Mathematical Journal of Okayama University

Volume 11, *Issue* 1 1962 *Article* 1

MARCH 1962

Sur les representations unitaires des groupes de Lie resolubles

J. Dixmier*

*Université De Paris

SUR LES REPRESENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE RESOLUBLES

par J. DIXMIER

1. Introduction et exemples.

Soit G un groupe localement compact. Une représentation unitaire π de G est dite de type I si $\pi(G)$ engendre une algèbre de von Neumann de type I. Le groupe G est dit de type I si toute représentation unitaire de G est de type I. Si la topologie de G est à base dénombrable (le seul cas qui sera envisagé dans ce mémoire), il revient au même de dire que les représentations unitaires *factorielles* de G (c'est-à-dire celles pour lesquelles les opérateurs de la représentation engendrent un facteur) sont de type I. Les groupes de type I ont un dual lisse [6], et la décomposition de leurs représentations unitaires en représentations irréductibles s'effectue de manière particulièrement simple [9].

Les groupes de Lie semi-simples, les groupes de Lie linéaires algébriques, sont de type I [8, 3]. Que sait-on dans le cas des groupes de Lie résolubles ? D'abord, il peut arriver, d'après Mautner, qu'un tel groupe ne soit pas de type I. Rappelons l'exemple de Mautner. Soit $\mathfrak{h}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ admettant une base (e_1, e_2, e_3, e_4). (On notera $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels >0, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels, $\mathbf{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels). Soit u l'endomorphisme de $\mathfrak{h}$ défini par $u(e_1)=e_2$, $u(e_2)=-e_1$, $u(e_3)=\theta e_4$, $u(e_4)=-\theta e_3$, où θ est un nombre irrationnel. Soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathbf{R}e_0$ l'algèbre de Lie, produit semi-direct de l'idéal $\mathfrak{h}$ et de la sous-algèbre $\mathbf{R}e_0$, définie par $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}e_0=u$. Soit G le groupe résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, G n'est pas de type I.

Pour énoncer les résultats positifs, rappelons [2] la notion de *racine* d'une algèbre de Lie résoluble réelle $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ admet une suite de composition dont les quotients sont de dimension 1 sur $\mathbf{C}$. Ces quotients sont des $(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C})$-modules, donc définissent chacun une forme linéaire sur $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ces formes linéaires ($n=\dim\mathfrak{g}$). Elles sont indépendantes (à l'ordre près) de la suite de composition choisie. Pour tout $x\in\mathfrak{g}$, les valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x$ sont $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$. Les restrictions des φ_j à $\mathfrak{g}$, qui sont des formes $\mathbf{R}$-linéaires à valeurs complexes, sont les racines de $\mathfrak{g}$. Il est clair qu'elles s'annulent sur l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ de $\mathfrak{g}$. Posons $\varphi_j=\varphi'_j+i\varphi''_j (j=1, \cdots, n)$, où φ'_j, φ''_j sont à valeurs réelles. Ceci posé, si $\varphi''_1=a_1\varphi'_1, \cdots, \varphi''_n=a_n\varphi'_n$ $(a_1, \cdots, a_n\in\mathbf{R})$, Takenouchi a montré que G est de type I [14]. En particulier, si toutes les racines de $\mathfrak{g}$ sont réelles, G est de type I. Plus particulièrement encore, si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, G est de type I [4].

Dans le cas de l'exemple de Mautner, les 5 racines sont de la forme 0, $i\varphi$, $-i\varphi$, $i\theta\varphi$, $-i\theta\varphi$, φ étant réelle sur $\mathfrak{g}$. On peut donc penser que le fait pour G d'être de type I est lié à des propriétés de rationalité des racines imaginaires pures. Cependant, considérons l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension 7, admettant par rapport à la base $(e_1, e_2, \cdots, e_7)$ la table de multiplication suivante :

$$[e_1, e_4]=e_5,\ [e_1, e_5]=-e_4,\ [e_2, e_6]=e_7,\ [e_2, e_7]=-e_6,\ [e_1, e_2]=e_3,$$

les crochets non écrits étant nuls ou déduits des précédents par antisymétrie. On voit facilement que les racines sont 0, 0, 0, $i\varphi$, $-i\varphi$, $i\psi$, $-i\psi$, où

$$\varphi(e_1)=1,\ \varphi(e_2)=\varphi(e_3)=\varphi(e_4)=\varphi(e_5)=\varphi(e_6)=\varphi(e_7)=0,$$
$$\psi(e_2)=1,\ \psi(e_1)=\psi(e_3)=\psi(e_4)=\psi(e_5)=\psi(e_6)=\psi(e_7)=0.$$

Soit G le groupe résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On a montré ailleurs [5] que G n'est pas de type I, et ceci malgré le comportement apparemment inoffensif des racines de $\mathfrak{g}$.

D'autre part, modifions la table de multiplication de $\mathfrak{g}$, en remplaçant simplement la formule $[e_1, e_2]=e_3$ par la formule $[e_1, e_2]=0$. Les racines ne changent pas, et pourtant le groupe résoluble simplement connexe correspondant est maintenant de type I. En effet, l'algèbre de Lie est maintenant produit de $\mathbf{R}e_3$, et des algèbres de Lie isomorphes $\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_4+\mathbf{R}e_5$, $\mathbf{R}e_2+\mathbf{R}e_6+\mathbf{R}e_7$; et le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{R}e_1+\mathbf{R}e_4+\mathbf{R}e_5$ est de type I comme on le voit facilement, par exemple en appliquant le th. 8.1 de [10].

Ceci prouve qu'il n'existe pas de condition *nécessaire et suffisante*, portant sur la structure vectorielle des racines d'une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$, exprimant que le groupe simplement connexe correspondant G soit de type I. Dans le présent mémoire, nous donnerons une condition vectorielle sur les racines de $\mathfrak{g}$, *suffisante* pour que G soit de type I. Cette condition est plus large que celle de Takenouchi rappelée plus haut. Comme dans [14], on appliquera la théorie de Mackey à des sous-groupes distingués de petite dimension de G. Mais la situation est plus compliquée que dans [14], à cause des deux faits suivants : 1) il faut considérer des sous-groupes distingués non abéliens de G ; 2) certains des stabilisateurs qui interviennent sont non connexes.

2. La propriété (P).

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ les racines de $\mathfrak{g}$. Posons $\varphi_j=\varphi'_j+i\varphi''_j$ avec φ'_j, φ''_j réelles. Nous considérerons la propriété suivante :

(P) Quels que soient les indices $k, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, il existe a, $b \in \mathbf{Q}$ non tous les deux nuls, et $c, d \in \mathbf{R}$, tels que $a\varphi''_k + b\varphi''_j + c\varphi'_k + d\varphi'_j = 0$.

Plus brièvement, φ''_k et φ''_j sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{Q}$ modulo φ'_k et φ'_j.

Il est clair que la propriété de Takenouchi entraîne la propriété (P). Nous prouverons que, si $\mathfrak{g}$ possède la propriété (P), tout groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de type I. On notera qu'il existe des algèbres de Lie possédant la propriété (P) et qui ne sont l'algèbre de Lie d'aucun groupe algébrique ; par exemple, l'algèbre résoluble de dimension 5 définie par la table de multiplication $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_2, e_4] = e_4$ a toutes ses racines réelles ; pourtant il est facile de voir que son plus grand idéal nilpotent $\mathbf{R}e_3 + \mathbf{R}e_4 + \mathbf{R}e_5$ n'admet aucun supplémentaire qui soit une sous-algèbre, donc cette algèbre de Lie n'est l'algèbre de Lie d'aucun groupe algébrique. Il existe aussi des groupes de Lie algébriques résolubles dont l'algèbre de Lie ne possède pas la propriété (P), par exemple le produit du groupe des déplacements du plan par lui-même.

Lemme 1. *La propriété* (P) *équivaut à la propriété suivante:*
(P′) *Si* $x \in \mathfrak{g}$ *et si* λ, λ' *sont deux valeurs propres imaginaires pures de* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$, *alors* λ *et* λ' *sont linéairement dépendants sur* $\mathbf{Q}$.

Supposons que $\mathfrak{g}$ vérifie (P). Soient $x \in \mathfrak{g}$ et λ, λ' des valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Il existe des indices k, j tels que $\lambda = \varphi_k(x)$, $\lambda' = \varphi_j(x)$. Soient a, $b \in \mathbf{Q}$, $c, d \in \mathbf{R}$, tels que $a^2 + b^2 \neq 0$, $a\varphi''_k + b\varphi''_j + c\varphi'_k + d\varphi'_j = 0$. Si λ et λ' sont imaginaires purs, on a $a\lambda + b\lambda' = 0$, donc λ et λ' sont linéairement dépendants sur $\mathbf{Q}$.

Supposons que $\mathfrak{g}$ vérifie (P′). Soient $k, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Soit E l'ensemble des $x \in \mathfrak{g}$ tels que $\varphi'_k(x) = \varphi'_j(x) = 0$. Alors les restrictions $\varphi''_k | E$ et $\varphi''_j | E$ de φ''_k, φ''_j à E sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{R}$; sinon, il existerait un $x \in E$ tel que les nombres $\varphi''_k(x)$, $\varphi''_j(x)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$; or $\varphi_k(x) = i\varphi''_k(x)$, $\varphi_j(x) = i\varphi''_j(x)$ sont deux valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$, et ceci contredirait la propriété (P′). Un nouvel emploi de (P′) montre qu'en fait $\varphi''_k | E$ et $\varphi''_j | E$ sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{Q}$. Il existe donc $a, b \in \mathbf{Q}$ non tous les deux nuls tels que $a\varphi''_k + b\varphi''_j$ s'annule sur E, et par suite soit combinaison linéaire de φ'_k et φ'_j.

Lemme 2. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble réelle possédant la propriété* (P). *Toute sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$, *toute algèbre quotient de* $\mathfrak{g}$, *toute extension centrale de* $\mathfrak{g}$ *possède la propriété* (P).

Soit $\mathfrak{g}'$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{g}'$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} x$ est la restriction de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ à $\mathfrak{g}'$, donc les valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} x$ sont des valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Si $\mathfrak{g}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, et si $y_1 \in \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ est l'image canonique de $y \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'} y_1$ se déduit de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y$ par passage au quotient, donc les valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'}y_1$ sont des valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}y$. Si $\mathfrak{h}$ est une extension centrale de $\mathfrak{g}$, et si $z\in\mathfrak{g}$ est l'image canonique de $z_1\in\mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}z_1$ a pour valeurs propres 0 (si $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$) et les valeurs propres de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}z$. Ceci posé, le lemme résulte aussitôt de l'équivalence des propiétés (P) et (P').

3. Formes commensurables à $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble réelle. Nous dirons qu' une forme linéaire réelle ψ sur $\mathfrak{g}$ est *commensurable* à $\mathfrak{g}$ si: 1°) $\psi([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])=0$; 2°) pour toute racine $\varphi'+i\varphi''$ de $\mathfrak{g}$ (φ', φ'' réelles), ψ et φ'' sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{Q}$ modulo φ'. Comme pour le lemme 1, on voit que la condition 2°) équivaut à la suivante: si $x\in\mathfrak{g}$ et si λ est une valeur propre imaginaire pure de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x$, alors λ et $i\psi(x)$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{Q}$. Si $\mathfrak{g}$ possède la propriété (P), toute racine imaginaire pure de $\mathfrak{g}$ est commensurable à $\mathfrak{g}$.

Soient G un groupe résoluble simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, φ une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ nulle sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, et $\mathfrak{g}'$ le noyau de φ, qui est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit G'_0 le sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$. (On rappelle une fois pour toutes que, dans un groupe résoluble simplement connexe, tout sous-groupe analytique est fermé et simplement connexe, et que l'espace homogène correspondant est simplement connexe [1, 11]). Il existe un homomorphisme Φ et un seul de G dans U (le groupe des nombres complexes de module 1) tel que $\Phi(\exp x)=e^{i\varphi(x)}$ pour $x\in\mathfrak{g}$. On a $\Phi(s)=1$ pour $s\in G'_0$, et Φ définit par passage au quotient un caractère de G/G'_0, qui est isomorphe à $\mathbf{R}$ si $G'_0\neq G$ c'est-à-dire si $\varphi\neq 0$. Donc le noyau G' de Φ est un sous-groupe fermé de G dont la composante neutre est G'_0, et qui admet, si $\varphi\neq 0$, une infinité de composantes connexes. Nous dirons que G' est le sous-groupe de G *associé* à φ.

Les sous-groupes de G associés aux formes commensurables à $\mathfrak{g}$ vont jouer un rôle important dans la suite. Etablissons quelques propriétés de permanence de ce type de groupes.

Lemme 3. *Soient G un groupe résoluble simplement connexe,* $\mathfrak{g}$ *son algebre de Lie, φ une forme linéaire commensurable* à $\mathfrak{g}$, *et G' le sous-groupe de G associé à φ.*

(i) *Soient H un sous-groupe de G fermé connexe,* $\mathfrak{h}$ *son algèbre de Lie. Alors, $G'\cap H$ est le sous-groupe de H associé á une forme linéaire sur* $\mathfrak{h}$ *commensurable à* $\mathfrak{h}$.

(ii) *Soient K un sous-groupe fermé distingué connexe de G contenu dans G', $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie. Alors G'/K est le sous-groupe de G/K associé à une forme linéaire sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ commensurable à $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.*

Soit ψ la restriction de φ à $\mathfrak{h}$. Soient $x\in\mathfrak{h}$ et λ une valeur propre imaginaire pure de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x$; alors λ est valeur propre de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x$, donc λ et

$i\varphi(x) = i\psi(x)$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{Q}$. Donc ψ est commensurable à $\mathfrak{h}$. Pour prouver (i), il suffit de montrer que $G' \cap H$ est le sous-groupe de H associé à ψ. Or, soit Φ l'homomorphisme de G dans U tel que $\Phi(\exp x) = e^{i\varphi(x)}$ pour $x \in \mathfrak{g}$. Soit Ψ sa restriction à H. On a $\Psi(\exp x) = e^{i\psi(x)}$ pour $x \in \mathfrak{h}$, et $G' \cap H$ est le noyau de Ψ, d'où notre assertion. La partie (ii) du lemme s'établit de manière analogue.

Lemme 4. *Soient G un groupe résoluble simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, φ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ commensurable à $\mathfrak{g}$, et G' le sous-groupe de G associé à φ. On suppose que $\mathfrak{g}$ possède la propriété* (P). *Soit H' une extension centrale de G' par* $\mathbf{R}$. *Il existe un groupe résoluble simplement connexe H dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ possède la propriété* (P), *et une forme linéaire ψ sur $\mathfrak{h}$ commensurable à $\mathfrak{h}$, tels que le sous-groupe de H associé à ψ soit isomorphe, comme groupe de Lie, à un sous-groupe de H' contenant la composante neutre de H' et d'indice fini dans H'.*

(On prendra garde que H n'est pas une extension centrale de G prolongeant l'extension centrale H' de G').

Soient G'_0 et H'_0 les composantes neutres de G' et H'. Le noyau de l'homomorphisme $\omega: H' \to G'$ est un sous-groupe K de H' isomorphe à $\mathbf{R}$ donc contenu dans H'_0, et H'_0 est extension centrale de G'_0 par K. Soient $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie de G' et de G'_0 (c'est-à-dire le noyau de φ), $\mathfrak{h}'$ l'algèbre de Lie de H' et de H'_0, $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K, qui est un idéal central de $\mathfrak{h}'$. L'homomorphisme ω de H' sur G' définit un homomorphisme, que nous noterons encore ω, de $\mathfrak{h}'$ sur $\mathfrak{g}'$, dont le noyau est $\mathfrak{k}$. Nous supposerons $\varphi \neq 0$, car le lemme est trivial pour $\varphi = 0$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dd] & & & \\
& H'^* \arrow[rr] \arrow[dd, leftrightarrow] & & H \\
H'_0 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & & & \\
& H'_1 \arrow[r] & H' \arrow[d, "\omega"] & \\
G'_0 \arrow[rr] & & G' \arrow[r] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{k} \arrow[d] & \\
\mathfrak{h}' \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & \mathfrak{h} \\
\mathfrak{g}' \arrow[r] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

Soit x un élément de $\mathfrak{g}$ tel que $\exp x$ et G'_0 engendrent G'. Soit s un élément de H' tel que $\omega(s) = \exp x$. Alors s et H'_0 engendrent H'. Soit $u = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}'} s$, qui est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$. Il existe ([12], p. 5—6) un entier $n > 0$ et une dérivation D de $\mathfrak{h}'$ possédant les propriétés suivantes: 1) $u^n = \exp D$; 2) si $\mathfrak{G}$ désigne le groupe algébrique d'automorphismes de $\mathfrak{h}'$ engendré par u^n, D appartient à l'algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$. On peut maintenant construire une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et un élément y de $\mathfrak{h}$ tels que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' + \mathbf{R}y$, que $\mathfrak{h}'$ soit un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{h}$, et que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}'} y = D$. Cette algèbre de Lie est résoluble. Soit H le groupe de Lie résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Il contient H'_0 comme sous-groupe distingué fermé de codimension 1. Soit $s' = \exp y \in H$. On a

(1) $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}'} s' = \exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}'} y = \exp D = u^n = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}'} s^n$.

Soient H'^* le sous-groupe de H engendré par H'_0 et s', et H'_1 le sous-groupe de H' engendré par H'_0 et s^n. Ces deux groupes admettent H'_0 pour composante neutre, H'^*/H'_0 et H'_1/H'_0 sont isomorphes à $\mathbf{Z}$, et l'égalité (1) prouve que s' et s^n définissent le même automorphisme de H'_0; donc ces deux groupes sont isomorphes. Par ailleurs, H'_1 est d'indice n dans H'.

Soit

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

une suite de composition de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ dont les quotients successifs sont de dimension 1 sur $\mathbf{C}$. En prenant les images réciproques par ω, on obtient une suite de composition de $\mathfrak{h}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$

$$\mathfrak{h}_{-1} = \{0\} \subset \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{k} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \subset \mathfrak{h}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{h}_{n-1} = \mathfrak{h}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}.$$

Comme $\mathfrak{g}_0, \cdots, \mathfrak{g}_{n-1}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, ils sont stables par $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} x = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}'} \omega(s)$; donc $\mathfrak{h}_{-1}, \mathfrak{h}_0, \cdots, \mathfrak{h}_{n-1}$ sont stables par $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}'} s = u$, donc par D puisque D appartient à l'algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$. Donc, en posant $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, $(\mathfrak{h}_{-1}, \mathfrak{h}_0, \mathfrak{h}_1, \cdots, \mathfrak{h}_n)$ est une suite de composition de $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Chaque quotient $\mathfrak{h}_j/\mathfrak{h}_{j-1}$ définit une racine ψ_j de $\mathfrak{h}$; pour $j = n$, c'est la racine nulle; pour $j = 0$, c'est aussi la racine nulle (car, comme u induit l'identité dans $\mathfrak{k}$ et que D appartient à l'algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$, D induit 0 dans $\mathfrak{k}$, et $\mathfrak{k}$ est donc dans le centre de $\mathfrak{h}$). De même, chaque quotient $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j-1}$ définit une racine φ_j de $\mathfrak{g}$; pour $j = n$, c'est la racine nulle. Pour $j = 1, \cdots, n-1$, et pour $z \in \mathfrak{h}'$, on a $\psi_j(z) = \varphi_j(\omega(z))$. D'autre part, $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}(nx) = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}'}(\exp x)^n$ se déduit par passage au quotient de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{h}'} s^n = \exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}'} y$, donc $e^{\varphi_j(nx)} = e^{\psi_j(y)}$, donc $n\varphi_j(x) \equiv \psi_j(y) \pmod{2i\pi}$. Ceci posé, soit $z = ay + z_1$ ($a \in \mathbf{R}$, $z_1 \in \mathfrak{h}'$) un élément de $\mathfrak{h}$, et ψ_j, ψ_k deux racines de $\mathfrak{h}$ telles que $\psi_j(z)$, $\psi_k(z)$ soient imaginaires purs. On va montrer que $\psi_j(z)$ et $\psi_k(z)$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{Q}$. On peut évidemment supposer $1 \leq j$, $k \leq n-1$. Si $a = 0$, on a

$$\psi_j(z) = \psi_j(z_1) = \varphi_j(\omega(z_1)) \qquad \psi_k(z) = \psi_k(z_1) = \varphi_k(\omega(z_1))$$

d'où notre assertion puisque $\mathfrak{g}$ possède la propriété (P) (hypothèse qu'on utilise pour la première fois). Si $a \neq 0$, on peut supposer $a = 1$. Alors $\psi_j(z) = \psi_j(y) + \psi_j(z_1)$ est congru modulo $2i\pi$ à $n\varphi_j(x) + \varphi_j(\omega(z_1)) = \varphi_j(nx + \omega(z_1))$; de même, $\psi_k(z)$ est congru modulo $2i\pi$ à $\varphi_k(nx + \omega(z_1))$. Donc $\varphi_j(nx + \omega(z_1))$ et $\varphi_k(nx + \omega(z_1))$ sont imaginaires purs. Par ailleurs, $\varphi(nx + \omega(z_1)) = n\varphi(x) = 2\pi n$. Comme φ est commensurable à $\mathfrak{g}$ (hypothèse qu'on utilise pour la première fois), on a $\varphi_j(nx + \omega(z_1))$, $\varphi_k(nx + \omega(z_1)) \in 2i\pi\mathbf{Q}$. Donc $\psi_j(z)$, $\psi_k(z) \in 2i\pi\, \mathbf{Q}$, ce qui montre que $\psi_j(z)$, $\psi_k(z)$ sont linéairement dépendants sur

Q. On a ainsi montré que $\mathfrak{h}$ possède la propriété (P).

Enfin, soit ψ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ égale à 0 sur $\mathfrak{h}'$ et à 2π en y. Il est clair que H'^* est le sous-groupe de H associé à ψ. La démonstration du lemme sera donc achevée si on prouve que ψ est commensurable à $\mathfrak{h}$. Or, soit $z = ay + z_1$ ($a \in \mathrm{R}$, $z_1 \in \mathfrak{h}'$) un élément de $\mathfrak{h}$, et ψ_j une racine de $\mathfrak{h}$ telle que $\psi_j(z)$ soit imaginaire pur. Il faut montrer que $\psi_j(z)$ et $i\psi(z)$ sont linéairement dépendants sur Q. On peut évidemment supposer $1 \leq j \leq n-1$. Si $a = 0$, on a $\psi(z) = 0$, d'où notre assertion. Si $a \neq 0$, on peut supposer $a = 1$. Alors $i\psi(z) = i\psi(y) = 2i\pi$, et on a vu plus haut que $\psi_j(z) \in 2i\pi\mathrm{Q}$, d'où encore le résultat annoncé.

4. Existence de certains sous-groupes distingués.

Avant d'énoncer les lemmes 5 et 6, faisons quelques rappels.

Soit L un groupe localement compact à base dénombrable opérant continûment dans un espace localement compact à base dénombrable X, et définissant dans X une relation d'équivalence R. Pour que X/R soit dénombrablement séparé (c'est-à-dire pour qu'il existe une suite de parties boréliennes de X saturées pour R qui séparent les classes d'équivalence), il suffit [7] que chaque orbite de L dans X soit ouverte dans son adhérence. (Ceci est facile. La condition est aussi nécessaire [7], mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat beaucoup plus difficile).

Si G est un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé abélien distingué de G, G opère dans H par automorphismes intérieurs, donc dans le dual $\hat{H}$ de H. On dit que H est régulièrement contenu dans G si l'espace quotient de $\hat{H}$ par la relation d'équivalence que définit G dans $\hat{H}$ est dénombrablement séparé. On renvoie à [10] pour cette notion.

Rappelons enfin qu'il existe, à un isomorphisme près, un seul groupe nilpotent non abélien simplement connexe de dimension 3, que son centre est de dimension 1, et que son algèbre de Lie est définie par la table de multiplication $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$.

Nous démontrerons en même temps les deux lemmes suivants :

Lemme 5. *Soit G un groupe résoluble simplement connexe de dimension ≥ 2, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède la propriété (P). Il existe un sous-groupe fermé connexe distingué H de G tel qu'on ait l'une des propriétés suivantes :*

a) *H est abélien, régulièrement contenu dans G, et, pour tout $\xi \in \hat{H}$, on est dans l'un des cas que voici:*

a1) *$G\xi$ est orthogonal à un sous-groupe fermé connexe de H, distingué dans G, non réduit à $\{e\}$;*

a2) *le stabilisateur de ξ dans G est contenu dans un sous-groupe fermé connexe de G distinct de G ;*

a3) *le stabilisateur de ξ dans G est contenu dans un sous-groupe de G associé à une forme non nulle commensurable à* $\mathfrak{g}$.

b) *H est de dimension* 3, *nilpotent, non abélien, et son centre est contenu dans le centre de G.*

Lemme 6. *Soit G un groupe résoluble simplement connexe de dimension ≥ 3 ou de dimension 2 et non abélien, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède la propriété* (P). *Soient φ une forme linéaire réelle non nulle sur $\mathfrak{g}$ commensurable à $\mathfrak{g}$, et G' le sous-groupe de G associé à φ. Il existe un sous-groupe fermé connexe distingué H de G contenu dans G' tel qu'on ait l'une des propriétés suivantes:*

a) *H est abélien, régulièrement contenu dans G', et, pour tout $\xi \in \hat{H}$, on est dans l'un des cas que voici:*

a1) *$G\xi$ est orthogonal à un sous-groupe fermé connexe de H, distingué dans G, non réduit à $\{e\}$;*

a2) *le stabilisateur de ξ dans G est contenu dans un sous-groupe fermé connexe de G distinct de G.*

b) *H est de dimension* 3, *nilpotent, non abélien, et son centre est contenu dans le centre de G.*

c) *H est de dimension* 2 *et contenu dans le centre d'un sous-groupe fermé distingué de G', d'indice fini dans G', contenant la composante neutre de G'.*

Dans le cas du lemme 6, nous noterons G'_0 la composante neutre de G' et $\mathfrak{g}'$ son algèbre de Lie. Considérons une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},$$

les quotients de cette suite étant abéliens et de dimension 1 ou 2. Comme dim $\mathfrak{g} \geqslant 2$, on a $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}'$. Nous distinguerons deux cas suivant que dim $\mathfrak{g}_1 = 1$ ou 2. Si dim $\mathfrak{g}_1 = 1$, nous distinguerons deux cas suivant que $\mathfrak{g}_1$ est ou non contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$. Si dim$\mathfrak{g}_1 = 1$ et si $\mathfrak{g}_1$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{g}_1 \neq \mathfrak{g}'$, car, si on avait $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}'$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ serait abélienne de dimension 2, contrairement à l'hypothèse; donc $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}'$; nous distinguerons alors deux cas suivant que dim $\mathfrak{g}_2 = 2$ ou 3. Dans le cas du lemme 5, on distinguera de même quatre cas, sans avoir à tenir compte des inclusions dans $\mathfrak{g}'$.

Cas A: *il existe un idéal abélien minimal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimension* 2 (*contenu dans $\mathfrak{g}'$ dans le cas du lemme* 6).

Soit H le sous-groupe fermé connexe de G d'algebre de Lie $\mathfrak{h}$. Il existe une base (f_1, f_2) de $\mathfrak{h}$ telle que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la matrice de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} x$ par rapport à cette base soit du type

$$\begin{pmatrix} \lambda(x) & \mu(x) \\ -\mu(x) & \lambda(x) \end{pmatrix}$$

λ et μ étant des formes linéaires réelles sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ($\lambda + i\mu$, $\lambda - i\mu$ sont des racines de $\mathfrak{g}$). On a $\mu \neq 0$, car pour $\mu = 0$ l'idéal $\mathfrak{h}$ ne serait pas minimal. On identifiera $\mathfrak{h}$ à H par l'application exponentielle, de sorte que (f_1, f_2) est une base de l'espace vectoriel H. Soit (f_1^*, f_2^*) la base duale de $\hat{H}$; il sera commode de munir $\hat{H}$ d'un produit scalaire tel que cette base soit orthonormale. Pour tout $s \in G$, soit $\theta(s)$ l'automorphisme de $\hat{H}$ défini par s. Alors $\theta(G)$ est contenu dans le groupe des similitudes de H. Comme tout groupe abélien connexe est égal à l'exponentielle de son algèbre de Lie, on a $\theta(G) = \theta(\exp \mathfrak{g})$. Donc $\theta(G)$ est l'ensemble des similitudes de $\hat{H}$ de rapport $e^{\lambda(x)}$ et d'angle $\mu(x)$, où $x \in \mathfrak{g}$; et $\theta(G')$ (dans le cas du lemme 6) est l'ensemble des similitudes de $\hat{H}$ de rapport $e^{\lambda(x)}$ et d'angle $\mu(x)$, où $x \in \mathfrak{g}$ et $\varphi(x) \equiv 0$ (mod. 2π). Comme φ est commensurable à $\mathfrak{g}$, il existe une relation de la forme $a\lambda + b\mu + c\varphi = 0$, avec $b, c \in \mathbf{Q}$, $b^2 + c^2 \neq 0$, $a \in \mathbf{R}$.

Montrons que H est régulièrement contenu dans G ou G'. Nous distinguerons plusieurs cas. Les cas A1, A2, A3 (resp. A4, A5, A6) concernent la situation du lemme 5 (resp. 6).

A 1) Les formes λ et μ sont linéairement indépendantes. Les orbites pour G dans $\hat{H}$ sont $\{0\}$ et $\hat{H} - \{0\}$.

A 2) $\lambda = d\mu$ avec $d \in \mathbf{R}$, $d \neq 0$. Les orbites pour G dans $\hat{H}$ sont $\{0\}$ et des spirales logarithmiques de centre 0.

A 3) $\lambda = 0$. Les orbites pour G dans $\hat{H}$ sont les cercles de centre 0.

A 4) Les formes μ et φ sont linéairement indépendantes. Alors, $a \neq 0$ et $\lambda = -\frac{b}{a}\mu - \frac{c}{a}\varphi$. Les $\theta(s)$, où $s \in G'$, sont les similitudes $\sigma_{r,k}$ dans $\hat{H}$, de centre 0, d'angle r, de rapport $\exp(-\frac{b}{a}r - 2\frac{c}{a}k\pi)$ ($r \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$). L'orbite pour G' de 0 est $\{0\}$. Soit ξ un élément non nul de $\hat{H}$. Si $b = 0$, l'orbite pour G' de ξ se compose d'une infinité de cercles de centre 0 dont les rayons sont en progression géométrique. Supposons $b \neq 0$. Pour k fixé, l'ensemble des $\sigma_{r,k}(\xi)$ ($r \in \mathbf{R}$) est une spirale logarithmique $\sum_k$ de centre 0. On vérifie facilement que, si $h \in \mathbf{Z}$ est tel que $\frac{b}{c}h \in \mathbf{Z}$, alors $\sigma_{r+2h\pi, k-bh/c} = \sigma_{r,k}$. Comme b, $c \in \mathbf{Q}$, on en déduit que la trajectoire de ξ pour G' se compose d'un nombre fini de spirales $\sum_k$.

A 5) $\mu = d\varphi$, avec $d \in \mathbf{R}$ (donc $d \neq 0$), et λ non proportionnelle à φ. Alors $a = 0$, donc $d \in \mathbf{Q}$. Les $\theta(s)$, où $s \in G'$, sont les similitudes de centre 0, de rapport r ($r \in \mathbf{R}_+^*$), d'angle $2k\pi d$ ($k \in \mathbf{Z}$). Comme $d \in \mathbf{Q}$, il n'y a qu' un nombre fini de valeurs de $2k\pi d$ modulo 2π. Donc les orbites pour G' dans $\hat{H}$ sont $\{0\}$ et des réunions finies de demi-droites d'origine 0.

A 6) $\mu = d\varphi$ (donc $d \neq 0$) et $\lambda = d'\varphi$ ($d' \in \mathbf{R}$). Les $\theta(s)$, où $s \in G'$, sont les similitudes d' angles $2k\pi d$, de rapport $e^{2k\pi d'}$ ($k \in \mathbf{Z}$). Si $d' \neq 0$, l'orbite pour G' d'un point de $\hat{H}$ est discrète. Si $d'=0$, on a $d\in \mathrm{Q}$, donc les orbites pour G' des points de $\hat{H}$ sont finies.

Dans tous les cas, nous avons bien vérifié que H est régulièrement contenu dans G (ou G').

Soit $\xi\in\hat{H}$. Si $\xi=0$, $G\xi=\{0\}$ est orthogonal à H: c'est la situation a1). Supposons $\xi\neq 0$. Si $\lambda\neq 0$, soit Λ l'homomorphisme de G dans R_+^* tel que $\Lambda(\exp x)=e^{\lambda(x)}$ $(x\in\mathfrak{g})$; le noyau de Λ est un sous-groupe fermé connexe de G distinct de G, et le stabilisateur de ξ dans G est contenu dans ce noyau: c'est la situation a2). Supposons $\lambda=0$. Le stabilisateur de ξ dans G est le sous-groupe de G associé à μ; mais $i\mu$ est une racine de $\mathfrak{g}$, donc μ est commensurable à $\mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}$ possède la propriété (P). Dans le cas du lemme 5, on voit donc qu'on est dans la situation a3). Dans le cas du lemme 6, μ et φ sont dans un rapport rationnel, donc il existe un sous-groupe de G' contenant G'_0 et d'indice fini dans G', dont les éléments définissent dans H l'application identique; autrement dit, on est dans la situation c).

Cas B: il existe un idéal $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *de dimension* 1 *non contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$ (*contenu dans* $\mathfrak{g}'$ *dans le cas du lemme* 6).

Soit H le sous-groupe fermé connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x$ $(x\in\mathfrak{g})$ est une homothétie de rapport $\lambda(x)$, ou λ est une forme linéaire non nulle sur $\mathfrak{g}$, nulle sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Les opérateurs $\theta(s)$ $(s\in G)$ définis par G dans $\hat{H}$ sont les homothéties de rapport >0. Si λ est non proportionnelle à φ, les $\theta(s)$, $s\in G'$, sont encore toutes ces homothéties. Si $\lambda=a\varphi$ $(a\in\mathrm{R})$, les $\theta(s)$, $s\in G'$, sont les homothéties de rapport $e^{2k\pi a}$ $(k\in\mathrm{Z})$. On voit tout de suite que H est régulièrement contenu dans G ou G', et que, si $\xi\in\hat{H}$, on est dans l'une des situations a1), a2).

Cas C: il existe des idéaux $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ *de* $\mathfrak{g}$, *avec* $\mathfrak{h}'\subset\mathfrak{h}$, $\dim\mathfrak{h}'=1$, $\dim\mathfrak{h}=2$, *et* $\mathfrak{h}'$ *contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$, *donc* $\mathfrak{h}$ *abélien* (*et* $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}'$ *dans le cas du lemme* 6).

Soient H, H' les sous-groupes fermés connexes de G d'algèbres de Lie $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$. On identifie $\mathfrak{h}$ et H par l'application exponentielle. Soient (f_1, f_2) une base de $\mathfrak{h}=H$ telle que $f_2\in\mathfrak{h}'$, et (f_1^*, f_2^*) la base duale de $\hat{H}$. Pour tout $x\in\mathfrak{g}$, la matrice de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x$ par rapport à (f_1, f_2) est du type

$$\begin{pmatrix}\lambda(x) & 0\\ \mu(x) & 0\end{pmatrix}$$

où λ et μ sont des formes linéaires réelles sur $\mathfrak{g}$, λ étant une racine de $\mathfrak{g}$. Si $\mu=a\lambda$ avec un $a\in\mathrm{R}$, un changement de f_1 ramène au cas où $\mu=0$. Si $\lambda\neq 0$, nous sommes ramenés au cas B. Si $\lambda=0$, nous sommes dans le cas a) du lemme 5 ou du lemme 6. Nous exclurons donc désormais que $\mu=a\lambda$ avec un $a\in\mathrm{R}$. Nous identifierons les opérateurs linéaires dans $\hat{H}$ à leur matrice par rapport à (f_1^*, f_2^*).

Montrons que H est régulièrement contenu dans G. Les cas C1, C2 (resp. C3, C4) concernent le lemme 5 (resp. 6).

C1) Si les formes λ et μ sont linéairement indépendantes, l'ensemble des matrices $\exp\begin{pmatrix}\lambda(x) & \mu(x)\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, où $x\in\mathfrak{g}$, est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $a\in\mathrm{R}_+^*$, $b\in\mathrm{R}$). Comme cet ensemble est fermé dans l'ensemble des matrices inversibles à 2 lignes et 2 colonnes, c'est aussi l'ensemble des opérateurs $\theta(s)$ définis par s dans $\hat{H}$ (on rappelle [2] que les $\exp x$, $x\in\mathfrak{g}$, sont partout denses dans G). Les orbites pour G dans $\hat{H}$ sont les droites parallèles à f_1^* ne passant pas par 0, les demi-droites $\mathrm{R}_+^* f_1^*$, $-\mathrm{R}_+^* f_1^*$, et $\{0\}$.

C2) Si $\lambda=0$, les $\theta(s)$, $s\in G$, sont les matrices $\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, où $b\in\mathrm{R}$. Les orbites pour G dans $\hat{H}$ sont les droites parallèles à f_1^* ne passant pas par 0, et les points de $\mathrm{R}f_1^*$.

C3) Les formes λ et μ sont linéairement indépendantes. On a vu en C1) que θ est un homomorphisme de G sur l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ où $a\in\mathrm{R}_+^*$, $b\in\mathrm{R}$. Soit N le noyau de θ, qui est connexe puisque $\theta(G)$ est simplement connexe. Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N, qui est de codimension 2 dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{n}\not\subset\mathfrak{g}'$, on a $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}+\mathfrak{g}'$, donc $\theta(G_0')$ contient un voisinage de l'élément neutre dans $\theta(G)$, donc $\theta(G')=\theta(G)$; les orbites pour G et G' dans $\hat{H}$ sont donc les mêmes. Si $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}'$, on a $N\subset G_0'$. Alors $\theta(G_0')$ est l'unique sous-groupe distingué connexe de dimension 1 de $\theta(G)$, à savoir le groupe des matrices $\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ où $b\in\mathrm{R}$. Et $\theta(G')$ se compose des matrices $\begin{pmatrix}a_0^k & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, où $b\in\mathrm{R}$, $k\in\mathrm{Z}$, et où a_0 est une constante >1. Les orbites pour G' dans $\hat{H}$ sont les droites parallèles à f_1^* ne passant pas par 0, et des sous-ensembles discrets de $\mathrm{R}f_1^*$.

C4) Si $\lambda=0$, les $\theta(s)$, où $s\in G'$, sont les matrices $\begin{pmatrix}1 & \mu(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, où $x\in\mathfrak{g}$ est assujetti à la condition $\varphi(x)\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Suivant que μ est ou non proportionnel à φ, les orbites pour G$'$ dans $\hat{H}$ sont égales à celles de G, ou discrètes.

Dans tous les cas, nous avons bien vérifié que H est régulièrement contenu dans G (ou G').

Soit $\xi\in\hat{H}$. Supposons λ et μ linéairement indépendantes. Si $\xi=0$, on est dans la situation a1). Si $\xi\neq 0$, on a vu dans C1) que $G\xi$ est simplement connexe et $\neq\{\xi\}$, donc le stabilisateur de ξ dans G est connexe et distinct de G: c'est la situation a2). Supposons $\lambda=0$. Si $\xi\in\mathrm{R}f_1^*$, $G\xi=\{\xi\}$ est orthogonal à $\mathrm{R}f_2=H'$: c'est la situation a1). Si $\xi\notin\mathrm{R}f_1^*$, $G\xi$ est simplement connexe et $\neq \{\xi\}$, d'où la situation a2) (*cf.* par exemple [11], cor. 3 de la prop. 1).

Cas D : il existe des idéaux $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ *de* $\mathfrak{g}$, *avec* $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$, $\dim \mathfrak{h}'=1$, $\dim \mathfrak{h}=3$, $\mathfrak{h}'$ *contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ *idéal minimal de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$ (*et enfin* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$ *dans le cas du lemme* 6).

Nous supposerons en outre qu'on n'est pas dans l'un des cas A, B, C de la démonstration.

Soient H, H' les sous-groupes fermés connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$. Si $\mathfrak{h}$ est non abélienne, $\mathfrak{h}$ est nilpotente de dimension 3, et on est dans le cas b). Supposons désormais $\mathfrak{h}$ abélienne. On identifie $\mathfrak{h}$ à H par l'application exponentielle. Soient (f_1, f_2, f_3) une base de $\mathfrak{h}=H$ telle que $f_3 \in \mathfrak{h}'$, et (f_1^*, f_2^*, f_3^*) la base duale de $\hat{H}$, que nous considérerons comme orthonormale. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la matrice de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} x$ par rapport à cette base est du type

$$\begin{pmatrix} \lambda(x) & \mu(x) & 0 \\ -\mu(x) & \lambda(x) & 0 \\ \nu(x) & \rho(x) & 0 \end{pmatrix}$$

où λ, μ, ν, ρ sont des formes linéaires réelles sur $\mathfrak{g}$ ($\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$ sont des racines de $\mathfrak{g}$, et $\mu \neq 0$ puisque $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}'$ est un idéal minimal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'$).

Soient $\xi=\xi_1 f_1^*+\xi_2 f_2^*+\xi_3 f_3^* \in \hat{H}$, et $x \in \mathfrak{g}$. L'orbite de ξ pour le sous-groupe à un paramètre $\exp(\mathrm{R}x)$ est définie par les équations différentielles

$$\frac{d\xi_1}{dt}=\lambda(x)\xi_1-\mu(x)\xi_2+\nu(x)\xi_3$$
$$\frac{d\xi_2}{dt}=\mu(x)\xi_1+\lambda(x)\xi_2+\rho(x)\xi_3$$
$$\frac{d\xi_3}{dt}=0$$

et $\qquad \xi_1(0)=\xi_1 \qquad \xi_2(0)=\xi_2 \qquad \xi_3(0)=\xi_3.$

Si $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ ne sont pas tous les deux nuls, on déduit de là

$$(2) \quad \xi_1(t)+i\xi_2(t)=-\frac{\nu(x)+i\rho(x)}{\lambda(x)+i\mu(x)}\xi_3+\left(\xi_1+i\xi_2+\frac{\nu(x)+i\rho(x)}{\lambda(x)+i\mu(x)}\xi_3\right)e^{(\lambda(x)+i\mu(x))t}$$

$$(3) \quad \xi_3(t)=\xi_3.$$

Si $\lambda(x)=\mu(x)=0$, on trouve

$$(4) \quad \xi_1(t)=\nu(x)\xi_3 t+\xi_1$$

$$(5) \quad \xi_2(t)=\rho(x)\xi_3 t+\xi_2$$

$$(6) \quad \xi_3(t)=\xi_3.$$

Pour tout $l \in \mathrm{R}$, nous noterons P_l le plan d'équation $\xi_3=l$ dans $\hat{H}$. Il est stable pour tous les sous-groupes à un paramètre de G, donc pour G.

En exprimant que $x \to \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} x$ est une représentation de $\mathfrak{g}$, on trouve

(7) $\nu([x,x'])=\nu(x)\lambda(x')-\nu(x')\lambda(x)-\rho(x)\mu(x')+\rho(x')\mu(x)=(\nu\wedge\lambda-\rho\wedge\mu)(x',x')$

(8) $\rho([x,x'])=\nu(x)\mu(x')-\nu(x')\mu(x)+\rho(x)\lambda(x')-\rho'(x)\lambda(x)=(\nu\wedge\mu+\rho\wedge\lambda)(x,x')$

Il sera utile pour la suite d'en déduire ceci:
(*) si λ et μ sont proportionnelles à une même forme linéaire ψ (forcément non nulle puisque $\mu\neq 0$), alors ν et ρ sont linéairement indépendantes modulo ψ.

En effet, supposons $\lambda=d_1\psi$, $\mu=d_2\psi$, $(d_3\nu+d_4\rho)\wedge\psi=0$, avec d_1, d_2, d_3, $d_4\in\mathrm{R}$, $d_3^2+d_4^2\neq 0$. Comme μ s'annule sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, ψ s'annule sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Les égalités (7), (8) donnent

$$\nu([x,x'])=((d_1\nu-d_2\rho)\wedge\psi)(x,x') \qquad \rho([x,x'])=((d_2\nu+d_1\rho)\wedge\psi)(x,x').$$

D'où

$$\begin{aligned}0&=(d_3\nu+d_4\rho)([x,x'])=((d_3d_1\nu-d_3d_2\rho+d_4d_2\nu+d_4d_1\rho)\wedge\psi)(x,x')\\&=((d_1(d_3\nu+d_4\rho)+d_2(d_4\nu-d_3\rho))\wedge\psi)(x,x')=(d_2(d_4\nu-d_3\rho)\wedge\psi)(x,x').\end{aligned}$$

On a $d_2\neq 0$ puisque $\mu\neq 0$. Donc $(d_4\nu-d_3\rho)\wedge\psi=0$. Rapprochant de $(d_3\nu+d_4\rho)\wedge\psi=0$, on en déduit $(d_3^2+d_4^2)\nu\wedge\psi=0$, $(d_3^2+d_4^2)\rho\wedge\psi=0$, donc $\nu=d_5\psi$, $\rho=d_6\psi$ avec d_5, $d_6\in\mathrm{R}$. Mais alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x)\Big(f_1+\mathrm{i}f_2+\frac{d_5+\mathrm{i}d_6}{d_1+\mathrm{i}d_2}f_3\Big)&=\psi(x)[d_1f_1-d_2f_2+d_5f_3+\mathrm{i}(d_2f_1+d_1f_2+d_6f_3)]\\&=\psi(x)[(d_1+\mathrm{i}d_2)(f_1+\mathrm{i}f_2)+(d_5+\mathrm{i}d_6)f_3]\end{aligned}$$

et il existe un plan dans $\mathfrak{h}$ stable par les $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x$; on serait donc dans l'un des cas A, B, C, de la démonstration, contrairement à l'hypothèse. Notre assertion (*) est bien établie.

Dans le cas du lemme 6, il existe, puisque φ est commensurable à $\mathfrak{g}$, une relation de la forme $a\lambda+b\mu+c\varphi=0$, avec $b, c\in\mathrm{Q}$, $b^2+c^2\neq 0$, $a\in\mathrm{R}$.

Montrons que H est régulièrement contenu dans G (ou dans G'). L'étude des orbites contenues dans P_0 conduit exactement au même problème que dans la partie A de la démonstration; ces orbites sont donc ouvertes dans leur adhérence. Désormais, nous fixons un nombre réel $l\neq 0$, et nous étudions les orbites (pour G ou G') contenues dans P_l. Les cas D1, D2 (resp. D3 à D7) concernent le lemme 5 (resp. 6).

D1) On suppose $\lambda\neq 0$. Il existe $x\in\mathfrak{g}$ tel que $\lambda(x)\neq 0$, $\mu(x)\neq 0$. Les orbites pour le sous-groupe exp $(\mathrm{R}x)$ dans P_l, fournies par (2), sont, d'une part des spirales logarithmiques centrées au point $\zeta(x)$ dont les coordonnées (ζ_1, ζ_2, l) sont données par $\zeta_1+\mathrm{i}\zeta_2=-\dfrac{\nu(x)+\mathrm{i}\rho(x)}{\lambda(x)+\mathrm{i}\mu(x)}l$, et d'autre part le point $\zeta(x)$ lui-même. Si $\zeta(x)$ était fixe pour G, le plan orthogonal à $\zeta(x)$ dans $\mathfrak{h}$ serait un idéal de dimension 2 de $\mathfrak{g}$, et on serait dans l'un des cas A, B, C de la démonstration, contrairement à l'hypothèse. Donc il existe $y\in\mathfrak{g}$ tel que $\lambda(y)\neq 0$, $\mu(y)\neq 0$, $\zeta(y)\neq\zeta(x)$. Considérons l'orbite de $\zeta(x)$ pour $\exp(\mathbf{R}y)$; elle rencontre toutes les spirales logarithmiques envisagées plus haut, qui admettent $\zeta(x)$ pour point asymptote. Il en résulte que deux points quelconques de P_l sont équivalents pour G. Autrement dit, P_l est une orbite pour G.

$D2$) Supposons $\lambda=0$. D'après (*), l'une des formes ν, ρ est non proportionnelle à μ. Le raisonnement étant analogue dans les deux cas, supposons par exemple ν non proportionnelle à μ. Il existe $x\in\mathfrak{g}$, $y\in\mathfrak{g}$ tels que $\mu(x)\neq 0$, $\mu(y)=0$, $\nu(y)\neq 0$. Les orbites pour $\exp(\mathbf{R}x)$ dans P_l sont les cercles centrés en un certain point. L'orbite de ce point pour $\exp(\mathbf{R}y)$, fournie par (4) et (5), est une droite. Donc P_l est encore une orbite pour G.

D3) Supposons λ non proportionnelle à φ, $a\neq 0$, et l'une au moins des formes ν, ρ non proportionelle à λ modulo φ. Il existe $x\in\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(x)=0$, $\lambda(x)\neq 0$. On a alors $a\lambda(x)+b\mu(x)=0$, donc $b\mu(x)\neq 0$. Le sous-groupe $\exp(\mathbf{R}x)$ est contenu dans G_0', et les orbites pour ce sous-groupe dans P_l sont, d'une part des spirales logarithmiques centrées en $\zeta(x)$, de coordonnées (ζ_1, ζ_2, l) telles que

$$\zeta_1+i\zeta_2=-\frac{\nu(x)+i\rho(x)}{\lambda(x)+i\mu(x)}l=-\frac{\nu(x)+i\rho(x)}{\lambda(x)(1-ia/b)}l,$$

d'autre part $\{\zeta(x)\}$. Si $\zeta(x)$ ne change pas quand x varie (soumis aux conditions $\varphi(x)=0$, $\lambda(x)\neq 0$), cela entraîne $\nu(x)+i\rho(x)=k\lambda(x)$, où $k\in\mathbf{C}$ est indépendant de x; cette relation est alors valable pour tous les $x\in\mathfrak{g}$ tels que $\varphi(x)=0$; autrement dit, ν et ρ sont proportionnelles à λ modulo φ, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc $y\in\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(y)=0$, $\lambda(y)\neq 0$, $\zeta(y)\neq\zeta(x)$. Comme dans D1), ceci entraîne que P_l est une orbite pour G_0' et a fortiori pour G'.

D4) Supposons λ non proportionnelle à φ, $a\neq 0$, $\nu=a'\lambda+b'\varphi$, $\rho=a''\lambda+b''\varphi$ $(a', b', a'', b''\in\mathbf{R})$. Soit $x\in\mathfrak{g}$ tel que $\varphi(x)=0$. Si $\lambda(x)\neq 0$, on a $b\mu(x)\neq 0$. Les orbites de $\exp(\mathbf{R}x)$ dans P_l sont, d'une part des spirales logarthmiques centrées au point ζ de coordonnées (ζ_1, ζ_2, l) données par

$$\zeta_1+i\zeta_2=-\frac{a'+ia''}{1-ia/b}l,$$

d'autre part $\{\zeta\}$. Ces spirales ne changent pas quand x (soumis aux conditions $\varphi(x)=0$, $\lambda(x)\neq 0$) varie. D'autre part, si $\varphi(x)=\lambda(x)=0$, on a $\mu(x)=0$, et les orbites pour $\exp(\mathbf{R}x)$ dans P_l sont les points de P_l. Tenant compte du fait que $\exp(\mathfrak{g}')$ est partout dense dans G_0', on voit que les trajectoires de G_0' dans P_l sont $\{\zeta\}$ et les spirales logarithmiques de centre ζ mentionnées plus haut. Par ailleurs, il existe $y\in\mathfrak{g}$ tel que $\lambda(y)=0$, $\varphi(y)=2\pi$; alors, G_0' et $\exp y$ engendrent G'. Or, $c\neq 0$ (car, pour $c=0$, μ serait proportionnelle à λ, et, ν et ρ étant linéairement dépendantes modulo λ, ceci contredirait (*)). Alors $\mu(y) = -2\pi\frac{c}{b} \neq 0$, et les orbites pour $\exp(\mathbf{R}y)$ sont des cercles donnés par (2); en outre, comme $c/b \in \mathbf{Q}$, les orbites pour le groupe des $(\exp y)^n$, $n \in \mathbf{Z}$, sont finies. Donc les orbites pour G' dans P_l sont des réunions finies de spirales logarithmiques, ou $\{\zeta\}$.

D5) Supposons λ non proportionnelle à φ, et $a = 0$ (donc $b \neq 0$, car $b = 0$ entraînerait $c \neq 0$ et $c\varphi = 0$, d'où $\varphi = 0$). Soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\varphi(x) = 0$, $\lambda(x) \neq 0$. Alors $b\mu(x) = 0$ donc $\mu(x) = 0$. Les orbites pour $\exp(\mathbf{R}x)$ dans P_l sont d'une part des demi-droites dont l'origine $\zeta(x)$ a des coordonnées (ζ_1, ζ_2, l) données par $\zeta_1 + i\zeta_2 = -\dfrac{\nu(x) + i\rho(x)}{\lambda(x)}\,l$, d'autre part $\{\zeta(x)\}$. Si $\zeta(x)$ reste fixe quand x varie (soumis aux conditions $\varphi(x) = 0$, $\lambda(x) \neq 0$), c'est que ν et ρ sont proportionnelles à λ modulo φ. Les orbites pour G'_0 dans P_l sont alors les demi-droites ouvertes d'origine $\zeta(x) = \zeta$, et $\{\zeta\}$; et on voit comme dans D4) que les orbites pour G' sont des réunions finies d'orbites pour G'_0. Si $\zeta(y) \neq \zeta(x)$ pour un y tel que $\varphi(y) = 0$, $\lambda(y) \neq 0$, on voit facilement que deux points situés sur la droite $\zeta(y)\,\zeta(x)$, ou d'un même côté de cette droite, sont équivalents pour G'_0, donc que les orbites pour G'_0 dans P_l sont ouvertes dans leur adhérence; on voit comme dans D4) que les orbites pour G' sont des réunions finies d'orbites pour G'_0.

D6) Supposons λ proportionnelle à φ et μ non proportionnelle à φ. Il existe un $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\varphi(x) = 0$, $\mu(x) \neq 0$. Les orbites pour $\exp(\mathbf{R}x)$ dans P_l sont les cercles centrés en un certain point. Si ν n'est pas proportionnelle à μ modulo φ, il existe $y \in \mathfrak{g}$ avec $\varphi(y) = \mu(y) = 0$, $\nu(y) \neq 0$. Les orbites pour $\exp(\mathbf{R}y)$ dans P_l sont toutes les droites ayant une certaine direction. Donc P_l est une orbite pour G'_o et a fortiori pour G'. De même si ρ est non proportionnelle à μ modulo φ. Si ν et ρ sont proportionnelles à μ modulo φ, les orbites pour G'_o dans P_l sont les cercles centrés en un certain point ω. Puisque μ est non proportionnelle à φ, on a $\lambda \neq 0$. Il existe un $y \in \mathfrak{g}$ tel que $\mu(y) = 0$, $\varphi(y) = 2\pi$, $\lambda(y) \neq 0$. Le groupe G' est engendré par G'_o et $\exp y$. Donc les orbites pour G' s'obtiennent en réunissant les cercles déduits d'une G'_o-orbite par des homothéties de rapport k^n, $n \in \mathbf{Z}$ (homothéties nécessairement centrées en ω).

D7) Supposons λ et μ proportionnelles à φ. D'après (*), ν et ρ sont linéairement indépendantes modulo φ. Donc les orbites pour G'_o dans P_l, données par (4), (5), contiennent des droites de direction quelconque. Donc P_l est une orbite pour G'_o et a fortiori pour G'.

On a donc prouvé dans tous les cas que H est régulièrement contenu dans G, ou G'.

Soit $\xi \in \hat{H}$. Si $\xi \in P_o$, $G\xi \subset P_o$ est orthogonal à $\mathfrak{h}'$ et on est dans la situation a1). Si $\xi \in P_l$ avec $l \neq 0$, on a vu que l'orbite de ξ pour G est P_l, donc le stabilisateur de ξ dans G est connexe et distinct de G: c'est la situation a 2).

5. Le résultat principal.

Théorème. *Un groupe résoluble connexe, dont l'algèbre de Lie possède la propriété* (P), *est de type* I.

On peut évidemment se limiter aux groupes simplement connexes.

Considérons les assertions suivantes:

(A_n) Un groupe résoluble simplement connexe, dont l'algèbre de Lie possède la propriété (P), et de dimension $\leqq n$, est de type I.

(B_n) Soit G un groupe résoluble simplement connexe, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède la propriété (P), et de dimension $\leqq n$. Soit φ une forme linéaire non nulle sur $\mathfrak{g}$, commensurable à $\mathfrak{g}$. Soit G' le sous-groupe de G associé à φ. Alors G' est de type I.

Les assertions (A_0), (B_0), (A_1), (B_1) sont évidentes. Nous allons montrer que, pour $n \geqq 1$,

$$(A_n) \text{ et } (B_n) \Rightarrow (B_{n+1})$$

$$(A_n) \text{ et } (B_{n+1}) \Rightarrow (A_{n+1}).$$

Alors, les assertions (A_n) et (B_n) seront vraies pour tout n, et le théorème sera établi.

A) *Démonstration de* (A_n) et (B_n) $\Rightarrow$ (B_{n+1}) ($n \geqq 1$).

Soit G un groupe résoluble simplement connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède la propriété (P) et de dimension $n+1$. Soit φ une forme non nulle sur $\mathfrak{g}$ commensurable à $\mathfrak{g}$. Soit G' le sous-groupe de G associé à φ. On va montrer que G' est de type I. Si G est abélien de dimension 2, c'est évident. Sinon, le lemme 6 affirme l'existence d'un sous-groupe H de G' avec certaines propriétés.

A 1) Plaçons-nous dans le cas a) du lemme 6. Soit π une représentation unitaire factorielle de G'. Puisque H est régulièrement contenu dans G', la restriction de π à H a son spectre concentré sur une orbite Ω pour G' dans $\hat{H}$. Soit $\xi \in \Omega$. Si on est dans le cas a 1) du lemme 6, π est triviale sur un sous-groupe N fermé connexe de H, distingué dans G, et non réduit à $\{e\}$. On applique l'hypothèse de récurrence (B_n) à G'/N, ce qui est possible grâce au lemme 3 (ii). Si on est dans le cas a 2) du lemme 6, il existe un sous-groupe fermé connexe T de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, de dimension $\leqq n$, tel que le stabilisateur S de ξ dans G' soit contenu dans $G' \cap T$. D'après le lemme 3(i), ou bien $G' \cap T = T$, ou bien il existe une forme non nulle sur $\mathfrak{t}$ commensurable à $\mathfrak{t}$ telle que $G' \cap T$ soit le sous-groupe de T associé à cette forme. D'après [10], π est la représentation induite par une représentation unitaire de S, donc (théorème des représentations induites par étages) par une représentation unitaire π' de $G' \cap T$. Comme

$\mathfrak{k}$ possède la propriété (P) (lemme 2), l'hypothèse de récurrence (A_n) ou (B_n) montre que π' est de type I. Donc ([10], th. 8. 1) π est de type I.

A 2) Plaçons-nous dans le cas c) du lemme 6. Il existe donc un sous-groupe fermé distingué $\widetilde{G}'$ de G', contenant la composante neutre de G', d'indice fini n dans G', tel que H soit de dimension 2 et contenu dans le centre de $\widetilde{G}'$. Il suffit de prouver que $\widetilde{G}'$ est de type I ([3], lemme 3). Comme $\widetilde{G}'$ est le sous-groupe de G associé à la forme $\frac{1}{n}\varphi$ qui est commensurable à $\mathfrak{g}$, on peut se ramener au cas où $\widetilde{G}'=G'$. Nous supposerons donc désormais que H est contenu dans le centre de G'. Soit π une représentation unitaire factorielle de G'. Alors π est scalaire sur H, donc définit une représentation unitaire-projective factorielle π' de G'/H. Or G'/H est le sous-groupe de G/H associé à une forme commensurable sur l'algèbre de Lie de G/H (lemme 3(ii)), et cette algèbre de Lie possède la propriété (P) (lemme 2). D'autre part ([10], th. 2. 1), π' provient par passage au quotient d'une représentation unitaire factorielle π'' d'un groupe F', extension centrale de G'/H par $\mathbf{R}$. Il existe (lemme 4) un groupe résoluble simplement connexe F dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}$ possède la propriété (P), et une forme linéaire ψ sur $\mathfrak{f}$, commensurable à $\mathfrak{f}$, tels que le sous-groupe F^* de F associé à ψ soit isomorphe à un sous groupe de F' contenant la composante neutre de F' et d'indice fini dans F'. Le groupe F est de dimension $(n+1)-2+1=n$. D'après (B_n), F^* est de type I. Donc ([3], lemme 3) F' est de type I. Donc π'', π', π sont de type I.

A 3) Plaçons-nous dans le cas b) du lemme 6. Soit π une représentation unitaire factorielle de G'. Alors, π, étant scalaire sur le centre de G', est scalaire sur le centre de H, donc ([13]; cf. aussi [3], lemme 6) la restriction de π à H est factorielle de type I. Nous conclurons que π est de type I en appliquant le lemme 2 de [3]. Pour pouvoir le faire, il faut montrer que toute représentation unitaire-projective factorielle π' de G'/H est de type I, donc qu'une représentation unitaire factorielle d'une extension centrale de G'/H par $\mathbf{R}$ est de type I. Or, ceci se voit comme dans A 2), en appliquant le lemme 4 et l'hypothèse de récurrence (B_n).

B) *Démonstration* (A_n) et $(B_{n+1}) \Rightarrow (A_{n+1})$ $(n \geq 1)$.

Soit G un groupe résoluble simplement connexe dont l'algèbre de Lie possède la propriété (P) et de dimension $n+1$. Soit H le sous-groupe du lemme 5.

B 1) Plaçons-nous dans le cas a) du lemme 5. Soit π une représentation unitaire factorielle de G, et Ω l'orbite correspondante pour G dans $\hat{H}$. Soit $\xi \in \Omega$. Si on est dans le cas a1) du lemme 5, la composante neutre du noyau de π est non triviale, et on applique l'hypothèse de récurrence (A_n). Si on est dans le cas a2) (resp. a3)) du lemme 5, le stabilisateur de ξ dans

G est contenu dans un sous-groupe T de G, et T est fermé connexe distinct de G (resp. associé à une forme non nulle commensurable à $\mathfrak{g}$). Alors, π est induite par une représentation unitaire π' de T, qui est de type I d'après (A_n) (resp. (B_{n+1})). Donc π est de type I.

B2) Dans le cas b) du lemme 5, le raisonnement est analogue à celui de A3).

REFERENCES

[1] C. CHEVALLEY: On the topological structure of solvable groups, Ann. Math., 42 (1941), p. 668—675.

[2] J. DIXMIER: L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), p. 113—121.

[3] J. DIXMIER: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques, Ann. Inst. Fourier, 7 (1957), p. 315—328.

[4] J. DIXMIER: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents I, Amer. J. Math., 81 (1959), p. 160—170.

[5] J. DIXMIER: Sur le revêtement universel d'un groupe de Lie de type I, C. R. Acad. Sci. Paris, 252 (1961), p. 2805—2806.

[6] J. GLIMM: Type I C*-algebras, Ann. Math., 73 (1961), p. 572—612.

[7] J. GLIMM: Locally compact transformation groups, à paraître.

[8] HARISH-CHANDRA: Representations of a semi-simple Lie group on a Banach space I, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), p. 185—243.

[9] G. W. MACKEY: Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), p. 134—165.

[10] G. W. MACKEY: Unitary representations of group extensions I, Acta Math., 99 (1958), p. 265—311.

[11] G. D. MOSTOW: The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. Math., 52 (1950), p. 606—636.

[12] G. D. MOSTOW: Factor spaces of solvable groups, Ann. Math., 60 (1954), p. 1—27.

[13] J. VON NEUMANN: Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math. Ann., 104 (1931), p. 570—578.

[14] O. TAKENOUCHI: Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), Math. J. Okayama Univ., 7 (1957), p. 151—161.

INSTITUT HENRI POINCARÉ

UNIVERSITÉ DE PARIS

(Reçu le 10 mai, 1961)