

## 固有周波数のインバージョンによる地球内部構造の不均質性の推定

### — 数値実験 —

#### Inversion of normal mode frequencies for estimation of lateral heterogeneity of the earth's elasticity structure: A numerical test

大西星司 (Seiji Onishi) \*

小田 仁 (Hitoshi Oda) \*\*

An investigation was made on effect of lateral heterogeneity of the earth's elasticity structure on the normal mode frequencies. The lateral heterogeneity is expressed by an expansion of spherical harmonic functions,  $P_l^m(\cos\theta)\sin m\phi$  and  $P_l^m(\cos\theta)\cos m\phi$ , up to the second order harmonics ( $l \leq 2$ ). Free oscillation frequencies of the heterogeneous earth were computed by the xyz algorithm. Further we derived an analytic expression of partial derivatives of eigenfrequency with respect to the expansion coefficients, and performed a numerical test to verify whether or not it is possible to estimate the heterogeneity of the earth's structure by the inversion of normal mode frequencies.

When the earth is assumed to be elastically isotropic spheroid with short polar and long equatorial radii, frequency spectra affected by longitudinal heterogeneity terms,  $P_l^m(\cos\theta)(\sin m\phi, \cos m\phi)$  ( $m \neq 0$ ), for given values of  $l$  and  $m$  coincide with each other, because these two terms describe the same heterogeneity when the earth is rotated by  $\pi/2m$  around rotation axis. In such a case, we cannot determine accurately the expansion coefficients of the two heterogeneity terms by inversion of normal mode frequencies, whereas the coefficients of the latitudinal heterogeneity  $P_l^0(\cos\theta)$  can be precisely determined. Therefore it is difficult to estimate of lateral heterogeneity of the earth's elasticity structure by the inversion of normal mode frequencies.

Keywords : Normal Mode, Inversion, Earth's Structure, Lateral Heterogeneity

### § 1. はじめに

従来、地球振動を研究する場合には地球を球対称として取り扱ってきた。しかし、実際の地球は自転をしており、形状は回転楕円体に近い。また、地震波速度構造は深さ方向だけではなく水平方向にも不均質である。このような球対称でない地球構造の影響は、地球振動の固有周波数のスペクトルに反映される。即ち、球対称地球の場合には正規モードの

周波数は縮退しているが、球対称が成り立たない地球の場合には、それは異なった固有周波数に分裂する。従って、固有周波数の分裂パターンは、地球内部構造の不均質性に関する情報を含んでいると考えられ、地球振動の固有周波数から地球構造の不均質性を求めることを試みることは重要である。

非球対称地球モデルの正規モード解を求めるためには、球対称地球モデルからの違いに着目した1次

\* 岡山大学大学院理学研究科, 〒700 岡山市津島中3-1-1

\*\* 岡山大学理学部地球科学科, 〒700 岡山市津島中3-1-1

の摂動法が用いられてきた [Zharkov and Lyubimov (1970a, 1970b), Madariaga (1972), Woodhouse and Dahlen (1978)]。しかし、一次摂動法を使う限り、奇数次の不均質構造が地球振動の固有周波数へ及ぼす影響を見積もることが不可能であるので [Woodhouse and Dahlen (1978)]、地球振動の固有周波数から奇数次の不均質性を推定することも困難であった。そこで、不均質地球モデルの正規モード解を高い精度で得る方法として変分法が考案され、不均質地球構造を推定するための固有周波数や波形のインバージョンに用いられるようになった [Park (1986), Park and Gilbert (1986), Morris et al. (1987), Tuboi and Geller (1989)]。この方法は、モード間のカップリングを考えているために、奇数次の不均質性も偶数次と同程度の解像度で求められるという利点がある。

近年、異方性単結晶試料の弾性率を測定するために球共振法が開発された [Suzuki et al., (1992)]。これは、球形試料の共振周波数から弾性率を決定する方法である。この方法を用いるためには、異方性弾性体の共振周波数を計算する必要があり、変分法に基づいた正規モードの計算方法が開発されてきた [例えば、Mochizuki (1988)]。特に、Visscher et al. (1991) が開発した XYZ 法は他の計算方法に比較して共振周波数の計算速度や精度において卓越している [小田・Visscher (1994)]。XYZ 法は単結晶試料の均質球だけでなく不均質な弾性球の正規モードの固有周波数の計算にも適用できると考えられる。

本研究では、地球構造の不均質性とその正規モードの周波数に及ぼす影響を XYZ 法を用いて調べる。また、地球振動の固有周波数から地球の不均質性を

推定することが可能かどうかを数値実験によって検討する。そのため、不均質性を表すパラメータによる固有周波数の偏微分係数の解析的表現も導く。

## § 2. 変分法を用いた不均質地球の固有周波数

地球振動の計算では自転や重力の影響を考慮しなければならぬが、ここでは議論を簡単にするためこれらの効果を見捨てる。従って、ここで取り扱う地球は単純な弾性体とみなすことができる。このことは、本研究で得られる結論に影響を及ぼさない。

体積  $V$  の弾性体が定常振動しているときのラグランジアン  $L$  を次のように定義する。

$$L = \int \left\{ (1/2) \rho \omega^2 u_i u_i - (1/2) C_{ijkl} \varepsilon_{i,j} \varepsilon_{k,l} \right\} dv \quad (1)$$

ここで、被積分関数の第一項は運動エネルギー密度、第二項は歪エネルギー密度を表す。 $\rho$  は密度、 $\omega$  は固有角周波数、 $C_{ijkl}$  は弾性率である。また、 $u_i$  は変位ベクトルの  $i$  成分 ( $i=x, y, z$ ) を表し、 $u_{i,j}$  は変位ベクトル  $u_i$  の  $x_j$  に関する偏微分を意味する。さらに、\* は複素共役を意味し、重複する添字  $i, j, k, l$  については総和規約を適用する。

Rayleigh-Ritz 法によれば、ラグランジアン  $L$  に対してハミルトンの変分原理 [Lancros (1964)] を適用することにより、自由振動の固有角周波数  $\omega$ 、変位  $u_i$  を求めることができる。このとき、変位  $u_i$  を既知の基底関数  $\Phi_\lambda$  を用いて次のように展開する。

$$u_i = \sum_\lambda a_{\lambda i} \Phi_\lambda \quad (2)$$

$a_{\lambda i}$  は未知の展開係数である。基底関数  $\Phi_\lambda$  のとり方は任意であるが、ここでは Visscher et al. (1991) に従って直交座標  $x, y, z$  のべき乗の積で表す。

$$\Phi_\lambda = x^l y^m z^n = \Phi_{lmn} \quad (3)$$

ここで、 $l, m, n$  は負でない整数であり、 $\lambda$  は 1 組の  $(l, m, n)$  で決まる正の整数である。(2) の展

関係数  $a_{\lambda i}$  を求めるために、ラグランジアン  $L$  にハミルトンの変分原理、

$$\delta L = 0 \quad (4)$$

を適用すると、一般化固有値方程式が得られる。

$$\omega^2 \mathbf{E} \mathbf{a} = \mathbf{G} \mathbf{a} \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{G}$  の行列要素は

$$E_{i\lambda i' \lambda'} = \delta_{i i'} \rho \int_V \phi_{l m n} \phi_{l' m' n'} dv \quad (6)$$

$$G_{i\lambda i' \lambda'} = C_{ijij} \int_V \left( \frac{\partial \phi_{l m n}}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial \phi_{l' m' n'}}{\partial x_j} \right) dv \quad (7)$$

で定義でき、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。弾性体の正規モード解を得ることは(5) を解くことに帰着する。即ち、固有値方程式の固有値  $\omega^2$  から固有角周波数  $\omega$  が決まり、展開係数  $a_{\lambda i}$  を成分とする固有ベクトル  $\mathbf{a}$  を(2) に代入することにより、正規モードの変位を得ることができる。

地球の不均質性は、均質な地球モデルからの弾性率の違いで表される。そこで、弾性率の違いを  $C_{ijkl}^{(1)}$  とし、それを球面調和関数によって次のように展開する。

$$C_{ijkl}^{(1)} = K_{ijkl} f(\theta, \phi) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) = & C_0^0 P_0^0(\cos \theta) \\ & + C_1^0 P_1^0(\cos \theta) \\ & + C_1^{1s} P_1^1(\cos \theta) \sin \phi + C_1^{1c} P_1^1(\cos \theta) \cos \phi \\ & + C_2^0 P_2^0(\cos \theta) \\ & + C_2^{1s} P_2^1(\cos \theta) \sin \phi + C_2^{1c} P_2^1(\cos \theta) \cos \phi \\ & + C_2^{2s} P_2^2(\cos \theta) \sin 2\phi + C_2^{2c} P_2^2(\cos \theta) \cos 2\phi \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $(r, \theta, \phi)$  は球座標を表し (Fig. 1 参照)、 $P_l^m(\cos \theta)$  はルジャンドル陪関数、 $C_l^{mh}$  ( $h$  はまたは  $c$  のどちらかを取る) は展開係数を表す。今回は議論を簡単にするため  $C_{ijkl}^{(1)}$  は二次までの球関数で展開し、

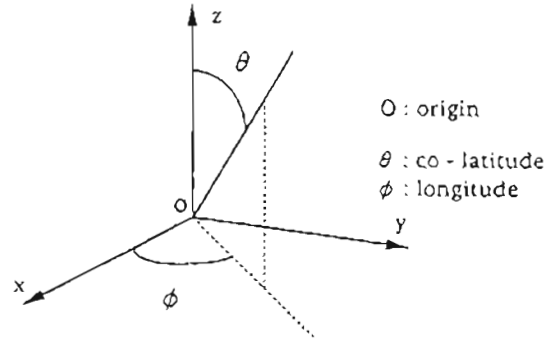


Figure 1. Spherical coordinate system.

$C_{ijkl}^{(1)}$  は緯度、経度方向のみに変化すると考え、半径方向  $r$  には変化しないとした。また、 $K_{ijkl}$  は四次のテンソルであり、 $P_l^0(\cos \theta)$  を緯度に依存する不均質項、 $P_l^m(\cos \theta) (\cos m\phi, \sin m\phi)$  を経度に依存する不均質項とよぶことにする。均質な地球の弾性率を  $C_{ijkl}^{(0)}$  とするとき、不均質な地球の弾性率  $C_{ijkl}$  は次のように表される。

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^{(0)} + C_{ijkl}^{(1)} \quad (10)$$

(10) を(7) に代入して行列  $\mathbf{G}$  を計算し、これを(5) に代入して解けば、不均質地球モデルに対する正規モードの周波数を計算することができる。

不均質地球モデルの9個の弾性率は球面調和関数で表されているので、展開係数 ( $C_0^0 \sim C_2^{2s}$ ) が定まれば任意の点  $(\theta, \phi)$  での  $C_{ijkl}^{(1)}$  が決まる。展開係数を観測固有周波数から定めるために、展開係数がわずかに変化したときの固有周波数の変化  $\delta\omega$  を考える。このとき、固有ベクトルも  $\delta\mathbf{a}$  だけ変化するから、正規モードのエネルギー方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned} (\omega + \delta\omega)^2 (\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})^T \mathbf{E} (\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \\ = (\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})^T (\mathbf{G} + \delta\mathbf{G}) (\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $a^t$ は $a$ の転置行列であり、 $\delta G$ は

$$\delta G = \Delta C_0^0 G_0^0 + \Delta C_1^0 G_1^0 + \Delta C_1^{1s} G_1^{1s} + \cdots + \Delta C_2^{2s} G_2^{2s} + \Delta C_2^{2c} G_2^{2c} \quad (12)$$

で表される。 $\Delta C_0^0 \sim \Delta C_2^{2s}$ は展開係数の微小変化を表し、また、行列  $G_l^{mh}$  の要素は次式で表される。

$$(G_l^{mh})_{\lambda\lambda'} = \int_v P_l^m(\cos\theta) \left\{ \frac{\sin m\phi}{\cos m\phi} \right\} \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_{\lambda'}}{\partial x_i} dv \quad (13)$$

ここで、 $h$ は $\sin$ 関数と $\cos$ 関数に対応して $s$ または $c$ で表されるものとする。エネルギー方程式(11)を展開し、微小変化量の2次以上の項を無視すると

$$\delta\omega = \frac{a^t \delta G a}{2\omega a^t E a} \quad (14)$$

が得られる。これは、(12)を用いると

$$\delta\omega = \Delta C_0^0 A_0^0 + \Delta C_1^0 A_1^0 + \Delta C_1^{1s} A_1^{1s} + \cdots + \Delta C_2^{2s} A_2^{2s} + \Delta C_2^{2c} A_2^{2c} \quad (15)$$

$$A_l^{mh} = \frac{a^t G_l^{mh} a}{2\omega a^t E a} \quad (16)$$

で表される。(15)の係数  $A_l^{mh}$  は(13)と(16)を用いて計算することができるから既知量である。従って、展開係数に微小な変化( $\Delta C_0^0 \sim \Delta C_2^{2s}$ )を与えればそれによる固有周波数の変化 $\delta\omega$ を求めることができる。また、固有周波数の変化 $\delta\omega$ を様々な振動モードについて測定できれば、(9)の展開係数の微小変化 $\Delta C_l^{mh}$ を最小二乗法で求めることもできる。

### § 3. 非球対称地球の自由振動

地球構造の不均質性が固有周波数に及ぼす影響を調べるために、(9)の不均質項の係数( $C_0^0 \sim C_2^{2s}$ )の値を1.0としたときに、各々の不均質項が固有周

Table 1. Values of parameters of three earth models.

	Isotropic Spheroid	Isotropic Ellipsoid	Orthorombic Spheroid
Density (g/cm <sup>3</sup> )	1.0	1.0	1.0
Length of semi-major axis (cm)			
$a_x$	1.00	1.02	1.00
$a_y$	1.00	1.00	1.00
$a_z$	0.99	0.98	0.99
$K_{ij}$ (GPa)			
$K_{11}$	2.0	2.0	1.0
$K_{22}$	2.0	2.0	1.0
$K_{33}$	2.0	2.0	2.0
$K_{44}$	1.0	1.0	3.0
$K_{55}$	1.0	1.0	4.0
$K_{66}$	1.0	1.0	5.0
$K_{12}$	0.0	0.0	6.0
$K_{31}$	0.0	0.0	7.0
$K_{23}$	0.0	0.0	8.0

Voigt notation  $K_{ij}$  is used for the fourth order elastic constants  $K_{ijkl}$ .

波数に及ぼす影響の大きさを計算する。計算に用いた非球対称地球モデルは、等方体の回転楕円体、等方体の三軸楕円体、斜方晶系の回転楕円体である。回転楕円体(偏平率が1%)の場合には、 $z$ 軸を回転軸とし赤道半径を長軸とした。議論を簡単にするため、基準となる地球を半径1cmの球と仮定し、弾性率  $C_{ijkl}^{(0)}$  には等方体の弾性率  $\lambda = \mu = 100$  GPaを与えた。各々の地球モデルに用いる  $K_{ijkl}$  の値と楕円体の主軸の半径  $a_x, a_y, a_z$  の値を Table 1 に示す。正規モードの周波数の計算には  $l+m+n \leq 4$  を満たす99個の基底関数を用いた。従って、固有値の収束は十分ではない。しかし、このことが以下の結果に影響を及ぼすことはない。

地球を等方体で回転楕円体とした場合、不均質性が地球振動の周波数スペクトルへ及ぼす影響を不均質項別に Fig. 2 に示す。最上段にある周波数スペクトルは基準となる均質地球の固有周波数のスペクトル

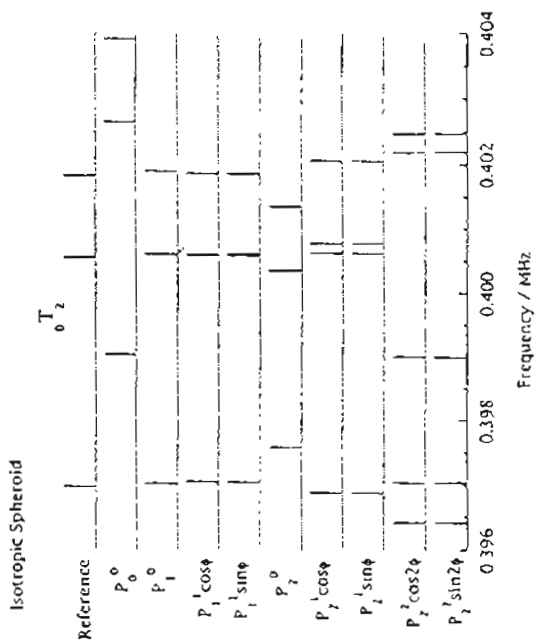


Figure 2. Frequency spectra of  ${}_{0}T_2$  and  ${}_{0}S_2$  modes of laterally heterogeneous earth with spheroidal shape. Elasticity in the earth model is assumed to be isotropic. Top row shows frequency spectrum of reference earth with homogeneous elasticity. Normal mode frequencies perturbed by a heterogeneous term are shown in a row spectrum.

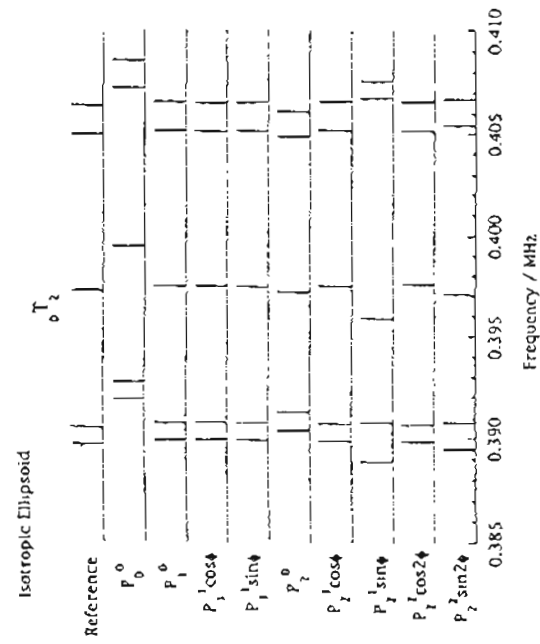


Figure 3. Frequency spectra of  ${}_{0}T_2$  and  ${}_{0}S_2$  modes of laterally heterogeneous earth with ellipsoidal shape. Earth model is the same as that used in Figure 2, except for that the earth's shape is ellipsoidal.

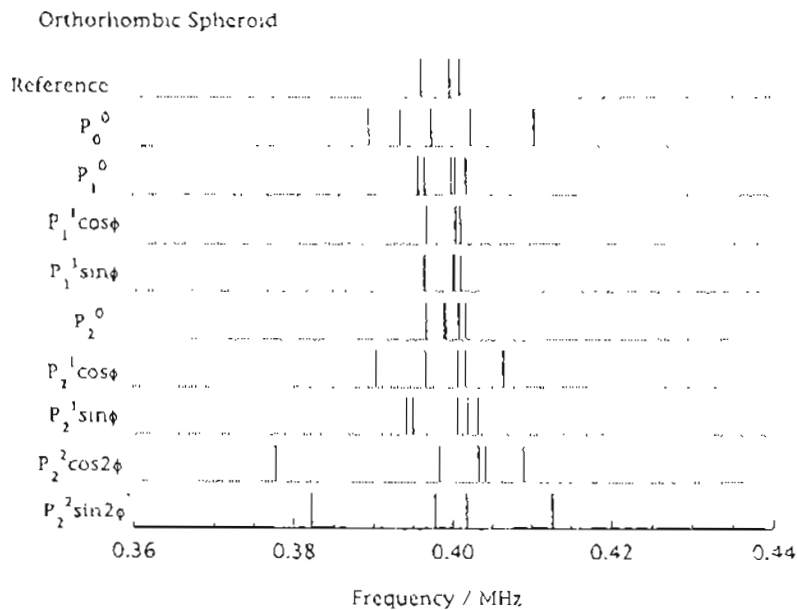


Figure 4. Frequency spectra of the lowest five modes of laterally heterogeneous earth with spheroidal shape. Earth model is the same as that used in the Figure 2, except for that elasticity perturbation from reference earth is orthorhombic.

ルである。不均質地球の固有周波数と基準となる周波数の差が不均質性の影響を表していることになる。不均質項が周波数スペクトルに及ぼす影響は各々異なっているように見える。しかし、ルジャンドルの陪関数が同じで  $\sin$  関数と  $\cos$  関数が異なるとき、この二つの不均質項が固有周波数の分布に及ぼす影響は全く同じになっている。これは、スフェロイダルモード、及びトロイダルモードに関係なく全てのモードで見られ、次のように解釈できる。すなわち、等方体の  $z$  軸に短軸を持つ回転楕円体の場合、 $P_l^m(\cos\theta)$  が同じであれば  $z$  軸の周りに  $\pi/2m$  だけ回転させると、 $\sin m\phi$  と  $\cos m\phi$  で表される経度方向の不均質性が一致するからである。このように考えると、緯度のみ依存する不均質項  $P_l^0(\cos\theta)$  が周波数スペクトルへ及ぼす影響は互いに異なることは容易に理解できる。

そこで、 $z$  軸の周りに回転させても不均質性が一致しない弾性体として等方体の三軸楕円体と斜方晶系の回転楕円体を選び、その固有周波数を計算した。計算結果を Fig. 3 と Fig. 4 に示す。いずれのモデルの場合にも、 $P_l^m(\cos\theta)(\sin m\phi, \cos m\phi)$  の二つの不均質項が固有周波数に及ぼす影響は互いに異なっていることが見て取れる。このことは、上で述べた解釈の正しさを示唆している。また、偶数次の影響ほど大きくないが、いずれの地球モデルにおいても奇数次の不均質項 ( $l=1$  の項) による固有周波数の影響が明かに見られる。このような奇数次の不均質項の影響は、従来の摂動法では見積りが困難であった。

#### § 4. 固有周波数をデータとした不均質性の推定

(15) に基づいた固有周波数のインバージョンに

よって、(9)の不均質項の係数  $C_0^0 \sim C_2^{2s}$  を求める数値実験を行った。数値実験では、あらかじめ係数に値を与えて計算した固有周波数を観測データ  $\omega^0$  とした。従って、与えた係数の値と固有周波数のインバージョンで得られた係数の値が一致すれば、不均質性がうまく見積もられたことになる。インバージョンには99の正規モードを用いた。係数  $C_0^0 \sim C_2^{2s}$  に与えた値をTable 2に示す。

Table 2. Values of expansion coefficients  $C_l^{mh}$ .

$C_0^0$	1.0
$C_1^0$	2.0
$C_1^{1c}$	5.0
$C_1^{1s}$	2.0
$C_2^0$	1.0
$C_2^{1c}$	1.0
$C_2^{1s}$	3.0
$C_2^{2c}$	1.0
$C_2^{2s}$	5.0

弾性的に等方体で回転楕円体の地球モデルの計算固有周波数を観測データ  $\omega^0$  として、(9)の不均質項の係数  $C_0^0 \sim C_2^{2s}$  を求めた。あらかじめ与えた係数の値とインバージョンによって得られた値との相対的な差を係数についてFig. 5にプロットした。係数を求める計算には反復法を用い、Fig. 5に示した結果は10回の反復計算によって得られたものである。このときの固有周波数の観測値と計算値の差の分散は  $10^{-5}$  MHzである。不均質項のうち、緯度のみ依存している不均質項の係数  $C_0^0, C_1^0, C_2^0$  は正確に求められているが、経度に依存する項の係数は正確に求められていない。この結果はインバージョンに用いる係数の初期値に依存しない。 $C_0^0, C_1^0, C_2^0$  以外の係数の値が正しく求められないのは次のように解釈できる。Fig. 2で見たように、不均質項の  $P_l^m(\cos\theta)$  が同じで  $\sin$  関数と  $\cos$  関数が異なる場合には、回転楕円体の弾性率の不均質性はその固有周波数に及ぼす影響は全く同じである。このことは、固有周波数のデータから  $C_l^{ms}, C_l^{mc}$  の解を一意に定めることができないことを意味している。

そこで、9個の不均質項のうち  $P_l^m(\cos\theta)\sin m\phi$  ( $m=1, 2$ ) の項を除いて計算した固有周波数を観測データとして、残り6個の不均質項の係数を求める数値実験を行った。結果をFig. 5に示す。6個の不均質項の係数は正しく求められていることが示さ

れている。従って、回転楕円体の場合には、

$P_l^m(\cos\theta)(\sin m\phi, \cos m\phi)$  の不均質項が周波数スペクトルに及ぼす影響の一致が、固有周波数から経度に依存する不均質項の係数を正しく求めることを困難にしているといえる。

このように考えると不均質項が  $z$  軸周りの回転で一致しなければ、経度に関する不均質項の係数が正しく求められると考えられる。そこで、 $z$  軸周りに回転させても各々の不均質項が一致しないような不均質性を持つ弾性体として、等方体の三軸楕円体と斜方晶系の回転楕円体を考える。そして、これらの弾性体の固有周波数から  $C_0^0 \sim C_2^{2s}$  の9個の不均質項の係数が正しく求められるかどうか、同様な数値実験を行った。結果をFig. 6に示す。いずれの場合にも、9個の係数は正しく求められている。このことより、弾性率の不均質性を表す項が  $z$  軸の回転によって一致しない弾性体であれば、全ての不均質項の係数は固有周波数のインバージョンによって求めることができる。

従来、奇数次の不均質項を固有周波数から推定することは困難であったが、ここで開発されたインバージョン法では一次の不均質項が正しく推定されて

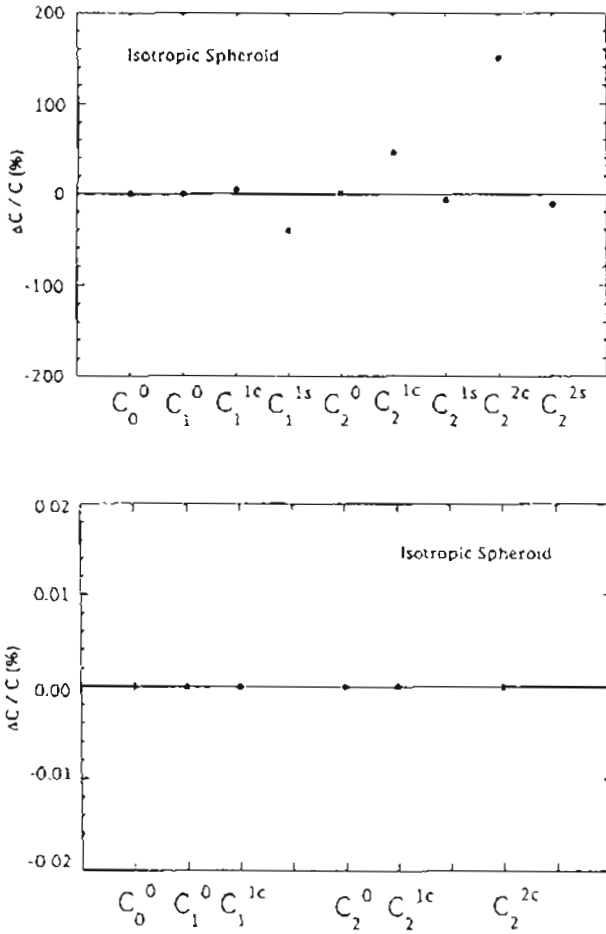


Figure 5. Relative difference between assumed and obtained values of heterogeneity coefficients for the case of elastically isotropic spheroid. The frequency inversions were made for nine (top) and seven (bottom) unknown coefficients in Eq.(9).

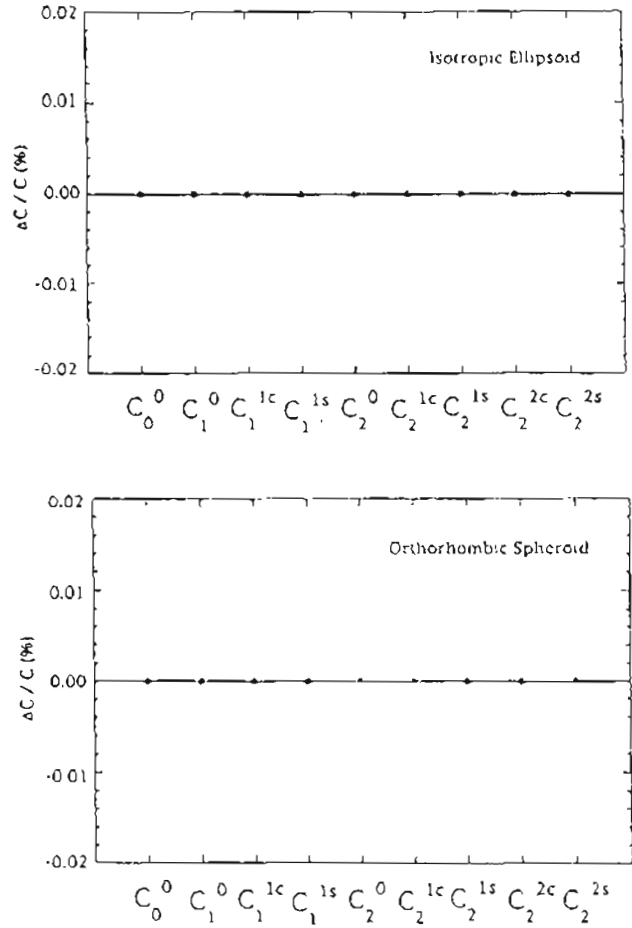


Figure 6. Relative difference between assumed and obtained values of heterogeneity coefficients for the cases of elastically isotropic ellipsoid (top) and orthorhombic spheroid (bottom). Nine unknown coefficients in Eq.(9) were determined by frequency inversion.

いる。これは、正規モードの周波数の計算に変分法を用いたために奇数次の不均質項の影響を見積もることが可能となったためである。

## § 5. おわりに

地球振動の固有周波数から地球内部構造の不均質性を求めるための数値実験を行った。ここでは、地球内部の不均質な弾性率の分布を球面調和関数で展開して表し、各々の不均質項が地球の正規モードの周波数に及ぼす影響を吟味した。さらに、正規モードの周波数のインバージョンによって球面調和関数

で表された不均質項の係数を求めることができるかを数値実験によって確かめた。結果は以下のようにまとめることができる。

1. 地球を等方体の回転楕円体とした場合、経度に依存する二つの不均質項  $P_l^m(\cos\theta)(\sin m\phi, \cos m\phi)$  がその周波数スペクトルに与える影響は同じである。これは、回転楕円体の場合に  $z$  軸周りに適当な回転を考えると、この二つの不均質性は一致するからである。しかし、三軸楕円体や異方性回転楕円体の場合には、これらの不均質性は一致しないので、その周波数スペクトルへの影響



は互いに異なる。一方、緯度に依存する不均質項  $P_l^0(\cos\theta)$  は、地球の形状や弾性率の性質にかかわらず、異なった影響を周波数スペクトルに与える。

2. 等方体の回転楕円体では、経度に依存する二つの不均質項  $P_l^m(\cos\theta)(\sin m\phi, \cos m\phi)$  がその周波数スペクトルに与える影響は同じであるために、正規モードの周波数のインバージョンで経度に依存する不均質性を求めることはできない。しかし、緯度に依存する不均質性は正しく見積もられる。一方、三軸楕円体や異方性回転楕円体の場合には、不均質項が周波数スペクトルに与える影響は互いに異なるので、正規モードの周波数のインバージョンによって全ての不均質項の係数を決定できる。
3. 地球は異方性が強くない回転楕円体であるので、固有周波数のインバージョンによって、緯度に依存する不均質性は正しく見積もることができるが、経度に依存する不均質性を求めることは困難である。
4. 不均質性の奇数次の項による正規モードの周波数への影響を評価したり、逆に固有周波数からこの展開係数を求めることができた。

## 謝辞

この研究を進めるにあたり、鈴木功教授、浦川啓助手ならびに地球物理学講座の皆様方には有益な御助言、御協力を頂いた。これらの方々に心から感謝します。

## 文献

- Lanczos, C., 1964, The Variational Principle of Mechanics, 3rd ed., University of Toronto Press, Canada.
- Mochizuki, E., Sphere-resonance method to determine elastic constants of crystal, 1988, J. Appl. Phys., 63, 5668-5673.
- Morris, S. P. and R. J. Geller, H. Kawakatsu and S. Tuboi, 1987, Variational free oscillation computations for three laterally heterogeneous earth models, Phys. Earth Planet. Int., 47, 288-318.
- 小田 仁, Visscher W. M., 1994, 異方性弾性体の固有周波数を計算するための SFT と XYZ 法の比較, 地震 2, 47, 97-100.
- Park, J., 1986, Synthetic seismograms from coupled free oscillations: The effects of lateral structure and rotation, J. Geophys. Res., 91, 6441-6464.
- Park, J. and F. Gillbert, 1986, Coupled free oscillation of an aspherical dissipative rotating earth: Galerkin theory, Geophys. Res., 91, 7241-7260.
- Suzuki, I., H. Oda, T. Saito and K. Seya, 1992, Free oscillation of an elastically anisotropic sphere and its application to determining the elastic constants of rutile, J. Phys. Earth, 40, 601-616.
- Tanimoto, T. and B. A. Bolt, 1983, Coupling of torsional modes in the earth, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 74, 83-96.
- Tuboi, S. and R. J. Geller, 1989, Coupling between the multiplets of laterally heterogeneous earth models, Geophys. J., 96, 371-379.
- Visscher, W. M., A. Migliori, T. M. Bell and R. A. Reinert, On the normal modes of free vibration of inhomogeneous and anisotropic elastic objects, J. Acoust. Soc. Am., 90, 2154-2162.
- Woodhouse, J. H. and F. A. Dahlen, 1978, The effect of a general aspherical perturbation on the free oscillations of the earth, Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 53, 335-354.
- Zharkov, B. N. and V. M. Lyubimov, 1970a, Torsional oscillations of a spherically asymmetrical model of the earth, Phys. Solid Earth, 2, 71-76.
- Zharkov, B. N. and V. M. Lyubimov, 1970b, The theory of spheroidal vibrations for a spherically asymmetric model of the earth, Phys. Solid Earth, 10, 613-618.