岡大医短紀要，**4**：27～29，1993
Bull. Sch. Health Sci. Okayama Univ.

安定群の上の位相について

田　中　克　己

Some topologies on stable groups

Katsumi TANAKA

In the theory of Linear algebraic groups, Zariski topology plays a crucial role. We introduce some topologies on general abstract groups generalizing Zariski topology in some sense. Especially we focus on stable groups, because not only the similarity of them with respect to some structure theorems but also we are interested in stable groups for their own right.

In Linear algebraic groups, they have a descending chain condition on closed sebsets. Hence we may introduce some topologies on stable groups in order to satisfy the descending chain conditions on closed subsets whatever the topology is. According to this guide line we introduce some topologies to stable groups and omega-stable groups.

Key Words: stable groups, Z-groups, descending chain conditions

安定群の重要な例である，代数的閉体上の代数群の理論では，ザリスキー位相が重要な役割を果たす。これはモデル理論の言葉で言えば，基礎にある体の言語における論理式による定義可能な集合を閉集合としている。しかし，一般に群の構造について議論するときには，やはり，その群の性質を記述する言語を使って考えるのが自然であろう。

I. Kaplansky は，一般の群の上にザリスキー位相を一般化した次のような位相を定義した[1]。群 G に T_1-位相が入り，閉集合について極小条件をみたし，かつ，つぎの３種類のGからGへの写像：

$$g \to g^{-1},\ g \to ga,\ g \to ag$$

が G の各元 a にたいして連続となるとき，群 G を Z 群という。

また，群 G に T_1-位相が入り，上の３種類の写像に加え，写像 $g \to g^{-1}ag$ が G の各元 a にたいし連続となるとき，群 G を C 群と言う。さらに，同り位相のもとで，G が C 群かつ Z 群となるとき，G を CZ 群と言う。

R.M.Bryant は，群 G の上に次のように閉集合を定めてやることにより，G に verbal topology と呼ばれる位相を定義した[2]。atomic formula により G で定義可能な集合をこの位相の閉部分基とする。この時，任意の閉集合は atomic formula の finite disjunction により定義される集合の無限個の intersection となる。

一点からなる集合{a}は G の閉集合になる。これは x＝a なる atomic formula で定義される。G の任意の部分集合 A にたいし，A の中心化群は閉集合になる。実際，A の各元 a にたいし xa＝ax という atomic　formula により定義される集合の intersection として表される。この場合，任意の閉集合が定義可能になるとは限らない。なぜなら，この intersection の数は無限個になるかもしれない。

t を term，ψ を atomic formula とするとき，$\psi(t(g))$ も atomic formula になるから，G から G

岡山大学医療技術短期大学部一般教育

への写像 $g \to t(g)$ は連続となる。Gの任意の元aにたいし，写像 $g \to g^{-1}$, $g \to ga$, $g \to ag$, $g \to g^{-1}ag$ は連続となり，GはC群となる。

例.　代数群はザリスキー位相について，CZ群になる。

定理(Bryant)[2].　群Gはその verbal topology において閉部分集合について極小条件をみたせばCZ群になる。

例.　線形群[3]，局所有限な abelian-by-nilpotent-by-finite groups, abelian-by-finite groups は verbal topology において閉部分集合について極小条件をみたすので，みなCZ群になる[2]。

Fact 1[4,5].　ω 安定群は定義可能な部分群についての極小条件をみたす。

Fact 2[5,6].　安定群は uniform に定義可能な部分群の intersection についての極小条件をみたす。

定義.　集合 $F = \{aHb : H = \langle 1 \rangle \text{ or } C_G(c),\ a, b, c \in G\}$ を閉集合についての部分基として与えられる位相を M_c-位相という。

定理.　安定群は M_c-位相についてZ群になる。

M_c-位相が T_1-位相になることは明らか。またFの定義より，3種類の写像が連続になることも明らか。この定理の証明の残りは，閉集合についての極小条件だが，そのためには，部分基について極小条件が成り立つことを示せば十分。このことは，次の2つの補題から導かれる。

補題1.　集合Fの任意の元aHbはある H^* の coset に等しい。

証明.　$H = C_G(c)$ のとき，

$$aHb = abb^{-1}Hb = ab(b^{-1}Hb) = abC_G(b^{-1}cb)$$

$H = \langle 1 \rangle$ のとき，$aHb = ab\langle 1 \rangle$。

補題2.　集合Fは極小条件をみたす。

証明.　$\{H : H = \langle 1 \rangle \text{ or } C_G(c),\ c \in G\}$ をJとおくと，Factより，Jは極小条件をみたす。

また，補題1より，Fの各元はcHという形をしている。いま仮に，Fが極小条件をみたさないとする。すると，無限下降列

$$c_1H_1 \supset c_2H_2 \supset \ldots \supset c_nH_n \supset \ldots$$

が存在する。このとき，

$$H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots$$

となり，uniform に定義可能な部分群の無限下降列ができてしまい Fact 2に矛盾する。よって，Fは極小条件をみたす。

ω 安定群については，もっと強い位相についてZ群になる。

定義.　$S = \{aHb : H$ は定義可能な群, $a, b \in G\}$ を閉集合の部分基として与えられる位相をS位相という。

定理.　ω 安定群はS位相についてZ群になる。

証明は，前の定理と同様で Fact 2の代わりに Fact 1を使えばよい。

Z群の一般論から，ω 安定群における connected という概念が，本来のトポロジーの意味の connected と一致することが確認される。以下，証明はZ群について知られてはいるが，自己完結の意味でここに繰り返しておく。

命題1.　安定群Gの M_c-位相における任意の open dense subset Uについて，$G = UU$ となる。

証明.　Gの任意の元xにたいし，Uと $U^{-1}x$ は空でない開集合である。Gは既約であるから $U \cap U^{-1}x$ は空でない。よって，$x \in UU$。

命題2.　Gを安定群とすると，その M_c-位相に

ついて，1を含むGの component Cは，Gの正規部分群となり，Gのなかで指数有限となる。このとき，CをG^0であらわす。

証明. Gの既約分解を$G=S_1\cup\cdots\cup S_n$とする。

主張1. 各Sたちは交わらない。

いま$x\in S_1\cap S_2$とする。Gの任意の同相写像は各Sの置換になる。Gの任意の元yにたいし，xをyにうつす同相写像が存在する。つまり，S_1の任意の元はS_2からS_nの少なくともどれか1つに含まれている。したがって，

$$S_1=(S_1\cap S_2)\cup\ldots\cup(S_1\cap S_n)。$$

各$S_1\cap S_i$は閉集合でしかもS_1よりたしかに小さい。これはS_1の既約性に矛盾する。

主張2. S_1は群である。

S_1の任意の元xについて，S_1xとS_1とは確かに交わる。共通部分はSたちのどれかでなければならない。よって，$S_1x=S_1$。同様に，$S_1^{-1}=S_1$となり，S_1は群になる。もちろんS_1は連結でもある。

主張3. S_1はGの正規部分群である。

S_2からS_nはS_1の coset と交わるので，実際，ある coset と一致する。Gの任意の元xにたいし，$x^{-1}S_1x$も連結で1を含む。ゆえに，$x^{-1}S_1x$はS_1に包含される。

以上により，GにおけるS_1の指数は有限となる。

命題3. Gを案定群とすると，そのM_c-位相についてGの既約成分はG^0の coset への分解ただ1とおりとなる。

以上の命題は，ω安定群についても位相をS位相にしてやることにより成立する。

最後にまだ未解決の問題を1つあげておく。

問題. 任意のω安定群をCZ群とするような位相の入れ方があるか。

文　　　献

1) Kaplansky I.: An Introduction to Differential Algebra. Hermann, Paris, 1957.
2) Bryant R. M.: The Verbal Topology of a Group. J. Alg. 48 : 340-346. 1977.
3) Wehrfritz B. A. F.: Infinite Linear Groups. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
4) Cherlin G.: Groups of small Morley rank. Ann. Math. Logic 17 : 1-28, 1979.
5) Baldwin J. T.: Fundamentals of stability theory. Springer- Verlag, Berlin and New York, 1987.
6) Baldwin J. T., Saxl J.: Logical stability in groups. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 21 : 267-276, 1976.