公共競争均衡について

植　松　忠　博

I　イントロダクション

公共経済学が純粋の理論的興味ばかりでなく，一般の社会的関心になってから久しい。公共経済学はまだ未完成な学問領域であるが，すでにいくつかの開拓的な研究が現われつつある。我々がここに検討をする，D. K. Foley の公共競争均衡 public competitive equilibrium[(1)] の理論は，Dorfman〔2〕[(2)] と同様に，公共財をふくんだ経済の〝競争均衡〟の存在を明らかにしようとするものである。従来の Lindahl タイプの理論が公共財の生産量と費用負担とを直結させてモデルを組立てたために，free rider 問題という困難につきあたったのにたいして，Foley, Dorfman は，この困難を回避するために両者を切り離して論じているところに特徴がある。しかも Foley は，生産関数や各消費者の効用関数に強い仮定がおかれているものの，初期資産（所得）にたいする比例税を想定している点で，経済政策として有意であると考えられる。

Foley〔3〕は，長文の示唆にとむ論文であるが，我々は，前半のとくに理論的な箇所のみをここにとりあげる。効用関数の扱いかた，レンマと定理の配列および証明の若干の補強，定理5の証明などを除いては，Foley〔3〕に依拠していることを，はじめにおことわりしておきたい。[(3)]

（1） 訳語について。"public competitive equilibrium" および後出の " public sector proposal" というのは Foley〔3〕の（おそらくはオリジナルな）タームであり，「公共競争均衡」「公共政策」というのは，適訳ではないかも知れないが筆者のあたえた訳である。

（2） Dorfman〔2〕については，すでに村上〔6〕206～220ページに紹介と十分な検討がおこなわれている。

（3） なお Foley〔3〕には，その姉妹論文ともいうべき論文 Foley〔4〕があって，リンダール均衡の定義とその存在証明，リンダール均衡とコアの理論との関係が論じられている。ここではそれにふれなかった。

II 諸仮定

はじめに，この経済の構造を明らかにするために，いくつかの仮定をおこう。経済には $(r+m)$ コの財があり，そのうち r コは公共財，m コは私的財である。家計＝消費者は n コ $(i=1,\cdots,n)$，企業＝生産セクターは簡単化のために1コあるとして，そのほかに政府セクターの存在を仮定する。

仮定A r コの公共財はいずれも，各家計によって強制的に等量消費される。

公共財のこの定義は Samuelson〔10〕によっておこなわれたものである。この定義にたいする批判は多いが，我々は便宜的にこのような種類の公共財にのみ注目する。[4] 第 i 家計の公共財消費量（ベクター）を x^i とかけば，仮定Aは次の式で表わせる。

$$x=x^1=\cdots=x^n$$

仮定C 家計 i は私的財のみからなる所与の初期保有ベクター $w^i>0$ を所有し，それを市場に投じてえた所得によって，公共財 x と私的財 y^i とを消費する。$z^i=y^i-w^i$ を私的財の純取引量として，効用関数 $u^i(x, z^i)$[5] は，下に有界な選好場 X^i $(X^i\geqq(0,-w^i))$のうえで連続，増加かつ凹関数である。消費の外部性および飽和点の存在を排除する。

（4） 公共財の定義について。国民経済全体を考える場合，強制的な等量消費財のみを公共財と規定することには，たしかに問題が多い。想定されれる例が稀だからである。そこで我々の経済を地域経済（各段階の自治体）に限定して，このような公共財の例を考えよう。その場合には，特定の強制的な予防注射，保健衛生サービス，塵芥・屎尿処理サービス，自治体新聞の配布などが考えられよう。あるいは消防署などを生産セクターに入れれば，そのサービス。（この場合も，類焼の危険などを考慮して，各家計は供給拒否できないと考えられよう）なお Foley〔3〕では，強制等量消費でない，いわゆる非排除的な財を非交換財 non exchangeable goods または集合財 collective goods として，ここでの公共財と区別している。（Foley〔3〕pp 48—49）

（5） 効用関数のこの扱いかたは不自然ではない。たとえば McKenzie〔5〕p 56をみよ。なお w^i が一定の場合には，$z^i=y^i-w^i$ として，$\bar{u}^i(x, y^i)=u^i(x, z^i)$ のあいだには，次のレンマが成立する。

　レンマ $\bar{u}^i$ が凹関数ならば u^i も凹関数。逆も成立する。

仮定P 生産セクターの生産可能性集合 Y は閉凸錐であり，生産の桃源郷（Land of Cockaigne）は存在しない。どのような公共財，私的財でも生産可能であり，かつ公共財は投入に使用されない。

生産セクターについてのこれらの仮定は厳しいものであるが，我々の問題意識は政府と家計との関係に集中しているのだからやむをえないであろう。仮定Pのうち Y の凸錐性は

$$(x_1, z_1)\in Y,\ (x_2, z_2)\in Y,\ \alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0 \Rightarrow \alpha(x_1, z_1)+\beta(x_2, z_2)\in Y$$ (6)

任意の公共財と私的財の生産可能性は

$$\exists(x, z)\in Y\ s.\ t.\ x_j>0 \text{ または } z_k>0 \text{ for }, \forall j, \forall k$$

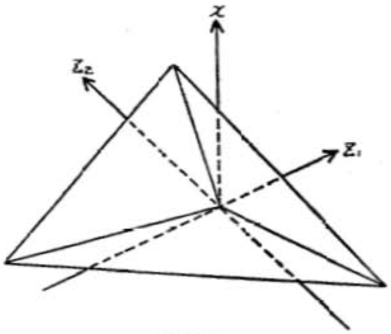
公共財が投入に使用されないことは

$$(x, z)\in Y\Rightarrow x\geqq 0$$

と表わせる。

直観に訴えるために，私的財２種，公共財１種の場合の生産可能性集合を図示すると第１図のようである。

仮定G 政府は公共財の生産はおこなわず，公共政策にもとづいて生産セクターから公共財を購入し，税 t^i とひきかえに各家計に公共財 x を給付する。政府は均衡財政を維持する。



第１図

価格ベクターは $p=(p_x, p_y)\geqq 0$ である。公共財の価格 p_x は生産セクターと政府とのあいだに成立する市場で決定され，(7) 私的財の価格 p_y は通常の私的財市場の需給関係によって決定される。

（6） $A\Rightarrow B$ は A ならばBであること，$A\Leftrightarrow B$ は A と B が同値であることを表わす。

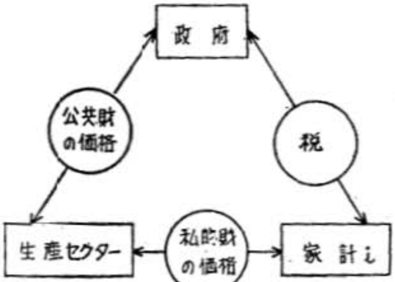
（7） この場合，公共財の供給側，需要側ともにひとつで双方独占のケースであるが，価格 p_x は競争的に決定されると仮定しておく。

家計 i にかかる税を t^i とすれば，税制ベクターは $t=(t^1,\cdots,t^n)$ で，当面は，政府の手で lump sum system によって決定されると仮定する。(8)

仮定Gの後半，均衡財政の条件は次式で表わせる。

$$\sum t^i = p_x x$$

また，この経済の構造を簡単な図にすると第2図のようにかけよう。



第2図

Ⅲ 定 義

まず，財の需給一致を実現するような，実現可能な配分 feasible allocation を定義しよう。生産セクターでは私的財 ρ_y を投入産出して同時に公共財 ρ_x を産出する。したがって生産可能性の条件は

$$(\rho_x,\ \rho_y)\in Y \qquad ①$$

である。他方，消費サイドでは，生産された公共財を完全に消費し(仮定A)，私的財については通常の意味での需給均衡が成立する。すなわち

$$x=\rho_x$$

$$\sum y^i=\rho_y+\sum w^i$$

が成立する。$y^i-w^i=z^i$ として，これらを①式に代入すれば，財の需給一致を実現する実現可能な配分のための条件は，$(x,\ \sum z^i)\in Y$ であることがわかる。

定義 1 実現可能な配分 feasible allocation は $(x,\ \sum z^i)\in Y$ をみたす $(x,\ z^1,\cdots,z^n)$ である。

政府は，先にものべたように，公共財と私的財の価格を所与として，均衡財政の制約内で，公共財の給付と各家計への税負担とをペアにした公共政策

(8) この lump sum system の税制は定理5ではずされる。

をおこなう。しかし現実の経済においては，たとえば各公共財の購入量の決定ひとつをとってみても，政府がどのような行動原理にもとづいて政策決定をおなうのか，かならずしも明らかではなく，したがって簡単な理論モデルの中にくみこむことは決して容易ではない。そこでここでは次のような政策決定のプリンシプルを考えてみよう。

まず，家計にとっては税引き後の所得で購入する私的財は，政府の供給する公共財と無関係でない。たとえば政府が大気汚染防止サービスを供給すれば，私的な空気清浄設備や洗剤の購入量が減少するなど。そこで家計 i は，私的財の価格ベクター p_y を所与として，公共財と税引き後の可処分所得で購入できる私的財とによる満足が以前のそれより高いとき，新しい公共政策を支持する。すなわち，

家計 i は公共政策 $(x, t^1, \cdots, t^n)$ より公共政策 $(\bar{x}, \bar{t}^1, \cdots, \bar{t}^n)$ のほうを選好する，ということは次のことと同値である。

$u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) > u^i(x, z^i)$ かつ $p_y\bar{z}^i \leqq p_y z^i + t^i - \bar{t}^i$ であるような $\bar{z}^i$ が存在する。(9)

そこで我々は次の２つの要素からなる政策決定の原理を採用する。

(i) 政府は，ひとたび採用された公共政策が他のいかなる公共政策によっても否決されないように，ある政治的メカニズムで公共政策を遂行する。

(ii) 任意の公共政策は，全家計が他の公共政策をより選好すれば，否決される。

(i) は本来政治学の課題であり，このような設定が正当かどうか問題がないわけではないが，我々は安定性という視点からこれを採用する。(ii) は現実の経済ではむしろ多数決原理を採用する場合が普通であるが，我々はあえ

(9) 新しい公共政策において家計 i の税が増加したとしても，給付される公共財が十分有益な「生活環境財」であれば，家計 i はこの政策を支持するであろうということを，この式は示している。たとえば大気汚染による私的な損失が大きければ増税をともなう（公共財としての）汚染防止サビースは支持されるであろう。

て強い仮定をとる。多数決原理では Arrow〔1〕が明らかにしたように，個々人の厚生関数から社会的厚生の一般的合意を決定することができないからである。この場合，公共政策の採否をめぐって各家計のグループ化とゲームの理論的なかけひき（多数化工作）がさけられない。読者はおそらく，ここでいう政府とは，結局全会一致制を採用する直接民主主義的な議会の擬制的な表現であることを理解するであろう。

このような仮定を前提として，政府の公共政策は次のように定義される。

定義 2　所与の価格ベクター $p=(p_x, p_y)$ のもとで，公共政策 public sector proposal は，$\sum t^i = p_x x$ をみたす $(x, t^1, \cdots, t^n)$ である。

公共財をふくめた競争均衡の条件には，通常の競争均衡の条件，①予算制約内での家計の満足極大，②生産の制約条件内での企業の利潤極大，③各財の需給一致，のほかに，④公共政策の非否決性が加わらなければならない。

定義 3　初期条件 $(w^1, \cdots, w^n)>0$ を所与として，公共競争均衡 public competitive equilibrium は，次の⒜⒝⒞をみたす，実現可能な配分と均衡財政のペア $(p, x, z^1, \cdots, z^n, t^1, \cdots, t^n)$ である。

ⓐ　任意の $(\bar{x}, \bar{z}) \in Y$ にたいして $p(x, \sum z^i) \geqq p(\bar{x}, \bar{z})$

ⓑ　$p_y z^i + t^i = 0$ かつ $u^i(x, \bar{z}^i) > u^i(x, z^i) \Rightarrow p_y \bar{z}_i > p^y z^i$

ⓒ　全家計によって一層選好される他の公共政策はない。すなわち，ベクター p にたいして，任意の i について $u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) \geq u^i(x, z^i)$(10) かつ $p_y \bar{z}^i \leqq p_y z^i + t^i - \bar{t}^i$ をみたす $\bar{z}^i$ を存在させうる，代替的公共政策 $(\bar{x}, \bar{t}^1, \cdots, \bar{t}^n)$ は存在しない。

最後にパレート最適を定義しておこう。

定義 4　パレート最適は，任意の i について $u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) \geq u^i(x, z^i)$ でかつ $(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in Y$ をみたす配分 $(\bar{x}, \bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n)$ が存在しないような，実現可能な配分 $(x, z^1, \cdots, z^n)$ である。

---

(10)　これは，すべての i について，$u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) \geqq u^i(x, z^i)$，かつ少なくとも1人の j について，$u^j(\bar{x}, \bar{z}^j) > u^j(x, z^j)$ を表わす。

Ⅳ　公共競争均衡とパレート最適

競争均衡とパレート最適とにかんする厚生経済学の基本命題に対応して，公共競争均衡とパレート最適とにかんする命題を検討しよう。

レンマ1　$(p, x, z^1,\cdots, z^n, t^1,\cdots, t^n)$ が公共競争均衡で，かつ Y が閉凸錐ならば，$p(x, \sum z^i)=0$

証明　もし $p(x, \sum z^i)>0$ ならば，$\lambda>1$ にたいして $\lambda(x, \sum z^i)\in Y$ かつ $p\cdot\lambda(x, \sum z^i)>p(x, \sum z^i)$ になり，これは公共競争均衡の定義3ⓐに矛盾する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明了）

定理1　$(p, x, z^1,\cdots, z^n, t^1,\cdots,t^n)$ が公共競争均衡ならば，配分 $(x, z^1,\cdots,z^n)$ はパレート最適である。

証明　もし配分 $(x, z^1,\cdots, z^n)$ がパレート最適でなければ，定義4により任意の i について

$$u^i(\bar{x}, \bar{z}^i)\geqq u^i(x, z^i) \quad ①$$

をみたす，実現可能な配分 $(\bar{x}, \bar{z}^1,\cdots, \bar{z}^n)$ が存在する。

イ）まず $\bar{x}=x$ と仮定すると，定義3ⓑによって任意の i について $p_y\bar{z}^i\geqq p^y z^i$ したがって $p(\bar{x}, \sum\bar{z}^i)>p(x, \sum z^i)$ となり，しかも仮定より $(\bar{x}, \bar{z}^1,\cdots, \bar{z}^n)$ が実現可能な配分だから，これは定義3ⓐに矛盾する。

ロ）したがって $\bar{x}\neq x$。ⓐより

$$p(\bar{x}, \sum\bar{z}^i)\leqq p(x, \sum z^i) \quad ②$$

すると①②式より，パレート最適な配分 $(\bar{x}, \bar{z}^1,\cdots, \bar{z}^n)$ は競争均衡に対応する配分 $(x, z^1,\cdots,z^n)$ よりも価値が小さく，しかもすべての家計によって選好されている。すると次のようにして，競争均衡に対応する公共政策 $(x, t^1,\cdots,t^n)$ よりも，すべての家計がより選好する新しい公共政策 $(\bar{x}, t^1_*,\cdots, t^n_*)$ がつくられうるから，これはⓒに矛盾する。実際，各家計の税を

$$\bar{t}^i=t^i+p_y z^i-p_y\bar{z}^i \quad ③$$

とおくと，i で集計して均衡財政の条件と②式を代入して

$$\sum\bar{t}^i=\sum t^i+p_y\sum z^i-p_y\sum z^i$$

$$=p(x,\ \sum z^i)-p_y\sum\bar{z}^i\geqq p_x\bar{x} \qquad ④$$

そこで新しい公共政策として，$t^i_*=\bar{t}^i-\frac{1}{n}(\sum\bar{t}^i-p_x\bar{x})$ という税制をもつ政策 $(\bar{x},\ t^1_*,\cdots,\ t^n_*)$ をつくると，$\sum t^i_*=p_x\bar{x}$（均衡財政）しかも仮定により $(\bar{x},\ \bar{z}^1,\cdots,\ \bar{z}^n)$ は実現可能な配分で，かつすべての家計について $u^i(\bar{x},\ \bar{z}^i)\geqq u^i(x,\ z^i)$。これは公共競争均衡に対応する公共政策 $(x,\ t^1,\cdots,\ t^n)$ が否決されたことを意味する。以上により定理は証明された。　　（証明了）

次にこの逆定理を，例によって凸集合の分離定理を使って証明しよう。

定理 2　Y が閉凸錐で，任意の i について $u^i(x,\ z^i)$ が凹関数ならば，任意のパレート最適と任意の初期保有 $(w^1,\cdots,\ w^n)>0$ に対応して，$(p,\ x,\ z^1,\cdots,z^n,\ t^1,\cdots,t^n)$ が公共競争均衡であるような，価格ベクター $p=(p_x,\ p_y)$ と税ベクター $(t^1,\cdots,t^n)$ が存在する。

証明　順次定義 3 ⓐⓑⓒが成立することを証明する。

ⓐの証明　まず 2 つの集合

$$D^i=\{(\bar{x},\ \bar{z}^i)\mid u^i(\bar{x},\ \bar{z}^i)\geqq u^i(x,\ z^i)\}\ \text{for}\ \forall\ i$$

$$D=\{(\bar{x},\ \sum\bar{z}^i)\mid \text{任意の}\ i\ \text{について}\ (\bar{x},\ \bar{z}^i)\in D^i\}$$

をつくる。この D には次の性質がある。

イ）D は凸集合である。実際，

$$(\bar{x}_1,\ \sum\bar{z}^i_1),\ (\bar{x}_2,\sum\bar{z}^i_2)\in D$$
$$\Leftrightarrow\quad (\bar{x}_1,\ \bar{z}^i_1),\ (\bar{x}_2,\ \bar{z}^i_2)\in D^i\ \text{for}\ \forall i$$
$$\Leftrightarrow\quad u^i(\bar{x}_1,\ \bar{z}^i_1)\geqq u^i(x,\ z^i)\ \text{かつ}\ u^i(\bar{x}_2,\ \bar{z}^i_2)\geqq u^i(x,\ z^i)\ \text{for}\ \forall ti$$
$$\Rightarrow\quad u^i(\alpha\bar{x}_1+\beta\bar{x}_2,\ \alpha\bar{z}^i_1+\beta\bar{z}^i_2)\geqq u^i(x,\ z^i)\ \text{for}\ \alpha+\beta=1,\alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0$$
$$\Leftrightarrow\quad (\alpha\bar{x}_1+\beta\bar{x}_2,\ \alpha\bar{z}^i_1+\beta\bar{z}^i_2)\in D^i\ \text{for}\ \forall i$$
$$\Leftrightarrow\quad (\alpha\bar{x}_1+\beta\bar{x}_2,\ \alpha\sum\bar{z}^i_1+\beta\sum\bar{z}^i_2)\in D$$

ロ）$\overline{D}\ni(x,\ \sum z^i)$ ただし $\overline{D}$ は D の閉包

実際，$(x,\ \sum z^i)\in\overline{D}\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$ にたいして $V_\varepsilon(x,\ \sum z^i)\cap\overline{D}\neq\phi$（ただし $V_\varepsilon(x,\ \sum z^i)$ は $(x,\sum z^i)$ の ε 近傍）だから，$(x,\ \sum z^i)\notin\overline{D}$ ならば $V_\varepsilon(x,\ \sum z^i)\cap\overline{D}=\phi$ となるような $\varepsilon>0$ が存在することになり，こ

れは（x, z^1,…, z^n）の任意の近傍に，各家計がそれより選好する消費ベクター（$\bar{x}$, $\bar{z}^i$）があるという効用関数の連続性（仮定C）に矛盾する。

ハ）$Y \cap D = \phi$

実際，もし $Y \cap D \neq \phi$ ならば，D のつくりかたから，任意の i について $u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) \geq u^i(x, z^i)$ であるような，実現可能な配分（$\bar{x}$, $\bar{z}^1$,…, $\bar{z}^n$）が存在し，したがって（x, z^1,…, z）はパレート最適ではなくなる。

イ）ロ）ハ）から，Y と $\overline{D}$ は，ともに（$r+m$）次元空間内の閉凸集合で，かつ $D \cap Y = \phi$，しかも $\overline{D}$ は明らかに1点のみの集合ではないから，分離定理によって

$$p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \leqq c \quad \text{for} \ \forall \ (\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in Y \qquad ①$$

$$p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \geqq c \quad \text{for} \ \forall \ (\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in \overline{D} \qquad ②$$

を満足するベクター $p \neq 0$ とスカラー c とが存在する。 ③

すると仮定より（x , $\sum z^i$）$\in Y$ かつ（x, $\sum z^i$）$\in \overline{D}$ だから，任意の（$\bar{x}$, $\sum \bar{z}^i$）$\in Y$ にたいして $p(x, \sum z^i) = c \geqq p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i)$ となり，ⓐが証明された。

ⓑの証明

③式から $p \neq 0$ であり，つまり $p \geq 0$ であるが，[11] 実は $p_y > 0$ であることが証明される。

イ）まず $p_y = 0$ を仮定すると，$p \geq 0$ を考慮して $p_x \geq 0$。そこで $1 \leqq j \leqq r$ のある j について $p_{xj} > 0$ とする。すると仮定Pにより第 j 財を正の量 $x_j > 0$ 生産されるようにすることができる。すると $p_y = 0$，$p_x \geq 0$（とくに $p_{xj} > 0$，$x_j > 0$）より $p(x, \sum z^i) > 0$。これはレンマ1に矛盾する。

ロ）したがって $p_y \geq 0$（ただし$p_x \geqq 0$）。そこで私的財のうち $j \in J$ について$p_j > 0$，$k \in K$ について $p_k = 0$ とおこう。（J, K は私的財の番号集合の部分集合で，$J \cup K = \{1, \cdots, r\}$, $J \cap K = \phi$）この場合も $p_y > 0$ であ

---

(11) ベクター $p \geq 0$ は $p \geqq 0$ かつ $p \neq 0$ を表わす。

ることが，次のようにしてわかる。

(i) 正の価格をもつ私的財の消費量が正であるような消費者 s が存在する場合。

そのような消費者 s について z_k^s を十分ふやし，一方 z_j^s をへらすことによって（z_k^s に飽和点がないから），$u^s(x,\ z_*^s)>u^s(x,\ z^s)$ にできる。するとこの $(x,\ z_*^s)$ は他の消費者の消費 $(x,\ z^i)$ とあわせて $(x,\ \sum_{i\neq s} z^i+z_*^s)\in D$ をつくる。しかもつくりかたから $p(x,\ \sum_{i\neq s} z^i+z_*^s)<p(x,\ \sum_{i=1}^n z^i)=0$，これはレンマ1に矛盾である。したがって $p_j>0$ なる財 j について $z_j^s>0$ である消費者 s が存在すれば，$p_y>0$。

(ii) 正の価格をもつ私的財の消費量がすべてゼロの場合。

この場合も (i) と同様に，ゼロ価格の私的財を十分ふやす一方，正の価格をもつ公共財の消費をへらすことによって $u^i(\bar{x},\ \bar{z}^i)>u^i(x,\ z^i)$ にできる。これは正の価格をもつ公共財の消費もすべてゼロであるという特殊な状況をのぞいては $p(\bar{x},\ \sum \bar{z}^i)<0$ となり，レンマ1に矛盾する。しかもこの最後の特殊なケースでは，$p_y\sum w^i=p(x,\ \sum y^i)=0$ であるが，他方仮定から $p_y\geq 0$ かつ $\sum w^i>0$ であるから $p_y\sum w^i>0$ であり，矛盾である。

以上イ）ロ）(i) (ii) によって，私的財の価格は正 $p_y>0$ であることが証明された。(12) それゆえ，$p_y>0$ を使って，任意の s について

$$u^s(x,\ \bar{z}^s)>u^s(x,\ z^s)\ \Rightarrow\ p_y\bar{z}^s>p_y z^s$$

を証明すれば，ⓑは証明される。

もし $u^s(x,\ \bar{z}^s)>u^s(x,\ z^s)$ ならば任意の $i\ (\neq s)$ について $\bar{z}^i=z^i$ につくると，$u^i(x,\ \bar{z}^i)=u^i(x,\ z^i)$。ゆえに $(x,\ \sum_{i=1}^n \bar{z}^i)\in\bar{D}$。すると①②式より $p(x,\ \sum\bar{z}^i)\geqq c=p(x,\ \sum z^i)$，または展開して

$$p_y\bar{z}^s\geqq p_y z^s \qquad ④$$

④式において $p_y\bar{z}^s\neq p_y z^s$ を証明しよう。もし $p_y\bar{z}^s=p_y z^s$ ならば，$u^s(x,\ \bar{z}^s)>u^s(x,\ z^s)$ だから仮定 C により任意の $\varepsilon>0$ にたいして $u^s(x,\ \check{z}^s)>u^s(x,$

(12) これは私的財の消費に飽和点がないことを考えれば，ある程度当然の帰結である

z^s) かつ $\varepsilon > z_j^s - \bar{z}_j^s \geqq 0$，$\bar{z}^s \geqq \bar{z}^s$ をみたす $\bar{z}_j^s$ をとることができる（j は私的財の番号）。このとき $p_y > 0$ より $p_y \bar{z}^s < p_y \bar{z}^s = p_y z^s$ かつ $u^s(x, \bar{z}^s) > u^s(x, z^s)$ となり矛盾である。したがって

$$p_y \bar{z}^s \neq p_y z^s \qquad ⑤$$

④⑤式より

$$u^s(x, \bar{z}_s) > u^s(x, z_s) \rightarrow p_y \bar{z}^s > p_y z^s$$

これでⓑが証明された。

ⓒの証明

政府の予算制約が，各家計について $t^i = -p_y z^i$ であるとすれば，i で集計してレンマ1を使うと $\sum t^i = -p_y \sum z^i = p_x x$ となって，均衡財政の制約 $\sum t^i = p_x x$ をみたす。もし公共政策（$\bar{x}, \bar{t}^1, \cdots, \bar{t}^n$）が，

$$u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) \geqq u^i(x, z^i) \text{ for } \forall i \qquad ⑥$$

$$p_y \bar{z}^i \leqq p_y z^i + t_i - \bar{t}^i \qquad ⑦$$

をみたす $\bar{z}^i$ が存在する，というようなものであれば，以下のようにして矛盾であることがわかる。すなわち，⑦式を i で集計して，

$$p_y(\sum \bar{z}^i) + \sum \bar{t}^i \leqq p_y(\sum z^i) + \sum t^i$$

または

$$p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \leqq 0 = p(x, \sum z^i) \qquad ⑧$$

しかし，つくりかたより明らかに，（$\bar{x}, \sum \bar{z}^i$）$\in \overline{D}$ だから，

$$p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \geqq c = 0 \qquad ⑨$$

⑧⑨式より

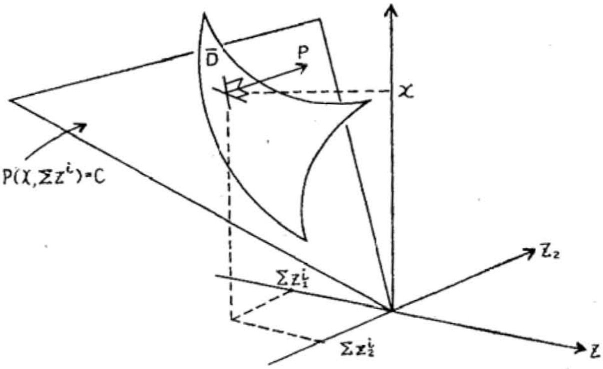
$$p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) = 0$$

しかし，一方⑥式より任意の i について $u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) > u^i(x, z^i)$ だから，$\bar{z}_j^i > -w_j^i$ なる第 j 財を少しだけへらして，しかも上の不等号をそのまま維持できる。すると，そのような消費（$\bar{x}, \bar{z}^i$）にたいしては，任意の i について $u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) > u^i(x, z^i)$ しかも $p(\bar{x}, \sum \bar{z}) < 0$ となり，これは（$\bar{x}, \sum \bar{z}^i$）$\in \overline{D}$ に矛盾する。したがって⑥⑦式を同時にみたす $\bar{z}^i$ が存在するような公共政策

は存在しない。これで©は証明された。以上で定理２は完全に証明された。

（証明了）

最後に，直観的理解をたすけるために，公共財１，私的財２のケースについて，分離平面を図示しておこう。



第3図

V　公共競争均衡の存在

Ⅳ節では，公共競争均衡とパレート最適との関係が明らかにされた。この節では，社会的厚生関数を使って，社会的厚生関数の極大とパレート最適との関係をのべて，それを媒介にして公共競争均衡の存在を証明する。

まず実現可能な配分（x, z^1, $\cdots$,z^n）の集合 X について次のレンマを証明しよう。

レンマ２　純取引集合 $X=\{(x, z^1,\cdots,z^n) \mid x\geqq 0,\ z^i\geqq -w^i,\ (x, \sum z^i)\in Y\}$ は凸コンパクトな集合である。

証明

イ）凸性の証明　$(x_1, z^1_1, \cdots, z^n_1)$, $(x_2, z^1_2,\cdots, z^n_2)\in X$ とすると，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$，$\alpha+\beta=1$ にたいして

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0 \Rightarrow \alpha x_1+\beta x_2\geqq 0$$

$$z_1^i \geqq -w_1^i,\ z_2^i \geqq -w_2^i \Rightarrow \alpha z_1^i + \beta z_2^i \geqq -(\alpha w_1^i + \beta w_2^i) \text{ for } \forall i$$

$$(x_1, \sum z_1^i),\ (x_2, \sum z_2^i) \in Y \Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha \sum z_1^i + \beta \sum z_2^i) \in Y$$

$$\therefore (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha z_1^1 + \beta z_2^1, \cdots, \alpha z_1^n + \beta z_2^n) \in X$$

ロ）閉集合の証明　Y が閉凸錐だから，X の定義より明らか。

ハ）有界性の証明（ここでは便宜的に $\mathbf{x}=(x, z^1, \cdots z^n)$ と表記する）もし X が有界でなければ，X の中に有界でない点列 $\mathbf{x}_s$ が存在する。そこで点列 $\bar{\mathbf{x}}^s = \frac{\mathbf{x}^s}{|\mathbf{x}_s|}$ をつくると，明らかに $\bar{\mathbf{x}}_s$ は有界だから，点列 $\bar{\mathbf{x}}_s$ の中に収束する部分列$\bar{\mathbf{x}}'_s$が存在する。$\bar{\mathbf{x}}'_s$の収束点を $\bar{\mathbf{x}}$ としよう。仮定により X は下には有界 $((x, z^1, \cdots, z^n) \geqq (0, -w^1, \cdots, -w^n))$ だから $\bar{\mathbf{x}} \geq 0$。この $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n)$ に対応して $(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \geq 0$。一方明らかに $(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in Y$ でもあり，これは生産の Land of Cockaigne を否定した仮定 P に矛盾する。（証明了）

ここで $(n-1)$ 次元単体 $S_n = \{k \mid \sum k^i = 1,\ k^i \geqq 0\ (i=1, \cdots, n)\}$ を媒介にして，そのようなウェイト k をもつ，線形の社会的厚生関数を導入しよう。

定義 5　$k \in S_n$ にたいして，社会的厚生関数 social welfare function は $W(k, x, z^1, \cdots, z^n) = \sum k^i u^i(x, z^i)$。

仮定 W　W はその要素について連続で，かつ $(x, z^1, \cdots, z^n)$ について厳密に増加関数である。

定義 5 であたえられた社会的厚生関数は，この経済の特定のメンバー（たとえば全体会議または政策担当者）の価値判断にもとづいた社会的福祉の指標である。k^i 値の特定化の中にその価値判断がふくまれている。我々のモデルで k^i がどのように決定されるか，そのプロセスについてはいま問わないことにしよう。

次に，実現可能な取引集合 X に属する $(x, z^1, \cdots, z^n)$ のうち，社会的厚生関数を極大にするものの集合 Z を定義する。

定義 6　$Z = \{(\hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n) \mid W(\hat{k}, \hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n) = \max \sum \hat{k}^i u^i(x, z^i)$ for some $\hat{k} \in S_n$; $(x, z^1, \cdots, z^n) \in X\}$

レンマ3　$\hat{k}\in S_n$ にたいして写像 $\hat{k}\to(\hat{x}, \hat{z}^1,\cdots,\hat{z}^n)$ は連続な1価関数である。

証明

イ）存在の証明　X がコンパクト集合であり，任意の $\hat{k}\in S_n$ について W は X のうえの連続関数だから Weierstrass の定理によって，$W(\hat{k}, \hat{x}, \hat{z}^1, \cdots,\hat{z}^n)$ は存在する。

ロ）一意性の証明　$W(\hat{k}, \hat{x}, \hat{z}^1,\cdots,\hat{z}^n)=W(\hat{k}, \bar{x}, \bar{z}^1, \cdots,\bar{z}^n)$ をみたす $(\bar{x}, \bar{z}^1,\cdots,\bar{z}^n)\neq(\hat{x}, \hat{z}^1,\cdots,\hat{z}^n)$ が存在すると仮定すると，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta=1$ にたいして，

$$\alpha W(\hat{k}, \hat{x}, \hat{z}^1,\cdots,\hat{z}^n)+\beta W(\hat{k}, \bar{x}, \bar{z}^1,\cdots,\bar{z}^n)$$
$$=\alpha\sum\hat{k}^i u^i(\hat{x}, \hat{z}^i)+\beta\sum\hat{k}^i u^i(\bar{x}, \bar{z}^i)$$
$$<\sum\hat{k}^i u^i(\alpha\hat{x}+\beta\bar{x}, \alpha\hat{z}^i+\beta\bar{z}^i)$$
$$=W(\hat{k}, \alpha\hat{x}+\beta\bar{x}, \alpha\hat{z}^1+\beta\bar{z}^1,\cdots,\alpha\hat{z}^n+\beta\bar{z}^n)$$

かつ X の凸性より $(\alpha\hat{x}+\beta\bar{x}, \alpha\hat{z}^1+\beta\bar{z}^1,\cdots,\alpha\hat{z}^n+\beta\bar{z}^n)\in X$ となって，Z の定義に矛盾する。

ハ）連続性の証明　（ここでも $(x, z^1,\cdots,z^n)=\mathrm{x}$ と表記する）　連続性の証明のためには，点列 $\{\hat{k}_q\}\to\hat{k}$ にたいして，

$$W(\hat{k}_q, \mathrm{x}_q)>W(\hat{k}_q, \mathrm{x}) \text{ for } \forall\mathrm{x}\in X \quad ①$$
$$W(\hat{k}, \hat{\mathrm{x}})>W(\hat{k}, \mathrm{x}) \text{ for } \forall\mathrm{x}\in X \quad ②$$

のとき，点列 $\{\mathrm{x}_q\}\to\hat{\mathrm{x}}$ を証明すればよい。

点列 $\{\mathrm{x}_q\}$ はコンパクト集合 X 上の無限点列だから，収束点 $\bar{\mathrm{x}}\in X$ をもっている。$\bar{\mathrm{x}}\neq\hat{\mathrm{x}}$ と仮定すれば以下のようにして矛盾であるから，$\bar{\mathrm{x}}=\hat{\mathrm{x}}$。実際，もし $\bar{\mathrm{x}}\neq\hat{\mathrm{x}}$ であれば，$\hat{\mathrm{x}}$ の定義②式より，$W(\hat{k}, \hat{\mathrm{x}})>W(\hat{k}\ \bar{\mathrm{x}})$。したがって，$\hat{k}$ についての W の連続性（仮定 W）により，十分大きな q については，ある $\varepsilon>0$ にたいして

$$W(\hat{k}_q, \hat{\mathrm{x}})\geqq W(\hat{k}_q, \bar{\mathrm{x}})+\varepsilon \quad ③$$

にできる。また $\{\bar{\mathrm{x}}_q\}\to\bar{\mathrm{x}}$ より，十分大きな q について

$$|W(\hat{k}_q, \bar{\mathrm{x}}) - W(\hat{k}_q, \mathrm{x}_q)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad ④$$

にできる。すると③④式より

$$W(\hat{k}_q, \hat{\mathrm{x}}) \geqq W(\hat{k}_q, \mathrm{x}_q) + \frac{\varepsilon}{2}$$

となって，これは①式に矛盾する。　　　　　　　　　　　　(証明了)

つぎに，定義4であげたパレート最適と定義6であげた社会的厚生関数を極大にする配分 $(\hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n)$ との関係について，2つの定理によって，その同値関係を明らかにしよう。

定理3　線形の社会的厚生関数 $W = \sum k^i u^i(x, z^i)$ を極大にする配分 $(\hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n)$ はパレート最適である。

証明　もし $(\hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n)$ がパレート最適でなければ，任意の i について $u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) \geqq u^i(\hat{x}, \hat{z}^i)$ をみたす $(\bar{x}, \bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n) \in X$ が存在する。すると

$$W(\hat{k}, \bar{x}, \bar{z}^1, \cdots, \bar{z}^n) = \sum \hat{k}^i\ u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) > \sum \hat{k}^i u^i(\hat{x}, \hat{z}^i)$$
$$= W(\hat{k}, \hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n)$$

となって，$(\hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n)$ の定義に矛盾する。　　　　　　　(証明了)

定理4　各家計の効用関数 $u^i(x, z^i)$ が凹関数であるとき $(x, z^1, \cdots, z^n)$ がパレート最適であれば，　$(\hat{x}, z^1, \cdots, z^n) = (\hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n)$

証明　$(x, z^1, \cdots, z^n)$ がパレート最適であるときの，各家計の効用の水準の組を $\tilde{u}^1(x, z^1), \cdots, \tilde{u}^n(x, z^n)$ としよう。次のように効用可能性集合 M を定義する。

$$M = \{(u^1, \cdots, u^n) \mid u^i \leqq \tilde{u}^i(x, z^i) \text{ for } \forall i\,; (x, z^1, \cdots, z^n) \in X\}$$

すると M については，

イ) M は閉凸集合。実際，閉集合の証明は，X が閉集合であることを考慮すれば，定義より明らか。凸性の証明は，$\alpha+\beta=1$，$\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$ にたいして

$$(u_1^1, \cdots, u_1^n), (u_2^1, \cdots, u_2^n) \in M$$
$$\Leftrightarrow\ u_1^i,\ u_2^i \leqq \tilde{u}^i(x, z^i) \text{ for } \forall i\,; (x, z^1, \cdots, z^n) \in X$$
$$\Rightarrow\ \alpha u_1^i + \beta u_2^i \leqq \tilde{u}^i(x, z^i) \text{ for } \forall i\,; (x, z^1, \cdots, z^n) \in X$$

⇔　$(\alpha u_1^1+\beta u_2^1,\cdots,\ \alpha u_1^n+\beta u_2^n)\in M$

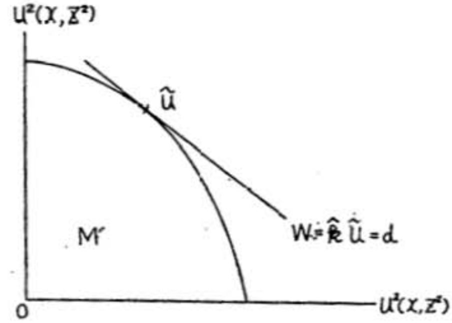
ロ）$(x,\ z^1,\cdots,\ z^n)$ がパレート最適であれば，$\tilde{u}=(\tilde{u}^1(x,\ z^1),\cdots,\ \tilde{u}^n(x,\ z^n))$ が M の内点でないことも明らか。

したがって，イ）ロ）より $\tilde{u}$ をとおる M の支持超平面が存在し

$\hat{k}\ \tilde{u}=d$

$\hat{k}u\leqq d$ for $\forall u\in M$

をみたすベクター $\hat{k}\neq 0$ とスカラー d が存在する（第4図参照）。ここで $\hat{k}\geqq 0$ であることを証明しよう。実際，もし $\hat{k}^i<0$ が存在すれば，u^i を十分大きなマイナスにとって，$\hat{k}u>d$ にできる。これは矛盾。したがって $\hat{k}>0$ だから，$\sum\hat{k}^i=1$ になるように $\hat{k}$ を正規化すれば，



第4図

$$\sum\hat{k}^i u^i(x,\ z^i)\geqq\sum\hat{k}^i\bar{u}^i(x,\ z^i)\ \text{for}\ \forall\ \bar{u}=(\bar{u}^1,\cdots,\ \bar{u}^n)\in M\,;(x,\ z^1,\cdots,\ z^n)\in X\,;\hat{k}\in S_n$$

となって，$(x,\ z^1,\cdots,\ z^n)=(\hat{x},\ \hat{z}^1,\cdots,\ \hat{z}^n)$　　　　（証明了）

さて，これまでのところから，次のことが明らかになった。まず，任意のウェイト $\hat{k}\in S_n$ にたいして，線形の社会的厚生関数 $W(\hat{k}\ x,\ z^1,\cdots,\ z^n)$ を極大にする取引ベクター $(\hat{x},\ \hat{z}^1,\cdots,\hat{z}^n)$ が，実現可能な純取引集合 X の中にただひとつ存在する（レンマ3）。しかもこのベクターはパレート最適であり（定理3），逆に，各家計の効用関数が凹関数，生産集合が凸錐という仮定のもとでは，パレート最適な取引ベクターは，ウェイト $k\in S_n$ が決ると線形の社会的厚生関数を極大にする（定理4）。

ここで公共競争均衡とパレート最適との関係（定理1，2）を想いおこすことは有意義である。それによれば公共競争均衡 $(p,\ x,\ z^1,\cdots,z^n,\ t^1,\cdots,t^n)$

はパレート最適であり，逆に，初期資産ベクター $(w^1, \cdots, w^n) > 0$ があたえられると，効用関数と生産集合についての同じ仮定のもとで，パレート最適 $(x, z^1, \cdots, z^n)$ に対応して，公共競争均衡の性質を有する価格ベクター p と税ベクター t とが存在する。

したがって，パレート最適を媒介として，任意のウェイト $k \in S_n$ に対応して，公共競争均衡を実現するような，価格ベクターと税ベクターとが存在することは，容易に想定できる。問題は，その税ベクターが現実的な，ということは社会的な価値判断にてらしてある程度合理的な税制を反映しているかどうか，ということにかかってくる。そこで我々は，最後に，各家計の初期資産（所得）にたいする比例税をもっているような公共競争均衡の存在を考えることにしよう。(13)

まず，正規化された価格ベクターを定義する。

定義 7　正規化された価格ベクターは

$$P = \{(p, c) \mid p \geq 0, \sum_{j=1}^{r+m} p_j = 1, p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \leqq c \text{ for } \forall (\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in Y;$$
$$P(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \geqq c \text{ for } \forall (\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in \hat{D}\}$$

ただし，$\hat{D} = \{(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \mid u^i(\bar{x}, \bar{z}^i) \geqq u^i(\hat{x}, \hat{z}^i) \text{ for } \forall i; (\hat{x}, \hat{z}^1, \cdots, \hat{z}^n) \in Z\}$

レンマ 4　写像 $\hat{k} \to P$ は上半連続である。

証明　この写像が上半連続であることを証明するためには，点列 $\{k_q\} \to k$, $\{(p_q, c_q)\} \to (p, c)$ で，かつ任意の q について $(p_q, c_q) \in P$ のときに $(p, c) \in P$ を証明すればよい。しかるに定義 7 から，このことは

$$p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \leqq c \quad \text{for } \forall (\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in Y \qquad ①$$

$$p(\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \geqq c \quad \text{for } \forall (\bar{x}, \sum \bar{z}^i) \in \hat{D} \qquad ②$$

を，同時に証明することにほかならない。

ところで，もし①式が成立しなければ，$p(x^*, \sum z^{i*}) > c$ となる $(x^*,$

(13) このような方法による競争均衡の証明は，私的財のみが存在する経済についてはすでに根岸〔7〕，〔8〕第 2 章，3 節で試みられている。我々はそこに公共財をふくめて考えているわけである。

$\sum z^{i*}) \in Y$ が存在する。しかし，q を十分大きくとれば，仮定によって $\{(p_q, c_q)\} \to (p, c)$ だから，$p_q(x^*, \sum z^{i*}) > c_q$ にとれる。これは $(p_q, c_q) \in P$ に矛盾する。したがって①式は成立する。②式の証明も同様。（証明了）

レンマ4は，もちろん $\hat{k}$ に対応する公共競争均衡の価格ベクターが一般に複数存在する，すなわち，P が2点以上からなる集合であることを考慮したものであるが，以下では，定理5の証明を単純にするために，P が1点のみからなる集合であると仮定しよう。この場合，写像 $\hat{k} \to P$ が連続関数になることはいうまでもない。この仮定は，生産集合 Y が凸多角錐 convex polyhedral cone ではなく凸円錐 convex round cone であれば実現する。(14)

定理5　生産集合 Y が閉凸円錐，各家計の効用関数が強い凹関数，初期資産ベクターが正 $w^i > 0$ ならば，税率 $s = \dfrac{p_x x}{p_y w}$ として，各人に比例的資産税 $t^i = s p_y w^i$ をかけたとき，公共競争均衡 $(p, x, z^1, \cdots, z^n, t^1, \cdots, t^n)$ が存在する。

証明　いま，定義3の公共競争均衡を，ⓒを除外して，次のような制約条件付極大問題としてよみかえよう。Y が閉凸錐であることから極値の解は Y の内点にはならないから，$(x, \sum z^i) \in Y \Leftrightarrow F(x, \sum z^i) = 0$ としてよい。また家計は予算制約いっぱいまで消費するとすれば，制約条件はいずれも等式であらわされる。

ⓐ　$\max\ p(x, \sum z^i)$　　sub. to.　　$F(x, \sum z^i) = 0$

ⓑ　$\max\ u^i(x, z^i)$　　sub. to.　　$p_y z^i + \dfrac{p_x x}{p_y w} p_y w^i = 0$

ⓓ　$F(x, \sum z^i) = 0$

ⓔ　$p_y z^i + t^i = 0$　　または　　$p_y z^i + \dfrac{p_x x}{p_y w} p_y w^i = 0$

そこで，各家計の効用関数が微分可能であるとし，かつコーナマキシマムの条件を排除すれば，ⓐⓑはラグランジ乗数法によって，次のように変形で

(14)　Y は切り口が必ずしも円形でなくともよい。たとえば楕円のように，十分な曲率をもっていればよい。

きる。

$$\varphi \equiv p(x,\ \sum z^i) - \mu\ F(x,\ \sum z^i)$$

$$\text{(a}-1)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \equiv p_j - \mu\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \qquad (j=1,\cdots,r)$$

$$\text{(a}-2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z_k^i} \equiv p_k - \mu\frac{\partial F}{\partial z_k^i} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,n \\ k=1,\cdots,m \end{pmatrix}$$

$$\text{(a}-3)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mu} \equiv F(x,\ \sum z^i) = 0$$

$$\psi^i \equiv u^i(x,\ z^i) - \delta_i\left(p_y z^i - \frac{p_x x}{p_y w} p_y w^i\right)$$

$$\text{(b}-1)\quad \frac{\partial\psi^i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial u^i}{\partial x_j} - \delta_i\frac{p_y w^i}{p_y w} p_j = 0 \quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,r \end{pmatrix}$$

$$\text{(b}-2)\quad \frac{\partial\psi^i}{\partial z_k^i} \equiv \frac{\partial u^i}{\partial z_k^i} - \delta_i p_k = 0 \quad \begin{pmatrix} i-1,\cdots,n \\ k=1,\cdots m \end{pmatrix}$$

$$\text{(b}-3)\quad \frac{\partial\psi^i}{\partial\delta_i} \equiv p_y z^i - \frac{p_x x}{p_y w} p_y w^i = 0$$

他方，生産の制約のもとでの社会的厚生関数の最大化も，制約条件付極大問題として，

$$\max\ \sum k^i u^i(x,\ z^i) \quad \text{sub. to. } F(x,\ \sum z^i) = 0$$

とかけるから，同じようにコーナーマキシマムを排除して，ラグランジ乗数法を使って次のように変形できる。

$$L \equiv \sum k^i u^i(x,\ z^i) - \lambda F(x,\ z^i)$$

$$\text{(w}-1)\quad \frac{\partial L}{\partial x_j} \equiv \sum_i k^i\frac{\partial u^i}{\partial x_j} - \lambda\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad (j=1,\cdots,r)$$

$$\text{(w}-2)\quad \frac{\partial L}{\partial z_k^i} \equiv k^i\frac{\partial u^i}{\partial z_k^i} - \lambda\frac{\partial F}{\partial z_k^i} = 0 \quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,n \\ k=1,\cdots,m \end{pmatrix}$$

$$\text{(w}-3)\quad \frac{\partial L}{\partial\lambda} \equiv F(x,\ \sum z^i) = 0$$

次に，任意の $k \in S_n$ と，ある $d > 0$ にたいして，写像

$$f^i(k) = \frac{\max\ [0,\ k^i - d(p_y z^i + s p_y w^i)]}{\sum_i \max\ [0,\ k^i - d(p_y z^i + s p_y w^i)]} \qquad ①$$

を定義しよう。写像のつくりかたから，明らかに $f(k) = [f^1(k),\cdots,f^n(k)] \in S_n$，しかもレンマ4，5および Y が閉円錐であることから，この写像は分母がゼロの点以外は連続な写像であることがわかるが，実は分母が1より小さくないことは以下のようにしてわかる。実際，

$$分母=\sum \max\,[0,\ k^i-d(p_y z^i+sp_y w^i)] \geqq \sum\,[k^i-d(p_y z^i+sp_y w^i)]$$
$$=\sum k^i-d\{p(x,\ \sum z^i)\}=1 \qquad ②$$

以上のことから，写像 $f: k\to f(k)$ は凸ンパクト集合 S_n から凸コンパクト集合 S_n への点対点連続写像であるから，ここに Brower の不動点定理を使うと，この写像には不動点 $\hat{k}=f(\hat{k})$ が存在する。(15) すると，レンマ 3，4，5によって，この不動点 $\hat{k}$ に対応して，$(\hat{x},\ \hat{z}^1,\cdots,\hat{z}^n)$, $\hat{p}=(\hat{p}_x,\ \hat{p}_y)$ がそれぞれユニークに存在する。

以下，この不動点に対応する社会的厚生関数最大の点が公共競争均衡であることを明らかにしよう。まず不動点の性質から $\hat{p}_y\hat{z}^i+s\hat{p}_y w^i$ はすべての i について同符号で，しかも

$$\sum(\hat{p}_y\hat{z}^i+s\hat{p}_y w^i)=\hat{p}(\hat{x},\ \sum\hat{z}^i)=0$$
$$\therefore\quad \hat{p}_y\hat{z}^i=-s\hat{p}_y w^i=-t^i \qquad ③$$

となって，③式は競争均衡の条件ⓔをみたす。

さらに公共競争均衡の条件 (a−1) ～ (b−3) と社会的厚生関数最大の条件 (w−1) ～ (w−3) とを比較すれば，

(a−1) $p_j=\mu\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ (w−1) $\sum\hat{k}_i\dfrac{\partial u^i}{\partial\hat{x}^j}=\hat{\lambda}\dfrac{\partial F}{\partial\hat{x}_j}$

(a−2) $p_k=\mu\dfrac{\partial F}{\partial z_k^i}$ (w−2) $\hat{k}^i\dfrac{\partial u^i}{\partial\hat{z}_k^i}=\hat{\lambda}\dfrac{\partial F}{\partial\hat{z}_k^i}$

(a−3) $F(x,\ \sum z_i)=0$ (w−3) $F(\hat{x},\ \sum\hat{z}^i)=0$

(b−1) $\dfrac{\partial u^i}{\partial x_j}=\delta_i\dfrac{p_y w^i}{p_y w}p_j$

(b−2) $\dfrac{\partial u^i}{\partial z_k^i}=\delta_i p_k$

(b−3) $p_y z_k^i=\dfrac{p_x x}{p_y w}p_y w^i$

したがって，

(i) すべての家計について $\hat{k}^i>0$ の場合，

---

(15) 我々がこの定理でYを円錐と仮定したのは，この Brower の不動点定理を使うためである。

$\delta_i \mu = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{k}_i}$ と解釈すれば（w−2）と（a−2）(b−2）の一致が，またこれを i で集計すれば $\mu \sum \delta_i = \hat{\lambda}$ となり，同時に（w−1）と（a−1）（b−1）の一致がえられる。この場合分母は

$$\sum \hat{k}^i - \sum d(\hat{p}_y \hat{z}^i + s\hat{p}_y w^i) = 1$$

である。

(ii) ある家計 i' について $\hat{k}^{i'}=0$，他の家計 i について $\hat{k}^i>0$ の場合

i' については $\hat{z}^{i'}=-w^{i'}$（すなわち $y^{i'}=0$）にして，i' の私的財を i に再分配することによって，社会的厚生を最大にできる。このとき

$$\hat{k}^{i'} = \frac{\max\ [0,\ k^{i'}-d\ (\hat{p}_y \hat{z}^{i'}+s\hat{p}_y w^{i'})]}{\sum_{i=1}^{n} \max\ [0, \hat{k}^i - d(\hat{p}_y z^i + s\hat{p}_y w^i)]} = 0$$

であるから，$d>0$ であることを考慮して，$\hat{p}_y \hat{z}^{i'}+s\hat{p}_y w^{i'} \geqq 0$，これに $\hat{z}^{i'}=-w^{i'}$，$\hat{p}_y \geq 0$，$w^i>0$ を代入すれば $s=1$。すなわち社会的厚生のウェイトがゼロである家計が存在すると税率が1になって，公共財の給付とひきかえに全家計から初期資産をとりあげることになる。ただし，ウェイトが正の家計 i については，$s=1$，$y^i=\hat{z}^i+w^i>0$ より，

$$\hat{k}^i = \frac{\hat{k}^i - d(\hat{p}_y \hat{z}^i + \hat{p}_y w^i)}{\sum \max\ [0,\ \hat{k}^i - d(\hat{p}_y \hat{z}^i + s\hat{p}_y w^i)]}$$

$$> \frac{\hat{k}^i}{\sum \max\ [0,\ \hat{k}^i - d(\hat{p}_y \hat{z}^i + s\hat{p}_y w^i)]}$$

となって，②式とあわせて，$\sum \max\ [0, k^i - d(\hat{p}_y \hat{z}^i + s\hat{p}_y w^i)] = 1$，したがって $\hat{k}^i = \hat{k}^i - d(\hat{p}_y \hat{z}^i + s\hat{p}_y w^i)$ だから，$\hat{p}_y \hat{z}^i + s\hat{p}_y w^i = 0$，すなわち $s\hat{p}_y w^i = -\hat{p}_y \hat{z}^i = -t^i$ となって，(i) の結論に帰着する。

(iii) 最後にすべての家計について $\hat{k}^i=0$ の場合

このようなケースは現実にはありえないが，当然 $s=1$ となって，公共財の給付とひきかえに各家計の全初期資産が納税されることになろう。やや不十分だが，これで定理は証明された。（証明了）

最後に，定理5の証明で使われた写像 f と不動点の直観的な意味を経済学的に理解しておこう。任意に各家計のウェイト k^i をあたえるベクター k

を選んで，それに対応して公共競争均衡(p, $x, z^1, \cdots, z_n$, $t^1, \cdots, t^n$)を決定する。すると一般にこの税額 t^i は初期資産に対する比例税制のもとでの税額 $\bar{t}^i$ にひとしくない。そこで $t^i-\bar{t}^i>0$ なる家計のウェイト k^i をひきあげ，$t^i-\bar{t}^i<0$ なる家計のウェイトをひきさげて，ふたたび公共競争均衡解を求めてみる。このような試行錯誤が，結局比例税制に一致する税ベクター $t=(t^1, \cdots, t^n)$ をもつ公共競争均衡を見出すであろうというのが不動点定理である。（ウェイト k もそれに対応して決る）[(16)]。

さて，税制がもっと現実的に累進税率だったらどうか，という問題が残るが，ここではそれはふれないでおく。

引用文献

〔1〕Arrow, K. J., *Social Choice and Individual Value,* 2ed., 1963.
〔2〕Dorfman, R., "General Equilibium with Public Goods," in Margolis, J. and Guitton, H. eds., *Public Economics,* 1969.
〔3〕Foley, D. K., "Resource Allocation and the Public Sector," *Yale Economic Essays* 7, spring 1967.
〔4〕Foley, D. K., "Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods," *Econometrica* vol. 38, January 1970.
〔5〕McKenzie, L. W., "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market, "*Econometrica* vol. 27, 1959.
〔6〕村上雅子，『最適分配の経済学』，新評論，1972.
〔7〕Negishi, T., "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Metroeconomica* vol. 12, 1960.
〔8〕根岸隆，『価格と配分の理論』，東洋経済新報社，1965.

---

(16)　この定理のひとつのインプリケーションは，各家計が同じ量の公共財を消費しているにもかかわらず，その対価としての税が初期資産に比例してかけられているということである。
　また，ベクター k は，税ベクター t の決定の過程で，同時に決められる。つまり，kの決定と t の決定とは同時決定なのである。もちろん，k には，何の「社会的価値」もふくまれてはいない。

〔9〕二階堂副包，『現代経済学の数学的方法』，岩波書店，1959.
〔10〕Samuelson, P. A., "The Pure Theory of Public Expenditure," *Review of Economics and Statistics*, vol. 36, 1954.
〔11〕Samuelson, P. A., "Pure Theory of Public Expenditure and Taxation," in Margolis J. and Guitton, H. eds., *Public Economics*, 1969.

追記 本稿が初校に入ったあとで，筆者は，本間正明氏が「公共支出と課税の理論」(大阪大学経済学，Vol 21. No. 2, Sept. 1971) において，より広いフレームワークの中で Foley〔3〕〔4〕を定式化しているのを知った。読者が氏の論文を併読されることを希望する。また，本稿のドラフトにたいして，本学会の武村昌介氏に適切なコメントをいただいた。更に，組版について印刷所の小林さんの援助をいただいた。末尾ながら感謝の意を表します。