Mathematical Journal of Okayama University

Volume 4, *Issue* 2 1954 *Article* 5

MARCH 1955

Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact

Osamu Takenouchi*

*Okayama University

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS CONTINUES DE TYPE POSITIF SUR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT

Par Osamu TAKENOUCHI

Dans la théorie de la représentation unitaire d'un groupe localement compact, un problème central sera de chercher les représentations irréductibles et d'étudier de composer une représentation arbitraire de ces représentations irréductibles. Un procédé de composition ou décomposition, initié par F. I. Mautner [12], est développé par plusieurs auteurs. (Voir p. ex. R. Godement [7], I. E. Segal [13].) Leur méthode consiste à représenter l'espace de Hilbert en base à une forme d'intégrale des autres espaces de Hilbert, et à définir sur chaque espace composant la représentation de groupe. Ces représentations composantes sont presque partout irréductibles. Alors il sera en question quelles sortes des représentations irréductibles apparîtront dans les composants de la représentation considérée. Une catégorie des représentations irréductibles contenant ces représentations composantes s'obtient en résolvant un certain problème d'approximation sur le groupe. On pourrait dire à un certain sens qu'une représentation est obtenue en décomposant la représentation donnée, si elle satisfait aux conditions de ce problème.

Ce problème d'approximation revient, dans le cas de la représentation régulière, à considérer la fonction continue sur le groupe qui est uniformément approchée sur tout ensemble compact par la fonction continue de la forme $x*\tilde{x}(g)=\int x(gh)\overline{x(h)}dh$ où $x(g)$ est une fonction continue nulle en dehors d'un ensemble compact. La représentation régulière sera la représentation du groupe obtenue la plus simplement parmi les autres et on espérerait qu'une représentation irréductible arbitraire sera obtenue en décomposant la représentation régulière. Mais cela n'est pas le cas. En effet, I. M. Gelfand et M. A. Naimark [2, 3] ont remarqué qu'un groupe de Lie semi-simple a nécessairement une représentation irréductible qui n'est pas déduite de la représentation régulière. Quoique nous ne puissons pas encore savoir leur méthode[1], nous pourrons vérifier ce fait implicite-

1) Parce que les journaux russes publiés pendant la guerre et aussi après là jusqu'à 1950 ne sont pas encore importés au Japon.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

ment en montrant que la représentation irréductible d'un tel groupe ne toute résout pas notre problème d'approximation. Pour dire que, dans un groupe, toute la représentation résout notre problème d'approximation, il suffit seulement de dire que la constante 1 est approchable uniformément sur tout ensemble compact par la fonction de la forme $x*\tilde{x}(g)$. Ce dernier problème d'approximation sur un groupe est déjà plusieurs fois considéré, voir p. ex. R. Godement [6, 7], H. Yoshizawa [17]. En particulier, H. Yoshizawa [17] a montré que ce problème est négativement résolu par un groupe libre discret. Dans notre cas, il revient à répondre à ce problème négativement pour un groupe de Lie semi-simple non-compact. Alors, il arrivera une autre question. Par quelle sorte de groupe notre problème d'approximation est résolu affirmativement? Il est difficile à répondre à cette question complètement, mais, dans le cas du groupe dont le quotient par son composant connexe de l'unité est compact, le groupe du type (C) considéré par K. Iwasawa [10] seulement possèdra la propriété proposée. La difficulté du cas le plus général dûe principalement à la difficulté de manier les groupes discrets.

Dans cette note, nous démontrerons ces faits exposés ci-dessus. Le §1 est consacré à la considération préliminaire et à la position de probléme. Notre problème d'approximation est établi en deux maniéres (1.2, 1.3). Pendant ces considérations nous obtenons aussi le problème d'étendre une fonction continue de type positif sur un groupe à une fonction de type positif de C*-algèbre d'opérateur. Nous donnerons une condition nécessaire et suffisante à ce problème comme théorème 1. (Ce théorème a été annoncé indépendament par H. Yoshizawa [18].) De suite nous cherchons le type de groupe qui résout notre problème d'approximation affirmativement par rapport à toute sa représentation. C'est le théorème 2. Le §2 contient la démonstration du théorème 1 et le §3 contient celle du théorème 2.

Je remerci beaucoup MM. H. Yoshizawa et M. Tomita qu'ils ont bien voulu discuter ensemble et me communiquer les résultats intéressants.

§1. Position de problème et les résultats.

1.1. Préliminaire.

Soit G un groupe localement compact. Une intégration ou une mesure de Haar invariante à gauche sur G soit fixée et soit désignée par $\int \cdot dg$. Soit $L^p(G)$ $(p \geqslant 1)$ l'espace de Banach formé par les fonctions de p-ième puissance sommable par rapport à cette mesure de Haar, et soit $M(G)$ l'espace formé par les fonctions sommables sur tout ensemble compact et bornées sauf sur un ensemble négligéable, à savoir l'espace conjugué de $L^1(G)$. On dira qu'une fonction $x(g)$ sur G est une *C-fonction*, si elle est continue et nulle en dehors d'un ensemble compact. Nous utilisons plusieurs fois la fonction $\Delta(g)$ sur G qui fait satisfaire toute C-fonction $x(g)$ sur G à l'égalité

$$\int_G x(hg^{-1})dh = \Delta(g)\int_G x(h)dh.$$

$\Delta(g)$ est partout positive et continue, et satisfait à $\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2)$ (A. Weil [15])[1]. En utilisant cette fonction, nous avons

$$\int_G x(g^{-1})dg = \int_G x(g)\Delta(g^{-1})dg.$$

C'est maintenant bien connu qu'entre les intégrations de Haar $\int \cdot dg$, $\int \cdot dh$, $\int \cdot dg^*$ sur G, sur N: un sous-groupe invariant de G, et sur $G^* = G/N$ resp., la relation

$$\int_G x(g)dg = \int_{G^*}(\int_N x(gh)dh)dg^*$$

subsiste pour toute C-fonction $x(g)$ sur G, dans le membre à droite de laquelle g est un élément de classe g^* suivant N (A. Weil [15])[2]. Nous utilserons les notations

$$\begin{aligned}\tau_g x(h) &= x(g^{-1}h),\\ \tilde{x}(g) &= \overline{x(g^{-1})},\\ \check{x}(g) &= \Delta(g^{-1})\overline{x(g^{-1})},\end{aligned}$$

pour une fonction $x(g)$, et nous définissons la convolution de deux fonctions $x(g), y(g)$ par

$$x\underset{G}{*}y(g) = \int_G x(gh)y(h^{-1})dh = \int_G x(h)y(h^{-1}g)dh,$$

pourvu que cette intégration ait un sens. Nous remarquons ici

$$\int_G x*y(g)dg = (\int_G x(g)dg)(\int_G y(g)dg).$$

1) A. Weil [15], p. 39, 40.
2) A. Weil [15], p. 45.

La représentation (*unitaire*) de G sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est par définition une application $g \to V_g$ de G dans l'ensemble des opérateurs unitaires sur $\mathfrak{H}$ assujettie aux conditions

(1) $V_{g^{-1}h} = V_g^* V_h$ (où V_g^* désigne l'opérateur adjoint de V_g),

(2) quels que soient $x, y \in \mathfrak{H}$, la fonction $(V_g x, y)$ de g soit continue sur G.

La représentation obtenue la plus simplement parmi les autres sera la *représentation régulière*. Cela est la représentation de G sur $L^2(G)$, dans laquelle l'opérateur U_g est définit par

$$U_g x(h) = x(g^{-1}h) \qquad (x(h) \in L^2(G)).$$

On dira qu'une représentation V_g sur $\mathfrak{H}$ de G est *contenue* dans une autre représentation W_g sur l'espace $\mathfrak{K}$ s'il existe un isomorphisme ϕ de $\mathfrak{H}$ sur un sous-espace $\mathfrak{K}_1$ de $\mathfrak{K}$ tel qu'on ait

$$\phi \cdot V_g = W_g \cdot \phi$$

quel que soit $g \in G$. De plus on entend par une représentation *cyclique* de G sur $\mathfrak{H}$ une représentation qui admet un élément spécial, dit l'élément cyclique, x_0 dans $\mathfrak{H}$ dont les images par V_g engendrent tout $\mathfrak{H}$. Et aussi on entend par une représentation *irréductible* une représentation qui ne fait aucun sous-espace invariante sous tous les V_g $(g \in G)$ autre que $\{0\}$ et $\mathfrak{H}$ lui-même. On voie facilement qu'une représentation irréductible est toujours cyclique, et qu'une représentation arbitraire est une somme directe des représentations cycliques.

Maintenant, soit $g \to V_g$ une représentation de G. En définissant l'opérateur S_ξ pour toute $\xi(g) \in L^1(G)$ par l'intégrale forte

$$S_\xi = \int_G \xi(g) V_g dg^{1)},$$

$\xi \to S_\xi$ détermine une *représentation de* $L^1(G)$ au sens suivant:

(i) S_ξ dépend de $\xi(g) \in L^1(G)$ linéairement,

(ii) $|||S_\xi||| \leqslant ||\xi||$,

(iii) $S_\xi^* = S_{\xi^*}$,

(iv) $S_\xi S_\eta = S_{\xi * \eta}$.

Inversement, soit $\xi(g) \to S_\xi$ une correspondance de $\xi(g) \in L^1(G)$ à un opérateur linéaire et borné sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_0$ qui possède

1) A savoir, pour tout $x \in \mathfrak{H}$, l'intégrale $\int_G \xi(g) V_g x dg$ existe par rapport à la topologie forte de $\mathfrak{H}$.

les propriétés (i)—(iv) ci-dessus. Soit $\mathfrak{H}_1$ le sous-espace de $\mathfrak{H}_0$ formé par les $x \in \mathfrak{H}_0$ tels qu'on ait $S_\xi x = 0$ pour toute $\xi(g) \in L^1(G)$, et soit $\mathfrak{H}$ le sous-espace de $\mathfrak{H}_0$ orthogonalement complémentaire à $\mathfrak{H}_1$. Alors $\xi \to S_\xi$ se décompose à la somme directe des représentation sur $\mathfrak{H}$ et sur $\mathfrak{H}_1$. La dernière étant la représentation qui fait correspondre toute $\xi(g)$ avec l'opérateur 0, il suffit de ne considérer que la représentation sur $\mathfrak{H}$. Dans $\mathfrak{H}$, les combinaisons linéaires de $S_\xi x$, où $\xi(g) \in L^1(G)$, et $x \in \mathfrak{H}$, sous-tendent un sous-ensemble linéaire et dense $\mathfrak{M}$. Considérons $\phi(h) \in L^1(G)$ qui est $\geqslant 0$ et nulle en dehors d'un voisinage assez petit de e, et qui satisfait à $\int_G \phi(h)dh = 1$. Alors, comme on a

$$\begin{aligned} &\| (\tau_g\phi) * \xi - \tau_g\xi \| \\ = &\int_G \left| \int_G \phi(g^{-1}k)\xi(k^{-1}h)dk - \xi(g^{-1}h) \right| dh \\ \leqslant &\int_G \phi(k) \left(\int_G | \xi(g^{-1}(gkg^{-1})^{-1}h) - \xi(g^{-1}h) | \, dh \right) dk \\ = &\int_G \phi(k) \left(\int_G | \tau_g\xi((gkg^{-1})^{-1}h) - \tau_g\xi(h) | \, dh \right) dk, \end{aligned}$$

en contractant le support de ϕ à e, $(\tau_g\phi) * \xi$ converge fortement vers $\tau_g\xi$ dans $L^1(G)$. Donc, $S_{\tau_g\phi}S_\xi$ converge uniformément vers $S_{\tau_g\xi}$, et, à plus forte raison, $S_{\tau_g\phi}S_\xi x$ converge fortement vers $S_{\tau_g\xi}x$. Comme $\mathfrak{M}$ était un ensemble dense dans $\mathfrak{H}$, il s'en suit que, pour un $x \in \mathfrak{H}$ arbitraire, $S_{\tau_g\phi}x$ converge vers un certain élément. Cet élément limite dépend de x linéairement, et sa norme est $\leqslant \| x \|$. Donc un opérateur linéaire et borné V_g existe qui fait correspondre x avec cet élément limite. Nous avons alors $V_gS_\xi = S_{\tau_g\xi}$ $(g \in G,\ \xi(h) \in L^1(G))$. On voie facilement que cette correspondance $g \to V_g$ définit une représentation unitaire de G sur $\mathfrak{H}$, et, de plus, comme

$$\begin{aligned} \int_G \xi(g)V_g(S_\eta x)dg &= \int_G \xi(g)S_{\tau_g\eta}xdg = S_{\int_G \xi(g)\tau_g dg}x \\ &= S_{\xi*\eta}x = S_\xi S_\eta x, \qquad ((\xi(g), \eta(g) \in L^1(G)), \end{aligned}$$

on a

$$S_\xi = \int_G \xi(g)V_g dg \qquad \text{(l'intégrale forte).}$$

Nous avons ainsi déterminé une représentation de G de la représentation de $L^1(G)$ par un procédé inverse.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

1.2. La fonction continue de type positif sur un groupe.

D'après la théorie de I. M. Gelfand et D. Raikov [4][1], nous savons qu'une représentation cyclique d'un groupe G sur $\mathfrak{H}$ est complètement caractérisée par *la fonction continue de type positif* $p(g)$ sur G qui est obtenue en posant

$$p(g) = (V_g x_0, x_0),$$

où x_0 est l'élément cyclique de cette représentation. Ici on dit qu'une fonction continue $p(g)$ est de type positif si elle satisfait à

$$\int\int p(g^{-1}h)x(g)\overline{x(h)}dgdh \geqslant 0$$

pour toute C-fonction $x(g)$. Cette inégalité peut être écrite aussi, en modifiant un peu, sous la forme

$$(*) \qquad \int_G x * \check{x}(h)p(h)dh \geqslant 0.$$

En écrivant ainsi, on peut dire, par rapport à la dualité de $L^1(G)$ et $M(G)$, qu'une fonction $p(g)$ de $M(G)$ est de type positif, si elle satisfait à $(*)$ pour toute $x(g) \in L^1(G)$. Ces fonctions sont nécessairement continues d'après un théorème de I. M. Gelfand et D. Raikov [4][2].

La combinaison linéaire à coefficient positif des fonctions continues de type positif étant encore une telle fonction, une fonction continue de type positif est dite *élémentaire*, si elle n'est pas représentable comme une somme des autres fonctions continues de type positif, c.-à-d. une fonction $p(g)$ telle qu'on ait de $p(g) = \alpha p_1(g) + \beta p_2(g)$ $p_1(g) = \alpha' p(g)$ et $p_2(g) = \beta' p(g)$. Il correspond exactement à une telle fonction la représentation irréductible du groupe, et toute la fonction continue de type positif s'exprime comme une limite uniforme sur tout ensemble compact des combinaisons linéaires à coefficient positif des fonctions continues de type positif élémentaires.

Nous allons expliquer cette exposition plus précisément en utilisant la discussion faite par R. Godement [6][3]. Soit $\mathbf{P}_1$ l'ensemble des fonctions continues de type positif sur G à $p(e) \leqslant 1$ (ou $\|p\| \leqslant 1$ dans $M(G)$). Une partie $\mathbf{A}$ de $\mathbf{P}_1$ est dite régulière si

(1) $\mathbf{A}$ est un ensemble convexe et fermé par rapport à la topologie faible de $M(G)$ comme l'espace conjugué de $L^1(G)$,

---

1) Voir aussi R. Godement [6], p. 19.
2) Voir aussi R. Godement [6], p. 25.
3) R. Godement [6], p. 39.

(2) avec $p(g) \in \mathbf{A}$, toute $q(g) \in \mathbf{P}_1$ est aussi contenue dans $\mathbf{A}$ pourvu que

$$\int\int q(g^{-1}h)x(g)\overline{x(h)}dgdh \leqslant \int\int p(g^{-1}h)x(g)\overline{x(h)}dgdh$$

soit valable pour toute C-fonction $x(g)$,

(3) avec $p(g) \in \mathbf{A}$, $p(g)/p(e) \in \mathbf{A}$.

R. Godement montre que l'ensemble $\mathbf{A}_e$ des *points extrêmaux* au sens de M. Krein et D. Milman [11] de $\mathbf{A}_e$ consiste à toute la fonction continue de type positif élémentaire de G à $p(e)=1$ et à 0 contenue dans $\mathbf{A}$, et que $\mathbf{A}$ consiste à toute la fonction à $p(e) \leqslant 1$ qui est une limite uniforme sur tout ensemble compact des combinaisons linéaires à coefficient positif des fonctions de $\mathbf{A}_e$. Ou, en d'autre terme, correspondant à $p(g) \in \mathbf{A}$, il existe une mesure régulière m_p sur la fermeture faible $\overline{\mathbf{A}}_e$ de $\mathbf{A}_e$ telle que $q(g)$ soit continue par rapport à $q \in \overline{\mathbf{A}}_e$ et $g \in G$ sauf sur un q-ensemble de m_p-mesure nulle et telle qu'on ait

$$p(g) = \int_{\overline{\mathbf{A}}_e} q(g)dm_p(q)$$

(cette intégrale converge uniformément sur tout ensemble compact par rapport à g). De ces expositions nous voyons à un sens un peu vague que $p(g)$ et donc la représentation cyclique correspondant à cette fonction continue de type positif se compose de $q(g) \in \mathbf{A}_e$ ou de la représentation irréductible correspondante.

Nous nous plaçons maintenant de chercher, en se donnant une représentation $g \to V_g$ de G sur $\mathfrak{H}$, la plus petite famille des représentations irréductibles qui composent la représentation cyclique contenue dans cette représentation au sens expliqué ci-dessus. Ce problème revient à chercher l'ensemble des points extrémaux de la partie régulière de $\mathbf{P}_1$ engendrée par toutes les $p(g) = (V_g x, x)$ où $x \in \mathfrak{H}$, $\|x\| \leqslant 1$. D'après R. Godement [6][1], cette partie régulière consiste à toute la fonction qui est une limite uniforme sur tout ensemble compact des combinaisons linéaires à coefficient positif de ces $p(g) = (V_g x, x)$, à savoir une limite de $\sum(V_g x_i, x_i)$ où la somme est tenue sur un ensemble fini de l'indice et $\sum\|x_i\|^2 \leqslant 1$. Donc, la fonction continue de type positif élémentaire que nous cherchons est celle qui a cette forme.

1) R. Godement [6], p. 41.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

1.3. L'algèbre des opérateurs et la représentation.

Un ensemble $\mathbf{M}$ des opérateurs linéaires et bornés sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est une *C^*-algèbre* s'il forme une algèbre auto-adjointe et uniformément fermée. Une C^*-algèbre $\mathbf{M}$ est dite représentée dans une autre C^*-algèbre $\mathbf{M}_0$ sur l'autre espace de Hilbert $\mathfrak{H}_0$ s'il existe une correspondance de $A \in \mathbf{M}$ à $A_0 \in \mathbf{M}_0$ qui conserve toutes les opérations de l'addition, de la multiplication et de prendre l'opérateur adjoint et qui est continue par rapport aux topologies uniformes de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_0$, et, au surplus, si l'image de $\mathbf{M}$ est dense dans $\mathbf{M}_0$. Nous utilisons les phrases comme " une représentatîon est contenue dans une autre ", " la représentation irréductible ", " la représentation cyclique ", etc. aussi comme dans le cas de la représentation du groupe (v. 1.1). Une représentation cyclique (avec l'élément cyclique x_0) est caractérisée par la fonction de type positif (ou " state ") $P(A)$ de $\mathbf{M}$ définie par

$$P(A) = (A_0 x_0, x_0) \qquad (A \in \mathbf{M}).$$

Cela est une fonction linéaire sur $\mathbf{M}$ satisfaisant aux conditions

$$P(A) \geqslant 0 \qquad \text{dans le cas où } A \text{ est hermitien positif,}$$
$$P(A^*) = \overline{P(A)},$$
$$\sup_{A \leqslant 1} P(A) < \infty \qquad \text{où } A\text{: hermitien.}$$

La fonction de type positif *élémentaire* étant par définition une fonction de type positif de $\mathbf{M}$ qui n'est pas représentable comme une somme des autres fonctions de type positif, il correspond à elle la représentation irréductible de $\mathbf{M}$.

La fonction de type positif de $\mathbf{M}$ est un élément de l'espace conjugué de l'espace de Banach $\mathbf{M}$ muni de la norme d'opérateur. Sa norme est

$$\| P \| = \sup_{A \leqslant 1} P(A).$$

Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de tous ces éléments à $\| P \| \leqslant 1$, et soit $\mathbf{S}_e$ l'ensemble des points extrémaux de M. Krein et D. Milman [11] de $\mathbf{S}$. $\mathbf{S}_e$ consiste à toutes les fonctions de type positif élémentaires à norme 1 contenues dans $\mathbf{S}$ et à 0.

F. I. Mautner [12], R. Godement [8], I. E. Segal [13] et les autres montrent que la représentation cyclique de $\mathbf{M}$ dans la C^*-algèbre $\mathbf{M}_1$

sur le sous-espace $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{H}$ invariant par rapport à $\mathbf{M}$ et engendré par tous les Aa, a: fixé $\in \mathfrak{H}$ et $A \in \mathbf{M}$ peut se décomposer concernant à l'algèbre commutative maximale $\mathbf{Z}$ contenue dans la C*-algèbre $\mathbf{M}'$ sur $\mathfrak{H}_1$, l'algèbre qui consiste à l'opérateur commutant à tous les $A \in \mathbf{M}$. Ecrivons comme Ω l'espace compact de I. Gelfand [1] déterminé par $\mathbf{Z}$. Correspondant à a et $\mathbf{M}_1$ ci-dessus, une mesure $\rho(\omega)$ sur Ω et l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) se déterminent tels que chaque $x \in \mathfrak{H}_1$ soit écrit par une intégrale des éléments $x(\omega)$ de $\mathfrak{H}(\omega)$:

$$x = \int x(\omega)\sqrt{d\rho(\omega)}\,,$$

et tels que, à chaque $A \in \mathbf{M}$, un opérateur $A(\omega)$ sur $\mathfrak{H}(\omega)$ se détermine d'une façon que

$$Ax = \int A(\omega)x(\omega)\sqrt{d\rho(\omega)}\,.$$

Ainsi nous avons une représentation $A \to A(\omega)$ de $\mathbf{M}$ qui est cyclique avec l'élément cyclique $a(\omega)$, le composant de a. De plus ces représentations sont presque partout (par rapport à la mesure $\rho(\omega)$) irréductibles. (Voir M. Tomita [13].) Donc l'algèbre $\mathbf{M}_1$, à savoir, la C*-algèbre sur $\mathfrak{H}_1$ qui consiste aux opérateurs obtenus en contractant les $A \in \mathbf{M}$ sur $\mathfrak{H}_1$, se compose de ces représentations irréductibles. La fonction de type positif de $\mathbf{M}$ définie par $P(A) = (Aa, a)$ est alors représentée comme $P(A) = \int P_\omega(A)\,d\rho(\omega)$, où la fonction de type positif composante $P_\omega(A) = (A(\omega)a(\omega), a(\omega))$ de $\mathbf{M}$ est presque partout élémentaire.

Revenons maintenant à la représentation du groupe. Soit $g \to V_g$ une représentation de G sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$. Alors une représentation de $L^1(G)$

$$\xi(g) \to S_\xi \qquad (\xi(g) \in L^1(G))$$

est déterminée comme nous l'avons vu dans 1.1. Soit $\mathbf{M}$ la C*-algèbre sur $\mathfrak{H}$ engendrée de ces S_ξ. Une représentation de $\mathbf{M}$ donne la représentation de $L^1(G)$, donc celle de G (v. 1.1). Si celle-là est irréductible ou cyclique, celle-ci est aussi irréductible ou cyclique resp.

Nous décomposons la représentation cyclique contenue dans la représentation $g \to V_g$. Cela revient aussi à décomposer la représentation sur le sous-espace de $\mathfrak{H}$ invariant par rapport à $\mathbf{M}$ engendré par a. De ce qu'on vient de voir, un espace compact Ω, une mesure

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

$\rho(\omega)$ sur Ω, un espace de Hilbert $\mathfrak{H}(\omega)$ correspondant à chaque $\omega \in \Omega$, et une représentation de $\mathbf{M}$: $A \to A(\omega)$ sur $\mathfrak{H}(\omega)$ se déterminent, et la représentation composante $A \to A(\omega)$ de $\mathbf{M}$ donne presque partout (par rapport à $\rho(\omega)$) une représentation irréductible. Une représentation irréductible de G $g \to V_g(\omega)$ est alors obtenue correspondant à chaque ω de cette représentation composante irréductible de $\mathbf{M}$. La représentation de G ainsi obtenue satisfait bien entendu à

$$S_\xi(\omega) = \int_G \xi(g) V_g(\omega) dg$$

pour toute $\xi(g) \in L^1(G)$. Donc en posant

$$p_\omega(g) = (V_g(\omega) a(\omega), a(\omega)),$$

nous avons

$$\begin{aligned} P_\omega(S_\xi) &= (S_\xi(\omega) a(\omega), a(\omega)) \\ &= \int_G \xi(g) (V_g(\omega) a(\omega), a(\omega)) dg \\ &= \int_G \xi(g) p_\omega(g) dg. \end{aligned}$$

Ici, pour presque tout ω, $p_\omega(g)$ est une fonction continue de type positif élémentaire.

L'intégrale

$$(*) \qquad \int_G \xi(g) p(g) dg$$

est toujours définie pour une arbitraire fonction continue de type positif $p(g)$ sur G et pour toute $\xi(g) \in L^1(G)$. Mais le fait ci-dessus dit un peu plus. A savoir il dit que P_ω peut s'étendre à une fonctionnelle linéaire bornée de la C*-algèbre engendrée par S_ξ, ou, en d'autre terme, la valeur de l'intégrale $(*)$ est continue par rapport à la topologie uniforme de l'opérateur. D'où une question se lève: Quelle est la fonction continue de type positif sur G pour laquelle la valeur de l'intégrale $(*)$ est continue par rapport à la topologie uniforme de l'opérateur? L'ensemble de telles fonctions peut être considéré comme déterminant la catégorie de la fonction continue de type positif qui est obtenue par le procédé de la décomposition ci-dessus. Nous répondrons à cette question par le théorème suivant[1]:

1) Ce résultat a été déjà énoncé par M. H. Yoshizawa sans démonstration. Voir [18]. L'auteur ne le connaissait pas, et a obtenu le théorème indépendament.

Théorème 1. *Une représentation $g \to V_g$ d'un groupe sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ soit donnée. Soit* $\mathbf{M}$ *la plus petite C^*-algèbre sur $\mathfrak{H}$ contenant tous les opérateurs S_ξ:*

$$S_\xi = \int_G \xi(g) V_g dg.$$

$p(g)$ soit une fonction continue de type positif sur G, et considérons la fonctionnelle linéaire qui applique à S_ξ la valeur

$$(*) \qquad \int_G \xi(g) p(g)\, dg \qquad (\xi(g) \in L^1(G)).$$

Alors pour que cette fonctionnelle soit étendue sur toute $\mathbf{M}$ *comme une fonction de type positif de* $\mathbf{M}$, *il faut et il suffit que $p(g)$ soit une limite uniforme sur tout ensemble compact des sommes finies des fonctions continues de type positif sur G de la forme*

$$(V_g x, x) \qquad (x \in \mathfrak{H}).$$

La démonstration sera donnée dans 2.1.

D'après ce théorème, nous voyons que nos deux méthodes exposées dans 1.2 et dans ce paragraphe donnent la même notion concernant à la décomposition de la représentation de groupe. Quant à la composition, ce qu'on vient de voir dans ce paragraphe a un sens plus concret. De l'égalité

$$\begin{aligned} P(S_\xi) &= \int_G \xi(g) p(g)\, dg \\ &= \int P_\omega(S_\xi)\, d\rho(\omega) \\ &= \int \left(\int_G \xi(g) p_\omega(g)\, dg \right) d\rho(\omega), \end{aligned}$$

nous obtenons aussi

$$p(g) = \int p_\omega(g)\, d\rho(\omega).$$

Donc la composition de la représentation exposée ci-dessus ne donne seulement celle de $\mathbf{M}$, mais aussi la composition de la représentation $g \to V_g$ de G de la représentation composante (irréductible) $g \to V_g(\omega)$.

1.4. Cas de la représentation régulière. La propriété (R).

Maintenant considérons nos problèmes dans le cas de la représentation régulière de groupe.

Soit

$$g \to U_g$$

la représentation régulière, et posons

$$T_\xi = \int_G \xi(g) U_g dg \qquad (\xi(g) \in L^1(G)).$$

Etudions de décomposer la représentation cyclique contenue dans cette représentation. Alors en suivant à laquelle des méthodes que nous avons expliquées dans 1.2 et 1.3, nous avons la même classe de la représentation, c.-à-d. la représentation caractérisée par la fonction continue de type positif qui est approchable uniformément sur tout ensemble compact par la somme des fonctions continues de type positif de la forme

$$(*) \qquad (U_g x,\ x) = \int_G x(g^{-1}h)\overline{x(h)}dh \qquad (x(h) \in L^2(G)).$$

Mais dans ce cas, la somme des fonctions de la forme $(*)$ peut être approchée uniformément par une seule fonction de la forme $(*)$ où $x(h)$: C-fonction (v. R. Godement [6], aussi 2.2). Ou, au lieu de la fonction de la forme $(*)$, nous utilisons plutôt la fonction de la forme

$$(\dagger) \qquad (x,\ U_g x) = \int_G x(gh)\overline{x(h)}dh = x*\tilde{x}(g),$$

où $x(h) \in L^2(G)$ ou une C-fonction. Donc, dans ce cas, il s'agit de la fonction continue de type positif qui est approchée uniformément sur tout ensemble compact par la fonction continue de type positif de la forme $(\dagger)$.

De suite, nous étudions si toute la fonction continue de type positif sur un groupe satisfait à cette condition. Evidemment, pour le groupe compact ou abélien cela est vrai. Mais, d'autre part, pour le groupe libre cela a été négatié (v. H. Yoshizawa [17]). Il est clair de ce qu'on vient de voir que, s'il existe une certaine représentation qui ne satisfait à cette condition, cela revient à dire qu'il existe au moins une représentation irréductible qui ne peut être pas obtenue par la manière expliquée là-haut. Comme R. Godement [6] a remarqué[1], dire que toute la fonction continue de type positif satisfait à cette condition se réduit à une seule proposition. A savoir:

1) R. Godement [6], p. 77. Il a presenté un problème si tout le groupe possède la propriété que nous appelons la propriété (R).

"*la constante* 1 *peut être approchée uniformément sur tout ensemble compact par la fonction de la forme* (†)".

Nous disons qu'*un groupe possède la propriété* (*R*) si cette proposition a lieu sans exposer la proposition ci-dessus chaque fois. Nous verrons que, comme une extension de cas du groupe abélien ou compact, le groupe solvable ou sa extension par le groupe compact tout possède la propriété (R). Quant au groupe de Lie semi-simple, au contraire, il n'a pas la propriété (R) à moins qu'il soit compact. Notre résultat s'énonce ainsi:

Théorème 2. *Soit G un groupe localement compact dont le quotient par son composant connexe de l'unité est compact. Alors pour que G possède la propriété* (*R*), *il faut et il suffit qu'il soit un groupe du type* (*C*).

Ici le *groupe du type* (*C*) est la notion introduite par K. Iwasawa [10][1]. Par définition: Un groupe G connexe est du type (C) si le quotient de G par son sous-groupe invariant solvable connexe maximal, c.-à-d. le radical de G, est compact. Un groupe de Lie est du type (C) si son composant connexe est du type (C). Enfin, un groupe G arbitraire est du type (C) s'il contient une famille $\{N_\alpha\}$ de sous-groupes invariants telle que

(i) chaque G/N_α soit un groupe de Lie du type (C).

(ii) $\cap N_\alpha = \{e\}$.

La démonstration de ce théorème se donnera au §3.

L'hypothèse que le groupe G soit celui dont le quotient par son composant connexe est compact ne peut être éliminée dans notre considération. Dans le cas le plus général nous ne sommes pas en position d'établir des résultats généraux. Cela principalement dûe à la complexité de la circonstance dans le cas du groupe discret.

§2. Démonstration du théorème 1.

2.1. Cas général.

Soit $\mathbf{M}$ une C*-algèbre d'opérateur sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et soit $\mathbf{S}$ l'ensemble de toute la fonction de type positif de $\mathbf{M}$ à norme $\leqslant 1$.

Lemme 2.1. *Soit, dans* $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_0$ *l'ensemble de fonction de type positif P de* $\mathbf{M}$ *définie par*

1) K. Iwasawa [10], p. 554.

$$P(A) = \sum (Ax_i, x_i),$$

où $x_i \in \mathfrak{H}$, $\sum \| x_i \|^2 \leqq 1$, *et où la somme est tenue sur un ensemble fini de l'indice. Alors cet* $\mathbf{S}_0$ *forme une partie convexe et faiblement dense de* $\mathbf{S}$ (*faiblement dense* c.-à-d. *dense par rapport à la topologie faible comme espace conjugué d'espace de Banach* $\mathbf{M}$ *muni de la topologie uniforme d'opérateur*).

Démonstration[1]. Il est clair que $\mathbf{S}_0$ forme une partie convexe de $\mathbf{S}$. Il reste à prouver qu'il est faiblement dense dans $\mathbf{S}$.

Nous précédons par absurde. A savoir, s'il n'en était pas ainsi, il existerait une fonction de type positif $P_0 \in \mathbf{S}$ qui n'est pas contenue dans la fermeture faible de $\mathbf{S}_0$. Alors, par la convexité de $\mathbf{S}_0$, il existerait un opérateur hermitien A tel qu'on ait

$$|||A||| \leqq 1,$$
$$P_0(A) > P(A) + \varepsilon \qquad \text{(pour toute } P \in \mathbf{S}_0\text{)},$$

où ε est un nobre > 0.

D'autre part il existe toujours un élément $x \in \mathfrak{H}$ assujetti à

$$| P_0(A) - (Ax, x) | < \varepsilon, \qquad \| x \| \leqq 1.$$

En effet

(i) cas où $P_0(A) = 0$. On n'a qu'à poser $x = 0$.

(ii) cas où $P_0(A) > 0$. Soient A^+, A^- les parties positive et négative de A, d'où

$$A = A^+ - A^-.$$

On a alors, $P_0(A) \leqq |||A^+|||$[2]. Posons $|||A^+||| = \lambda_0$. Alors dans la représentation spéctrale

$$A^+ = \int_0^{\lambda_0} \lambda \, dE_\lambda$$

de A^+, en prenant E_λ comme être continue à droite, on a $E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - \varepsilon} \neq 0$. Donc en choisissant un élément x_0, $\| x_0 \| = 1$, dans $(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - \varepsilon})\mathfrak{H}$, on a

---

1) Cette démonstration dûe essentiellement à M. M. Tomita.

2) Cela n'est pas immédiat parce que l'opérateur identité 1 n'est pas toujours dans $\mathbf{M}$. Mais en posant $P(1) = \sup P(A)$, où sup est tenu sur l'ensemble de $A \in \mathbf{M}$, A: hermitien, $A \leqq 1$, et en l'étendant linéairement sur l'ensemble linéaire d'opérateur $\mathbf{M}_1$ engendré par $\mathbf{M}$ et 1, on voit aisément que $\mathbf{M}_1$ est une C^*-algèbre d'opérateur sur $\mathfrak{H}$ et P définit une fonction de type positif sur $\mathbf{M}_1$. Alors, comme A^+ et A^- sont dans $\mathbf{M}_1$, et comme on a $P(A) = P(A^+) - P(A^-)$, $P(A^+)$, $P(A^-) \geqq 0$, on a $P(A) \leqq P(A^+) \leqq \| P \| \, |||A^+|||$ $\leqq |||A^+|||$.

$$|(A^+x_0, x_0) - \lambda_0| \leqslant \varepsilon, \qquad A^-x_0 = 0.$$

Comme $0 < P_0(A) \leqslant \lambda_0$, si l'on pose $x = (P_0(A)/\lambda_0)^{\frac{1}{2}} x_0$, on a $\|x\| \leqslant 1$, et

$$|(A^+x, x) - P_0(A)| \leqslant \varepsilon, \qquad A^-x = 0.$$

Donc cet x satisfait à

$$|P_0(A) - (Ax, x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \|x\| \leqslant 1.$$

(iii) cas où $P_0(A) < 0$. La démonstration se fait d'une même manière que dans le cas (ii).

Alors comme la fonction de type positif P définie par

$$P(A) = (Ax, x) \qquad (A \in \mathbf{M})$$

est un membre de $\mathbf{S}_0$, ces deux inégalités nous conduiront à l'absurde.

Maintenant soit G un groupe localement compact et supposons qu'une représentation $g \to V_g$ de G sur un espace de Hilbert soit donnée. Considérons les opérateurs $S_\xi = \int_G \xi(g) V_g dg$ ($\xi(g) \in L^1(G)$) et soit $\mathbf{M}$ la C*-algèbre engendrée par tous ces opérateurs S_ξ. Comme $|||S_\xi||| \leqslant \|\xi\|$, une fonction de type positif P de $\mathbf{M}$ toujours définit une fonctionnelle linéaire et bornée sur $L^1(G)$ par la correspondance

$$\xi(g) \to P(S_\xi).$$

Donc on peut expresser $P(S_\xi)$ sous la forme

$$\int_G \xi(g) p(g) dg,$$

où $p(g)$ est une fonction continue de type positif sur G.

Lemme 2.2. *Cette $p(g)$ peut être approchée uniformément sur tout ensemble compact par la fonction continue de type positif sur G de la forme*

$$\sum (V_g x_i, x_i)$$

où $x_i \in \mathfrak{H}$ et où la somme est tenue sur un ensemble fini de l'indice.

Démonstration. D'après le lemme précédant, P s'approche faiblement par les éléments de $\mathbf{S}_0$ d'où provient que la fonctionnelle $P(S_\xi)$ sur $L^1(G)$ s'approche par $Q(S_\xi)$ ($Q \in \mathbf{S}_0$) faiblement dans l'espace conjugué de $L^1(G)$. Par conséquent, Q étant de la forme $Q(A)$

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

$=\sum (Ax_i, x_i)$, la fonction continue de type positif $q(g)=\sum (V_g x_i, x_i)$ converge faiblement dans l'espace conjugué de $L^1(G)$ vers $p(g)$. Mais alors comme on sait (v. R. Godement [6])[1], la fonction $\xi * q * \tilde{\xi}(g)$ converge uniformément sur tout ensemble compact vers $\xi * p * \tilde{\xi}(g)$, où $\xi(g)$ est une arbitraire C-fonction. Or, comme, d'une part, on a, en posant $\eta(h)=\overline{\xi(h)}$,

$$\begin{aligned}\xi * q * \tilde{\xi}(g) &= \sum (V_g(\int_G \eta(h) V_h dh) x_i,\ (\int_G \eta(h) V_h dh) x_i) \\ &= \sum (V_g S_\eta x_i,\ S_\eta x_i),\end{aligned}$$

et d'autre part, on peut prendre $\xi(g)$ d'une façon que $\xi * p * \tilde{\xi}(g)$ approche $p(g)$ uniformément sur un ensemble compact donné, on voit que $p(g)$ s'approche uniformément sur un ensemble compact préalablement donné par la fonction de la forme

$$\sum (V_g x_i', x_i') \qquad (x_i' \in \mathfrak{H}),$$

c.q.f.d.

Inversement

Lemme 2.3. *Une fonction continue de type positif $p(g)$ sur G qui est approchable uniformément sur tout ensemble compact par la somme finie de fonction de la forme*

$$(V_g x, x) \qquad (x \in \mathfrak{H})$$

est prolongéable à une fonction de type positif de $\mathbf{M}$.

Démonstration. Soit $p(e)=1$ et $q(e)=1$ pour toute fonction $q(g)$ approchant $p(g)$, c'est-à-dire soit $\sum \| x_i \|^2 = 1$ si $q(g)=\sum (V_g x_i, x_i)$. Alors la fonction de type positif $Q(A)$ de $\mathbf{M}$ définie par $Q(A) =\sum (Ax_i, x_i)$ $(A \in \mathbf{M})$ est toute contenue dans $\mathbf{S}_0$ (Lemme 2.1). Comme ces éléments forment une partie de la sphère unitaire de l'espace conjugué de $\mathbf{M}$, il existe au moins un point faiblement adhérent à ces Q. Ce point est manifestement contenu dans $\mathbf{S}$, et nous le posons P. Nous allons voir que cette $P(A)$ est une fonction de type positif de $\mathbf{M}$ prolongéant $p(g)$.

En premier pour un arbitraire $g \in G$, il existe une q telle qu'on ait, pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement donné,

$$\begin{aligned}| q(g) - p(g) | &\leqslant \varepsilon, \\ | Q(V_g) - P(V_g) | &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

1) R. Godement [6], p. 43.

en même temps, d'où on voit que

$$p(g) = P(V_g).$$

D'autre part, comme $q(g)$ converge uniformément sur tout ensemble compact à $p(g)$, nous avons

$$\int_G \xi(g)\, q(g)\, dg \to \int_G \xi(g)\, p(g)\, dg$$

pour toute $\xi(g) \in L^1(G)$, ou, en d'autre terme

$$Q(S_\xi) \to \int_G \xi(g)\, P(V_g)\, dg.$$

Donc, comme P est le point adhérent à Q, on a nécessairement

$$P(S_\xi) = \int_G \xi(g)\, P(V_g)\, dg.$$

On voit ainsi que P est une fonction de type positif de $\mathbf{M}$ prolongéant $p(g)$.

La démonstration du théorème 1 se fait alors visiblement en récueillant les résultats de Lemme 2.2 et Lemme 2.3.

2.2. Cas de la représentation régulière.

Nous donnerons ici brièvement la démonstration du fait que dans le cas de la représentation régulière il suffit d'utiliser pour approximation un seul terme de $(U_g x, x)$ et $x(h)$: C-fonction.

Considérons une arbitraire fonction continue de type positif $p(g)$ de la forme $p(g) = \sum (U_g x_i, x_i) = \sum x_i \underset{G}{*} \tilde{x}_i(g^{-1})$. Comme dans $L^2(G)$ l'ensemble de C-fonction forme une partie dense, on peut faire chaque $x_i(h)$ une C-fonction en la modifiant légèrement. Alors $p(g)$ est remplacée par une C-fonction de type positif qui diffère de $p(g)$ uniformément sur G par petites quantités. Cette nouvelle fonction étant une fonction de $L^2(G)$, un théorème de R. Godement [6][1] montre qu'il existe une fonction $y(g) \in L^2(G)$ telle que ce soit de la forme $y \underset{G}{*} \tilde{y}(g^{-1})$. En modifiant encore cette $y(g)$ par une petite quantité dans $L^2(G)$ par une C-fonction, on voit à la fin que $p(g)$ est uniformément approchée sur G par la fonction de la forme $z \underset{G}{*} \tilde{z}(g^{-1}) = (U_g z, z)$, $z(g)$: C-fonction. On peut aussi écrire cette $z \underset{G}{*} \tilde{z}(g^{-1})$ à une forme $u \underset{G}{*} \tilde{u}(g)$ en définissant $u(g) = \overline{z(g)}$, car

1) R. Godement [6], p. 73.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

$$
\begin{aligned}
u \underset{G}{*} \tilde{u}(g) &= (U_{g^{-1}}u, u) = (u, U_g u) \\
&= \overline{(z, U_g z)} = (U_g z, z) = z \underset{G}{*} \tilde{z}(g^{-1}).
\end{aligned}
$$

Donc nous avons le

Théorème 1'. *Pour qu'une fonction continue de type positif $p(g)$ sur G soit prolongéable à une fonction de type positif de C^*-algèbre d'opérateur* $\mathbf{M}$ *engendrée par T_ξ $(\xi(g) \in L^1(G))$ dans la représentation régulière, il faut et il suffit que $p(g)$ soit approchable uniformément sur tout ensemble compact par la fonction de la forme*

$$x \underset{G}{*} \tilde{x}(g)$$

où $x(g)$ est une C-fonction.

§3. Démonstration du théorème 2.

3.1. La démonstration de la nécessité.

Lemme 3.1. *Si le groupe G possède la propriété (R), le groupe quotient G^* de G par un sous-groupe invariant N la possède aussi.*

Démonstration. Soit φ l'homomorphisme canonique de G sur G^*. On sait que, correspondant à chaque ensemble compact $C^* \subset G^*$, un ensemble compact $C \subset G$ existe d'une manière que

$$\varphi(C) = C^*.$$

Du fait que G a la propriété (R), on peut prendre une C-fonction $x(g)$ sur G telle qu'on ait

$$
\begin{aligned}
&| x \underset{G}{*} \tilde{x}(g) - 1 | \leqslant \varepsilon^2/2 \qquad\qquad (g \in C), \\
&x \underset{G}{*} \tilde{x}(e) = \int_G | x(g) |^2 dg = 1
\end{aligned}
$$

pour $\varepsilon > 0$ donné. On a alors, si $g' \in C$,

$$
\begin{aligned}
&\int_G | x(g'g) - x(g) |^2 dg \\
&= 2 - 2\,\Re \int_G x(g'g)\overline{x(g)}\,dg \\
&\leqslant 2\,| 1 - x \underset{G}{*} \tilde{x}(g') | \\
&\leqslant \varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

Posons maintenant

$$X(g^*) = \sqrt{\int_N |x(gh)|^2 dh} \qquad (g^* \in G)$$

où g est un élément arbitraire dans la classe g^* suivant N. Cela est manifestement une C-fonction sur G^*. Nous allons voir que cette $X(g^*)$ satisfait à

$$|X \underset{G}{*} \tilde{X}(g^*) - 1| \leqslant \varepsilon \qquad (g^* \in C^*).$$

En effect, si $g'^* \in C^*$,

$$\begin{aligned} &\int_{G^*} |X(g'^*g^*) - X(g^*)|^2 dg^* \\ = &\int_{G^*} \left| \sqrt{\int_N |x(g'gh)|^2 dh} - \sqrt{\int_N |x(gh)|^2 dh} \right|^2 dg^* \\ \leqslant &\int_{G^*} \left(\int_N |x(g'gh) - x(gh)|^2 dh \right) dg^* \\ = &\int_G |x(g'g) - x(g)|^2 dg \\ \leqslant &\ \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Donc, si $g'^* \in C^*$, on a

$$\begin{aligned} &|X \underset{G}{*} \tilde{X}(g'^*) - 1| \\ = &\left| \int_{G^*} X(g'^*g^*) \overline{X(g^*)} dg - 1 \right| \\ = &\left| \int_{G^*} (X(g'^*g^*) - X(g^*)) \overline{X(g^*)} dg^* \right| \\ \leqslant &\sqrt{\int_{G^*} |X(g'^*g^*) - X(g^*)|^2 dg} \\ \leqslant &\ \varepsilon \end{aligned}$$

puisque

$$\int_{G^*} |X(g^*)|^2 dg^* = \int_{G^*} \left(\int_N |x(gh)|^2 dh \right) dg^* = \int_G |x(g)|^2 dg = 1.$$

Par conséquent G^* possède la propriété (R).

Lemme 3.2. *Si G possède la propriété (R), son sous-groupe ouvert H la possède aussi.*

Démonstration. Si H est compact, notre assertion est triviale. Donc nous supposons que H ne soit pas compact.

Prenons un sous-ensemble compact C de H. On peut supposer

$e \in C$. Comme G a la propriété (R), il existe une C-fonction $x(g)$ telle qu'elle satisfasse à

$$| x \underset{G}{*} x(g) - 1 | < \varepsilon \qquad (g \in C)$$

pour un $\varepsilon > 0$ donné. Soit F le support de $x(g)$. Cela étant un ensemble compact, on peut prendre un nombre fini d'éléments g_1, g_2, ……, g_n de G tels qu'on ait

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} Hg_i .$$

De plus, on peut prendre un ensemble compact $C_0 \subset H$ d'une façon que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_0 g_i .$$

Comme nous avons supposé que H ne soit pas compact, n éléments $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n \in H$ peuvent se choisir tels qu'ils satisfassent à

$$CC_0 h_i \cap C_0 h_j = \phi \qquad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n),$$

donc aussi, comme $e \in C$,

$$C_0 h_i \cap C_0 h_j = \phi \qquad (i \neq j).$$

Maintenant soit $\alpha_i = \sqrt{\Delta(g_i)/\Delta(h_i)}$ et posons

$$\begin{aligned} y(h) &= \alpha_i x(hh_i^{-1}g_i) && (\text{si } h \in C_0 h_i \text{ pour un } i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \\ &= 0 && (\text{dans l'autre cas}). \end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} y \underset{H}{*} \tilde{y}(h) &= \int_H y(hh') \overline{y(h')}\, dh' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{C_0 h_i} y(hh') \overline{y(h')}\, dh' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{C_0} y(hh'h_i) \overline{y(h'h_i)} \Delta(h_i)\, dh' \end{aligned}$$

Si l'on suppose que $h \in C$, on peut poser dans chaque terme de ce dernier membre,

$$y(h'h_i) = \alpha_i x(h'g_i) \qquad \text{et} \qquad y(hh'h_i) = \alpha_i x(hh'g_i).$$

En effet, $y(h'h_i) = \alpha_i x(h'g_i)$ suit de $h'h_i \in C_0 h_i$ et de la définition de

y. Quant à $y(hh'h_i) = \alpha_i x(hh'g_i)$, si $hh'h_i \in C_0 h_i$, cela suit de la définition de y, mais si $hh'h_i \notin C_0 h_i$, $y(hh'h_i) = x(hh'h_i) = 0$, comme on les vérifie comme suit. A savoir, $hh'h_i \in CC_0 h_i$ entraîne $hh'h_i \notin C_0 h_j$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$, donc $y(hh'h_i) = 0$, et $hh'h_i \notin C_0 h_i$ donc $hh' \notin C_0$ entraîne $hh'g_i \notin F$, donc $x(hh'g_i) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} y * \tilde{y}(h) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{C_0} x(hh'g_i)\overline{x(h'g_i)}\alpha_i^2 \Delta(h_i)\, dh' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{H} x(hh'g_i)\overline{x(h'g_i)}\Delta(g_i)\, dh' \\ &= x \underset{G}{*} \tilde{x}(h). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$| y \underset{H}{*} \tilde{y}(h) - 1 | = | x \underset{G}{*} \tilde{x}(h) - 1 | \leqslant \varepsilon$$

dans le cas où $h \in C$, c.q.f.d.

Le fait le plus essentiel est montré dans le lemme suivant:

Lemme 3.3. *Si G est le groupe adjoint d'une algèbre de Lie semi-simple réelle non-compacte, G ne possède pas la propriété* (R).

Démonstration. La structure d'un groupe énoncé dans l'hypothése est clairement déterminée par K. Iwasawa [10][1]. Selon lui, G contient deux sous-groupes fermés H, K tels qu'on ait

$$G = HK = KH \qquad \text{et} \qquad H \cap K = \{e\},$$

où H est un groupe de Lie connexe, simplement connexe et solvable, et K est un sous-groupe compact maximal de G. Nous désignons les éléments de volume de Haar invariant à gauche de ces groupes G, H, K par dg, dh, dk, où comme toujours nous supposons que la masse totale de K soit égale à 1. En écrivant toujours un élément g de G sous la forme kh $(k \in K, h \in H)$, la relation fondamentale de ces éléments de volume est

$$(*) \qquad dg = \mu(h)\, dk\, dh$$

où $\mu(h)$ est une fonction positive continue de $h \in H$ *qui n'est pas identiquement égale à* 1 et qui satisfait à $\mu(h_1 h_2) = \mu(h_1)\mu(h_2)$ pour arbitraires $h_1, h_2 \in H$ (Harisch-Chandra [9][2]).

1) K. Iwasawa [10], p. 525.

2) Harish-Chandra [9], p. 239. Le fait que $\mu(h)$ n'est pas identique à 1 est certifié en examinant la discussion faite dans [9], p. 188.

Pour $g \in G$, $k \in K$ l'élément gk peut être écrit sous la forme $k'h(gk)$ où $k' \in K$ et $h(gk)$ est un élément de H qui dépend de g et k d'une manière continue. En choisissant g et k convenablement, $h(gk)$ devient un arbitraire élément de H, donc $\mu(h(gk)) < \frac{1}{4}$ pour certains g et k. Soit g_0 l'un de tels éléments, et posons

$$E = \left\{k;\ k \in K,\ \mu(h(g_0 k)) \leqslant \frac{1}{4}\right\}.$$

Le volume de cet ensemble par rapport à la mesure de Haar fixée ci-dessus soit α, c.-à-d. $\alpha = \int_E dk$. Alors manifestement $\alpha > 0$.

Prenons $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ d'une façon que

$$\frac{4\varepsilon}{1-\varepsilon} \leqslant \delta^2 < \alpha$$

Supposons, maintenant, que l'on puisse déterminer une C-fonction $x(g)$ sur G telle qu'elle satisfasse à

$$| x \underset{G}{*} \tilde{x}(g) - 1 | \leqslant \varepsilon$$

sur l'ensemble compact de G $C = K \cup Kg_0K$. Alors cette hypothèse nous conduira à une contradiction.

En premier, de la définition de l'ensemble C, nous avons

$$| x \underset{G}{*} \tilde{x}(kgk') - 1 | \leqslant \varepsilon$$

pour $g \in C$, $k, k' \in K$. Donc en intégrant par rapport aux k, k' sur K, et en écrivant

$$y(g) = \int_K x(kg)\,dk \qquad (g \in G),$$

nous avons

$$| y \underset{G}{*} \tilde{y}(g) - 1 | \leqslant \varepsilon.$$

Ici $y(g)$ est aussi une C-fonction et si l'on pose dans cette inégalité $g = e$, nous avons

$$\Big| \|y\|^2 - 1 \Big| \leqslant \varepsilon \qquad \text{où} \qquad \|y\|^2 = \int_G |y(g)|^2 dg.$$

Posons

$$z(g) = \frac{1}{\|y\|} y(g).$$

Alors $z(g)$ est une C-fonction avec $\| z \| = 1$, et, si $g \in C$,

$$\begin{aligned} & | z \underset{G}{*} \tilde{z}(g) - 1 | \\ & \leqslant \frac{1}{\| y \|^2} \left| y \underset{G}{*} \tilde{y}(g) - 1 \right| + \frac{1}{\| y \|^2} \left| \| y \|^2 - 1 \right| \\ & \leqslant \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ & \leqslant \frac{\delta^2}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans ce cas, nous avons

$$(\dagger) \qquad \int_G | z(gg') - z(g') |^2 dg' \leqslant \delta^2.$$

Nous allons écrire cette inégalité autrement. En posant $g' = kh$,

$$gg' = k'h(gk)h \qquad \text{où} \qquad k' \in K.$$

D'autre part

$$z(kg) = z(g)$$

pour $k \in K$, $g \in G$ arbitraires, comme on le voie de la définition. Par conséquent, en utilisant la relation $(*)$ ci-dessus, $(\dagger)$ devient

$$\int_K \left(\int_H | z(h(gk)h) - z(h) |^2 \mu(h) dh \right) dk \leqslant \delta^2 \qquad (g \in C),$$

donc à plus forte raison,

$$\int_E \left(\int_H | z(h(gk)h) - z(h) |^2 \mu(h) dh \right) dk \leqslant \delta^2 \qquad (g \in C).$$

Posons $g = g_0$, l'élément utilisé pour déterminer C. Alors, pourvu que $k \in E$, on a

$$\begin{aligned} & \int_H | z(h(g_0 k)h) |^2 \mu(h) dh \\ & = \frac{1}{\mu(h(g_0 k))} \int_H | z(h) |^2 \mu(h) dh \\ & \geqslant 4 \int_H | z(h) |^2 \mu(h) dh. \end{aligned}$$

Or cette dernière intégrale est égale à 1, puisque

$$\int_H | z(h) |^2 \mu(h) dh$$

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

$$= \int_K \left(\int_H | z(h) |^2 \mu(h) dh \right) dk$$
$$= \int_K \left(\int_H | z(kh) |^2 \mu(h) dh \right) dk$$
$$= \int_G | z(g) |^2 dg$$
$$= 1.$$

De tous ces faits, il s'en suit que

$$\delta \geqslant \sqrt{\int_E \left(\int_H | z(h(g_0 k) h) - z(h) |^2 \mu(h) dh \right) dk}$$
$$\geqslant \sqrt{\int_E \left(\int_H | z(h(g_0 k) h) |^2 \mu(h) dh \right) dk} - \sqrt{\int_E \left(\int_H | z(h) |^2 \mu(h) dh \right) dk}$$
$$\geqslant 2\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}$$
$$= \sqrt{\alpha},$$

mais cela contredit à $\delta^2 < \alpha$, c.q.f.d.

Démonstration de la nécessité. D'après la théorie des groupes de Lie généralisés développée par K. Iwasawa [10], A. M. Gleason [5], H. Yamabe [18], on sait qu'un groupe localement compact dont le quotient par son composant connexe est compact contient une famille de sous-groupes invariants $\{N\}$, telle qu'elle ait les propriétés suivantes:

(i) chaque voisinage U de e contient au moins un membre N de cette famille,

(ii) G/N est un groupe de Lie où N est un membre arbitraire de cette famille.

Si, dans ce cas, on peut démontrer que tous ces G/N sont les groupes de Lie du type (C), alors par définition (K. Iwasawa [10][1]), G est un (C)-groupe. Donc nous n'avons qu'à démontrer que, si G possède la propriété (R), tous ces G/N sont les groupes de Lie du type (C).

A cause du Lemme 3.1 on sait que tout ce G/N a la propriété (R), donc, en utilisant le Lemme 3.2, son composant connexe la possède aussi. Par suite, il revient à montrer qu'un groupe de Lie connexe possédant la propriété (R) est nécessairement un (C)-groupe.

1) Voir aussi 1.4.

Soit maintenant G un tel groupe, et soit R son radical, à savoir le sous-groupe invariant solvable connexe maximal. Alors G/R est un groupe de Lie semi-simple possédant la propriété (R). Le quotient de G/R par son centre possède aussi la propriété (R) et au surplus il est le groupe adjoint d'une algèbre de Lie semi-simple réelle. A cause du lemme 2.3, ce dernier groupe est compact, donc G/R aussi parce que c'est le revêtement d'un groupe de Lie semi-simple compact. Par conséquent G est un groupe de Lie du type (C).

Ainsi la démonstration de la nécessité se complète.

3.2. La démonstration de la suffisance.

Lemme 3.4. *Si le groupe quotient d'un groupe G par son sous-groupe invariant compact possède la propriété (R), G aussi la possède.*

C'est évident.

Lemme 3.5. *Supposons que le groupe G contienne deux sous-groupes H, K tels qu'on ait*

$$G = HK, \qquad H \cap K = \{e\},$$

et où K soit invariant dans G. Si H, K possède la propriété (R), G la possède aussi.

Démonstration. Soit C $(\subset G)$ un ensemble compact. Alors on peut prendre les ensembles compacts C', C'' de H, K resp. tels que l'on ait

$$C \subset C'C''.$$

Ici on peut supposer comme $e \in C'$.

Comme H possède la propriété (R), on peut déterminer une C-fonction $x(h)$ sur H d'une façon que

$$|\, x \underset{H}{*} \tilde{x}(h) - 1 \,| \leqslant \varepsilon \qquad (h \in C')$$

pour $\varepsilon > 0$ donné. Soit C_0 le support de $x(h)$. C'est un ensemble compact, et donc l'ensemble C_0'' défini par

$$C_0'' = \{h^{-1}kh\,;\ h \in C_0,\ k \in C''\}$$

devient un ensemble compact dans K. Comme K possède la propriété (R) aussi, on peut déterminer une C-fonction $y(k)$ sur K d'une façon que

$$|\, y \underset{K}{*} \tilde{y}(k) - 1 \,| \leqslant \varepsilon \qquad (k \in C_0'').$$

En définissant une C-fonction $z(g)$ sur G par

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 4 [1954], Iss. 2, Art. 5

$$z(g) = x(h)y(k) \quad \text{si} \quad g = hk \quad (h \in H,\ k \in K),$$

nous avons

$$\begin{aligned} & z \underset{G}{*} \tilde{z}(g') \\ &= \int_G z(g'g)\overline{z(g)}dg \\ &= \int_H \Big(\int_K x(h'h)\, y(h^{-1}k'hk)\overline{x(h)\, y(k)}\, dk\Big) dh \\ &= \int_H \Big(\int_K y(h^{-1}k'hk)\overline{y(k)}\, dk\Big)\, x(h'h)\overline{x(h)}\, dh \\ &= \int_H y \underset{K}{*} \tilde{y}(h^{-1}k'h)\, x(h'h)\overline{x(h)}\, dh, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations $g'g = (h'k')(hk) = h'h(h^{-1}k'h)k$ et $h^{-1}k'h \in K$. Donc nous avons

$$\begin{aligned} & | z \underset{G}{*} \tilde{z}(g') - 1 | \\ &= \Big| \int_H y \underset{K}{*} \tilde{y}(h^{-1}k'h)\, x(h'h)\overline{x(h)}\, dh - 1 \Big| \\ &\leqslant \Big| \int_H y \underset{K}{*} \tilde{y}(h^{-1}k'h)\, x(h'h)\overline{x(h)}\, dh - \int_H x(h'h)\overline{x(h)}\, dh \Big| \\ &\qquad + \Big| \int_H x(h'h)\overline{x(h)}\, dh - 1 \Big| \\ &\leqslant \int_H | y \underset{K}{*} \tilde{y}(h^{-1}k'h) - 1 \,||\, x(h'h) \,||\, x(h) \,|\, dh + \Big| \int_H x(h'h)\overline{x(h)}\, dh - 1 \Big|. \end{aligned}$$

Dans cette inégalité nous supposons que $h' \in C'$, $k' \in C''$. Dans ce cas, dans le premier terme de ce dernier membre, comme $\int_H$ peut aussi s'écrire comme $\int_{C_0}$, nous pouvons considérer comme $h^{-1}k'h \in C_0''$ car $k' \in C''$, $h \in C_0$. Donc, si $g' \in C$, on a

$$\begin{aligned} & | z \underset{G}{*} \tilde{z}(g') - 1 | \\ &\leqslant \varepsilon \int_H | x(h'h) \,||\, x(h) \,|\, dh + \varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon \int_H | x(h) |^2 dh + \varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon(1 + \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, la constante 1 est approchée uniformément sur C par $z \underset{G}{*} \tilde{z}(g)$.

Lemme 3.6. *Le groupe de Lie connexe et solvable possède la propriété (R).*

Dèmonstration. K. Iwasawa [10][1] a montré qu'un tel groupe G (à dimension n) contient n sous-groupes $H_1, H_2, \cdots\cdots, H_n$ tels que l'on ait que

(i) chaque H_i soit un groupe de Lie connexe à dimension 1.

(ii) $G_i = H_{i+1}H_{i+2}\cdots\cdots H_n$ $(i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ soit un sous-groupe de G à dimension $n-i$, qui soit invariant dans G_{i-1}.

(iii) $G = G_0$ et chaque élément g de G puisse être écrit sous la forme

$$g = h_1 h_2 \cdots\cdots h_n \qquad (h_i \in H_i)$$

uniquement et, h_i dépende de g d'une manière continue.

Chaque H_i étant abélien, il possède la propriété (R). Donc, en utilisant le Lemme 3.4 à plusieur reprises, nous voyons que G possède la propriété (R).

Lemme 3.7. *G soit un groupe de Lie et N soit un sous-groupe de G invariant, connexe et solvable. Si $G^* = G/N$ possède la propriété (R), G la possède aussi.*

Démonstration. K. Iwasawa [10][1] a défini une section M de G^* dans G. En exposant brièvement, sa méthode est comme suit. En écrivant l'homomorphisme canonique de G sur G^* comme φ, il existe un ensemble compact U de G ayant les propriétés suivantes:

(i) $U^* = \varphi(U)$ est un voisinage de l'unité dans G^*,

(ii) φ définit un homéomorphisme de U avec U^*. Choisissons $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_r \in G$ d'une manière que, en écrivant $s_i^* = \varphi(s_i)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, r)$, on ait

$$G^* = \bigcup_{i=1}^{r} s_i^* U^*.$$

Soit ψ l'application de U^* à U inverse à φ, et posons

$$V_i = \psi(s_i^{*-1}(\bigcup_{j=1}^{i} s_j^* U^* - \bigcup_{j=1}^{i-1} s_j^* U^*)) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, r).$$

Alors l'ensemble M défini par

$$M = \bigcup_{i=1}^{r} s_i V_i$$

1) K. Iwasawa [10], p. 521.

ERRATA, VOLUME 4

Au Lemme 3. 7 du mèmoire d'O. Takenouchi: "*Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact*" (ce journal, tom. 4, no 2 (1955), p. 169), il faut lire "Si $G^* = G/N$ est compact" au lieu de "Si $G^* = G/N$ possède la propriété (R)".

est un ensemble mesurable[1], et φ applique M biunivoquement sur G^*.

Nous utilisons maintenant cet M. Puisqu'on a $M \subset \bigcup_{i=1}^{r} s_i U$, il existe un ensemble compact C_0, $C_0 = C_0^{-1}$ assujetti à

$$M \subset C_0.$$

Au surplus, nous pouvons montrer que tout ensemble compact $C \subset G$ est contenu dans un ensemble de la forme MC_1 où C_1 est un ensemble compact dans N. En effect, correspondant à C donné, en posant successivement

$$\begin{aligned} D_i &= s_i UN \cap C & (i = 1, 2. \cdots\cdots, r), \\ F_i &= (s_i U)^{-1} D_i \cap N & (i = 1, 2, \cdots\cdots, r), \\ C_1 &= \bigcup_{i=1}^{r} F_i, & \end{aligned}$$

on voit que C_1 est un ensemble compact dans N. Si $g = mh \in C$ $(m \in M,\ h \in N)$, pour l'indice i tel que $m \in s_i V_i$, nous avons

$$\begin{aligned} g &\in s_i UN \cap C = D_i, \\ h &= m^{-1} g \in (s_i U)^{-1} D_i \cap N = F_i, \end{aligned}$$

donc

$$g = mh \in MF_i \subset MC_1,$$

et

$$C \subset MC_1.$$

Maintenant, soit C un ensemble compact dans G. D'après ce qui précède, il existe un ensemble compact $C_1 \subset N$ tel que l'on ait $C \subset MC_1$. Comme, suivant le Lemme 3.6, N possède la propriété (R), on peut trouver une C-fonction $x(h)$ sur N d'une manière que

$$| x \underset{H}{*} \tilde{x}(h) - 1 | \leqslant \varepsilon$$

soit satisfaite pour $\varepsilon > 0$ donné pourvu que $h \in C_0^2 C_1 C_0 \cap N$. Nous étendons cette $x(h)$ sur tout G par

$$X(g) = x(h) \qquad \text{si} \qquad g = mh \quad (m \in M,\ h \in N).$$

Cela est une fonction $\in L^2(G)$ à support compact. Alors

---

1) Où plutôt, le produit de M avec un ensemble compact arbitraire devient un ensemble mesurable.

$$\begin{aligned} X \underset{G}{*} \tilde{X}(g') &= \int_G X(g'g)\overline{X(g)}\,dg \\ &= \int_{G^*} \Big(\int_N X(m'h'mh)\overline{X(mh)}\,dh \Big)\,dm^* \\ &= \int_{G^*} \Big(\int_N X(m''h''h)\overline{X(mh)}\,dh \Big)\,dm^* \\ &= \int_{G^*} \Big(\int_N x(h''h)\overline{x(h)}\,dh \Big)\,dm^* \\ &= \int_{G^*} x \underset{N}{*} \tilde{x}(h'')\,dm^*, \end{aligned}$$

où nous avons posé $g' = m'h'$, $m'h'm = m''h''$. Or si $g' \in C$, $h' \in C_1$ et

$$h'' = m''^{-1}m'h'm \in C_0^2 C_1 C_0 \cap N.$$

Donc, dans ce cas

$$| x \underset{N}{*} \tilde{x}(h'') - 1 | \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, si $g' \in C$, nous avons

$$\begin{aligned} & | X \underset{G}{*} \tilde{X}(g') - 1 | \\ \leqslant & \int_{G^*} | x \underset{N}{*} \tilde{x}(h'') - 1 | \, dm^* \\ \leqslant & \ \varepsilon, \end{aligned}$$

où l'on a posé comme toujours que la masse totale de G^* par rapport à la mesure de Haar sur G^* est égale à 1.

Ainsi nous avons vu que G possède la propriété (R).

Lemme 3.8. *Soit G un groupe localement compact dont le quotient par son composant connexe de l'unité soit compact. Alors, si le groupe quotient G^* de G par un sous-groupe invariant N est un groupe de Lie, le nombre de classes de G^* suivant le composant connexe de l'unité de G^* est fini.*

Démonstration. Soit G_0 le composant connexe de G et soit H^* celui de G^*. Soit H l'image réciproque de H^* par rapport à l'homomorphisme $G \to G^*$. Comme l'image de G_0 dans G^* par l'homomorphisme $G \to G^*$ est connexe, elle est contenue dans H^*. Par conséquent

$$G_0 \subset H.$$

Alors l'application continue canonique

$$G/G_0 \to G/H$$

existe. Comme G/G_0 était compact, il s'en suit que G/H est compact.

D'autre part, nous avons

$$G^*/H^* = {}^{G/N}\!/_{H/N} \cong G/H \quad (\text{: isomorph et homéomorph}).$$

Puisque G^*/H^* est discret, il doit être un groupe fini.

Démonstration de la suffisance. Soit G un groupe du type (C), dont le quotient par son composant connexe de l'unité est compact. D'après la théorie de K. Iwasawa [10], A. M. Gleason [5], G contient un sous-groupe invariant compact K tel que le quotient de G par ce K soit un groupe de Lie. On vérifie aisément que ce groupe de Lie est du type (C) et, d'après le Lemme 3.8, il n'a qu'un nombre fini de composants connexes. Pour voir que G possède la propriété (R), il suffit, d'après le Lemme 3.4, de voir que ce groupe quotient possède la propriété (R).

Donc nous pouvons supposer que G soit un groupe de Lie du type (C) à un nombre fini de composants connexes. Soit R le radical du composant connexe de l'unitè de G. Alors G/R est un groupe compact puisque, d'une part, le nombre de composants connexes de ce quotient est fini, et, d'autre part, le composant connexe de l'unité de ce quotient est un revêtement d'un groupe de Lie semi-simple et compact, et donc lui-même est compact. Maintenant notre Lemme 3.7 montre que G possède la propriété (R).

Note adjutée pendant la correction des épreuves. Après avoir présenté ce mémoire, l'auteur savait que M. W. F. Darsow a montré dans un mémoire (W. F. DARSOW, Positive definite functions and states, Ann. Math., tom. 60 (1954), p. 447 - 453) un théorème pareil de notre théorème 1 et aussi un résultat qui semble le même que celui de H. Yoshizawa [17].

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. M. GELFAND, Normierte Ringe, Mat. Sbornik, tom. **9** (1941), p. 3 - 23.

[2] ———— et M. A. NAIMARK, The principal series of irreducible representations of the complex unimodular group, Doklady Akad. Nauk SSSR, tom. **56** (1947), p. 3 - 4.

[3] ———— et ————, Unitary representations of the Lorentz group, Izvestia Akad. Nauk SSSR, tom. **11** (1947), p. 411 - 504.

[4] ———— et D. RAIKOV, Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups, Mat. Sbornik, tom. **13** (1943), p. 301 - 316.

[5] A. M. GLEASON, The structure of locally compact groups, Duke Math. Journal, tom. **18** (1951), p. 85 - 104.

[6] R. GODEMENT, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc., tom. **63** (1948), p. 1 - 84.

[7] ———, L'analyse harmonique dans les groupes non-abélien, Colloques internationaux d'analyse harmonique du C.N.R.S. (1949). Supplément au Colloque d'analyse harmonique, p. 1 - 16.

[8] ———, Sur la théorie des représentations unitaires, Ann. of Math., tom. **53** (1951), p. 68 - 124.

[9] HARISH-CHANDRA, Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space, I, Trans. Amer. Math. Soc., tom. **75** (1953), p. 185 - 243.

[10] K. IWASAWA, On some types of topological groups, Ann. of Math., tom. **50** (1949), p. 507 - 558.

[11] M. KREIN et D. MILMAN, On extreme points of regular convex sets, Studia Math., tom. **9** (1940), p. 133 - 138.

[12] F. I. MAUTNER, Unitary representations of locally compact groups I, Ann. Math., tom. **51** (1950), p. 1 - 25.

[13] I. E. SEGAL, Decomposition of operator algebras, I, II, Memoirs of the Amer. Math. Soc., No. 9 (1951).

[14] M. TOMITA, Representations of operator algebras, Math. Journal of Okayama Univ., tom. **3** (1954), p. 147 - 173.

[15] A. WEIL, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualités sci. et ind., No. 1145 (1953).

[16] H. YAMABE, A generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math., tom. **58** (1953), p. 351 - 365.

[17] H. YOSHIZAWA, Some remarks on unitary representations of the free group, Osaka Math. Journal, tom. **3** (1951), p. 55 - 82.

[18] ———, A proof of the Plancherel theorem, Proc. of the Japan Academy, tom. **30** (1954), p. 276 - 281.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received December 15, 1954*)