

氏名	吉澤 毅
授与した学位	博士
専攻分野の名称	理学
学位授与番号	博甲第4125号
学位授与の日付	平成22年 3月25日
学位授与の要件	自然科学研究科 先端基礎科学専攻 (学位規則第5条第1項該当)
学位論文の題目	Algebraic methods in local cohomology theory -generalization and characterization - (局所コホモロジーの理論における代数的手法 —一般化と特徴づけ—)
論文審査委員	教授 吉野 雄二 教授 山田 裕史 教授 中村 博昭

学位論文内容の要旨

局所コホモロジーの理論は代数幾何学とも密接な関係があり重要な研究対象である。従来閉集合をサポートに持つ局所コホモロジー関手の研究が行われてきたが、本稿ではこの関手の一般化となる新たな関手を定義しその性質および既存の関手との関係性についてまとめた。さらに局所コホモロジー関手を圏論的な見地から捉え直し、関手の性質のみを用いて局所コホモロジー関手の特徴づけをおこなう。

第1章では、既存の局所コホモロジー関手の一般化となる概念として、イデアルの対 (I, J) に関する局所コホモロジー関手を以下のようにして定義しその性質を調べた。可換なネーター環 R 上のイデアル I と J に対し、環 R の素イデアル全体 $\text{Spec}(R)$ の部分集合 $W(I, J)$ を次のように定義する。

$$W(I, J) = \{ P \in \text{Spec}(R) \mid \text{ある整数 } n \text{ で } I^n \subseteq P+J \text{ を満たすものが存在する。} \}$$

一般に $W(I, J)$ は特殊化で閉じているが $\text{Spec}(R)$ の閉集合である必要はない。さらに R 加群 M の部分加群 $\Gamma_{I, J}(M)$ を次のように定義する。

$$\Gamma_{I, J}(M) = \{ x \in M \mid \text{Supp}(Rx) \subseteq W(I, J) \}$$

このとき、 $\Gamma_{I, J}$ は R 加群の圏上の左完全な加法的共変関手となり、関手 $\Gamma_{I, J}$ の i 番目の右導来関手を $H^i_{I, J}$ と表し、 (I, J) に関する i 番目の局所コホモロジー関手と呼ぶ。

1993年、P. Schenzel が論文「Explicit computations around the Lichtenbaum- Hartshorne vanishing theorem」において、完備局所環 R 上の有限生成加群 M に対し、 $\text{Hom}_R(H^{\dim M}_J(M), E(R/m))$ から M の canonical module K_M への単射写像が存在することが証明した。本稿ではこの単射写像の像が $\Gamma_{I, J}(K_M)$ であるを証明し、さらに Grothendieck's vanishing / non-vanishing theorem、Lichtenbaum-Hartshorne vanishing theorem、local duality theorem の一般化を与えた。

第2章では、 $\text{Spec}(R)$ の特殊化で閉じた部分集合 W をサポートに持つ局所コホモロジー関手 Γ_W に注目し、加群の圏上の一般の関手がどのような関手の性質を持てば局所コホモロジー関手になるのかということを考察した。また2つの局所コホモロジー関手 Γ_I と Γ_J を加群の圏上の関手全体の集合の中で特徴づけた。一方、加群の導来圏上の関手の性質のみを用いて新たに抽象局所コホモロジー関手と呼ばれるものを定義した。局所コホモロジー関手 Γ_W の右導来関手 $R\Gamma_W$ は加群の導来圏上の抽象局所コホモロジー関手であるが、逆に加群の導来圏上の三角関手 δ が抽象局所コホモロジー関手であるとき、 δ はある局所コホモロジー関手の右導来関手として表されるということを証明した。

論文審査結果の要旨

局所コホモロジー理論は、もともとは代数幾何学的発想から生まれたものであるが、現在可換環論においても主要な道具の一つとして定着している。本学位論文では、可換環上の局所コホモロジー理論に対して一般化と抽象化という二つの側面から見直しを迫るものである。

一般的に局所コホモロジーといった時には、従来は閉集合に台を持つものを考えることが普通であった。しかし、本論文では与えられた二つのイデアルの組から定まるある集合（ただし特殊化によって閉じた集合）に台を持つものに理論を拡張して、その場合の局所コホモロジー加群の消滅および非消滅に関して詳細な考察をほどこしている。また、この一般化された局所コホモロジーが従来閉集合を台に持つ局所コホモロジーの双対的な性格を持つことを示している。ここで展開された理論は全く新しい着想に基づくものであり、局所コホモロジー理論の一般化に関して新たな方向性を加えるものである。

また、本論文では局所コホモロジーを導来圏上の関手と捉えて圏論的に特徴付けることにも成功している。これは三角圏における安定 t -構造と呼ばれるものが局所コホモロジー関手を特徴付けるであろうという予想から出発したものであり、この予想に関して見事に肯定的な答えを与えている。局所コホモロジー関手の圏論的特徴付けについては、従来アーベル圏上の関手として様々な議論があったのだが、これを三角圏上の完全関手と捉えてその特徴付けを行ったことは全く新しい発想によるものであり、今後この方面の理論構成に大きな影響を与えるであろう。

以上のような観点から、本論文が学位論文にふさわしいものであると判断する。