Mathematical Journal of Okayama University

Volume 5, *Issue* 1 1955 *Article* 1

OCTOBER 1955

Une note sur l'axiome (T5) de séparation

Takeshi Inagaki*

*Okayama University

UNE NOTE SUR L'AXIOME (T_5) DE SÉPARATION[1)]

TAKESHI INAGAKI

Comme on le sait, le théorème de séparation généralisée due à M. Tychonoff et cellui de frontière relative[2)] jouent un rôle important dans la Théorie de dimension.

L'objet de cette Note est de donner une relation parimi ces deux théorèmes et l'axiome (T_5) de séparation :

Théorème 1. *Dans un espace topologique R, les trois conditions suivantes sont équivalentes deux à deux :*

(1) *L'axiome (T_5) se lieu.*

(2) *Si deux ensembles A et B sont réspectivement fermés rélativement à la somme $M = A + B$, alors il existe, pour un ensemble ouvert $W \supset A - AB$, un ensemble ouvert U tel qu'il satisfait aux conditions :*

$$\alpha)\quad A - AB \subset U \subset W, \qquad \beta)\quad M\bar{U} = A\bar{U}.$$

(3) *Etant donnés un ensemble M et un ensemble ouvert W, il existe un ensemble ouvert U satisfaisant aux trois conditions :*

$$\gamma)\quad U \subset W, \qquad \delta)\quad MW = MU, \qquad \varepsilon)\quad F_M(W) = MF(U)^{3)}.$$

Démonstration. (1) *entraîne* (2). Supposons que deux ensembles A et B sont réspectivement fermés relativement à la somme $M = A + B$. Il existe alors deux ensembles fermés F_1 et F_2 tels que $A = F_1M$ et $B = F_2M$. Il en résulte, par exemple, que $\overline{A - AB}(B - AB) = \overline{MF_1 - MF_1F_2}\cdot(MF_2 - MF_1F_2) \subset \overline{MF_1}MF_2(R - F_1) \subset \bar{F}_1(R - F_1) = F_1(R - F_1) = \emptyset$; d'où $\overline{A - AB}(B - AB) = \emptyset$. De même, on a $(A - AB)(\overline{B - AB}) = \emptyset$. Par conséquent, on voit que A $- AB$ et $B - AB$ sont séparés. Donc, il existe selon l'axiome (T_5) deux ensembles ouverts et disjoints U_1 et U_2 tels que

$$A - AB \subset U_1 \quad \text{et} \quad B - AB \subset U_2.$$

---

1) Deux ensembles A et B sont dits séparés, lorsque $\bar{A}B + A\bar{B} = \emptyset$. Nous dirons qu'un espace topologique vérifie l'axiome (T_5) de séparation, lorsque si deux ensembles A et B sont séparés, il existe deux ensembles ouverts et disjoints auxquels A et B sont réspectivement intérieurs.

2) Voir, par exemple, Kar Menger : Dimensionstheorie, Leipzig und Berlin, (1928). pp. 31 et 39.

3) $F_M(W)$ désigne la frontière de l'ensemble W relativement à l'ensemble M, c-à-d. $F_M(W) = M\,\overline{MW}\,\overline{M - W}$. En particulier, si W est ouvert, on a $F_M(W) = M\cdot\overline{MW} - W$.

$F(U)$ désigne la frontière de U, c-à-d. $F(U) = \bar{U}\,\overline{R - U}$.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 5 [1955], Iss. 1, Art. 1

En posant $U = U_1 W$, U est ouvert et vérifie la condition α).

Ensuite, en tenant compte du fait que $U \subset U_1$ et $\bar{U} U_2 = \emptyset$, on a $\bar{U}(B - AB) = \emptyset$. Il vient donc $\bar{U}B \subset \bar{U}AB \subset \bar{U}A$; d'où $\bar{U}M = \bar{U}\cdot(A + B) = \bar{U}A + \bar{U}B = \bar{U}A$. Ce qui montre que la condition β) est vérifiée.

(2) *entraîne* (3). Posons $A = M\overline{MW}$ et $B = M\overline{M - W}$. Alors, A et B sont fermés relativement à l'ensemble M et il vient $A + B = M\overline{MW} + M\overline{M - W} = M(\overline{MW} + \overline{M - W}) = M(\overline{MW + (M - W)}) = M\overline{M} = M$; donc on a

$$M = A + B.$$

Or, il vient d'une part $A - AB = M\overline{MW} - M\overline{MW}\,\overline{M - W} = M\overline{MW} - \overline{M - W}$ et d'autre part $MW = M - (M - W) \supset M\overline{MW} - (\overline{M - W}) \supset M\overline{MW} - \overline{R - W} = M\overline{MW} - (R - W) = M\overline{MW}W = MW$. On a donc

$$A - AB = M\overline{MW} - \overline{M - W} = MW \subset W.$$

En tenant compte des résultats obtenus au dessus, on peut employer la supposition (2) aux ensembles A, B et W et il existe alors un ensemble ouvert U de façon que:

$$\alpha) \quad A - AB = MW \subset U \subset W, \qquad \beta) \quad M\bar{U} = A\bar{U}.$$

De plus, on a immédiatement selon α) les deux relations:

$$\gamma) \quad U \subset W, \qquad \delta) \quad MU = MW.$$

Ensuite, on a selon β), δ) et α)

$$\begin{aligned} MF(U) &= M\bar{U}\,\overline{R - U} = M\bar{U}(R - U) = M\bar{U} - M\bar{U}U = \\ &M\bar{U} - MU = M\bar{U} - MW = A\bar{U} - MW = M\overline{MW}\,\bar{U} - MW = \\ &M\overline{MW} - MW = M\overline{MW} - W = F_M(W). \end{aligned}$$

(3) *entraîne* (1). Supposons que deux ensembles A et B sont séparés. En posant $M = A + B$ et $W = R - \bar{B}$, W est ouvert et on a

$$(*) \quad MW = (A + B)(R - \bar{B}) = A + B - \bar{B} = A.$$

Donc, on peut employer la supposition (3) aux ensembles M et W et il existe un ensemble ouvert U satisfaisant aux conditions γ), δ) et ε).

D'après δ) et la formule (*), il vient $BU = (M - A)\bar{U} = M\bar{U} - A\bar{U} = M\bar{U} - MW\bar{U} = M\bar{U} - MU\bar{U} = M\bar{U} - U$. Donc on a selon ε) $B\bar{U} = B(M\bar{U} - U) = B(M\overline{MW} - W) \subset B\overline{MW} = B\bar{A} = \emptyset$; d'où $B\bar{U} = \emptyset$. Par conséquent, en posant $V = R - \bar{U}$, V est ouvert et $B \subset V$. D'autre part, il est claire que U est ouvert et $A \subset U$. Il en résulte que la supposition (1) est établie, c. q. f. d.

Ensuite, nous donnons une application du théorème 1.

Théorème 2. *Soit R un espace topologique vérifiant l'axiome (T_5) et soit $E \subset R$. Pour que $dim_p E \leqq n+1$, il faut et il suffit que, pour un voisinage quelconque $V(p)$ de point p, il existe un ensemble ouvert G tel que $p \in G \subset V(p)$ et $dim\,(E\,F(G)) \leqq n$.*

Démonstration. Supposons que $dim_p E \leqq n+1$. Alors, par définition il existe, pour un voisinage quelconque $V(p)$ de point p, un ensemble ouvert W tel que $p \in W \subset V(p)$ et $dim\ F_E(W) \leqq n$.

Comme l'espace considéré vérifie l'axiome (T_5), il y a selone (3) du théorème 1 un ensemble ouvert G tel que $p \in G \subset W$ et $F_E(W) = E \cdot F(G)$; d'où $dim\,(EF(G)) \leqq n$.

Reciproquement, soit $p \in E$ et soit $V(p)$ un voisinage quelconque du point p. Supposons à présent qu'il existe un ensemble ouvert G de façon que $p \in G \subset V(p)$ et $dim(EF(G)) \leqq n$. Alors, il vient $EF(G) = E(\bar{G} - G) \supset E\bar{G} - EG \supset E\overline{EG} - EG = F_E(G)$. On a donc $dim F_E(G) \leqq n$, c. q. f. d.

En tenant compte du théorème 2, nous pouvons établir la Théorie de dimension[1] dans un espace à structure uniforme satisfaisant aux conditions convenables, soit la condition (D)[2].

1) Voir, par exemple, Kuratowski: Topologie I (1952). p. 162.

2) Cf. notre article: Contribution à la topologie II, Ce journal vol. 2 (1953). p. 171.

(*Received March 10, 1955*)