

氏名	清水 健一
授与した学位	博士
専攻分野の名称	理学
学位授与番号	博乙第4172号
学位授与の日付	平成19年 3月23日
学位授与の要件	博士の学位論文提出者 (学位規則第4条第2項該当)
学位論文の題目	Primes in quadratic and cubic polynomials (2次式および3次式中の素数)
論文審査委員	教授 中村 博昭 教授 吉野 雄二 教授 山田 裕史

学位論文内容の要旨

本研究の視点は2次式に関連する素数の研究にある。このテーマについては多くの問題があるが、本研究の内容は exponent が2以下の虚2次体に関するものが主となっている。さらに小野数についての研究と2次式中の素数分布の問題から派生したある3次式中の素数分布の漸近式についての予想にもふれている。

第1章では、自然数を2つの自然数の積に分解したとき、その2数の和が常に素数となる性質をもった自然数を SP-number と呼び、自然数が SP-number になるための十分条件が対応する虚2次体の exponent が2以下であることを示した。

第2章では、Euler に端を発した素数値を連続してとる2次式の研究を述べている。この現象の背後に虚2次体の理論がある。類数が1および2の場合に素数値を連続してとる2次式が Frobenius や Hendy によって研究された。類数が2より大きい場合については Mollin の研究があるが、清水・枝広は Mollin とは独立に exponent が2以下である場合に素数値を連続してとる2次式が存在することを示した。

第3章、4章では小野数 $P(D)$ について述べている。小野数は小野孝氏によって定義された虚2次体の不変量であるが、小野氏は類数が $2^{P(D)}$ で上から評価できるのではないかと予想した。清水・西来路は予想が成り立たない虚2次体の無限系列を構成することによって、この予想を否定的に解決した。また、小野数の評価を Moeller が行っているが、清水・西来路は評価を精密にし、類数と小野数とが等しい虚2次体は有限個しかないことも示した。さらに類数と完全分解する最小の素数と小野数の間の関係式を見いだした。

第5章では、虚2次体の exponent が2以下になるための新しい条件を与えている。虚2次体の exponent が2以下になるため必要条件が Moeller や Mollin によって研究されたが、清水は新しい必要条件を与え、この条件と虚2次体の他の不変量との関係を得た。またこれらの不変量の関係についての1つの予想を提示し、これらの条件の相互関係を研究した。

第6章では、2次式、3次式中の素数分布の漸近式についての予想を述べている。任意次数の多項式中の素数分布の漸近式の予想を立て、その予想から Dirichlet の算術級数の定理や、2次式の素数分布についての Hardy-Littlewood の予想が導かれることを示した。また、高次剰余の法則と関連して、ある3次式中の素数分布の漸近式が予想されることを示した。

論文審査結果の要旨

本学位論文は、2次式に関連する素数について申請者が行ってきた研究をまとめている。自然数における素数の表れ方は整数論の基本問題の一つであるが、素数のある種の振舞いでは虚2次体の数論的な不変量との関連が現象の本質を理解するための重要な鍵になる。本研究は6つの章からなるが、(イデアル類群の)冪指数が2以下の虚2次体が関係するものを主に扱い、さらに小野数についての研究と2次式中の素数分布の問題から派生したある3次式中の素数分布の漸近式についての予想にもふれている。第1章では、自然数を2つの自然数の積に分解したとき、その2数の和が常に素数となる性質をもった自然数をSP-numberと呼び、自然数がSP-numberになるための十分条件が対応する虚2次体の冪指数が2以下であることを示している。第2章では、Eulerに端を発した素数値を連続してとる2次式の研究を述べている。この現象の背後に虚2次体の類数が重要であり、類数が1および2の場合に素数値を連続してとる2次式がFrobeniusやHendyによって研究された。類数が2より大きい場合についてはMollinの研究があるが、この章ではMollinとは独立な手法で冪指数が2以下である場合に素数値を連続してとる2次式が存在することを示した。第3章、4章では小野数 $P(D)$ について述べている。小野数は小野孝氏によって定義された虚2次体の不変量であり、小野氏は類数が $2^{P(D)}$ で上から評価できるのではないかと予想したが、この予想が成り立たない虚2次体の無限系列を構成することによって、この予想を否定的に解決した。また、小野数の評価をMoellerが行っているが、この評価を精密にし、類数と小野数とが等しい虚2次体は有限個しかないことも示した。さらに類数と完全分解する最小の素数と小野数の間の関係式を見いだした。第5章では、虚2次体の冪指数が2以下になるための新しい条件を与えている。虚2次体の冪指数が2以下になるため必要条件がMoellerやMollinによって研究されたが、申請者は新しい必要条件を与え、この条件と虚2次体の他の不変量との関係を得た。またこれらの不変量の関係についての1つの予想を提示し、これらの条件の相互関係を研究した。第6章では、2次式、3次式中の素数分布の漸近式についての予想を述べている。任意次数の多項式中の素数分布の漸近式の予想を立て、その予想からDirichletの算術級数の定理や、2次式の素数分布についてのHardy-Littlewoodの予想が導かれることを示した。また、高次剰余の法則と関連して、ある3次式中の素数分布の漸近式が予想されることを示した。以上の成果は、整数論における歴史的に重要なテーマに関する深い造詣と、精確な実例計算に基づいて新しい結果を得る精緻な解析力とを示しており、博士号の学位にふさわしいものと判断できる。