氏　　　　　名	竹花　靖彦
授与した学位	博　士
専攻分野の名称	理　学
学位授与番号	博乙第４３４６号
学位授与の日付	平成２２年　９月３０日
学位授与の要件	博士の学位論文提出者 （学位規則第５条第２項該当）
学位論文の題目	Torsion theories and their applications （捩れ理論とその応用）
論文審査委員	教授　池畑　秀一　　教授　吉野　雄二　　教授　山田　裕史

学位論文内容の要旨

序　1966 年にディクソンがアーベル圏における捩れ理論を発表して以来捩れ理論は様々な分野で活用されている。本論文は 4 章に分かれて捩れ理論を考察し、さらにその効果的応用を述べる。

第 1 章では Weakly divisible 加群が divisible となる冪等 preradical t を調べ次の同値条件(1)(2)を得た。(1) 任意の加群 M 対し $M/(M\cap t(E(M)))$ は t -torsion の factor 加群を持たない。(2)　t は短完全列の中央の項が入射加群のときに右完全性を保存する。

第 2 章では遺伝的捩れ加群で Jacobson 根基が零になる環を V(σ)-ring と呼び次の特徴づけ(1)(2)を得た。(1)任意の捩れ単純左加群は捩れ入射的である。(2)稠密な左イデアルは極大左イデアルの共通部分である。Goldie と Lambek の捩れ理論を用いてそれぞれ V(L)-Ring と V(G)-Ring と名付けると次の(3)(4)(5)を得た。(3) R は左 V-Ring $\Leftrightarrow$ R は左 V(G)-Ring かつ左極小イデアルは入射的である。(4) R は右左 V-Ring $\Leftrightarrow$ R は右左 V(L)-Ring かつ Z(R_R) = Z($_RR$) = 0 かつ右左極小イデアルは入射的である。(5) 可換 V(G)-Ring は V-Ring 即ちフォンノイマン正則環である。

第 3 章では σ -QF-3' 加群 M(即ち捩れ左入射包絡 $E_\sigma(M)\subset\Pi M$ である）の性質を調べる。加群 N,M に対して $k_N(M)$ を $\bigcap\ker(f)(f\in Hom_R(M,N))$ とする。短完全列の最後の項が σ -torsion のとき左完全性を保存すれば preradical t は σ -Left exact であると言う。

定理　冪等根基 σ に関して(1)から(4)まではは同値であり(1)ならば(5)から(8)までが成り立つ。σ が left exact で A が σ -torsion ならば全ては同値になる。(1) $E_\sigma(A)\subset\Pi A$　(2)　$k_A(E_\sigma(A))=0$　(3)　$k_A(-)=k_{E\sigma(A)}(-)$　(4) $k_A(-)$ は σ -Left exact である (5) $0\to N\xrightarrow[f]{}M\to L\to 0$ で L が σ -torsion で Hom $_R(f,A)=0$ ならば Hom $_R(N,A)=0$ が成り立つ。(6)加群 M とその部分加群 N に対し(i)Hom $_R(M,A)=0$ で M/N が σ -torsion のとき Hom $_R(N,A)=0$ となる。(ii)N$\subset\Pi A$，M/N$\subset\Pi A$ で M/N が σ -torsion のとき M$\subset\Pi A$ となる。(7) M$\subset\Pi A$ なら $E_\sigma(M)\subset\Pi A$ となる。(8) N$\subset\Pi A$，N は M の本質的部分加群で M/N が σ -torsion ならば M$\subset\Pi A$ である。

第 4 章では完全環を仮定し σ が冪等根基のとき CQF-3' 加群 M(即ち σ 射影被覆 $P_\sigma(M)$ が M で生成される)の性質を調べる。加群 M に対し $t_A(M)=\Sigma\,\mathrm{Im}\,f(f\in Hom_R(A,M))$ で定義する。短完全列の最初の項が σ -torsioinfree のときに t が右完全性を保存すれば t が σ -epipreserving と言う。

定理　σ は全射保存冪等根基で $\sigma(A)=0$ のとき次の条件は同値である。(1)A は σ -CQF-3' 加群である。(2) $t_A(P_\sigma(A))=P_\sigma(A)$ (3) $t_A(-)=t_{P\sigma(A)}(-)$　(4) $t_A(-)$ は σ -epipreserving である。(5)(a)N が A で生成され、M/N も A で生成され $\sigma(N)=0$ であるなら M も A で生成される。(b)Hom $_R$ (A,M) = 0 で $\sigma(N)=0$ であるなら Hom $_R$ (A,M/N) = 0 となる。(6)M が A で生成されるなら $P_\sigma(M)$ も A で生成される。(7) $\sigma(N)=0$ で N は M の small な部分加群で M/N が A で生成されるなら M も A で生成される。(8) $M\xrightarrow[f]{}M/N\to 0$ で $\sigma(N)=0$ とする。Hom $_R$ (A,f) = 0 ならば Hom $_R$ (A,M/N) = 0 となる。

論文審査結果の要旨

本論文は四つの章にわたって，捩れ理論とその応用について述べている。最初の章では弱可除加群が可除加群になる条件を求め，捩れ理論に付随する冪等根基が，中央項が入射的である短完全列の全射を保持するものであることを示した。そしてこの性質を持つ非常に簡単な前根基を見出した。環の移入包絡の捩れ部分が環自身を含む場合である。この場合入射加群が全て捩れ元になる特徴を持つ。その双対として中央項が射影的である短完全列の左完全性を保つ前根基について調べ左完全関手の拡張について考察した。2章ではV-ringとネーターV-ringの捩れ理論的拡張について考察した。GoldieとLambekの捩れ理論を用いてV-ringの拡張であるV(G)-ring, V(L)-ringを構成して，興味深い同値条件を得た。また可換V(G)-ringはV-ringになるという結果も得た。3章ではQF-3'加群の拡張を試みその性質を詳しく調べ，倉田・片山の定理の拡張を得た。応用として極大商環がtorsionlessである環の特徴付けと性質を見出した。政池の極大商環の有限生成部分加群がtorsionlessな環との関連性もあり興味深い。またQF-3'加群の性質を調べることによりσ入射的な加群に付随する性質を新たに二つ発見した。一つは最終項がσ-torsionである短完全列の左完全性を保持するσ左完全前根基である。二つ目はｔが前根基のときT(t):={M:t(M)=M}がσ-denseな部分加群で閉じているという性質である。σが左完全根基でｔが冪等根基のとき良く知られた定理の拡張が得られ上の三つの性質が結びつく事実,すなわちF(t)={M:t(M)=0}がσ移入包絡で閉じているという性質が得られる。QF-3'加群は森田双対の拡張に重要な役割を果たしているので更なる発展が期待される。4章ではMbuntumとVaradarajanのCQF-3' 加群の拡張を試みその性質を完全環において考察した。CQF-3'加群は森田同値の拡張に重要な役割を果たしており,その関連での発展が期待される。また3章で得られた事柄の双対としてｔが冪等根基でσが全射保持関手のときｔがσ全射保持冪等根基なる概念が得られ，F(t)がσ-factorで閉じていることと，T(t)がσ射影被覆で閉じていることが同値な条件であることを示した。

本論文内容について審査した結果,この研究は学術上寄与するところが少なくない。よって本論文は，博士の学位論文に値するものと認める。