岡山大学経済学会雑誌31(3),1999，163～171

不等式体系における Tucker の定理の非線型への一般化

藤　本　喬　雄・石　山　健　一

1節．はじめに

線型計画理論および von Neumann 成長モデルに美しく関連づけられる不等式体系上のすばらしい定理が，Tucker(1956) によって与えられた。Tucker はそれを数学的帰納法によって証明した。(なお，Nikaido(1968) 第1章では，それを分離定理を使って証明している。) この論文のあと直ちに，実際，Tucker とは独立に，Fan–Glicksberg–Hoffman(1957) は，分離定理を用いて凸関数で構成される不等式体系上の定理を示した。(Mangasarian (1969) 第4章参照。)

その後，著者のひとりである Fujimoto(1980) が，そのなかに含まれる関数が微分可能な同次関数かあるいは擬凹関数であるような体系に対する命題を与えた。この結果は，技術進歩の利潤率に及ぼす影響に関する Okishio の定理 (Okishio(1961) 参照。) を非線型に拡張するために Fujimoto–Ranade (1998) のなかで用いられている。一方，Fan et al. (1957) の結果の部分的な一般化は，Fujimoto(1997) においてなされている。

この論説では，二者択一式の Tucker の定理とミニマックス定理の間にある関係や，後者を前者に変換するために必要な条件について解説していく。Fan(1953) 以後，ミニマックス定理に対する様々な拡張が行われているが，なかでも Nikaido(1954) や Sion(1958) が有名である。しかしながら，ミニマックス定理を Tucker の形式に書き改めるにあたっては，問題が1つある

（第２節で述べる)。

第２節では線型の場合について，その後，第３節で非線型凹関数の場合に関してそれぞれ説明していく。所与の関数が凹関数あるいは凸関数であるときに局所的な特徴づけが大局化され得ることを第４節で示す。最後に，第５節で諸注意を述べる。

２節．線型の場合

n 次元ユークリッド空間を R^n で表し，その非負象限を R^n_+ とする。また，２つの集合に関して，以下のように定義する。$T \equiv \{y \mid y \in R^m_+, e'y = 1\}$，$S \equiv \{x \mid x \in R^n_+, e'x = 1\}$。ただし，$e' \equiv (1, 1, \cdots, 1)$ であり，プライムは転置を表す。加えて，次元 m および n は１以上であるとする。次に示すのは，Tucker(1956，p.11) にある定理３である。

Tucker の定理

ある m 行 n 列の実数行列 A に関して以下の２つの問題を考える。すなわち，

（１）$x \in R^n_+$ で，かつ，$Ax \geq 0$ を満たす x を求めよ。

（２）$y \in R^m_+$ で，かつ，$y'A \leq 0$ となるような，y を求めよ。

このとき，以下の２つの条件を同時に満たす，ある解の組 (x, y) が存在する。

（１*）$Ax + y > 0$

（２*）$x' - y'A > 0$

この定理を証明するために，我々は直積空間 $D \equiv S \times T$ からそれ自身への集合値写像 f を考える。D 内の点 (x, y) に関して，我々は次の２つの問題を解く。

（ｉ）x を固定したときに $y'Ax$ を最小化する T の点 y を求める。

（ii）y を固定したときに $y'Ax$ を最大化する S の点 x を求める。

問題（i）および（ii）に対する解集合をそれぞれ，$\tau(x)$，$\sigma(y)$ で表し，これらの集合に関して，次の制限を考える。すなわち，その解のなかにある，要素 x_i あるいは y_i が正でありうるときにはいつでも，それはある一定の正値 ε より大であるとする。解集合が空でないようにするためには，我々は，例えば $0<\varepsilon<\min(1/(1+m),1/(1+n))$ となるような ε を選べばよい。このように制限された解集合は，$\sigma(y,\varepsilon)$ および $\tau(x,\varepsilon)$ と書かれる。このとき我々は，写像 f を次のように定義する。

$$f:(x,y)\ \mathrm{in}\ D \rightarrow \sigma(y,\varepsilon)\times\tau(x,\varepsilon)\ \mathrm{in}\ D$$

写像 f は明らかに空でない凸集合値であり，かつ上半連続である。だから，我々は角谷の不動点定理を利用して，上の問題（i），（ii）への解となるある組 (x^*,y^*) が存在するということができる。これはミニマックス定理を証明するためのよく知られた手法である。

さて，ここで $\mu\equiv y^{*\prime}\cdot Ax^*$ とおくと，$\mu>0$ のときは，$Ax^*>0$ であるから，x^* の値を少し変えた $x^{**}>0$ もまた $Ax^{**}>0$ を満たす。このとき我々は，上述の不等式（1*）および（2*）を満たす (x^{**},y^{**}) 組を形成するために $y^{**}=0$ を選ぶことができる。

また，$\mu<0$（すなわち $y^{*\prime}\cdot A<0$）の場合も，双対的なやり方で解が求められる。

次に，$\mu=0$ である場合について考察しよう。このとき $Ax^*\geq 0$ であり，また $y^{*\prime}\cdot A\leq 0$ が成り立つ。我々が課したまさにその制限によって，この組 (x^*,y^*) は不等式（1*）および（2*）を満たすのである。（証明終）

この定理から，Tucker（1956, p. 11）にある二者択一に関する命題として述べられている系3Aが容易に導かれる。

3節．凹関数

さてここで，我々は R_+^n から R^m への非線型連続凹写像 $H(x)$ について考える。この節で我々は集合 S の定義を変更し，ある正の数 α に対して $S \equiv \{x \mid x \in R_+^n, e'x = \alpha\}$ とする。非線型に拡張された Tucker の定理は以下のようになる。

定理３．１：$H(0) = 0$ を仮定し，以下の２つの問題を考える。すなわち，

（１）$x \in R_+^n$ かつ $H(x) \geq 0$ となる x を求めよ。

（２）$y \in R_+^m$ かつ，すべての $x \in R_+^n$ に対して $y'H(x) \leq 0$ となる y を求めよ。

このとき，ある解の組 (x^{**}, y^{**}) が存在して，それは次の条件を満たす。

(N１*) $H(x^{**}) + y^{**} > 0$

(N２*) もし(1)に対する半正解が存在しないならば，そのときすべての $x \in R_+^n - \{0\}$ に対して $-y^{*\prime} \cdot H(x) > 0$ となる $y^* \in R_+^m$ が存在する。

第２節における Tucker の定理の証明の場合と同様に，我々は，直積空間 $D \equiv S \times T$ からそれ自身へ写す集合値写像 f について考える。D 内の所与の点 (x, y) に対して，２つの問題を解く。すなわち，

（ｉ）x を固定したときに $y'H(x)$ を最小化する T の要素 y を求めよ。

（ii）y を固定したときに $y'H(x)$ を最大化する S の要素 x を求めよ。

問題（ｉ），（ii）に対する解集合をそれぞれ $\tau(x)$，$\sigma(y)$ で表し，前節のように，ある十分小さい正数 ε によって集合 $\tau(x)$ が制限されていると考える。その制限された解集合を，再び $\tau(x, \varepsilon)$ と表す。このとき我々は，f を以下のように定義する。

$$f : (x, y) \text{ in } D \rightarrow \sigma(y) \times \tau(x, \varepsilon) \text{ in } D.$$

この写像 f は非負の凸集合値でかつ上半連続である。(問題（ii）において，x の写像 $y'H(x)$ が凹であることに注意せよ。) 角谷の不動点定理によっ

て，我々は，ある不動点 (x^*, y^*) が存在するということができる。

問題(1)に対して，ある半正解 x が存在するとしよう。S の定義内で，ある適当な $\alpha > 0$ を選ぶことによって，$y^{*\prime} \cdot H(x^*) \geq 0$ とする。第2節と同じ方法で（N 1 *）を証明することができる。また，もし $y^{*\prime} \cdot H(x^*) < 0$ を満たす正の値があれば，そのことが（N 2 *）を証明する。（N 1 *）を満たすために，我々は $x^{**} = 0$ とおいて y^* から少し離れた y^{**} をとる。（証明終）

定理３．１より，$H(x) \geq 0$ となる半正 x は存在するが，$H(x) > 0$ となる x が存在しないならば，ある組 (x^*, y^*) が存在し，それに対して $H_i\ (x^*) = 0 \Leftrightarrow y_i^* > 0$ かつ $H_i\ (x^*) > 0 \Leftrightarrow y_i^* = 0$ となる。すなわち，自由財に関する厳密な法則が成立しているのである。以下のことを，ほぼ同じ手法で証明することが可能である。

定理３．２：$H(x)$ は，R^n の非負のコンパクト凸集合 X を R^m に写す写像であるとする。$H(x) \geq 0$ の解が X 上にないとすれば，すべての $x \in X$ に対して $y'H(x) < 0$ となるような，ある $y \in T$ が存在する。

これは，X がコンパクトであることを利用しているので，Fan et al. (1957) の定理１より若干弱いが，結果はより精密な形で表現される。

ここで与えられた証明のなかで重要な点は，問題（ii）において x の写像 $y'H(x)$ が凹であることである。必要なのは，T の任意の固定されたベクトル y に対して x の関数 $y'H(x)$ が最大値を持つような x の集合が凸集合である，ということである。ここで我々は，新しい概念を導入しよう。それを弱い凹族関数と呼ぼう。すなわち，関数 $H_i\ (x), i = 1, 2, \ldots, m$ は R^n を R へ写す関数であり，それに対し，任意の半正 y をパラメータベクトルとして $y'H(x)$ が最大値をとる x の集合は，凸になるものである。この族に関して，同様の命題を証明することが可能である。

4節．凹性のもとでの局所的な結果

Fujimoto(1980, 1997) において示されたことは，ヤコビ行列を用いた局所的な特徴づけである。ここでは，微分可能性と凹性のもとでは局所的な結果が大局的な結果を生み出す (Fan et al. (1957)) ということを証明する。

Fujimoto(1980) では，もし $H(x) \geq 0$ が S 上で解をもたないならば，$p' \cdot \nabla H(x^*) < 0$ を満たす，ある非負ベクトルの組 (x^*, p) が存在することが示されている。ここで，$\nabla H(x^*)$ は $H(x)$ の x^* におけるヤコビ行列を意味している。この x^* は次の最小化問題を解くことによって求められる。

$$\text{Minimize } M(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} G_i\ (x)^2 \text{ subject to } x \in S$$

この問題のなかで，関数 $G(x)$ は $G_i\ (x) \equiv \min\{H_i(x),\ 0\}$ for $i = 1, 2, \ldots, m$ と定義されている。$p \equiv -G(x^*)$ とおくと，$G(x)$ は m 次元列ベクトル関数であるから，最小化の条件は以下のようになる。

$$p' \cdot \nabla H(x^*) \leq -\lambda^* e \ , \ \text{かつ}$$
$$p' \cdot \nabla H(x^*) x^* = -\lambda^*$$

各 $H_i\ (x)$ が凹関数であるとき，すべての $x \in S$ に対して $\nabla H(x^*)(x - x^*) \geq H(x) - H(x^*)$ が成り立つ。先の2つの条件とこのことから，$p' H(x) \leq p' H(x^*)$ が導出される。この不等式の右辺は定義により $-M(x^*)$ であるから，負となる。S がコンパクトであるがゆえに，我々の結果が Fan et al. (1957) の相当する定理より弱い結果であることをここに記しておく。領域を S から R_+^n に拡張することは困難ではないであろう。なお，Sion(1958) の系3.3に対して同様のことがなされ，少し弱い形の結果が得られている。

5節．諸注意

準凸性あるいは準凹性という概念は，Nikaido(1954) のなかで初めて提言された。一方，二者択一の一覧としての行列理論による表現は Ville (1938) にまで遡る。この論説における手法は，Karamardian によって記されているものや Moré(1973) のなかで明示的に述べられているものに由来する。これは相補問題と関連している。我々の修正は，2つの変数のうち一方を次元の異なる空間に入れることによってなされている。また，我々は，ミニマックス定理を証明している，ということに注意を喚起した。

Fujimoto(1997) における前回の1個の注意事項は間違っていた。真の凹性あるいは凸性を超えて二者択一の形式で Tucker の定理を非線型に拡張することは容易ではない。関数の族に関する「弱い凹性」の概念は，脆いものなのかも知れない。あるいはそれどころか内実のないものかも知れない。

参考文献

Fan, K. (1953): "Minimax Theorems", *Proceedings of National Academy of Sciences*, Vol.39, pp.42–47.

Fan, K., I. L. Glicksberg and A. J. Hoffman (1957): "Systems of Inequalities Involving Convex Functions", *Proceedings of American Mathematical Society*, Vol.8, pp.617–622

Fujimoto, T. (1980): "Existence of Solutions of Pseudoconcave Inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.31 (1), pp.107–112.

Fujimoto, T. (1997): "A Note on Duality in Inequality Systems", *Okayama Economic Review*, Vol.29 (1), pp.105–110.

Fujimoto, T. and R. R. Ranade (1998): "Technical Changes and the Rate of Profit in Models with Joint Production and Externalities: A Duality Approach", *Metroeconomica*, Vol.49 (2), pp.129–138.

Mangasarian, O. L. (1969): *Nonlinear Programming*, McGraw–Hill, New York.

Moré, J. (1973): "On P– and S–Functions and Related Classes of n–dimensional Nonlinear Mappings", *Linear Algebra and Its Applications*, Vol.6, pp.45–68.

Nikaido, H. (1954): "On von Neumann's Minimax Theorem", *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 4, pp.65–72.

Nikaido, H. (1968) : *Convex Structures and Economic Theory*. Academic Press, New York.

Okishio, N. (1961) : "Technical Change and the Rate of Profit", *Kobe Economic Review*, Vol.7, pp.85–99.

Sion, M. (1958) : "On General Minimax Theorems", *Pacific Journal of Mathematics*, Vol.8, pp. 171–176.

Tucker, A. W. (1956) : "Dual Systems of Homogeneous Linear Relations" in *Linear Inequalities and Related Systems*, edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton University Press, New Jersey. pp.3–18.

Ville, J. (1938) : "Sur la Théorie Générale des Jeux où Intervient l'Habilité des Joueurs", *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications*, Vol.2, Part 2, pp.105–113.

Nonlinear Generalizations of Tucker's Theorem on Inequality Systems

Takao Fujimoto and Ken–ichi Ishiyama

This note is to prove Tucker's theorem on linear inequalities based on the proof method of minimax theorems which uses Kakutani's fixed point theorem. One device is necessary to convert the minimax theorems to Tucker's formulation. This is a slight restriction on the image sets when creating a set–valued map. We also present nonlinear generalizations of Tucker's theorem employing the same method. All we need is that the set of variable values for which an objective function attains its maximum is convex. This objective function is a convex combination of functions.

We also present a proof of the fact that a local characterization of inequality systems, when a given mapping is differentiable, can be made global provided the mapping is concave.