\ \text{und die Vektoren } D_x g_j(x, t, a_j, b_j), j \in J_o(x, t, \mathcal{B}) \\ \text{sind linear abhängig, d.h. (LICQ) nicht erfüllt.} \end{array} \right. \right\}.$$

Dann gilt für fast alle \mathcal{B} :

- (a) Die Menge $M(\mathcal{B})$ ist eine nulldimensionale Mannigfaltigkeit.
- (b) Für jeden Punkt $(\bar{x}, \bar{t}) \in M(\mathcal{B})$ gilt

$$\dim \text{span} \{D_{(x,t)} g_j(x, t, a_j, b_j), j \in J_o(x, t, \mathcal{B})\} = p.$$

Beweis. Sei $\emptyset \neq J^p \subset J \cup L$. O.B.d.A. setzen wir

$$J^p = \{1, \dots, p\} \text{ and } p \in L \cap J_o(x, t, \mathcal{B}).$$

Sei nun $\hat{q}_p \in \mathbb{R}$, $\hat{q}_p \neq 0$, $q \in \mathbb{R}^{p-1}$. Wir definieren

$$(6.1) \quad \tilde{\mathcal{L}}(x, q, t, \mathcal{B}) := \sum_{j=1}^{p-1} q_j g_j(x, t, a_j, b_j) + \hat{q}_p g_p(x, t, a_p, b_p)$$

und

$$(6.2) \quad \tilde{G}(x, q, t, \mathcal{B}) := \begin{bmatrix} D_x \tilde{\mathcal{L}}(x, q, t, \mathcal{B}) \\ g_j(x, t, a_j, b_j), j \in J^p \end{bmatrix}.$$

Da der Teil der Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen von \tilde{G} nach den Parametern (a_p, b_1, \dots, b_p) , d.h.

$$D_{(a_p, b_1, \dots, b_p)} \tilde{G}(x, q, t, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_p} & \frac{\partial}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial b_p} \\ \hat{q}_p I_n & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ x^T & & & t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_p I_n & & 0 \\ 0 & & \\ x^T & I_{p-1} & t-1 \end{bmatrix},$$

eine reguläre Matrix für alle $t \neq 1$ (I_n, I_{p-1} bezeichnet hierbei die Einheitsmatrix) ist, ist $0 \in \mathbb{R}^{n+p}$ ein Regulärwert von \tilde{G} für alle $t \neq 1$. Aus $\tilde{G} \in C^1(\mathbb{R}^{n+p} \times \mathbb{R}^{p*(n+1)}, \mathbb{R}^{n+p})$ folgt mit Hilfe des Theorems von Sard 4, dass für fast alle \mathcal{B} , $0 \in \mathbb{R}^{n+p}$ ein Regulärwert von

$$(6.3) \quad \tilde{G}_{\mathcal{B}}(x, q, t) := \tilde{G}(x, q, t, \mathcal{B})$$

ist. Das bedeutet, dass die Menge $\tilde{G}_{\mathcal{B}}^{-1}(0)$ und die entsprechende Projektion auf den (x, t) -Raum

$$\pi_{(x,t)}(\tilde{G}_{\mathcal{B}}^{-1}(0)) := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} g_j(x, t, a_j, b_j) = 0, j \in J^p \\ D_x g_p(x, t, a_p, b_p) \in \text{span} \{D_x g_j(x, t, a_j, b_j)\} \\ j = 1, \dots, p-1 \end{array} \right. \right\}$$

jeweils Mannigfaltigkeiten der Dimension Null sind, denn $(x, q, t) \in \mathbb{R}^{n+p}$ und das System $\tilde{G}(x, q, t, \mathcal{B}) = 0$ besteht aus $n + p$ Gleichungen.

(b) ergibt sich aus (a), da für fast alle \mathcal{B} , 0 ein Regulärwert von \tilde{G} ist. Daraus folgt, dass für jeden Punkt $(\bar{x}, \bar{t}) \in \pi_{(x,t)}(\tilde{G}_{\mathcal{B}}^{-1}(0)) = M(\mathcal{B})$, Folgendes gilt

$$\dim \text{span} \{D_{(x,t)} g_j(x, t, a_j, b_j), j \in J_0(x, t, \mathcal{B})\} = p.$$

- Beweis des Schritts 1: Sei $v = 0, 1$ und wir betrachten

$$A^v(z) = (D_x^T g_1(z), \dots, D_x^T g_{p+v-1}(z))$$

und

$$(6.4) \quad M^v(x, \mu, t) = \begin{pmatrix} D_x^2(\psi \circ f(x)) + \sum_{j=1}^p \mu_j D_x^2 g_j(x, t) & A^v(x, t) \\ -A^v(x, t)^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$(6.5) \quad H^v(x, \mu, t) = \begin{bmatrix} D_x(\psi \circ f(x)) + \sum_{j=1}^p \mu_j D_x g_j(x, t) \\ -g_1(x, t) \\ \vdots \\ -g_{p-1}(x, t) \\ (1-v)\mu_p - g_p(x, t) \end{bmatrix}.$$

Für das gestörte Problem mit $a = (A, \mathcal{B}, c)$ erhalten wir

$$H_a^v(x, \mu, t) = H^v(x, \mu, t) + \begin{bmatrix} 2Ax + c + \sum_{j=1}^p \mu_j a_j \\ -(a_1^T x + b_1) \\ \vdots \\ -(a_{p-1}^T x + b_{p-1}) \\ -a_p^T x \end{bmatrix},$$

$$M_a^v(x, \mu, t) = M^v(x, \mu, t) + \begin{bmatrix} 2A & a_1 \dots a_p \\ -a^T & \\ \vdots & 0 \\ -a_p^T & \end{bmatrix}.$$

Weiterhin betrachten wir die folgende symmetrische Matrix

$$\bar{M}_a^\nu(x, \mu, t) = M_a^\nu(x, \mu, t) \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_{m+p} \end{bmatrix}.$$

Außerdem definieren wir folgende Mengen:

(6.6)

$$\mathcal{M}(I) := \mathbb{R}^{n+p+1} \times O_{n+p} \times \mathcal{A}^{n+p}(I),$$

(6.7)

$$\mathcal{M}_a^\nu := \{ \mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{\tilde{q}} \mid \mathcal{Z}^2 = H_a^\nu(\mathcal{Z}^1), \mathcal{Z}^3 = \bar{M}_a^\nu(\mathcal{Z}^1) \}, \quad \nu = 0, 1,$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= (n+p+1) + (n+p) + \frac{1}{2}(n+p)(n+p+1) \\ \mathcal{Z} &= (\mathcal{Z}^1, \mathcal{Z}^2, \mathcal{Z}^3) \in \mathbb{R}^{\tilde{q}} \\ \mathcal{Z}^1 &= (x, \mu, t) \in \mathbb{R}^{n+p+1} \\ \mathcal{Z}^2 &\in \mathbb{R}^{n+p} \\ \mathcal{Z}^3 &\in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n+p)(n+p+1)} \end{aligned}$$

mit $I \subset \{1, \dots, n+p\}$, und für jede Indexmenge $\tilde{I} \subset \{1, \dots, p\}$ betrachten wir die Menge

(6.8)

$$\mathcal{M}(I, \tilde{I}) := \mathcal{M}(I) \cap \{ \mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{\tilde{q}} \mid \mathcal{Z}_{n+j} = 0, j \in \tilde{I} \}, \text{ with } \mathcal{Z}_{n+j} = \mu_j, j \in \tilde{I}.$$

Lemma 4 Die Mengen $\mathcal{M}_a^\nu, \mathcal{M}(I)$ und $\mathcal{M}(I, \tilde{I})$ sind C^1 -Mannigfaltigkeiten.

Beweis des Lemma. Die Jacobi-Matrix der beschreibenden Gleichungen hat die Gestalt:

– Für $\mathcal{M}_a^\nu, \quad \nu = 0, 1 :$

$$(6.9) \quad \begin{array}{c} \text{Gleichung} \\ \mathcal{Z}^2 - H_a^\nu = 0 \\ \mathcal{Z}^3 - M_a^\nu = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^1} \\ \textcircled{*} \\ \textcircled{*} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^2} \\ I_{n+p} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^3} \\ 0 \\ I_{\frac{1}{2}(n+p)(n+p+1)} \end{array}$$

- Für $\mathcal{M}(I)$ unter Berücksichtigung von Lemma 2 erhalten wir

$$(6.10) \quad \frac{\text{equality}}{\mathcal{Z}^2 = 0} \quad \frac{\frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^1}}{0} \quad \frac{\frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^2}}{I_{n+p}} \quad \frac{\frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^3}}{0} \\ \quad \quad \quad (\otimes) \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \left(I_{\frac{1}{2}(n+p-|I|)(n+p-(|I|+1))} \mid \otimes \right).$$

Wir bemerken, dass $Cod \mathcal{A}^{n+p}(I) = \frac{1}{2}(n+p - |I|)(n+p - (|I| + 1))$ und \otimes ist eine Teilmatrix ohne Bedeutung für unsere Betrachtungen. Die Zeilen der obigen Jacobi-Matrizen sind linear unabhängig. Somit sind \mathcal{M}_a^ν und $\mathcal{M}(I)$ Mannigfaltigkeiten. Ihre Kodimensionen sind

$$\begin{aligned} \text{Cod}(\mathcal{M}_a^\nu) &= n + p + \frac{1}{2}(n + p)(n + p + 1) \\ &= \tilde{q} - (n + p + 1) \\ \text{Cod}(\mathcal{M}(I)) &= n + p + \text{Cod}(\mathcal{A}^{n+p}(I)) \\ &= n + p + \frac{1}{2}(n + p - \text{Card}(I))(n + p - \text{Card}(I) + 1). \end{aligned}$$

- $\mathcal{M}(I, \tilde{I})$ wird zusammen durch alle beschreibenden Gleichungen von $\mathcal{M}(I)$ und folgende Gleichung beschrieben:

$$\frac{\text{equality } D_{z_{n+j}}(j \in \tilde{I})}{z_{n+j} = 0 \quad I_{|\tilde{I}|}}.$$

Die Zeilen der Matrix sind linear unabhängig und

$$\text{Cod}(\mathcal{M}(I, \tilde{I})) = \text{Cod}(\mathcal{M}(I)) + |\tilde{I}|.$$

Wir betrachten nun die erweiterte Jacobi-Matrix der Gleichungen, die \mathcal{M}_θ^ν , $\mathcal{M}(I)$ und $\mathcal{M}(I, \tilde{I})$ beschreiben, einschließlich der Ableitungen

gen nach den Parametern (A, b, c) , $b = (b_1, \dots, b_p)$
(6.11)

	$D_{\mathcal{Z}^1}$	$D_{\mathcal{Z}^2}$	$D_{\mathcal{Z}^3}$	D_A	D_b	D_c
$\mathcal{Z}^2 - H_a^v(\mathcal{Z}^1) = 0$	*	I^{n+p}	0	* *	0 $I_p(t)$	$-I^n$ 0
$\mathcal{Z}^3 - M_a^v(\mathcal{Z}^1) = 0$	*	0	$I_{\frac{1}{2}}^{1(n+p)(n+p+1)}$	$-2I_{\frac{1}{2}}^{1n(n+1)}$ 0	0 0	0 0
$\mathcal{Z}^2 = 0$	0	I^{n+p}	0	0	0	0
$\mathcal{A}^{n+p}(I)$	0	0	$-I^{\lambda_1} \mid *$	0	0	0
z_{n+j}	$I^{ \tilde{I} } \mid 0$	0	0	0	0	0

wobei

$$I_p(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ & & -(1-t) \end{bmatrix}$$

eine (p, p) -Matrix ist und $\lambda_1 = \frac{1}{2}(n+p-|I|)(n+p-|I|+1)$.

Die Matrix, die in der Tabelle dargestellt ist, hat maximalen Rang für alle $\{n+1, \dots, n+p\} \in I$ und für $t \neq 1$.

Sei nun (x, t) ein g.c. Punkt von $P_{u(A, B)}(t)$ und die LICQ seien erfüllt, wobei $J_o(x, t, \mathcal{B}) = \{1, \dots, p\}$ und $H_a^1(x, \mu, t) = 0$. Dann gibt es eine Indexmenge

$I \subset \{1, \dots, n+p\}$ mit $\{n+1, \dots, n+p\} \subset I$ und $M_a^1(x, \mu, t) \subset \mathcal{A}(I)$, wobei μ der eindeutig bestimmte Vektor der Lagrange-Multiplikatoren ist.

Für jedes Paar (I, \tilde{I}) mit $\{n+1, \dots, n+p\} \subset I$ hat die Matrix in (6.11) maximalen Rang. Da es nur endlich viele solcher Paare gibt, folgt aus dem Theorem vom Sard, dass für fast alle (A, b, c)

$$\mathcal{M}(I, \tilde{I}) \ni \mathcal{M}_a^v, \quad v = 0, 1, \quad \tilde{I} \subset \{1, \dots, p\}.$$

Es gilt

(6.12)

$$\begin{aligned}
 \dim \mathcal{M}(I, \tilde{I}) \cap \mathcal{M}_a^\nu &= \tilde{q} - \text{Cod}(\mathcal{M}(I, \tilde{I}) \cap \mathcal{M}_a^\nu) \\
 &= \tilde{q} - [\text{Cod}(\mathcal{M}(I, \tilde{I}) + \text{Cod} \mathcal{M}_a^\nu)] \\
 &= \tilde{q} - \text{Cod} \mathcal{M}(I) - |\tilde{I}| - \text{Cod} \mathcal{M}_a^\nu \\
 &= n + p + 1 - \text{Cod} \mathcal{M}(I) - |\tilde{I}| \\
 &= n + p + 1 - \left[n + p + \frac{1}{2}(n + p - |I|)(n + p - |I| + 1) \right] - |\tilde{I}| \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{falls } |\tilde{I}| = 0 \text{ und } |I| = n + p, \\ 0 & \text{falls } |\tilde{I}| = 0 \text{ und } |I| = n + p - 1, \\ 0 & \text{falls } |\tilde{I}| = 1 \text{ und } |I| = n + p, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$M(I, \tilde{I}) \cap \mathcal{M}_a^\nu = \emptyset, \text{ falls } \frac{1}{2}(n + p - |I|)(n + p - |I| + 1) - |\tilde{I}| > 1.$$

Da in (x, t) die LICQ erfüllt ist, gibt es eine Indexmenge I mit

$$\{n + 1, \dots, n + p\} \subset I \subset \{1, \dots, n + p\}$$

und einen Vektor

$$((x, \mu, t), H_a^1(x, \mu, t), M_a^1(x, \mu, t)) \in M(I, \tilde{I}) \cap \mathcal{M}_a^\nu.$$

Aus (6.12) ergeben sich die folgenden Möglichkeiten für (x, t) :

1. $\text{Card}(I) = n + p$ und $|\tilde{I}| = 0$, d.h., $\text{rank}(M_a^\nu(x, \mu, t)) = n + p$ und $\mu_j \neq 0$, $j = 1, \dots, p$. (x, t) ist dann ein g.c. Punkt vom Typ 1.
 2. $\text{Card}(I) = n + p - 1$ und $|\tilde{I}| = 0$, i.e. $\text{rank}(M_a^\nu(x, \mu, t)) = n + p - 1$. Dann ist $(x, t) \in \Sigma_{gc}^3$.
 3. $|\tilde{I}| = 1$, d.h., $|J_o(x, a, b, t) \setminus J_+(x, a, b, t)| = 1$ und $M_a^\nu(x, \mu, t) = n + p - 1$. Daraus folgt, dass $(x, t) \in \Sigma_{gc}^2$.
- Beweis des Schritts 2: Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1 ($p > n$): Aus Lemma 3(b) erhalten wir $p = n + 1$, da $M(\beta) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Somit gilt $\bar{z} \in \Sigma_{gc}^5$.
Fall 2 ($p \leq n$): Für den Rest des Beweises verweisen wir auf [49].
Der Abschluss des Beweises folgt analog zu [49] mit Hilfe des Satzes von Fubini.

Kapitel 7

Strukturelle Stabilität für Vektoroptimierungsprobleme

Das Verhalten des Vektoroptimierungsproblems $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ unter Störungen der Daten, also des Parameters (\mathbf{f}, H, G) , spiegelt einerseits die Ungenauigkeiten in den physikalischen Messungen und technischen Realisationen wider. Andererseits, sowohl in quantitativer als auch in qualitativer Hinsicht, den Zustand des gestörten Problems, seiner Lösungen und seiner anderen kritischen Größen. Unsere Untersuchung gehört damit in den theoretischen Bereich der parametrischen Programmierung. Der vorliegende Abschnitt verallgemeinert das von Guddat/Jongen [21] eingeführte Konzept der strukturellen Stabilität eines skalaren Optimierungsproblems in der Vektoroptimierung und macht Aussagen über eine gewisse Stabilität oder Instabilität eines Vektoroptimierungsproblems.

Wir studieren globale Stabilitätseigenschaften des Vektoroptimierungsproblems vom Typ :

$$\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G): \quad \min \{ \mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x)) \mid x \in M[H, G] \},$$

wobei

$$M[H, G] := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0, \quad g_j(x) \leq 0, \quad i \in I, j \in J \}$$

mit

$$I := \{1, \dots, m\}, \quad J := \{1, \dots, s\}, \quad L := \{1, \dots, l\}.$$

Unter der Annahme der Kompaktheit der Restriktionsmenge $M[H, G]$ geben wir eine notwendige Bedingung dafür an, dass das Vektoroptimierungsproblem $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ strukturell stabil ist, mit anderen Worten: Wir

werden zeigen, dass das folgende skalare Optimierungsproblem

$$\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G): \quad \min \left\{ \max_{l \in L} f_l(x) \mid x \in M[H, G] \right\}$$

strukturell stabil sein muss. Wenn nichtsanders vorausgesetzt wird, gehen wir davon aus, dass alle Funktionen $f_k, g_j, k \in L, j \in J$, zur Menge $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gehören.

Die untere Niveaumenge bezüglich $u \in \mathbb{R}^{|L|}$ bezeichnen wir wie folgt:

$$(7.1) \quad \mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G) := \{x \in M[H, G] \mid f(x) \leq_D u\}, \quad u \in \mathbb{R}^{|L|}.$$

Die Halbordnung \leq_D sei durch den Ordnungskegel $D \subset \mathbb{R}^l$ induziert, d.h.

$$x \leq_D y \quad :\Longleftrightarrow \quad y - x \in D.$$

Definition 41 Zwei Vektoroptimierungsprobleme $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ und $\mathcal{VOP}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G})$ sind äquivalent, falls es stetige Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^{|L|} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : \mathbb{R}^{|L|} \rightarrow \mathbb{R}^{|L|}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

P1 Für jedes $u \in \mathbb{R}^{|L|}$ ist die Abbildung $\phi_u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus von \mathbb{R}^n auf sich selbst, wobei $\phi_u := \phi(u, x)$.

P2 Die Abbildung ψ ist ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^{|L|}$ auf sich selbst und ψ ist D -monoton wachsend; d.h.

$$(7.2) \quad q_1 \leq_D q_2 \implies \psi(q_1) \leq_D \psi(q_2) \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{R}^{|L|}.$$

P3 $\phi_u[\mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G)] = \mathcal{L}^{\psi(u)}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G})$ für alle $u \in \mathbb{R}^{|L|}$.

Definition 42 Das Vektoroptimierungsproblem $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ heißt strukturell stabil, falls es eine C^2_Σ -Umgebung \mathcal{O} von (\mathbf{f}, H, G) mit der Eigenschaft gibt, dass für jedes Element $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G}) \in \mathcal{O}$ das Problem $\mathcal{VOP}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G})$ äquivalent zum Problem $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ ist.

Zur Veranschaulichung stellen wir noch das entsprechende kommutative Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \supset M & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R}^{|L|} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n \supset \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{f}}} & \mathbb{R}^{|L|}. \end{array}$$

Die oben betrachtete C^2_ξ -Topologie für das Produkt $\prod_{i=1}^r C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist die Produkttopologie, die durch die strenge (oder Whitney-) C^2 -Topologie in jedem Faktor $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ erzeugt wird (vgl. [29], [37]). Eine typische Basisumgebung der Funktion $\rho \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist die Menge $\rho + \mathcal{W}_\epsilon$, wobei \mathcal{W}_ϵ mit Hilfe von stetigen positiven Funktionen $\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert ist:

$$(7.3) \quad \mathcal{W}_\epsilon = \left\{ \eta \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid |\eta(x)| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) \right| + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| < \epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Für jede Teilmenge U des \mathbb{R}^n werde bezüglich unseres skalaren Problems $\mathcal{P}(r, H, G)$, wobei $r \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$(7.4) \quad \text{norm}[(r, H, G), U] = \sup_{x \in U} \max_{\eta \in \{r, h_i, i \in I, g_j, j \in J\}} \left\{ |\eta(x)| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) \right| + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^n \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| \right\}$$

gesetzt.

Bemerkung 1 Für $|L| = 1$ und $D = \mathbb{R}_+^{|L|}$ erhalten wir die Ergebnisse über die strukturelle Stabilität eines allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblems aus [21].

Wir betrachten folgendes skalares Optimierungsproblem

$$\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G): \quad \min \left\{ r(x) := \max_{l \in L} f_l(x) \mid x \in M[H, G] \right\}.$$

Die zugehörige Unterniveaumenge definieren wir wie folgt:

$$\mathcal{L}_{\max}^t(\mathbf{f}, H, G) := \left\{ x \in M[H, G] \mid \max_{l \in L} f_l(x) \leq t \right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir verwenden die in Weber [54] benutzten Bezeichnungen und wollen der möglicherweise fehlenden Differenzierbarkeit erneut durch einen Übergang in den \mathbb{R}^{n+1} Abhilfe schaffen. Dazu verwenden wir die Projektionen $pr_{(1, \dots, n)}$, pr_{n+1} des \mathbb{R}^{n+1} auf den Raum \mathbb{R}^n beziehungsweise auf den Raum \mathbb{R} ; das bedeutet

$$\check{x} = \left(pr_{(1, \dots, n)}(\check{x}), pr_{n+1}(\check{x}) \right) = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Nun wird das folgende C^2 -glatte Problem betrachtet:

$$\mathcal{P}^\vee(\check{f}, \check{H}, \check{G}): \quad \min\{\check{f}(\check{x}) := pr_{n+1}(\check{x}) = x_{n+1} \mid x \in M[\check{H}, \check{G}]\},$$

wobei

$$M[\check{H}, \check{G}] := \left\{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in M[H, G], f_l(x) - x_{n+1} \leq 0 \quad (l \in L) \right\},$$

mit $\check{h}_i(\check{x}) := h_i(x) \quad (i \in I)$ und

$$\check{g}_j(\check{x}) := \begin{cases} g_j(x), & \text{für } j \in J \\ f_l(x) - x_{n+1}, & \text{für } j = s + l, \quad l \in L. \end{cases}$$

Das Problem $\mathcal{P}^\vee(\check{f}, \check{H}, \check{G})$ ist ein Spezialfall des Problems

$$MP(p, q): \quad \min \{t \mid x \in Z, t \in \mathbb{R}, \text{mathbf{f}}(x) - tq \in p - C\},$$

wobei $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer ist, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$, $C \subseteq \mathbb{R}^l$ ist nichtleer, konvex und abgeschlossen und $(p, q) \in \mathbb{R}^l \times C^0$. Hierbei ist C^0 das relative Innere von C .

Diese Familie von skalaren Optimierungsproblemen steht in starker Beziehung zur Skalarisierungsmethode der Vektroptimierungsprobleme. Wie in der Arbeit von Weidner [55] hervorgehoben wurde, beinhalten diese Skalarisierungsmethoden die bekannten Verfahren von Brosowski und Conci [5], Helbig [26], Wierzbicki [59] und anderen in [27] zitierten Veröffentlichungen. Man kann sagen, dass jeder Minimalpunkt bezüglich (p, q) von $\mathcal{P}^\vee(\check{f}, \check{H}, \check{G})$ ein schwacher effizienter Punkt ist und umgekehrt löst jeder schwache effiziente Punkt und daher jeder effiziente Punkt für vorgegebene Parameter (p, q) das skalare Problem $\mathcal{P}^\vee(\check{f}, \check{H}, \check{G})$. Wir verweisen auch auf Guerra/Lopez [24], wo eine Einbettung zur Lösung von $\mathcal{P}^\vee(\check{f}, \check{H}, \check{G})$ im Falle $M = \mathbb{R}^n$ untersucht wurde.

Es ist festzustellen, dass es sich bei jedem $t \in \mathbb{R}$ bei $\mathcal{L}_{\max}^t(\mathbf{f}, H, G)$ um die Projektion (im Sinne von $pr_{(1, \dots, n)}$) der Unterniveaumenge $\mathcal{L}^{\vee t}(\check{f}, \check{H}, \check{G})$ auf den Raum \mathbb{R}^n handelt. Außerdem sind die beiden Mengen homotopy-equivalent (siehe Jongen et al. [37], Lemma 4.2.1). Es sei betont, dass $M[\check{H}, \check{G}]$ der Epigraph $E(\max_{l \in L} f_l)$ über die Zulässigkeitsmenge $M[H, G]$ ist.

Wir definieren die kritischen Punkte in Bezug auf die nichtleeren Mengen maximaler Indizes

$$(7.5) \quad K_o(x) := \{k \in K \mid r(x) = f_k(x)\} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

wie folgt:

Definition 43 (Weber[54]) Sei $\bar{x} \in M[H, G]$ gegeben. Dann heißt \bar{x} ein Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$, falls $\check{\bar{x}} := (\bar{x}, r(\bar{x}))$ ein Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}^{\vee}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$ ist, d.h. falls es Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R} (i \in I)$, $\mu_j \in \mathbb{R} (j \in j_o(\bar{x}))$ und $\nu_k \in \mathbb{R} (k \in K_o(\bar{x}))$ derart gibt, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$(7.6) \quad \sum_{k \in K_o(\bar{x})} \nu_k Df_k(\bar{x}) = \sum_{i \in I} \lambda_i Dh_i(\bar{x}) + \sum_{j \in j_o(\bar{x})} \mu_j Dg_j(\bar{x}),$$

$$(7.7) \quad \mu_j \geq 0 \quad (j \in j_o(\bar{x})), \quad \nu_k \geq 0 \quad (k \in K_o(\bar{x})),$$

$$(7.8) \quad \sum_{k \in K_o(\bar{x})} \nu_k = 1.$$

Es sei die eineindeutige, durch

$$(7.9) \quad \mathcal{K} : \bar{x} \mapsto (\bar{x}, r(\bar{x}))$$

gegebene Korrespondenz zwischen den Kuhn-Tucker-Punkten des ursprünglichen Problems $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ und jenen des dimensionserhöhten Problems

$\mathcal{P}^{\vee}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$ gegeben. Durch die nachfolgenden Aussagen wird es immer begründeter (siehe Weber [54]), die beiden Probleme $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ und $\mathcal{P}^{\vee}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$ zu identifizieren:

- (a) Das Problem $\mathcal{P}^{\vee}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$ besitzt kein lokales Maximum.
- (b) Alle Kuhn-Tucker-Punkte von $\mathcal{P}^{\vee}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$ liegen in Graph von $f \mid M[H, G]$.
- (c) Ein Punkt $\bar{x} \in M[H, G]$ ist genau dann ein lokaler Minimalpunkt von $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$, wenn der Punkt $(\bar{x}, r(\bar{x}))$ ein lokaler Minimalpunkt von $\mathcal{P}^{\vee}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$ ist.

Das Charakterisierungstheorem für Probleme vom Maximumstyp kann nun wie folgt formuliert werden:

Satz 41 (Charakterisierungssatz Weber [54]) Sei $M[H, G]$ kompakt. Dann ist das Optimierungsproblem $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ genau dann strukturell stabil, wenn die folgenden drei Bedingungen gelten:

- (C1^{max}) Die MFCQ ist in jedem Punkt aus $M[H, G]$ erfüllt.
- (C2^{max}) Jeder Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ ist stark stabil.
- (C3^{max}) Verschiedene Kuhn-Tucker-Punkte besitzen verschiedene $(r-)$ Werte.

Nun können wir als Bedingung stetiger Abhängigkeit eines Kuhn-Tucker-Punktes von den Problemdata die starke Stabilität im Sinne von Kojima wie folgt definieren:

Definition 44 Sei $x^u \in M[H, G]$ ein Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}(r, H, G)$, $r \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann wird x^u stark stabil genannt, falls für gewisses $\bar{\delta} > 0$ und jedes $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ ein $\alpha > 0$ derart existiert, dass für jede C^2 -Funktion $(\tilde{r}, \tilde{H}, \tilde{G})$ mit $\text{norm}[(r - \tilde{r}, H - \tilde{H}, G - \tilde{G}), B(x^u, \delta)] \leq \alpha$ die Kugel $B(x^u, \delta)$ einen Kuhn-Tucker-Punkt \bar{x}^d von $\mathcal{P}(\tilde{r}, \tilde{H}, \tilde{G})$ enthält, welcher in $B(x^u, \bar{\delta})$ eindeutig bestimmt ist.

Lemma 5 (Kojima [41]) Sei $\bar{x}^u \in M[H, G]$ ein Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}(r, H, G)$, $r \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- (a) Falls die LICQ an der Stelle \bar{x}^u erfüllt ist, so ist \bar{x}^u genau dann stark stabil, wenn die Matrix $D^2L_{[\lambda, \mu]}(\bar{x}^u)$ nichtverschwindende Determinanten mit einem gemeinsamen Vorzeichen auf den Teilräumen $W(\bar{x}^u, \bar{J})$ für alle \bar{J} mit $J_+(\bar{x}^u) \subseteq \bar{J} \subseteq J_o(\bar{x}^u)$ besitzt, wobei

$$(7.10) \quad J_+(\bar{x}^u) = \{j \in J_o(\bar{x}^u) \mid \mu_j > 0\},$$

$$(7.11) \quad W(\bar{x}^u, \bar{J}) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid Dh_i(\bar{x}^u)\xi = 0, i \in I, Dg_j(\bar{x}^u)\xi = 0, j \in \bar{J}\},$$

$$(7.12) \quad L_{[\lambda, \mu]}(x) := r(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i h_i(x) + \sum_{j \in J_o(\bar{x}^u)} u_j g_j(x).$$

- (b) Falls die MFCQ, nicht aber die LICQ, im Punkt \bar{x}^u erfüllt ist, so ist \bar{x}^u genau dann stark stabil, wenn die Matrix $D^2L_{[\lambda, \mu]}(\bar{x}^u)$ positiv definit auf dem Teilraum $W(\bar{x}^u, J_+(\bar{x}^u))$ ist, wobei $J_+(\bar{x}^u)$ gemäß (7.10) definiert sei.

Wir bemerken, dass die Strukturelle Stabilität des Problems $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ bereits in [54] bewiesen wurde (vgl. Satz 41). Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium für die strukturelle Stabilität eines Vektoroptimierungsproblems.

Satz 42 (Hauptsatz) Sei D ein spitzer polyedrischer Ordnungskegel und das Vektoroptimierungsproblem $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ mit der kompakten zulässigen Menge $M[H, G]$ strukturell stabil. Dann ist das Problem $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ strukturell stabil.

7.1 Lemmata und vorbereitende Ergebnisse

Lemma 6 Sei $t \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}_+^{|L|}$ und $u := (t, \dots, t) = te$, $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{|L|}$. Dann gelten die folgende Beziehungen zwischen den Unterniveaumengen:

$$(7.13) \quad \mathcal{L}_{\max}^t(\mathbf{f}, H, G) = pr_{(1, \dots, n)} \mathcal{L}^{\vee t}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G}) = \mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G).$$

Beweis Die erste Ungleichung ist klar. Wir zeigen die zweite.

$\mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G) \subseteq pr_{(1, \dots, n)} \mathcal{L}^{\vee t}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$: Sei $x \in \mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G)$. Dann ist $x \in M[H, G]$, $f_l(x) \leq t$, $l \in \{1, \dots, L\}$. Daraus folgt $(x, t) \in M(\check{H}, \check{G})$ und daher $x \in pr_{(1, \dots, n)} \mathcal{L}^{\vee t}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$.

$\mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G) \supseteq pr_{(1, \dots, n)} \mathcal{L}^{\vee t}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$: Sei $x \in pr_{(1, \dots, n)} \mathcal{L}^{\vee t}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$. Dann existiert ein $z \in \mathbb{R}$ mit $(x, z) \in \mathcal{L}^{\vee t}(\check{\mathbf{f}}, \check{H}, \check{G})$. Daraus folgt $x \in M[H, G]$, $f_l(x) \leq z$, $l \in L$ und $z \leq t$ und daher $f_l(x) \leq t$, $l \in L$. D.h. $x \in \mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G)$

□

Lemma 7 Sei D ein spitzer, abgeschlossener und konvexer Kegel. Dann existiert ein $\bar{u} \in \mathbb{R}^{|L|}$ mit:

$$(7.14) \quad u_1 \leq \frac{\bar{u}}{D}, \quad u_2 \leq \frac{\bar{u}}{D}$$

für alle $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{|L|}$.

Beweis: Wir benutzen eine von Sawaragi/Nakayama/Tanino benutzte Idee zum Beweis des Satzes 3.3.1 in [51]. Wir wählen

$$d \in \text{int} D$$

und definieren

$$y(\alpha) = \alpha d, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Wir behaupten, dass für jedes $y \in \mathbb{R}^{|L|}$ ein $\alpha > 0$ existiert, so dass

$$y \in y(\alpha) - D.$$

Ist diese Behauptung nicht wahr, dann folgt unter Anwendung des Trennungssatzes auf den Strahl $\{y - \alpha d : \alpha > 0\}$ und den konvexen Kegel $-D$ die Existenz eines $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ mit

$$\langle v, y - \alpha d \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \alpha > 0$$

und

$$\langle v, d' \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } d' \in D.$$

Da $d \in \text{int}D$, ist $\langle v, d \rangle > 0$ wegen der letzten Ungleichung und somit

$$\langle v, y - \alpha d \rangle < 0$$

für hinreichend großes α , welcher ein Widerspruch ist.
Folglich können wir $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ so wählen, dass

$$u_1 \in \alpha_1 d - D \quad \text{und} \quad u_2 \in \alpha_2 d - D.$$

Wir setzen $\alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Da $\alpha_i d \leq \frac{\alpha_{\max} d}{D}, i = 1, 2$, können wir feststellen, dass die Ungleichungen (7.14) von $\bar{u} := \alpha_{\max} d$ erfüllt werden \square

7.2 Beweis des Hauptsatzes (Notwendigkeitsteil)

O.B.d.A können wir annehmen, dass $D = \mathbb{R}_+^{|L|}$ (vgl. Lemma 5 und das Problem $\overline{\mathcal{VOP}}$). Es sei nun angenommen, dass das Vektoroptimierungsproblem $\mathcal{VOP}(f, H, G)$ *strukturell stabil* bezüglich der Definition 42 ist. So müssen wir entsprechend den Ergebnissen von Weber in [33] (siehe Satz 41) das Erfülltsein folgender Bedingungen nachprüfen:

- (C1) Die Bedingung MFCQ ist in jedem Punkt aus $M[H, G]$ erfüllt.
- (C2) Jeder Kuhn-Tucker-Punkt von $\mathcal{P}^{\max}(f, H, G)$ ist stark stabil.
- (C3) Verschiedene Kuhn-Tucker-Punkte besitzen verschiedene $(f-)$ Werte.

Beweis von (C1): Wir zeigen, dass aus der strukturellen Stabilität von $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ die Bedingung (C1) folgt. Dazu betrachten wir eine C_s^2 -Umgebung \mathcal{O} von (\mathbf{f}, H, G) mit der Eigenschaft: für jedes $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G}) \in \mathcal{O}$ die Menge $M[\tilde{H}, \tilde{G}]$ kompakt und ferner ist $\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$ äquivalent zu $\mathcal{VOP}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G})$. Wir wählen ein beliebiges Element $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G}) \in \mathcal{O}$. Seien ϕ und ψ die Abbildungen, mit deren Hilfe sich diese Äquivalenz bezüglich Definition 41 herstellt wird.

Wir nehmen $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^{|L|}$ mit

$$(7.15) \quad \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_{|L|}), \quad \alpha_i := \max_{x \in M[H, G]} f_i(x), \quad i = 1, \dots, L$$

$$(7.16) \quad \tilde{\alpha} := (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{|L|}), \quad \tilde{\alpha}_i := \max_{x \in M[\tilde{H}, \tilde{G}]} \tilde{f}_i(x), \quad i = 1, \dots, L$$

$$(7.17)$$

und betrachten die Vektoren α und $\psi^{-1}(\tilde{\alpha})$. Aus Lemma 7.14 folgt die Existenz eines $\bar{u} \in \mathbb{R}^{|L|}$, so dass $\alpha \leq \frac{\bar{u}}{D}$ und $\psi^{-1}(\tilde{\alpha}) \leq \frac{\bar{u}}{D}$. Wir bemerken, dass $\mathcal{L}^{\bar{u}}(\mathbf{f}, H, G) = M[H, G]$. Da ψ monoton wachsend ist, erhalten wir $\tilde{\alpha} \leq \psi(\frac{\bar{u}}{D})$. Folglich ist $\mathcal{L}^{\psi(\bar{u})}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G}) = M[\tilde{H}, \tilde{G}]$. Aus $\phi_{\bar{u}}(\mathcal{L}^{\bar{u}}(\mathbf{f}, H, G)) = \mathcal{L}^{\psi(\bar{u})}(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{H}, \tilde{G})$ erhalten wir $\phi_{\bar{u}}(M[H, G]) = M[\tilde{H}, \tilde{G}]$. Infolgedessen bildet $\phi_{\bar{u}}$ einen Homöomorphismus zwischen $M[H, G]$ und $M[\tilde{H}, \tilde{G}]$. Damit haben wir Folgendes gezeigt: für jedes (\tilde{H}, \tilde{G}) in einer C_S^2 -Umgebung von (H, G) sind die Mengen $M[H, G]$ und $M[\tilde{H}, \tilde{G}]$ homöomorph. Mit Hilfe des Stabilitätstheorems 5 können wir auf äquivalente Weise behaupten, dass die MFCQ in jedem Punkt $x \in M[H, G]$ erfüllt ist. Daraus folgt die Gültigkeit der Bedingung (C1).

Beweis von (C2): Wir nehmen an, es existiert einen stationären Punkt, der nicht stark stabil ist, d.h. die Bedingung (C2) ist nicht erfüllt. Um einen Widerspruch zu konstruieren, wird der folgende Störungssatz von Weber [54] eine zentrale Rolle spielen:

Lemma 8 (Störungslemma, Weber [54]) *Sei $M[H, G]$ kompakt und die Bedingung (C1) erfüllt. Ferner besitze $\mathcal{P}^{\max}(V, H, G)$ einen Kuhn-Tucker-Punkt \bar{x}^u , der nicht stark stabil ist. Dann existieren eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und Funktionen $(V^1, \tilde{H}, \tilde{G})$, $(V^2, \tilde{H}, \tilde{G})$, beide beliebig und C_S^2 -nahe bei (V, H, G) , mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Das Problem $\mathcal{P}^{\max}(V^1, \tilde{H}, \tilde{G})$ besitzt k Kuhn-Tucker-Punkte, genau einer davon ist nicht stark stabil.*
- (ii) *Das Problem $\mathcal{P}^{\max}(V^2, \tilde{H}, \tilde{G})$ hat mindestens $k + 1$ Kuhn-Tucker-Punkte, die alle stark stabil sind.*
- (iii) *Die Bedingungen C1 und C3 sind für die Probleme $\mathcal{P}^{\max}(V^i, \tilde{H}, \tilde{G})$, $i = 1, 2$ erfüllt.*

Für $r \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge $\{x \in M[H, G] \mid a \leq r(x) \leq b\}$ mit $\mathcal{L}_b^a(r, H, G)$ für $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Folgendes Lemma wurde in Guddat/Jongen [21] gezeigt:

Lemma 9 *Seien die zulässige Menge $M[H, G]$ des Problems $\mathcal{P}(r, H, G)$ kompakt und die Bedingung C1 erfüllt. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b$.*

- (i) *Falls $\mathcal{L}_b^a(r, H, G)$ keinen Kuhn-Tucker-Punkt enthält, so sind $\mathcal{L}^a(r, H, G)$ und $\mathcal{L}^b(r, H, G)$ homöomorph.*

- (ii) Enthalte $\mathcal{L}_b^a(r, H, G)$ genau einen Kuhn-Tucker-Punkt \bar{x}^u mit $a < r(\bar{x}^u) < b$, und sei \bar{x}^u stark stabil. Dann sind die Mengen $\mathcal{L}^a(r, H, G)$ und $\mathcal{L}^b(r, H, G)$ nicht homöomorph.

Lemma 10 Seien $M[H, G]$ kompakt und die Bedingung C1 erfüllt. Seien $V^1, V^2 \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^{|L|}$ Funktionen, die die Bedingung C3 bezüglich $\mathcal{P}^{\max}(V^i, H, G), i = 1, 2$, erfüllen, mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

- (i) Das Problem $\mathcal{P}^{\max}(V^1, H, G)$ besitzt k Kuhn-Tucker-Punkte, genau einer davon ist nicht stark stabil.
- (ii) Das Problem $\mathcal{P}^{\max}(V^2, H, G)$ hat mindestens $k + 1$ Kuhn-Tucker-Punkte, alle sind stark stabil.

Dann sind die Vektoroptimierungsprobleme $\mathcal{VOP}(V^i, H, G), i = 1, 2$, nicht äquivalent.

Beweis. Wir beziehen uns auf die n -dimensionalen Probleme $\mathcal{P}^{\max}(V^i, H, G), i = 1, 2$, aufgrund der entsprechenden $(n + 1)$ -dimensionalen Probleme $\mathcal{P}^{\vee}(\check{V}^i, \check{H}, \check{G}), i = 1, 2$. Für die letzteren Probleme studieren wir das topologische Verhalten der Unterniveaumengen, während der Niveauparameter t wachsend die Menge der realen Zahlen durchläuft. Unter Beachtung der Bedingung C3, die für beide Probleme formuliert wurde, und das Lemma 9, folgt daraus, dass der Homöomorphie-Typ von der Unterniveaumenge $\mathcal{L}^{\vee t}(\check{V}^2, \check{H}, \check{G})$ mindestens $k + 1$ wechselt, und mindestens $k - 1$, aber (nur) höchstens k solche Wechsel für $\mathcal{L}^{\vee t}(\check{V}^1, \check{H}, \check{G})$. Die paarweise Homotopie-Äquivalenz zwischen Unterniveaumengen in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^{n+1} führt uns zur analogen Beschreibung in der Dimension n des topologischen Verhaltens von $\mathcal{L}_{\max}^t(V^i, H, G), i = 1, 2$. Aus Lemma 6 (7.13) folgt, dass $\mathcal{L}^{te}(V^i, H, G), i = 1, 2$ zwei unterschiedliche Anzahlen beim Wechsel des topologischen Typs in \mathbb{R}^n besitzen, während wir uns entlang der Gerade $u(t) = te, e \in \mathbb{R}^{|L|}, t \in \mathbb{R}$ bewegen. Falls die Probleme $\mathcal{VOP}(V^i, H, G), i = 1, 2$ äquivalent sein sollen, müssen diese Probleme übereinstimmen.

Wir sind nun in der Lage, das Störungslemma in unserem indirekten Beweis der Bedingung (C2) anzuwenden. Ist die Bedingung C2 nicht erfüllt, dann können wir Lemma 8 und Lemma 10 anwenden, damit wir zwei nicht-äquivalente Probleme $\mathcal{VOP}(f^i, \tilde{H}, \tilde{G}), i = 1, 2$ mit jedem $(f^i, \tilde{H}, \tilde{G})$ beliebig C_S^2 -nahe bei (f, H, G) haben. Dies ist ein Widerspruch zur strukturellen Stabilität.

Beweis von (C3): Wir wissen, dass C1 und C2 erfüllt sind. Falls $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ die Bedingung C3 nicht erfüllt, wann auch immer die Gleichung $\max_{l \in L} f(\bar{x}_1^u) = \max_{l \in L} f(\bar{x}_2^u)$ für zwei unterschiedlichen Kuhn-Tucker-Punkte von $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ erfüllt ist, liefert uns die Addition einer kleinen positiven und einer kleinen negativen Konstante zu allen Funktionen f_k ($k \in L$) lokal in \bar{x}_1^u und \bar{x}_2^u ein Problem $\mathcal{P}^{\max}(\bar{\mathbf{f}}, H, G)$, das die Bedingung C3 erfüllt. Sei k die Anzahl der Kuhn-Tucker-Punkte von $\mathcal{P}^{\max}(\bar{\mathbf{f}}, H, G)$. Mit den gleichen Überlegungen wie beim Beweis des Lemma 10 wechselt der Homöomorphietyp von $\mathcal{L}_{\max}^t(\bar{\mathbf{f}}, H, G)$ mit wachsendem t genau k -mal. Der entsprechende Wechsel bezüglich $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$ ist kleiner als k . Somit, wie in Lemma 10, sind $\mathcal{VO}\mathcal{P}(\mathbf{f}, H, G)$ und $\mathcal{VO}\mathcal{P}(\bar{\mathbf{f}}, H, G)$ nicht äquivalent. Das ist ein Widerspruch zur Bedingung der strukturellen Stabilität von $\mathcal{VO}\mathcal{P}(\mathbf{f}, H, G)$ \square

Kapitel 8

Das Verfahren und Illustrative Beispiele

In diesem Abschnitt geben wir ein paar numerische Beispiele an, die mit Hilfe des folgenden Dialog-Verfahrens berechnet werden:

8.1 Dialog-Verfahren auf Basis einparametrischer Optimierung

Zunächst verallgemeinern wir das in [17] angegebene Verfahren:

Schritt 1 Wähle $k = 0$, $t_0 = 0$, $\mu^0, \mu^1 \in \mathbb{R}^l$ mit $\mu^0 \neq \mu^1$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Schritt 2 Berechne, wenn möglich, t_{k+1} mit $t_k < t_{k+1} \leq 1$ und einen g.c. Punkt $z^{k+1} = (x^{k+1}, t_{k+1})$ von $\mathcal{P}_u(t_{k+1})$. Falls g.c. Punkt von $P_u(t)$ für $t > t_k$ nicht gefunden werden kann, gehe zu Schritt 1. Andernfalls gehe zu Schritt 3.

Schritt 3 Der Entscheidungsträger entscheidet über den Punkt x^{k+1} . Ist x^{k+1} zufriedenstellend, dann STOP. Sonst gehe zu Schritt 4.

Schritt 4 Falls $t_{k+1} \geq 1$, gehe zu Schritt 1. Andernfalls $k = k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

8.2 Numerische Beispiele

Beispiel 5

$$(P_1) \quad \min\{\mathbf{f}(x) = (-x_1^2, -x_2) \mid x \in M_1\}$$

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Seien

$$\mathbf{u}(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1^1 + (1-t) \max\{-x_1^{o2} - \mu_1^1, 0\} \\ \mu_2^1 + (1-t) \max\{-x_2^o - \mu_2^1, 0\} \end{pmatrix}$$

$$\alpha(t) = \max^4\{0, t\},$$

wobei $t \in (-\infty, 1]$.

Betrachtet man eine regularisierte Normskalierung vom Typ (5.60) mit

$$\psi \circ f(x) = -\frac{1}{2} \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{u}(t)\|^2,$$

so erhalten wir foldende Einbettung:

$$(\mathcal{P}_u^1(t)) \min \left\{ -\frac{1}{2} \alpha(t) \left[(x_1^2 + u_1(t))^2 + (x_2 + u_2(t))^2 \right] + (1 - \alpha(t)) \|x - x^o\|^2 \mid x \in M_u^1(t) \right\}$$

$$M_u^1(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} g_1(x_1, x_2, t) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2, t) = -x_1^2 - \mu_1^1 + (t-1) \max\{-x_1^{o2} - \mu_1^1, 0\} \leq 0 \\ g_3(x_1, x_2, t) = -x_2 - \mu_2^1 + (t-1) \max\{-x_2^o - \mu_2^1, 0\} \leq 0 \end{cases} \right\}$$

- Goal: $\mu^1 = (-1, 0)$, Startpunkt: $x^o = (-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}) = (-0.7071067812, 0.7071067812)$ bei $t = -2.0$.

Als Lösung (Goal-Realizer) erhalten wir $\hat{x}^1 = (-1.000000000, -.2011647789E - 11)$ mit $f(\hat{x}^1) = (-1, +.2011647789E - 11)$. Das entspricht genau dem Pareto-Punkt $(-1, 0)$. Die Abbildungen 8.1 und 8.2 zeigen die entsprechenden Lösungskurven im Entscheidungs- und Zielraum.

- Goal: $\mu^1 = (-1, 0)$, Startpunkt: $x^o = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}) = (0.7071067812, 0.7071067812)$ bei $t = -2.0$. Mit diesem Startpunkt erhalten wir einen weiteren Goal-Realizer $\hat{x}^2 = (1.000000000, -.2011647789E - 11)$ (siehe Abbildungen 8.3 und 8.4). Wir bemerken, dass in beiden Fällen, der Goal-Realizer ein Punkt vom Typ 5 ist.

Beispiel 6 (Strukturelles Design eines Balkens [32] (Example 11.1)) Die Modellierung dieses Problems liefert folgendes Vektroptimierungsproblem:

$$\min \left(\begin{array}{c} lx_1x_2 \\ \frac{\pi}{4}(x_1^2 + x_2^2) \end{array} \right)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} K - x_1^2x_2 &\leq 0 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0, \end{aligned}$$

wobei $K > 0$ eine Druckkonstante ist und $l > 0$ die Länge des Balkens angibt.

Mit der gewichteten Summe mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ erhalten wir folgende Einbettung:

$$(\mathcal{P}_u^2(t)) \min \left\{ \alpha(t) \left(lx_1x_2 + \frac{\pi}{4}(x_1^2 + x_2^2) \right) + (1 - \alpha(t)) \|x - x^o\|^2 \mid x \in M_u^2(t) \right\},$$

$$M_u^2(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, t) = K - x_1^2x_2 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2, t) = x_1 - 4x_2 \\ g_3(x_1, x_2, t) = -x_1 + x_2 \\ g_4(x_1, x_2, t) = -x_1 \\ g_5(x_1, x_2, t) = -x_2 \\ g_6(x_1, x_2, t) = lx_1x_2 - \mu_1^1 + (t-1) \max\{lx_1^o x_2^o - \mu_1^1, 0\} \\ g_7(x_1, x_2, t) = \frac{\pi}{4}(x_1^2 + x_2^2) - \mu_2^1 + (t-1) \max\{\frac{\pi}{4}(x_1^{o2} + x_2^{o2}) - \mu_2^1, 0\} \end{array} \right. \right\}.$$

Mit dem Startpunkt $x^o = (14, 10)$ und Länge $L = 1$ zeigt die Tabelle 8.1 einen Ablauf des Dialogverfahrens und die Lösungen in Abhängigkeit der Zielen.

Nr	K	μ_1^1	μ_2^1	\hat{x}_1	\hat{x}_2	$f_1(\hat{x})$	$f_2(\hat{x})$	Abbildung
1	1000	200	800	12.09	6.84	82.69	151.54	Abbildung 8.5
2	1000	400	600	12.09	6.84	82.69	151.54	Abbildung 8.6
3	1000	200	300	12.10	6.82	82.52	151.52	Abbildung 8.7
4	1000	100	240	10	9.99	99.9	156.92	Abbildung 8.8
5	1000	100	250	10	9.99	99.9	156.92	Abbildung 8.9
6	1500	1000	2500	13.8584	7.8102	108.2368	198.7485	Abbildung 8.10

Tabelle 8.1: Ein Dialogablauf

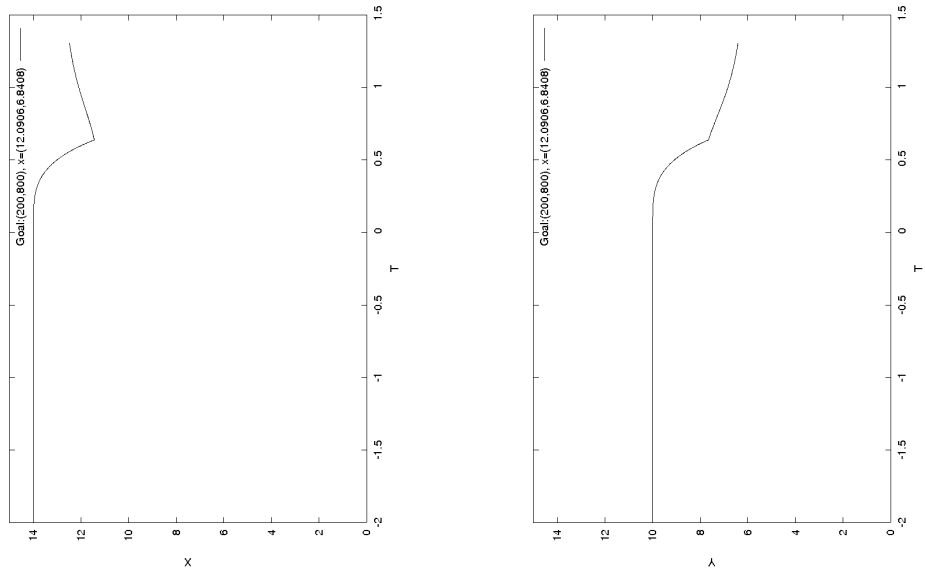


Abbildung 8.5: Beispiel 6 mit dem Goal $\mu^1 = (200, 800)$

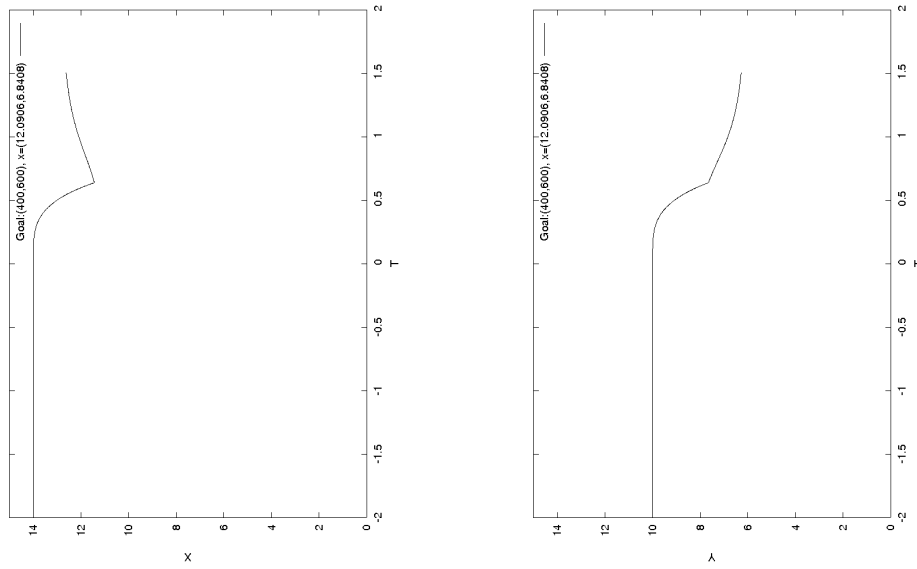


Abbildung 8.6: Beispiel 6 mit $\mu^1 = (400, 600)$

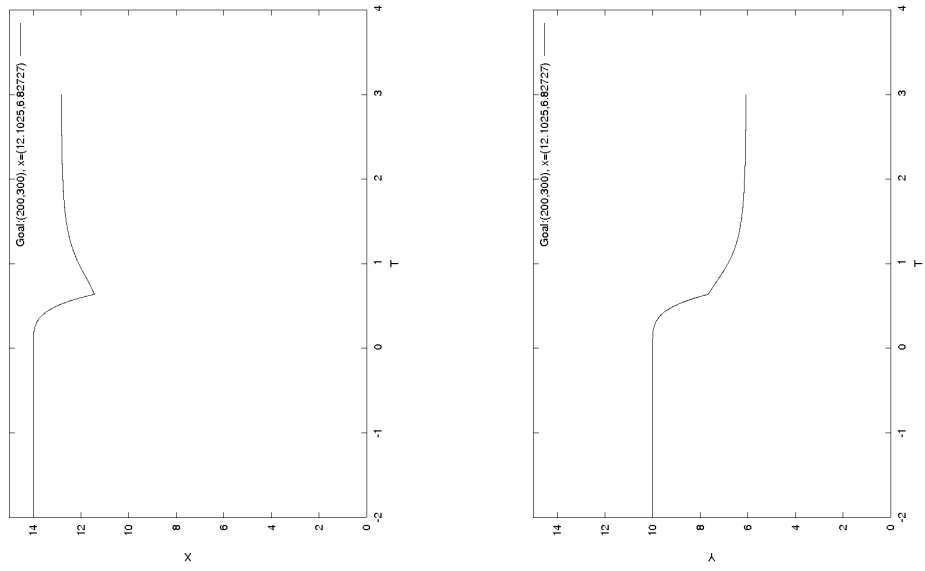


Abbildung 8.7: Beispiel 6 mit $\mu^1 = (200, 300)$

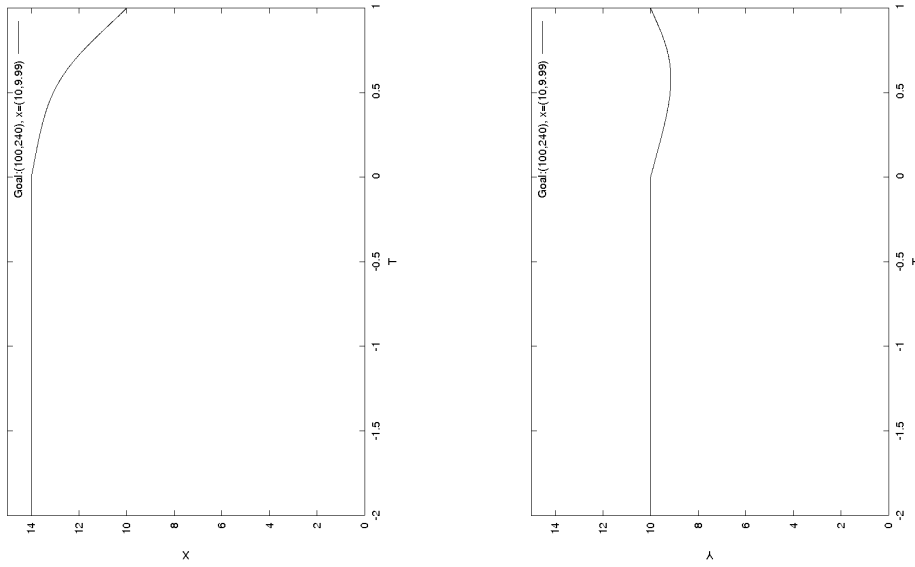


Abbildung 8.8: Beispiel 6 mit $\mu^1 = (100, 240)$

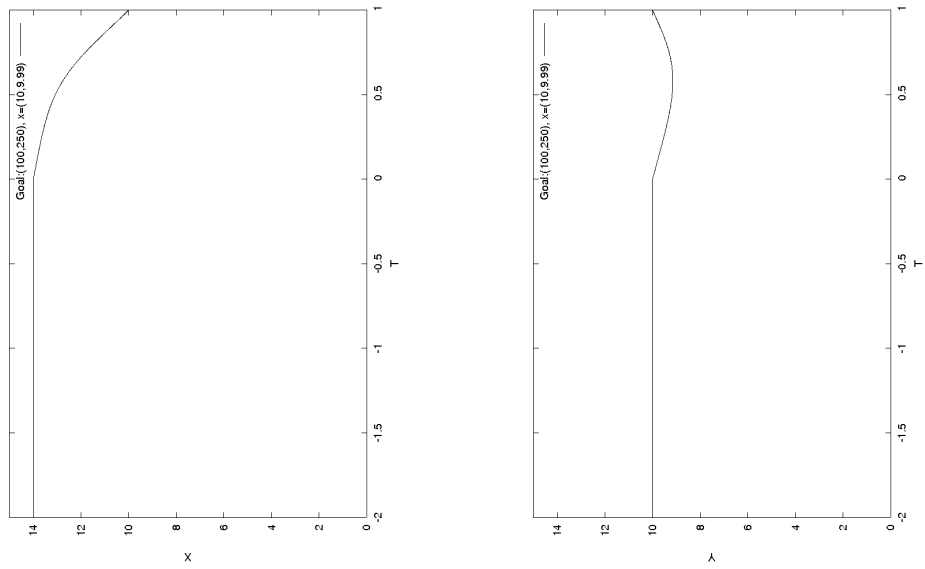


Abbildung 8.9: Beispiel 6 mit $\mu^1 = (100, 250)$

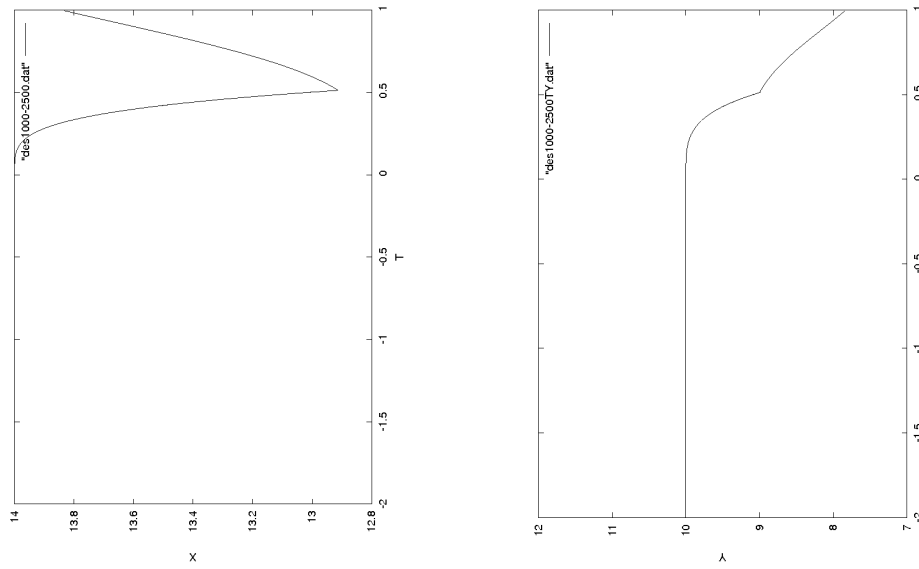
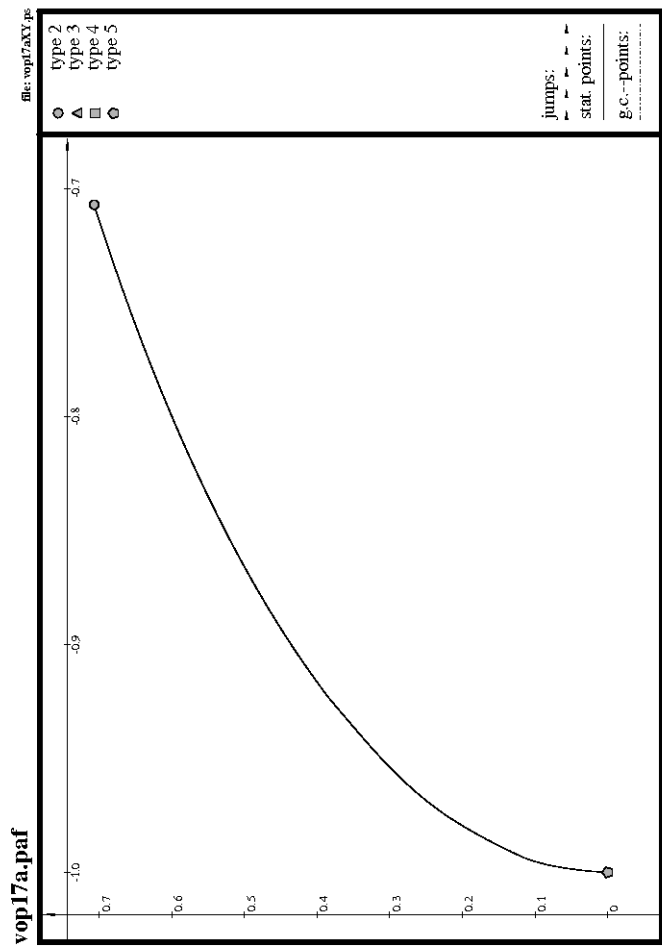
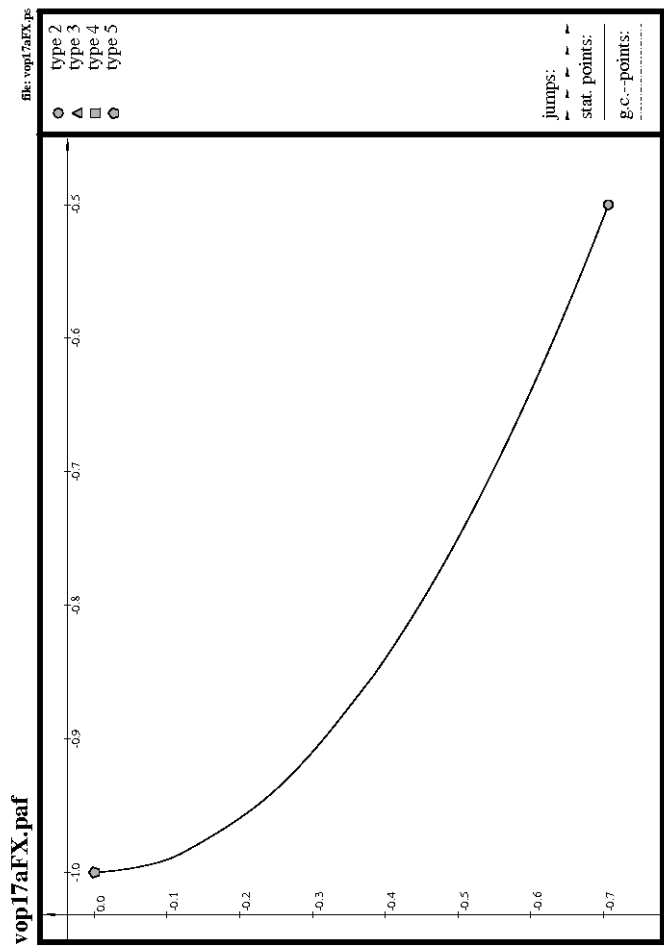


Abbildung 8.10: Beispiel 6 mit $\mu^1 = (1000, 2500)$, $K = 1500$

Abbildung 8.1: Beispiel 5 in (x_1, x_2) -Raum

Abbildung 8.2: Beispiel 5 in (y_1, y_2) -Raum

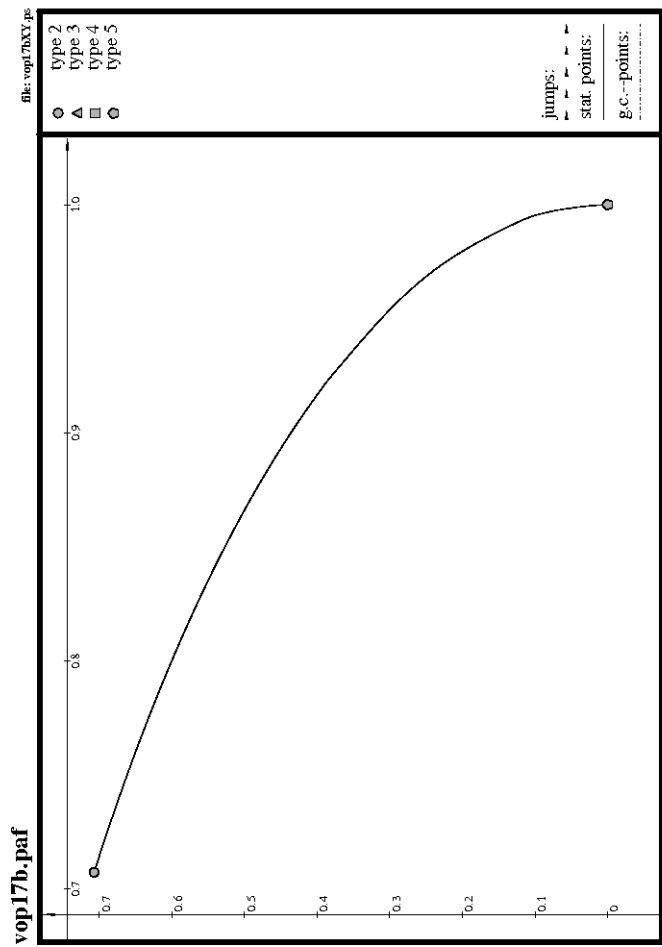


Abbildung 8.3: Beispiel 5 in (x_1, x_2) -Raum mit $x^0 = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$

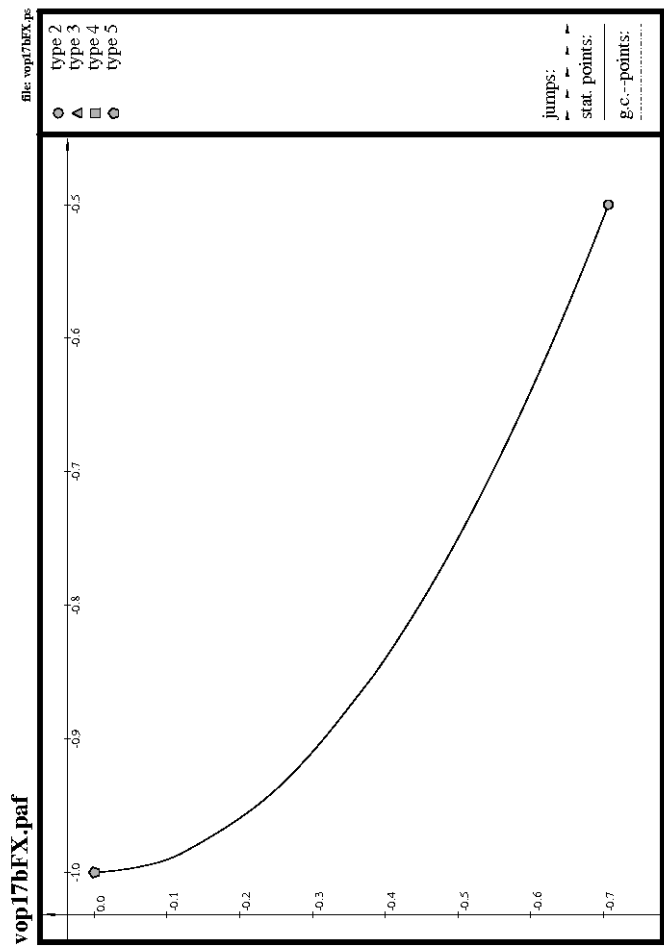


Abbildung 8.4: Beispiel 5 in (y_1, y_2) -Raum mit $x^0 = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})$

Kapitel 9

Abschließende Bemerkung

In dieser Arbeit haben wir die Anwendbarkeit der Kurvenverfolgungsmethoden für die Lösung von mehrkriteriellen Optimierungsproblemen in halbgeordneten endlich dimensional Räumen untersucht. Zur Bestimmung einer Lösung, die den Entscheidungsträger zufriedenstellt, haben wir zwei Klassen einparametrischer Optimierungsprobleme konstruiert. Um dem Entscheidungsträger zusätzliche nützliche Informationen zu liefern, sind sämtliche g.c. Punkte $x(t)$, $t \in (-\infty, 1]$, dieser einparametrischen Optimierungsprobleme (Einbettungen) zulässige Punkte der Restriktionsmenge des betrachteten mehrkriteriellen Optimierungsproblems. Mit Hilfe der Projektion auf den konvexen Ordnungskegel haben wir gezeigt, dass diese Einbettungen wohldefiniert sind.

Diese Einbettungen wurden untersucht unter dem Gesichtspunkt der Theorie der einparametrischen Optimierungsprobleme für den Fall eines beliebigen spitzen polyedrischen Ordnungskegels. Sie umfasst z.B. Fragestellungen nach der Art der Singularitäten, nach besseren Startbedingungen (Vermeidung eines Startpunktes vom Typ 4) unter denen eine Zusammenhangskomponente in der Menge stationärer oder verallgemeinerter kritischer Punkte mit Hilfe von Kurvenverfolgungsmethoden numerisch beschrieben werden kann. Wir haben gezeigt, dass die Existenz einer Lösungskurve (Verbindungskurve) entweder unter Konvexität des Vektoroptimierungsproblems sowie Unterhalbstetigkeit der zugehörigen "Abschnittsabbildung" Γ (vgl. (5.91)) oder der KH-Regularität der betrachteten Einbettungen und dem Erfülltsein der MFCQ auf deren Restriktionsmengen $M_u(t)$, $t \in (-\infty, 1]$, gesichert werden kann. Im nichtkonvexen Fall kann das Erfülltsein der MFCQ nicht gesichert werden - Die EMFCQ als hinreichende Bedingung ist in der Menge der schwach effizienten Punkten verletzt. Unter JTT-Regularität liefert die Menge der schwach effizienten Punkte mögliche Kandidaten für Singularitäten vom Typ 4 und 5. Da-

her spielt hier der Algorithmus Jump II* eine wesentliche Rolle. Sie kann auch kombiniert im Zusammenhang mit einem Zweischnittverfahren zur Lösung globaler Optimierungsprobleme (siehe [16]) angewendet werden. Anschließend haben wir das von Guddat/Jongen eingeführte Konzept der strukturellen Stabilität eines skalaren Optimierungsproblems in der Vektoroptimierung verallgemeinert und einen Zusammenhang zur strukturellen Stabilität eines Minimaxproblems erstellt. Dieses Minimaxproblem steht in starker Beziehung zur Skalarisierungsmethode der Vektoroptimierungsprobleme.

Literaturverzeichnis

- [1] ALLGOWER, Eugene L. ; GEORG, Kurt: *Introduction to numerical continuation methods. Reprint of the 1979 original.* Classics in Applied Mathematics 45. Philadelphia, PA: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics. xxv, 388 p. \$ 57.00 , 2003
- [2] AUBIN, J. P. ; CELLINA, A.: *Differential Inclusions.* Berlin : Addison-Wesley, 1984
- [3] BANK, B. ; GUDDAT, J. ; KLATTE, D. ; KUMMER, B. ; TAMMER, K.: *Non-linear parametric optimization.* Berlin: Akademie-Verlag, 1982
- [4] BRÖCKER, Th.: *Differentiable germs and catastrophes. Translated by L. Lander.* London Mathematical Society Lecture Note Series. 17. London etc.: Cambridge University Press. VI, 179 p., 1975
- [5] BROSOWSKI, B. ; CONCI, A.: On Vector Optimization and Parametric Programming. In: *Segundas Jornadas Latino-Americanas de Matematica Aplicada 2, 1983 (Vol II),* S. 483–495
- [6] DOMMISCH, G.: On the existence of Lipschitz-continuous and differentiable selections for multifunctions. In: *Parametric optimization and related topics, Int. Conf., Plaue/GDR 1985, Math. Res. 35,* 60-73 . 1987
- [7] EHRGOTT, M.: *Multicriteria Optimization.* Springer-Verlag, 2005 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems). – ISBN 3–540–67869–7
- [8] GAUVIN, J.: A necessary and Sufficient Regularity Condition to have Bounded Multipliers in Nonconvex Programming. In: *Math. Program.* 12 (1977), S. 136–8
- [9] GFRERER, H. ; GUDDAT ; WACKER, J.: Pathfollowing Methods for Kuhn-Tucker Curves by an Active Index set Strategy. In: *Bagchi, A., Jongen, H.Th. (eds.) Systems and optimization. Lecture Notes in Control*

and Information Sciences 66, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 111-131. 1985

- [10] GFRERER, H. ; GUDDAT, J. ; WACKER, J.: A Globally Convergent Algorithm Based on Embedding and Parametric Optimization. In: *Computing* 30 (1983), S. 225–252
- [11] GOLLMER, R. ; GUDDAT, J. ; GUERRA, F. ; NOWACK, D. ; RÜCKMANN, Jan-J.: Pathfollowing methods in nonlinear optimization. I: Penalty embedding. In: *Guddat, Jürgen (ed.) et al., Parametric optimization and related topics. III. Proceedings of the 3rd conference held in Güstrow, Germany, August 30 - September 5, 1991. Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag. Approximation Optimization. 3, 163-214 . 1993*
- [12] GOLLMER, R. ; KAUSMANN, U. ; NOWACK, D. ; WENDLER, K.: Computerprogramm PAFO. In: *Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik (1995)*
- [13] GOMEZ BOFILL, Walter: Properties of an interior embedding for solving nonlinear optimization problems. In: *Preprint 96-31, Humboldt-Universität zu Berlin (1999)*
- [14] GÖPFERT, A. ; NEHSE, R.: *Vektoroptimierung: Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Leipzig : B.G. Teubner, 1990
- [15] GROSSMANN, Ch. ; TERNO, J.: *Numerik der Optimierung. (Numerical methods in optimization). 2., durchges. Aufl.* Teubner Studienbücher: Mathematik. Stuttgart: B. G. Teubner. 351 S., 1997
- [16] GUDDAT, J. ; F., Guerra ; JONGEN, H.Th.: *Parametric optimization: singularities, pathfollowing and jumps*. Stuttgart: B.G. Teubner; Chichester etc.: John Wiley & Sons. 191 p., 1990
- [17] GUDDAT, J. ; F., Guerra ; TAMMER, K. ; WENDLER, K.: *Multiobjective and stochastic optimization based on parametric optimization*. Mathematical Research, 26. Berlin: Akademie-Verlag. 175 p. M. 22.00 , 1985
- [18] GUDDAT, J. ; GUERRA, F.: Multiobjective optimization using pivoting and continuation methods. In: *Arch. Autom. Telemech.* 32 (1987), Nr. 4, S. 301–318
- [19] GUDDAT, J. ; GUERRA, F. ; NOWACK, D.: On the role of the Mangasarian-Fromovitz constraint qualification for penalty-, exact penalty-, and Lagrange multiplier methods. In: *Fiacco, Anthony (ed.),*

Mathematical programming with data perturbations. 17th symposium, George Washington University, Washington, DC, USA, May 1995. New York, NY: Marcel Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math. 195, 159-183 . 1997

- [20] GUDDAT, J. ; GUERRA, F. ; NOWACK, D.: New embeddings for nonlinear multiobjective optimization problems. I. In: *Yugosl. J. Oper. Res.* 8 (1998), Nr. 1, S. 45–73
- [21] GUDDAT, J. ; JONGEN, H.Th.: Structural stability in nonlinear optimization. In: *Optimization* 18 (1987), S. 617–631
- [22] GUDDAT, J. ; JONGEN, H.Th. ; RUECKMANN, J.: On stability and stationary points in nonlinear optimization. In: *J. Aust. Math. Soc., Ser. B* 28 (1986), S. 36–56
- [23] GUDDAT, J. ; RÜCKMANN, Jan-J.: One-parametric optimization: Jumps in the set of generalized critical points. In: *Control Cybern.* 23 (1994), Nr. 1-2, S. 139–151
- [24] GUERRA, Francisco ; LOPEZ, Guillermo: A parametric embedding for the finite minimax problem. In: *Math. Methods Oper. Res.* 49 (1999), Nr. 3, S. 359–371
- [25] HAIMES, Yacov Y.: Integrated system identification and optimization. In: *Control and dynamic Syst.* 10, 435-518 . 1973
- [26] HELBIG, S.: Approximation of the efficient point set by perturbation of the ordering cone. In: *Z. Oper. Res.* 35 (1991), Nr. 3, S. 197–220
- [27] HELBIG, S.: On quantitative and qualitative stability of a scalarization method. I. In: *Guddat, Jürgen (ed.) et al., Parametric optimization and related topics. III. Proceedings of the 3rd conference held in Güstrow, Germany, August 30 - September 5, 1991. Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag. Approximation Optimization.* 3, 255-270. 1993
- [28] HILLERMEIER, Claus: *Nonlinear multiobjective optimization. A generalized homotopy approach.* ISNM. International Series of Numerical Mathematics. 135. Basel: Birkhäuser. 135 p. , 2001
- [29] HIRSCH, Morris W.: *Differential topology.* Graduate Texts in Mathematics. 33. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. X, 221 p. DM 36.20; \$ 14.80 , 1976

- [30] JAHN, J.: *Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces*. Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik, Bd. 31. Frankfurt am Main-Bern-New York: Verlag Peter Lang. IX, 310 p. SFr 65.00 , 1986
- [31] JAHN, J.: Theory of vector maximization: Various concepts of efficient solutions. In: *Gal, Tomas (ed.) et al., Multicriteria decision making: Advances in MCDM models, algorithms, theory, and applications*. Boston: Kluwer Academic Publishers. Int. Ser. Oper. Res. Manag. Sci. 21, 2.1-2.32 . 1999
- [32] JAHN, J.: *Vector optimization. Theory, applications, and extensions*. Berlin: Springer. xiii, 465 p., 2004
- [33] JONGEN, H. T. ; WEBER, G.-W.: Characterization of Structural Stability. In: *J. Global Optimization* 1 (1991), S. 47–64
- [34] JONGEN, H.Th. ; JONKER, P. ; TWILT, F.: On one-parameter-families of sets defined by (in) equality constraints. In: *Nieuw Arch. Wiskd., III. Ser.* 30 (1982), S. 307–322
- [35] JONGEN, H.Th. ; JONKER, P. ; TWILT, F.: Critical sets in parametric optimization. In: *Math. Program.* 34 (1986), S. 333–353
- [36] JONGEN, H.Th. ; JONKER, P. ; TWILT, F.: One Parametric Families of Optimization Problems: Equality Constraints. In: *JOTA* 48 (1986), S. 141–161
- [37] JONGEN, Hubertus T. ; JONKER, Peter ; TWILT, Frank: *Nonlinear optimization in \mathbb{R}^n , I. Morse theory, Chebyshev approximation*. Peter Lang Verlag, 1983
- [38] JONGEN, Hubertus T. ; JONKER, Peter ; TWILT, Frank: *Nonlinear optimization in \mathbb{R}^n , II. Transversality, Flows, Parametric Aspects*. Peter Lang Verlag, 1983
- [39] K., Tamura: A Method for Constructing the Polar Cone of a Polyhedral Cone with Application to Linear Multicriteria Decision Problems. In: *J. Opt. Th. and App.* 19 (1976), S. 547–564
- [40] K., Tamura ; S., Miura: Necessary and Sufficient Conditions for Local and Global Nondominated Solutions in Decision Problems with Multi-Objectives. In: *J. Opt. Th. and App.* 28 (1979), S. 501–523

- [41] KOJIMA, M.: Strongly stable stationary solutions in nonlinear programs. In: *Analysis and computation of fixed points, Proc. Symp., Univ. Wis.* 1979, 93-138 . 1980
- [42] KOJIMA, M. ; HIRABAYASHI, R.: Continuous deformation of nonlinear programs. In: *Math. Program. Study* 21 (1984), S. 150–198
- [43] LEWANDOWSKI, A. ; KREGLEWSKI, T. ; ROGOWSKI, T. ; WIERZBICKI, A. P.: Decision support systems of DIDAS family (dynamic interactive decision analysis & support). In: *Aspiration based decision support systems. Theory, software and applications, Lect. Notes Econ. Math. Syst.* 331, 21-47 . 1989
- [44] LUC, Dinh T.: *Theory of Vector Optimization*. Berlin : Springer-Verlag, 1989 (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems). – ISBN 3–540–50541–5
- [45] MARGLIN, S.: *Public Investment Criteria*. Massachusetts : MIT Press Cambridge, 1967
- [46] MICHAEL, E.: Topologies on Spaces of Subsets. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 71 (1951), S. 152–182
- [47] MICHAEL, E.: Continuous Selections, I. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1956), S. 361–382
- [48] MICHAEL, E.: Continuous selections, II. In: *Ann. of Math.* 64 (1956), S. 562–580
- [49] RÜCKMAN, J. ; TAMMER, K.: On linear-quadratic perturbations in one-parametric nonlinear optimization. In: *Syst. Sci.* 18 (1992), Nr. 1-2, S. 37–49
- [50] RÜCKMANN, J.: *Einparametrische Nichtkonvexe Optimierung: Strukturuntersuchungen und eine Verallgemeinerung des Einbettungsprinzips.*, TH Leipzig, Diss., 1988
- [51] SAWARAGI, Y. ; NAKAYAMA, H. ; TANINO, T.: *Theory of multiobjective optimization*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 176. Orlando etc.: Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers). XIII, 296 p., 1985
- [52] STERNBERG, S.: *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall Inc, 1964

- [53] WEBER, G.: *Charakterisierung Struktureller Stabilität in der Nichtlinearen Optimierung*. Aachener Beiträge zur Mathematik, Band 5, Aachen., 1992
- [54] WEBER, Gerhard-Wilhelm: Minimization of a max-type function: Characterization of structural stability. In: *Guddat, Jürgen (ed.) et al., Parametric optimization and related topics. III. Proceedings of the 3rd conference held in Güstrow, Germany, August 30 - September 5, 1991. Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag. Approximation Optimization. 3, 519-538 . 1993*
- [55] WEIDNER, P.: An approach to Different Scalarizations in Vector Optimization. In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Ilmenau. 3 (1990), S. 103–110*
- [56] WENDLER, K.: Implementation of a path-following procedure for solving nonlinear one- parametric optimization problems. In: *Brosowski, Bruno (ed.) et al., Multicriteria decision: proceedings of the 14th meeting of the German working group Mehrkriterielle Entscheidung", held at Riez-lern, Austria, Sept. 22-27, 1991. Frankfurt am Main: Verlag Peter Lang. Approximation Optimization. 4, 139-161 . 1993*
- [57] WIERZBICKI, A. P.: Penalty Methods in Solving Optimization Problems with Vector Performance Criteria. In: *Proceedings of VI-th IFAC World Congress, Cambridge/Boston. 1975*
- [58] WIERZBICKI, A. P.: Basic Properties of Scalarizing Functional for Multiobjective Optimization. In: *Math. Oper.Stat Optim. 8 (1977), S. 55–60*
- [59] WIERZBICKI, A. P.: On the Completeness and Constructiveness of Parametric Characterization to Vector Optimization Problem. In: *OR Spektrum 8 (1986), S. 73–87*
- [60] WIERZBICKI, A. P. ; KURCYUSZ, S.: Projection on a Cone, Penalty Functionals and Duality Theory for Problems with Inequality Constraints in Hilbert Space. In: *SIAM J. Control Optim. 15 (1977), S. 25–56*
- [61] YU, P.L.: Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives. In: *J. Optimization Theory Appl. 14 (1974), S. 319–377*
- [62] ZADEH, L.: Optimality and Non-Scalar-Valued Performance Criteria. In: *IEEE Transactions on Automatic Control 8 (1963), S. 59–60*

Abkürzungen

$ A $	die Mächtigkeit/Kardinalität einer bel. Menge A (Hier nur für endliche Mengen benötigt)
$f _U$	Einschränkung einer Abbildung f auf eine Teilmenge U ihres Definitionsbereiches
clA	Abschluß einer Menge $A \in \mathbb{R}^n$
$int(A)$	das Innere einer Menge $A \in \mathbb{R}^n$
riA	das relative Innere einer Menge $A \in \mathbb{R}^n$
∂A	der Rand einer Menge $A \in \mathbb{R}^n$
I_n	Einheitsmatrix
$\ x\ $	euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^p$
$C^p(X, Y)$	Raum der p -mal stetig differenzierbaren Abbildungen zwischen X und Y
μ^1	realistischer Wunsch (realistic goal) des Entscheidungsträgers
$(P_u(t))$	verallgemeinerte innere Einbettung
\leq_D	Halbordnung bezüglich des konvexen Kegels D
$\mathcal{VOP}(\mathbf{f}, H, G)$	das Vektoroptimierungsproblem
$\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$	das Minimax-Problem
$\mathcal{L}^u(\mathbf{f}, H, G)$	untere Niveaumenge bezüglich $u \in \mathbb{R}^{ L }$
$\mathcal{L}_{\max}^t(\mathbf{f}, H, G)$	untere Niveaumenge bezüglich $\mathcal{P}^{\max}(\mathbf{f}, H, G)$
$E_{loc}(X, D)$	Menge der lokal effizienten Punkte von X
$E_{locw}(X, D)$	Menge der lokal schwachen effizienten Punkte von X
$\mathfrak{U}(I)$	Die Menge aller auf dem Intervall I D -monoton fallende Funktionen
x^D	Projektion des Vektors x auf den Kegel D

Lebenslauf

Name:	Paulo Mbunga
10.1972–08.1988	Oberschule Garcia Neto, Luanda, Angola Abitur mit Schwerpunkt Mathematik und Physik Arbeit als Lehrer für Mathematik 6. und 7. Klasse
09.1988–06.1989	Sprachausbildung Radebeul, Sachsen
09.1989–09.1990	Lehramtstudium für Mathematik/Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin
10.1990–11.1997	Diplomstudium Mathematik an der Humboldt-Universität zu Berlin
12.1997–12.2000	Humboldt-Universität zu Berlin Graduiertenkolleg Geometrie und Nichtlineare Analysis
12.2000–10.2005	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik
Publikationen	Structural Stability of Vector Optimization Problems. In: Optimization and Optimal Control, edited by Panos M. Pardalos (University of Florida, USA), Ider Tseveendorj (University of Orleans, France) and Rentsen Enkhbat (National University of Mongolia, Mongolia). Series on Computers and Operations Research Vol. 1 On Double One-Parametric Optimization Problems and some Applications. Preprint. Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin (ISSN 0863-0976)

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 22.12.2005