Mathematical Journal of Okayama University

Volume 13, *Issue* 1 1967 *Article* 8

JANUARY 1967

Beziehung zwischen dem Thullenschen Satz und dem Runge-Besseschen Satz

Ken'iti Koseki*

*Okayama University

BEZIEHUNG ZWISCHEN DEM THULLENSCHEN SATZ UND DEM RUNGE-BESSESCHEN SATZ

KEN'ITI KOSEKI

Es ist wohl bekannt[1], dass ein Gebiet in der z Ebene mit mindestens einem Grenzpunkt ein reguläres Gebiet ist. Ich will behaupten, dass der Beweis wie der Beweis von Thullenschen[2] Satz laufen kann.

Satz. In der z Ebene ist jedes Gebiet mit mindestens einem Grenzpunkt ein reguläres Gebiet.

Beweis. Es sei G ein Gebiet in der z Ebene und R sei die Begrenzung von G. $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ sei eine Punktfolge auf R, die überall dicht in R ist. Es sei $\{U_n\}(n=1, 2, \cdots)$ eine Gebietsfolge auf G, so dass $\bigcup_n \overline{U}_n$[3] $= G$ ist und U_n ein beschränktes Gebiet ist. Wir setzen $R_1=\overline{U}_1$, $R_2=\overline{U}_1+\overline{U}_2$, $\cdots$, $R_n=\overline{U}_1+\overline{U}_2+\cdots+\overline{U}_n$, $\cdots$. Es besteht dann $\bigcup_n R_n=G$, $R_n \subset R_{n+1}$.

Aus der Folge $\{a_n\}$ bekommen wir eine neue Folge $\{a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. Diese Folge bezeichnen wir mit $\{b_n\}(n=1, 2, \cdots)$. Es gibt dann eine reguläre Funktion $f_1(z)$ in G, so dass $|f_1(z)| \leqq 1$ auf $R_1=S_1$ und $|f_1(c_1)|>1$, $|c_1-b_1| \leqq 1$ ist. Zum Beispiel haben wir nur zu $f_1(z)=\frac{1}{M}\cdot\frac{1}{z-b_1}$ setzen, wo M das Maximum von $\left|\frac{1}{z-b_1}\right|$ auf R_1 bedeutet.

Wir setzen $R_2+c_1=S_2$. Es gibt ebenfalls eine reguläre Funktion $f_2(z)$ in G, so dass $|f_2(z)| \leqq 1$ auf S_2 und $|f_2(c_2)|>1$, $|c_2-b_2| \leqq \frac{1}{2}$ ist. Wir bestimmen nun eine positive ganze Zahl l_2, derart dass es $\frac{|f_2(c_2)|^{l_2}}{2^2}-\frac{|f_1(c_2)|}{1^2} \geqq 2$ besteht.

Diese Verfahren wiederholen wir. Die Funktion $f_p(z)$ ist dann regulär in G und es besteht

$$\left.\begin{array}{l} |f_p(z)| \leqq 1 \text{ auf } S_p(S_p=R_p+S_{p-1}+c_{p-1}),\ |f_p(c_p)|>1\, |c_p-b_p| \leqq \frac{1}{p} \\ \frac{|f_p(c_p)|^{l_p}}{p^2}-\sum_{s=1}^{p-1}\frac{|f_s(c_p)|^{l_s}}{s^2} \geqq p \end{array}\right\}$$

1) J. Besse. Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique. Comm. Math. Hel. Vol. 10.

2). P. Thullen. Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Math. Ann. Vol. 106.

Vgl. S. Bochner und W. T. Nartin. Several Complex Variables.

3). $\overline{U}_n$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von U_n.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 13 [1967], Iss. 1, Art. 8

Wir setzen $f(z)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_{p}^{l}{}^{p}(z)}{p^{2}}$. Die Funktion $f(z)$ hat als die naturliche Begrenzung die Begrenzung R. W. z. b. w.

MATHEMATISCHES INSTIUT
UNIVERSITAT ZU OKAYAMA

(*Eingegangen am 24. Dezember 1967*)