Mathematical Journal of Okayama University

Volume 2, *Issue* 2 2008 *Article* 3

MARCH 1953

Theorie der Derivationen und Körperdifferenten

Mikao Moriya*

*

THEORIE DER DERIVATIONEN UND KÖRPERDIFFERENTEN

MIKAO MORIYA

Einleitung.

Ausgehend von einer Idee von A. Weil[1], hat neulich Y. Kawada[2] die Differententheorie in der algebraischen Zahlentheorie auf Grund der Derivationen entwickelt, indem er sich weitgehend auf die Besonderheiten der algebraischen Zahlkörper gestützt hat. Um aber den Kernpunkt seiner Theorie deutlich hervortreten zu lassen, scheint es mir zweckmäßig, die Theorie der Derivationen in den Noetherschen Ringen—denjenigen kommutativen Ringen, in denen der sogenannte Fundamentalsatz der multiplikativen Idealtheorie gilt—aufzubauen. Dies soll in der vorliegenden Arbeit geschehen.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein Noetherscher Ring und k der Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$. Ferner sei K eine endliche separable Erweiterung über k und $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von K. Wir bilden dann für ein vom Nullideal verschiedenes Ideal $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ den Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{A}$. Ein Modulhomomorphismus D von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$, welcher $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich besitzt, heißt eine *Derivation* mod $\mathfrak{A}$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

Für beliebige Elemente α, β aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$D(\alpha\beta) = \beta D(\alpha) + \alpha D(\beta),$$

wo $D(\alpha)$ bzw. $D(\beta)$ diejenige Restklasse aus $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$ bezeichnet, die bei Anwendung des Homomorphismus D dem Element α bzw. β zugeordnet ist.

Wir betrachten nun die Gesamtheit $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ aller derjenigen Derivationen mod $\mathfrak{A}$, welche den Ring $\mathfrak{o}$ auf das Nullelement aus $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$ abbilden. Dann bildet $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ einen Modul mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich, den wir einfach einen Derivationenmodul von $\mathfrak{O}$ nennen wollen. Jeder Derivationenmodul von $\mathfrak{O}$ besitzt die bis auf

1) A. Weil, Differentiation in algebraic number fields, (Skizze), Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 49 (1943), S. 41.

2) Y. Kawada, On the derivations in number fields, Ann. of Math., Vol. 54 (1951), S. 302 - 314.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 2, Art. 3

Isomorphie eindeutig bestimmte Kompositionsreihe aus den $\mathfrak{O}$-Untermoduln; die Länge dieser Kompositionsreihe nennen wir die *Dimension* des Derivationenmoduls. Es zeigt sich dabei, daß die Dimensionen aller Derivationenmoduln von $\mathfrak{O}$ beschränkt sind. Daher existiert die Maximaldimension d der Derivationenmoduln aus $\mathfrak{O}$, und es gibt das umfassendste (oder idealtheoretisch das größte) Ideal $\mathfrak{D}_0$ aus $\mathfrak{O}$, für das der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{D}_0)$ die Maximaldimension d besitzt. Das Ideal $\mathfrak{D}_0$ heißt die *Quasidifferente* von K/k.

Ein Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ läßt sich im allgemeinen als direkte Summe von endlich vielen zyklischen $\mathfrak{O}$-Moduln darstellen. Wenn insbesondere $\mathfrak{A}$ kein Primidealteiler aus $\mathfrak{O}$ besitzt, dessen Restklassenkörper in $\mathfrak{O}$ unvollkommen ist, so ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul. Wenn also $\mathfrak{O}$ der Ring aller ganzen algebraischen Zahlen aus einem algebraischen Zahlkörper endlichen Grades ist, so ist jeder Derivationenmodul von $\mathfrak{O}$ sicher zyklisch.

Nun sei $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_m^{e_m}$ die Primidealpotenzzerlegung der Quasidifferente von K/k. Dann bezeichnen wir mit d_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ die Dimensionen der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i})$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$. Es zeigt sich dabei, daß stets $d_i \geqq e_i$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ sind. Das Ideal $\mathfrak{D} = \prod_{i=1}^{m} \mathfrak{P}_i^{d_i}$ definieren wir als die *Differente* von K/k[1]. Dabei können wir beweisen, daß die neu definierte Differente von K/k mit der von R. Dedekind definierten übereinstimmt.

Im Falle, wo k ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades ist und $\mathfrak{o}$ der Integritätsbereich aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{o}$ ist, oder noch allgemeiner im Falle, wo der Restklassenkörper von $\mathfrak{o}$ nach einem beliebigen Primideal[2] aus $\mathfrak{o}$ stets vollkommen ist, so stimmt die Quasidifferente von K/k mit der Differente von K/k überein.

Inhaltsverzeichnis.

1) Wenn $\mathfrak{D}_0$ das Einheitsideal aus $\mathfrak{O}$ ist, so definieren wir $\mathfrak{D}$ auch als das Einheitsideal.

2) Unter einem Primideal verstehen wir durchweg ein vom Null- und Einheitideal verschiedenes Primideal.

Kapitel I. Struktur der Derivationenmoduln mit einem Noetherschen Ring als Multiplikatorenbereich.

In diesem Kapitel bezeichnet $\mathfrak{o}$ durchweg einen Integritätsbereich, in dem der Fundamentalsatz der multiplikativen Idealtheorie gilt[1]; den Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ nennen wir im folgenden einen *Noetherschen Ring*. Nun betrachten wir über dem Quotientenkörper k von $\mathfrak{o}$ eine endliche separable Erweiterung K und bezeichnen mit $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von K—die Gesamtheit aller in bezug auf $\mathfrak{o}$ ganzen Elemente aus K—. Bekanntlich ist dabei $\mathfrak{O}$ auch ein Noetherscher Ring.

§1. Derivationen und Derivationenmoduln. Es sei $\mathfrak{J}$ ein Zwischenring zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$, und $\mathfrak{M}$ ein Modul mit $\mathfrak{O}$ als (Links-) Multiplikatorenbereich. Dann heißt eine Abbildung[2] D von $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{M}$ eine *Derivation*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

i) (Modulhomomorphismus) Für α, β aus $\mathfrak{J}$ gilt:

---

1) Dann und nur dann gilt in $\mathfrak{o}$ der Fundamentalsatz der multiplikativen Idealtheorie, wenn in $\mathfrak{o}$ folgende drei Axiome erfüllt sind:

I. Der Teilerkettensatz für Ideale.

II. Alle vom Nullideal verschiedenen Primideale sind teilerlos.

III. $\mathfrak{o}$ ist ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper.

Vgl. hierzu etwa Van der Waerden, Moderne Algebra, II, 2. Auflage, Berlin (1940), §§ 102, 103.

2) Das Bild eines Elementes α aus $\mathfrak{J}$ durch D ist stets mit $D(\alpha)$ bezeichnet.

$$D(\alpha+\beta) = D(\alpha)+D(\beta).$$

ii) Für ein λ aus $\mathfrak{O}$ und ein α aus $\mathfrak{J}$ gilt:

$$(\lambda D)(\alpha) = \lambda(D(\alpha)).$$

iii) Für α, β aus $\mathfrak{J}$ gilt:

$$D(\alpha\beta) = \beta D(\alpha)+\alpha D(\beta).$$

Aus i) und ii) folgt ohne weiteres, daß D ein Modulhomomorphismus von $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{O}$ als Linksmultiplikatorenbereich.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{M})$ die Gesamtheit aller derjenigen Derivationen von $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{M}$, die alle Elemente aus $\mathfrak{o}$ auf das Nullelement aus $\mathfrak{M}$ abbilden. Sind dann D_1, D_2 Derivationen aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{M})$, so definieren wir die Summe D_1+D_2 in üblicher Weise, indem wir für ein beliebiges Element α aus $\mathfrak{J}$ $(D_1+D_2)(\alpha)=D_1(\alpha)+D_2(\alpha)$ setzen; ersichtlich ist D_1+D_2 eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{M})$. Daher bildet $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{M})$ einen Modul mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich, den wir einen *Derivationenmodul* von $\mathfrak{J}$ nennen wollen.

Nun wollen wir als $\mathfrak{M}$ den Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{O}$ nach einem von Null verschiedenen Ideal $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ heranziehen. Dabei soll für eine Derivation D aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ und für ein Element λ aus $\mathfrak{O}$ die Gleichung $(\lambda D)(\alpha)=\lambda(D(\alpha))$ folgendermaßen verstanden werden: Ist $\beta(\alpha)$ ein Element aus der Restklasse $D(\alpha)$ aus $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$, so ist $\lambda(D(\alpha))$ die $\lambda\beta(\alpha)$ enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}$. Dadurch ist $\lambda(D(\alpha))$ durch $D(\alpha)$ eindeutig bestimmt, aber von der Wahl der Elemente $\beta(\alpha)$ aus $D(\alpha)$ unabhängig. Nun gilt folgender

Hilfssatz 1. *Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ Ideale aus $\mathfrak{O}$, welche vom Nullideal verschieden sind, und $\mathfrak{A}_1$ sei ein Teiler von $\mathfrak{A}_2$. Dann existiert ein $\mathfrak{O}$-Operatorisomorphismus φ von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_1)$ in $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_2)$ derart, daß sich für eine beliebige Derivation $D^{(1)}$ aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_1)$ und für das Bild $D^{(2)}$ von $D^{(1)}$ durch φ die Relationen*

$$D^{(1)}(\alpha) = 0 \quad \textit{und} \quad D^{(2)}(\alpha) = 0$$

gegenseitig bedingen.

Beweis. Da nach Annahme $\mathfrak{A}_1 \geqq \mathfrak{A}_2$ ist, so ist $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^{-1}$ ein Ideal aus $\mathfrak{O}$. Bekanntlich gibt es ein Element λ_0 aus $\mathfrak{B}$ von der Art, daß für einen beliebigen Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{A}_2$ das Element λ_0 nicht durch $\mathfrak{B}\mathfrak{P}$ teilbar ist. Ist nun $D^{(1)}$ eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_1)$ und α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{J}$, so greifen wir aus $D^{(1)}(\alpha)$ $(\in \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_1)$

ein Element $\beta(\alpha)$ heraus und definieren $D^{(2)}(\alpha)$ als die $\lambda_0\beta(\alpha)$ enthaltende Restklasse aus $\mathfrak{O}/\mathfrak{A}_2$. Offenbar ist $D^{(2)}(\alpha)$ von der Wahl der Elemente $\beta(\alpha)$ aus $D^{(1)}(\alpha)$ unabhängig, aber durch $D^{(1)}(\alpha)$ und λ_0 eindeutig bestimmt. Nach Definition ist dann und nur dann $D^{(2)}(\alpha)=0$, wenn $D^{(1)}(\alpha)=0$ ist; d.h. die Relationen $D^{(1)}(\alpha)=0$ und $D^{(2)}(\alpha)=0$ bedingen sich gegenseitig.

Wie man leicht bestätigt, ist $D^{(2)}$ eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_2)$; ferner ergibt die Zuordnung φ: $D^{(1)} \to D^{(2)}$ einen $\mathfrak{O}$-Isomorphismus von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_1)$ in $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_2)$.

§2. **Derivationenmoduln der Ringe von einer speziellen Struktur.** Ein Element ω aus $\mathfrak{O}$ genüge einer irreduziblen Gleichung $f(x)=0$ mit dem höchsten Koeffizienten 1—der normierten definierenden Gleichung von ω—. Dann läßt sich jedes Element γ aus dem Ring $\mathfrak{o}[\omega]$, welcher aus $\mathfrak{o}$ durch Adjunktion von ω entsteht, als ein Polynom $\varphi(\omega)$ von ω mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ darstellen. Wir betrachten nun für ein Ideal $\mathfrak{A}(\neq(0))$ aus $\mathfrak{O}$ den Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$. Ist dann D eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$, so gilt offenbar:

$$D(\gamma) = \varphi'(\omega)D(\omega),$$

wo $\varphi'(x)$ die Ableitung von $\varphi(x)$ nach x bezeichnet. Insbesondere erhält man:

$$f'(\omega)D(\omega) = D(f(\omega)) = 0.$$

Nun sei für ein Polynom $\psi(x)$ aus $\mathfrak{o}[x]$ auch $\gamma=\psi(\omega)$. Dann existiert ein Polynom $q(x)$ aus $\mathfrak{o}[x]$ derart, daß $\psi(x)-\varphi(x)=f(x)q(x)$ ist. Daraus folgt sofort:

$$D(\psi(\omega)) = \psi'(\omega)D(\omega) = (\varphi'(\omega)+f'(\omega)q(\omega))D(\omega);$$

wegen $f'(\omega)D(\omega)=0$ gilt also:

$$D(\gamma) = D(\psi(\omega)) = \psi'(\omega)D(\omega) = \varphi'(\omega)D(\omega) = D(\varphi(\omega)).$$

Die letzte Gleichung zeigt offenbar, daß die Derivation D durch $D(\omega)$ eindeutig bestimmt wird.

Ersichtlich bildet die Gesamtheit $\mathfrak{N}(D)$ aller derjenigen Elemente aus $\mathfrak{O}$, die D annullieren, ein Ideal aus $\mathfrak{O}$. Ist also ν ein Element aus $\mathfrak{N}(D)$, so gilt:

$$\nu D(\omega) = 0.$$

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 2, Art. 3

Genügt aber umgekehrt ein Element μ aus $\mathfrak{O}$ der Gelichung

$$\mu D(\omega) = 0,$$

so muß μ zu $\mathfrak{N}(D)$ gehören. Denn, da ein Element γ aus $\mathfrak{o}[\omega]$ ein Polynom $\varphi(\omega)$ von ω mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ ist, so ist

$$(\mu D)(\gamma) = \mu(\varphi'(\omega)D(\omega)) = \varphi'(\omega)(\mu D(\omega)) = 0;$$

d. h. es ist $\mu D = 0$. Daraus schließt man sofort, daß $\mathfrak{N}(D)$ ein Teiler des Hauptideals $(f'(\omega))$ aus $\mathfrak{O}$ ist.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{C}$ den größten gemeinsamen Teiler von $D(\omega)$ und $\mathfrak{A}$[1]. Ein Element ξ aus $\mathfrak{O}$ gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{N}(D)$, wenn es zu $\mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1}$ gehört; d.h. es ist $\mathfrak{N}(D) = \mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1}$.

Nun betrachten wir die Kongruenz

$$f'(\omega)x \equiv 0 \mod \mathfrak{A},$$

und wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}$ den größten gemeinsamen Teiler von $f'(\omega)$ und $\mathfrak{A}$. Wir bestimmen dann ein Element λ_0 aus $\mathfrak{O}$ derart, daß $\lambda_0 \in \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$, aber für einen beliebigen Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{A}$ $\lambda_0 \overline{\in} \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{P}$ ist. Ersichtlich genügt λ_0 der obigen Kongruenz; daher gibt es eine Derivation D_0 aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ mit $D_0(\omega) \equiv \lambda_0$[2),3)].

Nun sei D eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$. Dann genügt ein Element λ aus der Restklasse $D(\omega)$ mod $\mathfrak{A}$ der Kongruenz:

$$f'(\omega)x \equiv 0 \mod \mathfrak{A};$$

ferner gehört λ offenbar zum Ideal $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$. Also ist die Kongruenz

$$\lambda_0 x \equiv \lambda \mod \mathfrak{A}$$

in $\mathfrak{O}$ lösbar. Bezeichnet man nun mit μ eine Lösung der obigen Kongruenz und setzt $D = \mu D_0$, so definiert D eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ mit $D(\omega) = \mu D_0(\omega) \ni \lambda$. Daher besitzt der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ D_0 als ein erzeugendes Element—$\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ist also ein zyklischer Modul mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich. Weil $(D_0(\omega), \mathfrak{A}) = (\lambda_0, \mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ ist, so ist nach dem oben Gezeigten

1) Das Ideal $\mathfrak{C}$ ist als der größte gemeinsame Teiler eines beliebigen, in $D(\omega)$ enthaltenen Elementes ω_0 und des Ideals $\mathfrak{A}$ definiert. Dabei ist $\mathfrak{C}$ durch $D(\omega)$ und $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt, aber von der Wahl der Elemente ω_0 aus $D(\omega)$ unabhängig.

2) Y. Kawada, a. a. O., Lemma 5.

3) Diese Kongruenz bedeutet, daß jedes Element aus $D_0(\omega)$ mod $\mathfrak{A}$ mit λ_0 kongruent ist; d.h. λ_0 gehört zur Restklasse $D_0(\omega)$.

$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^{-1} = \mathfrak{B}$ das annullirende Ideal von D_0 und infolgedessen ist auch das annullierende Ideal des Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$.

Ordnet man nun einem Element ξ aus $\mathfrak{O}$ die Derivation ξD_0 aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ zu, so entsteht dadurch ein $\mathfrak{O}$-Homomorphismus von $\mathfrak{O}$ auf $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$, weil $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul mit D_0 als erzeugendem Element ist; der Kern dieses Homomorphismus ist nach dem oben Bewiesenen das Ideal $\mathfrak{B}$. Daher ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ mit dem Restklassenmodul $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ $\mathfrak{O}$-isomorph. Somit haben wir bewiesen:

Satz 1. *Es sei ω ein Element aus $\mathfrak{O}$ mit $f(x) = 0$ als der normierten definierenden Gleichung in $\mathfrak{o}$. Ferner sei $\mathfrak{A}$ ein von Null verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{O}$. Dann ist der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ein zyklischer Modul mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich. Dabei ist der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{B}$ von $f'(\omega)$ und $\mathfrak{A}$ das annullierende Ideal von $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$, und $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ist mit dem Restklassenmodul $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ $\mathfrak{O}$-isomorph.*

Wir setzen wieder $\mathfrak{B} = (f'(\omega), \mathfrak{A})$ und nehmen an, daß $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{O}$ verschieden ist. Ist dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_s^{e_s}$ die Primidealpotenzzerlegung von $\mathfrak{B}$, so ist der Restklassenmodul $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ auf die direkte Summe

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_1^{e_1} \oplus \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_2^{e_2} \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_s^{e_s}$$

von den $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ $\mathfrak{O}$-isomorph abgebildet. Weil jeder Restklassedmodul $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i}$ $(1 \leq i \leq s)$ genau $e_i + 1$ $\mathfrak{O}$-zulässige Teilmoduln $\mathfrak{P}_i^{\nu}/\mathfrak{P}_i^{e_i}$ $(\nu = 0, 1, \cdots\cdots, e_i)$ besitzt, so schließt man ohne Schwierigkeit, daß eine Kompositionsreihe von $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$, deren Glieder alle $\mathfrak{O}$-zulässige Untermoduln von $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ sind, die Kompositionslänge $l = \sum_{i=1}^{s} e_i$ besitzt. Weil $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ $\mathfrak{O}$-isomorph ist, so besitzt $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ eine Kompositionsreihe aus lauter $\mathfrak{O}$-zulässigen Untermoduln mit der Kompositionslänge l. Diese Kompositionslänge l ist nach dem Satz von Jordan und Hölder eine Invariante von $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ und heiße die *Dimension* des Derivationenmoduls $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$.

Nun sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}$. Dann besteht $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ nur aus dem Nullelement. Daher ist die Kompositionslänge von $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ gleich 0; d.h. der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ besitzt dabei die Dimension Null.

Durchläuft nun $\mathfrak{A}$ alle von Null verschiedenen Ideale aus $\mathfrak{O}$, so besitzt die Menge der Ideale $(f'(\omega), \mathfrak{A})$ das Ideal $(f'(\omega))$ als das Minimalideal. Wenn also $(f'(\omega))$ ein Teiler von $\mathfrak{A}$ ist, so ist $(f'(\omega), \mathfrak{A}) = (f'(\omega))$ und infolgedessen gilt nach Satz 1:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{O}/(f'(\omega));$$

daher ist die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ gleich der Kompositionslänge von $\mathfrak{O}/(f'(\omega))$. Ist aber $f'(\omega)$ kein Teiler von $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B} = (f'(\omega), \mathfrak{A})$ ein echter Teiler von $(f'(\omega))$. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß die Kompositionslänge von $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$ kleiner ist als die von $\mathfrak{O}/(f'(\omega))$; d.h. die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ist kleiner als die von $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/(f'(\omega)))$. Mithin gilt folgender

Hilfssatz 2. *Durchläuft $\mathfrak{A}$ alle vom Nullideal verschiedenen Ideale aus $\mathfrak{O}$, so sind die Dimensionen der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ beschränkt. Ferner ist $(f'(\omega))$ das größte Ideal unter denjenigen Idealen $\mathfrak{A}$, die den Moduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ die Maximaldimension angeben. Es gilt außerdem die $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation:*

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A}) \cong \mathfrak{O}/(f'(\omega)),$$

wenn $\mathfrak{A}$ durch $(f'(\omega))$ teilbar ist.

§3. Struktur der Derivationenmoduln der Ringe mit einer endlichen Basis über einem Noetherschen Ring. Quasidifferenten. Es sei $\mathfrak{J}$ ein Zwischenring zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$, welcher eine endliche $\mathfrak{o}$-Basis $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ besitzt[1]. Wir betrachten dann für ein von Null verschiedenes Ideal $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ die Derivationenmoduln

$$\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{o}[\omega_i], \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A}) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich, und wir bilden die direkte Summe

$$D^*(\mathfrak{A}) = \sum_{i=1}^{n} \oplus D^{(i)}(\mathfrak{A}) = D^{(1)}(\mathfrak{A}) \oplus \cdots\cdots \oplus D^{(n)}(\mathfrak{A}).$$

Ein Element D aus $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$ bezeichnen wir mit

$$D = (D^{(1)}, D^{(2)}, \cdots\cdots, D^{(n)}) \qquad D^{(i)} \in \mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{A}) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n),$$

und die Summe von zwei Elementen aus $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$ ist wie üblich definiert als komponenteweise summiert. Ferner ist für ein beliebiges Element λ aus $\mathfrak{O}$ $\lambda D^* = (\lambda D^{(1)}, \cdots\cdots, \lambda D^{(n)})$ gesetzt. Dadurch wird

1) Jedes Element aus $\mathfrak{J}$ läßt sich als eine Linearform von $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ darstellen, aber die lineare Unabhängigkeit von $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ über $\mathfrak{o}$ ist nicht erfordert.

$\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$, wie leicht bestätigt, ein Modul mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich.

Ist nun D eine Derivation aus dem Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich, so induziert D in jedem $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{A})$ $(1 \leqq i \leqq n)$ stets eine Derivation, weil $\mathfrak{o}[\omega_i]$ ein Teilring von $\mathfrak{J}$ ist. Nämlich man erhält aus D eindeutig eine Derivation $D^{(i)}$ aus $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{A})$, indem man

$$D^{(i)}(\alpha_i) = D(\alpha_i)$$

setzt, wo α_i alle Elemente aus $\mathfrak{o}[\omega_i]$ durchläuft. Dabei heißt $D^{(i)}$ die i-te *Komponente* von D.

Es seinen D_1, D_2 Derivationen aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. Dann bezeichnen wir mit $D_1^{(i)}$ bzw. $D_2^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ die i-te Komponente von D_1 bzw. D_2. Ist dann $D_1 = D_2$, so gilt für ein beliebiges Element α_i aus $\mathfrak{o}[\omega_i]$ $(1 \leqq i \leqq n)$:

$$D_1^{(i)}(\alpha_i) = D_1(\alpha_i) = D_2(\alpha_i) = D_2^{(i)}(\alpha_i).$$

Ist aber umgekehrt für jedes i $(1 \leqq i \leqq n)$ $D_1^{(i)} = D_2^{(i)}$, so ist $D_1 = D_2$. Denn ein Element α aus $\mathfrak{J}$ ist von der Form:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_n,$$

wo $\alpha_i \in \mathfrak{o}[\omega_i]$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ sind; daraus folgt nach Definition

$$D_1(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} D_1^{(i)}(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} D_2^{(i)}(\alpha_i) = D_2(\alpha), \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Ordnet man also einer Derivation D aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ das durch ihre Komponenten $D^{(1)}, \cdots\cdots, D^{(n)}$ bestimmte Element $D^* = (D^{(1)}, \cdots\cdots, D^{(n)})$ aus $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$ zu, so entsteht nach dem oben Gezeigten ein $\mathfrak{O}$-Modulisomorphismus von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$.

Wie bereits in §2 bewiesen worden ist, besitzt die Menge der Dimensionen aller $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{A})$ die größte Zahl d_i (Maximaldimension), wenn $\mathfrak{A}$ alle von Null verschiedenen Ideale aus $\mathfrak{O}$ durchläuft. Offenbar ist die Länge einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$, welche aus lauter $\mathfrak{O}$-zulässigen Untermoduln von $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$ besteht, gleich der Summe der Dimensionen von den $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{A})$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$; also ist die Länge nicht größer als $d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_n$. Weil $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ mit einem Untermodul von $\mathfrak{D}^*(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{O}$-modulisomorph ist, so besitzt $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ eine Kompositionsreihe, welche aus lauter $\mathfrak{O}$-zulässigen Untermoduln von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ besteht. Die Länge dieser Kompositionsreihe von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ ist eine Invariante von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ und heiße die *Dimension* von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$. Offenbar ist für jedes von Null verschiedene Ideal $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ nicht größer als $d_1 + \cdots\cdots + d_n$.

Durchläuft also $\mathfrak{A}$ alle von Null verschiedenen Ideale aus $\mathfrak{O}$, so besitzt die Menge der Dimensionen aller $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ die größte Zahl d; ferner gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{O}$ von der Art, daß die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ gleich d ist.

Es liegen nun endlich viele Derivationen $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_s$ aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ vor, welche alle von Null verschieden sind. Dann heißen D_1, $D_2, \cdots\cdots, D_s$ *$\mathfrak{O}$-unabhängig*, wenn aus einer Gleichung

$$\lambda_1 D_1 + \cdots\cdots + \lambda_s D_s = 0 \qquad \lambda_i \in \mathfrak{O} \ (i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$$

stets die Gleichungen $\lambda_1 D_1 = \lambda_2 D_2 = \cdots\cdots = \lambda_s D_s = 0$ folgen. Ein System von den $\mathfrak{O}$-unabhängigen Derivationen $D_1, \cdots\cdots, D_s$ heiße eine *$\mathfrak{O}$-Basis* von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, wenn jede Derivation D aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ von der Form

$$D = \lambda_1 D_1 + \cdots\cdots + \lambda_s D_s \qquad \lambda_i \in \mathfrak{O} \ (i = 1, \cdots\cdots, s)$$

ist.

Im weiteren wollen wir zeigen, daß ein Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ stets eine $\mathfrak{O}$-Basis besitzt, wenn er kein Nullmodul ist. Zum Beweis sei zunächst $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_\nu^{e_\nu}$ die Primidealpotenzzerlegung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{O}$. Dann ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ mit der direkten Summe von den $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_i^{e_i}) = \mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i})$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, \nu)$ $\mathfrak{O}$-isomorph:

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \cong \sum_{i=1}^{\nu} \oplus \mathfrak{D}(\mathfrak{P}_i^{e_i}).$$

Es genügt also zu zeigen, daß für jedes i $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_i^{e_i})$ eine $\mathfrak{O}$-Basis besitzt.

Nun sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal aus $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}^r) = \mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ ein Derivationenmodul, wo r eine beliebig festgelegte, nicht-negative ganze rationale Zahl ist. Dann bilden wir für ein beliebiges ω_i aus der endlichen $\mathfrak{o}$-Basis $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ von $\mathfrak{J}$ den Derivationnenmodul $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{P}^r) = \mathfrak{D}[\mathfrak{o}[\omega_i], \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ und dann die direkte Summe

$$\mathfrak{D}^*(\mathfrak{P}^r) = \mathfrak{D}^{(1)}(\mathfrak{P}^r) \oplus \cdots\cdots \oplus \mathfrak{D}^{(n)}(\mathfrak{P}^r).$$

Wie bereits bewiesen worden ist, induziert eine Derivation D aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}^r)$ in jedem $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{P}^r)$ $(1 \leqq i \leqq r)$ eine Derivation $D^{(i)}$, die wir die i-te Komponente von D nennen wollen. Nun beweisen wir folgenden

Hilfssatz 3. *Jeder $\mathfrak{O}$-zulässige Untermodul $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}^r)$ besitzt stets eine $\mathfrak{O}$-Basis, wenn er von Null verschieden ist.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß die Gesamtheit $\mathfrak{T}^{(i)}$ der i-ten

Komponenten ($1 \leqq i \leqq n$) aller Derivationen aus $\mathfrak{T}$ einen $\mathfrak{O}$-zulässigen Untermodul von $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{P}^r)$ bildet. Wir wollen im folgenden $\mathfrak{T}^{(i)}$ die i-te Projektion von $\mathfrak{T}$ nennen. Berücksichtigt man nun, daß $\mathfrak{O}$ ein Noetherscher Ring ist, und daß nach Satz 1 $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{P}^r)$ ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul ist, so beweist man ohne Schwierigkeit, daß $\mathfrak{T}^{(i)}$ als ein $\mathfrak{O}$-Untermodul von $\mathfrak{D}^{(i)}(\mathfrak{P}^r)$ auch $\mathfrak{O}$-zyklisch ist.

Nun nehmen wir an, daß unter den sämtlichen Projektionen $\mathfrak{T}^{(1)}, \mathfrak{T}^{(2)}, \cdots\cdots, \mathfrak{T}^{(n)}$ von $\mathfrak{T}$ nur eine einzige Projektion, etwa $\mathfrak{T}^{(1)}$, von Null verschieden ist. Da $\mathfrak{T}^{(1)}$ ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul ist, so gibt es eine Derivation D_0 aus $\mathfrak{T}$, deren erste Komponente $D_0^{(1)}$ ein erzeugendes Element aus $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist. Nun sei D eine Derivation aus $\mathfrak{T}$. Dann ist die erste Komponente $D^{(1)}$ von D von der Form $\xi D_0^{(1)}$ mit ξ aus $\mathfrak{O}$. Betrachtet man hierbei die Derivation $D - \xi D_0$ aus $\mathfrak{T}$, so ist nach Voraussetzung für jedes $i \geqq 2$ die i-te Komponente von $D - \xi D_0$ gleich Null; die erste Komponente von $D - \xi D_0$ ist aber auch Null, weil $(D - \xi D_0)^{(1)} = D^{(1)} - \xi D_0^{(1)} = 0$ ist. Es muß also $D = \xi D_0$ sein. Hieraus schließt man sofort, daß $\mathfrak{T}$ ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul mit D_0 als erzeugendem Element ist.

Nun sei vorausgesatzt, daß alle von Null verschiedenen $\mathfrak{O}$-zulässigen Untermoduln von $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}^r)$, welche höchstens m nicht verschwindende Projektionen haben, stets eine aus höchstens m Derivationen bestehende, $\mathfrak{O}$-basis besitzt. Ferner habe ein $\mathfrak{O}$-zulässiger Untermodul $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}^r)$ genau $m+1$ von Null verschiedene Projektionen. Dann kann man ohne Einschränkung annehmen, daß die ersten $m+1$ Projektionen $\mathfrak{T}^{(1)}, \cdots\cdots, \mathfrak{T}^{(m+1)}$ von $\mathfrak{T}$ von Null verschieden sind. Ferner sei l_i ($1 \leqq i \leqq m+1$) die Dimension von $\mathfrak{T}^{(i)}$, und l die größte Dimension unter den $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_{m+1}$. Dann kann man der Kürze wegen $l_1 = l$ annehmen. Offenbar gibt es eine Derivation D_1 aus $\mathfrak{T}$, deren erste Komponente $D_1^{(1)}$ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist. Daher kann man für eine Derivation D aus $\mathfrak{T}$ stets ein Element ξ_1 aus $\mathfrak{O}$ so bestimmen, daß die erste Komponente der Derivation $D' = D - \xi_1 D_1$ gleich Null ist. Ersichtlich bildet die Gesamtheit aller oben bestimmten Derivationen D' einen $\mathfrak{O}$-zulässigen Untermodul $\mathfrak{T}'$ von $\mathfrak{T}$. Weil $\mathfrak{T}'$ höchstens m nicht verschwindende Projektionen besitzt, so ist $\mathfrak{T}'$ entweder der Nullmodul oder nach Voraussetzung ein Modul mit einer $\mathfrak{O}$-Basis, welche aus höchstens m Derivationen aus $\mathfrak{T}$ besteht.

Im Falle, wo $\mathfrak{T}'$ der Nullmodul ist, so ist jede Derivation D aus $\mathfrak{T}$ von der Form $D = \xi_1 D_1$ ($\xi_1 \in \mathfrak{O}$); d.h. $\mathfrak{T}$ besitzt eine $\mathfrak{O}$-Basis D_1. Wenn aber $\mathfrak{T}'$ von Null verschieden ist, so bezeichnen wir mit D_2,

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 2, Art. 3

$\cdots\cdots, D_s$ $(s \leqq m+1)$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $\mathfrak{T}'$. Da man für eine Derivation D aus $\mathfrak{T}$ stets ein Element ξ_1 aus $\mathfrak{O}$ mit $D - \xi_1 D_1 \in \mathfrak{T}'$ bestimmen kann, so ist jede Derivation aus $\mathfrak{T}$ von der Form $\xi_1 D_1 + \cdots\cdots + \xi_s D_s$, wo die ξ_i $(i = 1, \cdots\cdots, s)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ sind.

Es gelte nun für die Elemente λ_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ aus $\mathfrak{O}$:

$$H = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_s + \cdots\cdots \lambda_s D_s = 0.$$

Dann ist die erste Komponente $\lambda_1 D_1^{(1)}$ von $\lambda_1 D_1$ gleich Null, weil die erste Komponente von $\lambda_2 D_2 + \cdots\cdots + \lambda_s D_s$ aus $\mathfrak{T}'$ gleich Null ist. Das annullierende Ideal von $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist ein Teiler des annullierenden Ideals $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}^{(1)}(\mathfrak{P}^{r}))$ von $\mathfrak{D}^{(1)}(\mathfrak{P}^{r})$, also ist nach Satz 1 eine Potenz von $\mathfrak{P}$. Weil die Dimension von $\mathfrak{T}^{(1)}$ gleich l ist, so schließt man leicht aus Satz 1, daß $\mathfrak{P}^l$ das annullierende Ideal von $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist. Berücksichtigt man nun, daß $D_1^{(1)}$ ein erzeugendes Element von $\mathfrak{T}^{(1)}$ ist, so erhält man die Kongruenz $\lambda_1 \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^l$. Wegen Max $(l_1, \cdots\cdots, l_{m+1}) = l$ sind die annullierenden Ideale von den $\mathfrak{T}^{(2)}, \cdots\cdots, \mathfrak{T}^{(m+1)}$ sämtlich Teiler von $\mathfrak{P}^l$; d.h. die sämtlichen Komponenten von $\lambda_1 D_1$ sind gleich Null, also ist $\lambda_1 D_1 = 0$. Daher erhält man:

$$H = \lambda_2 D_2 + \cdots\cdots + \lambda_s D_s = 0.$$

Da aber $D_2, \cdots\cdots, D_s$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $\mathfrak{T}'$ ist, so muß $\lambda_2 D_2 = \cdots\cdots = \lambda_s D_s = 0$ sein; d h. $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_s$ bilden eine $\mathfrak{O}$-Basis von $\mathfrak{T}$, und die Anzahl der Basiselemente ist nicht größer als $m+1$, w.z.b.w.

Aus Hilfssatz 3 und aus dem oben Bemerkten folgt sofort

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{J}$ ein Zwischenring zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{O}$ mit einer endlichen $\mathfrak{o}$-Basis und $\mathfrak{A}$ ein von Null verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{O}$. Dann besitzt der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ stets eine $\mathfrak{O}$-Basis, wenn er von Null verschieden ist.*

Es sei $D_1, \cdots\cdots, D_s$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$. Dann ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ gleich der direkten Summe von den zyklischen $\mathfrak{O}$-Moduln $\{D_i\}$ $(i = 1, \cdots\cdots, s)$. Da jedes $\{D_i\}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ eine Kompositionsreihe aus den $\mathfrak{O}$-zulässigen Untermoduln besitzt, so wollen wir mit u_i die Kompositionslänge von $\{D_i\}$ bezeichnen. Dann ist die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ gleich $u_1 + \cdots\cdots + u_s$.

Es sei $\mathfrak{A}_0$ ein maximales Ideal aus $\mathfrak{O}$ von der Art, daß $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_0)$ die Maximaldimension d besitzt. Ferner sei $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_s^{e_s}$ die Primidealpotenzzerlegung von $\mathfrak{A}_0$ in $\mathfrak{O}$. Dann ist

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_0) \cong \sum_{i=1}^{s} \oplus \mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i}).$$

Bezeichnet man nun mit d_i die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i})$ $(1 \leqq i \leqq s)$, so ist offenbar $d = d_1 + \cdots\cdots + d_s$. Ferner ist für eine natürliche Zahl $e_i' > e_i$ die Dimension d_i' von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i'})$ gleich d_i. Denn sonst wäre nach Hilfssatz 1 $d_i < d_i'$ und infolgedessen würde die Dimension $d + d_i' - d_i$ von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_0\mathfrak{P}_i^{e_i'-e_i})$ größer als d sein, was aber mit der Maximaleigenschaft über d im Widerspruch steht. Nun sei e_i' eine nicht-negative ganze rationale Zahl mit $e_i' < e_i$. Dann ist die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{e_i'})$ kleiner als d_i. Denn sonst wäre die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{O}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_0\mathfrak{P}_i^{e_i'-e_i})$ gleich d; weil aber $\mathfrak{A}_0\mathfrak{P}_i^{e_i'-e_i}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{A}_0$ ist, so ergibt sich ein Widerspruch. Aus dem eben Bewiesenen folgt sofort, daß ein Ideal $\mathfrak{A}$ von der Form $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{a_1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_s^{a_s}$ dann und nur dann durch $\mathfrak{A}_0$ teilbar ist, wenn der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ die Dimension d besitzt.

Für ein von den $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, \cdots\cdots, s)$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$ sind die Dimensionen der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ $(r = 1, \cdots\cdots)$ alle gleich 1, weil sonst für eine passend gewählte natürliche Zahl e die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_0\mathfrak{P}^e)$ größer als d sein würde. Nun sei $\mathfrak{A}_1$ ein maximales Ideal aus $\mathfrak{O}$ von der Art, daß $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A}_1)$ die Dimension d besitzt. Nach dem eben Gezeigten besitzt dann $\mathfrak{A}_1$ außer den $\mathfrak{P}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{P}_s$ keinen Primidealteiler aus $\mathfrak{O}$. Wie oben bemerkt, ist also $\mathfrak{A}_0 \geqq \mathfrak{A}_1$. Wegen der Maximaleigenschaft über $\mathfrak{A}_1$ muß daher $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_1$ sein. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß ein Ideal $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ dann und nur dann durch $\mathfrak{A}_0$ teilbar ist, wenn $\mathfrak{O}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ die Dimension d besitzt. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{P}^e$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag von $\mathfrak{A}_0$. Offenbar gibt dann der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^e)$ unter den $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots)$ die Maximaldimension an.

Es ist wohlbekannt, daß die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ eine endliche $\mathfrak{o}$-Basis besitzt[1]. Wenn man also an Stelle von $\mathfrak{J}$ die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ selbst heranzieht, so erhält man folgenden

Satz 3. *Durchläuft $\mathfrak{A}$ alle von Null verschiedenen Ideale aus $\mathfrak{O}$, so gibt es unter den Dimensionen von $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}, \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ die Maximaldimension d. Ferner gibt es das größte Ideal $\mathfrak{D}_0$ aus $\mathfrak{O}$ von der Art, daß jedes Ideal $\mathfrak{C}(\neq 0)$ aus $\mathfrak{O}$ dann und nur dann durch $\mathfrak{D}_0$ teilbar ist, wenn die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{C})$ gleich d ist. Für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$ sei $\mathfrak{P}^e$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag von $\mathfrak{D}_0$, und $d_{\mathfrak{P}}$ sei die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^e)$. Dann ist $d_{\mathfrak{P}}$ unter den Dimensionen*

1) Vgl. etwa Van der Waerden, a.a.O., §§101 und 99.

von den Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots)$ *maximal.*

Das in Satz 3 definierte Ideal $\mathfrak{D}_0$ wollen wir die *Quasidifferente* von K/k nennen.

Kapltel II. Derivationenmoduln in diskret bewerteten perfekten Körpern und Differenten im Kleinen.

In diesem Kapitel bedienen wir uns fortdauernd alle Bezeichnungen aus dem vorigen Kapitel.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{O}$. Dann kann man in k wie üblich eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung φ einführen, weil $\mathfrak{o}$ ein Noetherscher Ring ist. Bekanntlich ist dabei φ nicht-archimedisch und diskret. Ferner kann man eine zu $\mathfrak{P}$ gehörige Bewertung Φ von K so bestimmen, daß Φ eine Fortsetzung von φ ist. Die bezüglich φ bzw. Φ perfekte Hülle von k bzw. K bezeichnen wir mit $\bar{k}$ bzw. $\bar{K}$. Ferner wollen wir $\bar{k}$ stets als einen Teilkörper von $\bar{K}$ auffassen.

Nun sei $\bar{\mathfrak{o}}$ der Bewertungsring von $\bar{k}$ in bezug auf φ. Dann bildet die Gesamtheit aller Nicht-Einheiten aus $\bar{\mathfrak{o}}$ ein einziges Primideal aus $\bar{\mathfrak{o}}$, welches seinerseits das Erweiterungsideal von $\mathfrak{p}$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ ist; ferner ist der Durchschnitt von $\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{o}}$ und $\mathfrak{o}$ das Primideal $\mathfrak{p}$. Daher kann man das Primideal aus $\bar{\mathfrak{o}}$ ohne Mißverständnis auch mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen. Ebenso kann man das Primideal aus dem Bewertungsring $\bar{\mathfrak{O}}$ von $\bar{K}$ in bezug auf Φ auch mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Weil φ und infolgedessen Φ auch diskret sind, so sind $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$ offenbar Noethersche Ringe. Wir wollen im folgenden $\bar{\mathfrak{o}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{O}}$ einfach die Hauptordnung von $\bar{k}$ bzw. $\bar{K}$ nennen. Da $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$ Noethersche Ringe sind, so läßt sich die im Kapitel I entwickelte Theorie auf $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$ anwenden.

§ 4. Erweiterung der Multiplikatorenbereiche der Derivationenmoduln. Es sei $\tilde{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{K}$ und $\tilde{\Phi}$ die Fortsetzung der Bewertung Φ auf $\tilde{K}$. Dann bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{O}}$ die Gesamtheit aller in bezug auf Φ ganzen Elemente—die Hauptordnung von $\tilde{K}$—, und mit $\tilde{\mathfrak{P}}$ das Primideal aus $\tilde{\mathfrak{O}}$. Ist dann e der Exponent von $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\tilde{\mathfrak{P}}$ (d. h. e ist die Verzweigungsordnung von $\tilde{K}$ über $\bar{K}$), so sind zwei Elemente α, β aus $\bar{\mathfrak{O}}$ dann und nur dann mod $\tilde{\mathfrak{P}}^{er}$ kongruent, wenn sie bereits in $\bar{\mathfrak{O}}$ mod $\mathfrak{P}^r$ kongruent sind. Wie bekannt, kann man den Restklassenring $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r$ als Teilring von $\tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{er}$ auffassen, indem man die ein Element α aus $\bar{\mathfrak{O}}$ enthaltende Restklasse aus $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r$ mit der α enthaltenden Restklasse aus $\tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{er}$ identifiziert.

Bekanntlich besitzt $\bar{\mathfrak{O}}$ eine Minimalbasis $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ über $\bar{\mathfrak{o}}$; also ist $\bar{\mathfrak{O}}$ ein Ring mit einer endlichen $\bar{\mathfrak{o}}$-Basis. Weil offenbar $\tilde{\mathfrak{O}}$ auch ein Noetherscher Ring ist, so ist die in §3 entwickelte Theorie auf die Derivationenmoduln

$$\tilde{\mathfrak{D}}(er) = \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{er}) \qquad (r = 0, 1, \cdots\cdots)$$

mit $\tilde{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich anwendbar. Dabei ist der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(r) = \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich sicher ein (aber kein $\tilde{\mathfrak{O}}$-zulässiger) Untermodul von $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$, wenn man wie oben $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r$ als einen Teilring von $\tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{er}$ auffaßt. Im folgenden nennen wir $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$ die *Multiplikatorenbereicherweiterung* von $\mathfrak{D}(r)$ zu $\tilde{\mathfrak{O}}$.

Es sei $\tilde{D}$ eine Derivation aus $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$, und $\Omega_1, \Omega_2, \cdots\cdots, \Omega_m$ sei eine Minimalbasis von $\tilde{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$. Dann kann man für jedes i $(1 \leq i \leq n)$

$$\tilde{D}(\omega_i) \equiv \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}\Omega_j \qquad \bmod \tilde{\mathfrak{P}}^{er}$$

setzen, wo die γ_{ij} $(j = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ sind. Da ein beliebiges Element α aus $\bar{\mathfrak{O}}$ als ein Polynom $\varphi(\omega_1, \cdots\cdots, \omega_n) = \varphi(\omega)$ in $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ mit Koeffizienten aus $\bar{\mathfrak{o}}$ darstellbar ist, so ist

$$\tilde{D}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega_i}\tilde{D}(\omega_i) \equiv \sum_{j=1}^{m}\Omega_j\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}\frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega_i} \qquad \bmod \tilde{\mathfrak{P}}^{er}.$$

Ist insbesondere $\tilde{D}(\alpha) = 0$, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}\frac{\partial\varphi(\omega)}{\partial\omega_i} \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^r \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots, m),$$

weil $\Omega_1, \Omega_2, \cdots\cdots, \Omega_m$ eine Minimalbasis von $\tilde{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ ist.

Es sei γ ein Element aus $\bar{\mathfrak{O}}$ und $\gamma = \psi_\gamma(\omega)$ ein Polynom in $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ mit Koeffizienten aus $\bar{\mathfrak{o}}$. Dann definieren wir die Restklasse $D_j(\gamma)$ mod $\mathfrak{P}^r$ auf folgende Weise:

$$D_j(\gamma) \equiv \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}\frac{\partial\psi_\gamma(\omega)}{\partial\omega_i} \qquad \bmod \mathfrak{P}^r \quad (1 \leq j \leq m).$$

Ist dabei $\gamma = \psi_{\gamma 1}(\omega)$ auch ein Polynom von $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ mit Koeffizienten aus $\bar{\mathfrak{o}}$, so gilt wegen $\tilde{D}(\psi_\gamma(\omega) - \psi_{\gamma 1}(\omega)) = \tilde{D}(0) = 0$ folgende Kongruenz:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \psi(\omega)}{\partial \omega_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \psi_1(\omega)}{\partial \omega_i} \qquad \bmod \mathfrak{P}^r$$

d. h. $D_j(\gamma)$ ist durch γ eindeutig bestimmt, aber von den Darstellungen von γ als Polynomen in $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ unabhängig.

Nun seien γ_1, γ_2 Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ und $\varphi_1(\omega), \varphi_2(\omega)$ bzw. Polynomdarstellungen von γ_1, γ_2. Dann ist nach Definition:

$$\begin{aligned} D_j(\gamma_1 + \gamma_2) &\equiv \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial(\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega))}{\partial \omega_i} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \varphi_1(\omega)}{\partial \omega_i} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \varphi_2(\omega)}{\partial \omega_i} \\ &\equiv D_j(\gamma_1) + D_j(\gamma_2) \qquad \bmod \mathfrak{P}^r. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich:

$$\begin{aligned} D_j(\gamma_1 \gamma_2) &\equiv \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \varphi_1(\omega) \varphi_2(\omega)}{\partial \omega_i} \\ &\equiv \varphi_2(\omega) \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \varphi_1(\omega)}{\partial \omega_i} + \varphi_1(\omega) \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial \varphi_2(\omega)}{\partial \omega_i} \\ &\equiv \gamma_2 D_j(\gamma_1) + \gamma_1 D_j(\gamma_2) \qquad \bmod \mathfrak{P}^r. \end{aligned}$$

Also sind $D_1, \cdots\cdots, D_m$ Derivationen aus $\mathfrak{D}(r)$, und $\tilde{\mathfrak{D}}$ ist gleich $\Omega_1 D_1 + \cdots\cdots + \Omega_m D_m$; d. h. $\tilde{\mathfrak{D}}$ gehört zum von $\mathfrak{D}(r)$ erzeugten $\tilde{\mathfrak{O}}$-Modul. Mithin ist bewisen, daß $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$ mit dem von $\mathfrak{D}(r)$ erzeugten $\tilde{\mathfrak{O}}$-Modul übereinstimmt.

Ist nun $B_1, \cdots\cdots, B_s$ eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis von $\mathfrak{D}(r)$, so kann man beweisen, daß $B_1, \cdots\cdots, B_s$ auch $\tilde{\mathfrak{O}}$-Basis von $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$ ist. Dazu braucht man nur zu zeigen, daß $B_1, \cdots\cdots, B_s$ $\tilde{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind, weil $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$ der von den $B_1, \cdots\cdots, B_s$ erzeugte $\tilde{\mathfrak{O}}$-Modul ist. Nun nehmen wir an, daß für die Elemente $\Gamma_1, \cdots\cdots, \Gamma_s$ aus $\tilde{\mathfrak{O}}$ die Gleichung $\Gamma_1 B_1 + \cdots\cdots + \Gamma_s B_s = 0$ besteht. Dann gilt für ein beliebiges Element α aus $\bar{\mathfrak{O}}$:

$$\Gamma_1 B_1(\alpha) + \cdots + \Gamma_s B_s(\alpha) = (\Gamma_1 B_1 + \cdots + \Gamma_s B_s)(\alpha) \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^{er}.$$

Da aber die $B_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ alle zu $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r$ gehören, so gibt es die Elemente $\beta_i(\alpha)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ derart, daß die Kongruenzen

$$B_i(\alpha) \equiv \beta_i(\alpha) \qquad \bmod \tilde{\mathfrak{P}}^{er} \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$$

gelten. Weil sich jedes Γ_i $(1 \leq i \leq s)$ als eine Linearform in $\Omega_1, \cdots\cdots, \Omega_m$ mit Koeffizienten aus $\bar{\mathfrak{O}}$ darstellen läßt, so kann man

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\Omega_j \qquad r_{ij} \in \bar{\mathfrak{O}}$$

setzen; daraus erhält man die Kongruenz:

$$\sum_{j=1}^{m} \Omega_j \sum_{i=1}^{s} r_{ij}\beta_i(\alpha) \equiv 0 \qquad \text{mod } \tilde{\mathfrak{P}}^{er}.$$

Berücksichtigt man dabei, daß $\Omega_1, \cdots\cdots, \Omega_m$ eine Minimalbasis von $\tilde{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ ist, so erhält man die Kongruenzen

$$\sum_{i=1}^{s} r_{ij}\beta_i(\alpha) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^r \quad (j = 1, 2, \cdots\cdots, m);$$

d.h. es gilt für jedes j $(1 \leq j \leq m)$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{s} r_{ij}B_i(\alpha) = 0.$$

Weil aber α alle Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ durchlaufen kann, so folgt aus der obigen Gleichung

$$\sum_{i=1}^{s} r_{ij}B_i = 0 \qquad (1 \leq j \leq m);$$

daraus schließt man wegen der $\bar{\mathfrak{O}}$-Unabhängigkeit von $B_1, \cdots\cdots, B_s$:

$$r_{ij}B_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, s;\ j = 1, 2, \cdots\cdots, m);$$

d.h. es gilt für jedes i $(1 \leq i \leq s)$:

$$\Gamma_i B_i = (\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\Omega_j)B_i = \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(r_{ij}B_i) = 0, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Bezeichnet man nun mit den $\mathfrak{P}^{u_i}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ bzw. die annullierenden Ideale von den B_i aus $\bar{\mathfrak{O}}$, so bestätigt man ohne Schwierigkeit, daß die annullierenden Ideale von den B_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ aus $\tilde{\mathfrak{O}}$ bzw. $\mathfrak{P}^{eu_i}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ sind. Hieraus folgt sofort, daß die Dimension von $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$ gleich $e(u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_s)$ ist,

Zusammenfassend haben wir bewiesen:

Satz 4. *Es sei $\tilde{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{K}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\tilde{K}$. Ferner sei e die Verzweigungsordnung von $\tilde{K}$ über $\bar{K}$. Ist dann $\mathfrak{D}(r) = \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ ein Derivationenmodul mit einer $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis $D_1, \cdots\cdots, D_s$, so stimmt die Multiplikatorenbereicherweiterung $\mathfrak{D}(er)$ von $\mathfrak{D}(r)$ zu $\tilde{\mathfrak{O}}$ mit dem von $\mathfrak{D}(r)$ erzeugten $\tilde{\mathfrak{O}}$-Modul überein. Ferner bilden $D_1, \cdots\cdots, D_s$ auch eine $\tilde{\mathfrak{O}}$-*

Basis von $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$, und die Dimension von $\tilde{\mathfrak{D}}(er)$ ist gleich eu, wo u die Dimension von $\mathfrak{D}(r)$ bezeichnet.

§5. Derivationenmoduln der Hauptordnungen von einer endlichen Stufe. Es sei $\mathfrak{J}$ ein Zwischenring zwischen $\bar{\mathfrak{o}}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$. Wir betrachten dann die Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ und $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich, wo $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$ und r eine nicht-negative ganze rationale Zahl bezeichnet. Eine Derivation D aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ heißt eine *Fortsetzung* einer Derivation D' aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$, wenn D in $\mathfrak{J}$ die Derivation D' induziert. Da jede Derivation aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ stets in $\mathfrak{J}$ eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ induziert, so ist eine Derivation aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ sicher eine Fortsetzung irgendeiner Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$. Wenn insbesondere jede Derivation aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ stets (mindestens) eine Fortsetzung auf $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ besitzt, so heiße $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ eine *Fortsetzung* von $\mathfrak{D}(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$.

Es liege eine Körperfolge $\bar{k} \subset K_0 \subset K_1 \subset \cdots\cdots \subset K_s$ vor, welche aus den über $\bar{k}$ endlichen separablen Erweiterungen K_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ besteht. Ferner seien $\mathfrak{O}_i$ $(i = 0, 1, \cdots\cdots, s)$ bzw. die Hauptordnungen von den K_i $(i = 0, 1, \cdots\cdots, s)$. Entsteht dann jedes $\mathfrak{O}_i$ $(1 \leq i \leq s)$ aus $\mathfrak{O}_{i-1}$ durch Ringadjunktion eines Elementes θ_i—$\mathfrak{O}_i = \mathfrak{O}_{i-1}[\theta_i]$—, so heiße die Folge $\mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{O}_s$ von der *Stufe* s und $\mathfrak{O}_s$ über $\mathfrak{O}_0$ von einer *endlichen Stufe*.

Hilfssatz 4. *Es sei $\bar{K}$ eine endliche separable galoissche Erweiterung über $\bar{k}$. Dann ist die Hauptordnung $\bar{\mathfrak{O}}$ von $\bar{K}$ stets über $\bar{\mathfrak{o}}$ von einer endlichen Stufe.*

Beweis. Für das Primideal $\mathfrak{P}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ betrachten wir über $\bar{k}$ den Trägheitskörper K_1 und den Verzweigungskörper K_2 in bezug auf $\mathfrak{P}$. Weil es in $\bar{\mathfrak{O}}$ nur ein einziges Primideal $\mathfrak{P}$ existiert, so können wir ohne Mißverständnis schlechthin von dem Trägheits- und Verzweigungskörper von $\bar{K}/\bar{k}$ sprechen[1]. Bekanntlich ist dabei der Restklassenkörper $\mathfrak{K}_1$ von K_1 über dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ von $\bar{k}$ separabel, und es gilt: $(K_1 : \bar{k}) = (\mathfrak{K}_1 : \mathfrak{k})$. Daher existiert ein primitives Element $\mathfrak{C}_1$ von $\mathfrak{K}_1$ über $\mathfrak{k}$. Wir greifen nun aus $\mathfrak{C}_1$ ein Element θ_1 aus K_1 heraus. Dann kann man ohne Schwierigkeit beweisen, daß $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{o}[\theta_1]$ die Hauptordnung von K_1 ist.

Der Verzweigungskörper K_2 besitzt bekanntlich über K_1 die Ver-

1) Vgl. etwa E. Artin, Algebraic numbers and algebraic functions. I. Lectures at Princeton University (1950/51), Chapter IV., Ramification theory.

zweigungsordnung $(K_2 : K_1)$; d. h. K_2 ist über K_1 vollverzweigt. Daraus schließt man leicht, daß für ein Primelement θ_2 (aus K_2) des Primdivisors aus K_2 $\mathfrak{O}_2 = \mathfrak{O}_1[\theta_2]$ die Hauptordnung von K_2 bildet.

Ist nun $\bar{K} \neq K_2$, so ist $\bar{K}$ eine galoissche Erweiterung über K_2 mit einer p-Gruppe als Galoisgruppe, wo p die Charakteristik des Restklassenkörpers von $\bar{k}$ bezeichnet[1]. Es existiert also eine Körperfolge $K_2 \subset K_3 \subset \cdots\cdots \subset K_s = \bar{K}$ mit $(K_i : K_{i-1}) = p$ $(i = 3, \cdots\cdots, s)$. Da K_i über K_{i-1} $(i \geqq 3)$ vom Primzahlgrad p ist, so muß entweder die Verzweigungsordnung oder der Restklassengrad von K_i über K_{i-1} gleich p sein. Im Falle, wo die Verzweigungsordnung von K_i über K_{i-1} gleich p ist, so existiert wie bei K_2/K_1 ein Element θ_i aus der Hauptordnung $\mathfrak{O}_i$ von K_i derart, daß $\mathfrak{O}_i = \mathfrak{O}_{i-1}[\theta_i]$ ist, wo $\mathfrak{O}_{i-1}$ die Hauptordnung von K_{i-1} bezeichnet. Wenn aber der Restklassengrad von K_i über K_{i-1} gleich p ist, so ist der Restklassenkörper $\mathfrak{K}_i$ von K_i eine rein-inseparable Erweiterung vom Grade p über dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}_{i-1}$ von K_{i-1}. Ist also θ_i ein Element aus K_i, welches zu einer primitiven Restklasse von $\mathfrak{K}_i$ über $\mathfrak{K}_{i-1}$ gehört, so entsteht die Hauptordnung $\mathfrak{O}_i$ von K_i aus $\mathfrak{O}_{i-1}$ durch Ringadjunktion von θ_i: $\mathfrak{O}_i = \mathfrak{O}_{i-1}[\theta_i]$. Somit ist bewiesen, daß $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ von einer endlichen Stufe ist.

Bemerkung. Im Falle, wo der Restklassenkörper einer endlichen separablen (nicht notwendig galoisschen) Erweiterung $\bar{K}$ über dem Restklassenkörper von $\bar{k}$ separabel ist, so ist $\bar{K}$ über dem Trägheitskörper K_1 von $\bar{K}/\bar{k}$ vollverzweigt. Daher gilt, wie beim Beweis von Hilfssatz 4 gezeigt, für ein Primelement θ des Primideales aus $\bar{\mathfrak{O}}$ stets $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_1[\theta]$, wo $\mathfrak{O}_1$ die Hauptordnung von K_1 bezeichnet. Man kann sogar ein Element α aus $\bar{\mathfrak{O}}$ so wählen, daß $\bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{o}}[\alpha]$ ist[2].

Hilfssatz 5. $(\bar{k} \leqq) K^{(1)} \subset K^{(2)} (\leqq \bar{K})$ *sei eine Körperfolge zwischen* $\bar{K}$ *und* $\bar{k}$. *Die Hauptordnungen von* $K^{(1)}$ *und* $K^{(2)}$ *seien bzw. mit* $\mathfrak{O}^{(1)}$ *und* $\mathfrak{O}^{(2)}$ *bezeichnet. Ferner seien* $\mathfrak{D}^{(1)}(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}^{(1)}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ *und* $\mathfrak{D}^{(2)}(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}^{(2)}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ *die Derivationenmoduln mit* $\bar{\mathfrak{O}}$ *als Multiplikatorenbereich, wo* $\mathfrak{P}$ *das Primideal aus* $\bar{\mathfrak{O}}$ *bezeichnet. Ist dann* $\mathfrak{O}^{(2)}$ *über* $\mathfrak{O}^{(1)}$ *von einer endlichen Stufe, so gibt es eine natürliche Zahl* N *von der Art, daß für jedes* $\nu \geqq N$ $\mathfrak{D}^{(2)}(\nu)$ *stets eine Fortsetzung von* $\mathfrak{D}^{(1)}(\nu)$ *ist.*

Beweis. Da $\mathfrak{O}^{(2)}$ über $\mathfrak{O}^{(1)}$ von einer endlichen Stufe ist, so existiert eine Folge $\mathfrak{O}^{(1)} = \mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{O}_s = \mathfrak{O}^{(2)}$ von der Art, daß

1) Vgl. etwa E. Artin, a. a. O., S. 76 - 77.
2) Vgl. etwa H. Hasse, Zahlentheorie, Berlin (1950), S. 319 - 320.

jedes $\mathfrak{O}_i$ $(0 \leq i \leq s)$ die Hauptordnung eines Zwischenkörpers zwischen $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ ist, und daß $\mathfrak{O}_i$ aus $\mathfrak{O}_{i-1}$ durch Ringadjunktion eines Elementes θ_i entsteht: $\mathfrak{O}_i = \mathfrak{O}_{i-1}[\theta_i]$ $(i > 0)$. Zunächst betrachten wir die Hauptordnung $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_0[\theta_1]$; die normierte definierende Gleichung von θ_1 in $\mathfrak{O}_0$ bezeichnen wir mit $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n = 0$. Da $\bar{K}$ über $\bar{k}$ algebraisch ist, so genügen die a_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ bzw. den normierten definierenden Gleichungen $h_i(x) = 0$ in $\bar{\mathfrak{o}}$. Nun sei $\mathfrak{P}^{\mu_0}$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag von $f'(\theta_1)$, und $\mathfrak{P}^{\mu_i}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ seien die $\mathfrak{P}$-Beiträge von den $h_i'(a_i)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$. Dann setzen wir für $\mu = \text{Max}\,(\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_n)$

$$N = \mu + \mu_0 .$$

Für eine natürliche Zahl $\nu \geq N$ betrachten wir den Derivationenmodul $\mathfrak{D}_0(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_0, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^\nu)$. Ist dann D_0 eine beliebige Derivation aus $\mathfrak{D}_0(\nu)$, so gelten offenbar die Kongruenzen:

$$h_1'(a_i)\,D_0(a_i) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^\nu \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n)\,;$$

es bestehen also die Kongruenzen:

$$D_0(a_i) \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^{\nu-\mu_i} \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n),$$

daher sind $D_0(a_i) \equiv 0$ mod $\mathfrak{P}^{\mu_0}$. Dann schließt man sofort, daß die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_1^{n-i} D_0(a_i) + f'(\theta_1)x \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^\nu$$

in $\mathfrak{O}_1$ lösbar ist. Nach einem von Y. Kawada bewiesenen Satz[1] existiert also in $\mathfrak{D}_1(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_1, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ eine Fortsetzung von D_0. Da D_0 eine beliebige Derivation aus $\mathfrak{D}_0(\nu)$ ist, so ist $\mathfrak{D}_1(\nu)$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}_0(\nu)$.

Wir nehmen jetzt an, daß der Satz bis $s-1$ richtig ist; d.h. es existiert eine natürliche Zahl N_1 von der Art, daß für jedes $\nu \geq N_1$ $\mathfrak{D}_0(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_0, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ auf $\mathfrak{D}_{s-1}(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{s-1}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ fortsetzbar ist. Ferner existiert eine natürliche Zahl N_2 von der Art, daß für jedes $\nu \geq N_2$ $D_{s-1}(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{s-1}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ auf $\mathfrak{D}_s(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_s, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ fortsetzbar ist. Dann sieht man sofort ein, daß für jedes $\nu \geq N = \text{Max}$ (N_1, N_2) der Derivationenmodul $\mathfrak{D}^{(1)}(\nu)$ auf $\mathfrak{D}_{s-1}(\nu)$ und $\mathfrak{D}_{s-1}(\nu)$ auf $\mathfrak{D}_s(\nu) = \mathfrak{D}^{(2)}(\nu)$ fortsetzbar ist; d.h. $\mathfrak{D}^{(2)}(\nu)$ ist eine Fortsetzung von $\mathfrak{D}^{(1)}(\nu)$, w.z.b.w.

---

1) Y. Kawada, a.a.O., S. 303.

Es sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{O}_s$ $(\leqq \bar{\mathfrak{O}})$ wieder eine Folge der Hauptordnungen von der Stufe s, und $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$. Dann existiert nach Hilfssatz 5 eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes $\nu \geqq N$ der Derivationenmodul $\mathfrak{D}_s(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_s, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ eine Fortsetzung der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}_i(\nu) = \mathfrak{O}(\mathfrak{O}_i, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s-1)$ sind. Offenbar ist dabei der Derivationenmodul $\mathfrak{D}_{i-1,i}(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_i, \mathfrak{O}_{i-1}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$, dessen jede Derivation den Ring $\mathfrak{O}_{i-1}$ auf das Nullelement aus $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu$ abbildet, ein $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermodul von $\mathfrak{D}_i(\nu)$, also ist jede Derivation aus $\mathfrak{D}_{i-1,i}(\nu)$ auf $\mathfrak{D}_s(\nu)$ fortsetzbar. Da $\mathfrak{O}_i$ über $\mathfrak{O}_{i-1}$ $(i \geqq 1)$ von der Stufe 1 ist, so ist $\mathfrak{D}_{i-1,i}(\nu)$ nach Satz 1 ein zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul. Ein erzeugendes Element von $\mathfrak{D}_{i-1,i}(\nu)$ besitzt also in $\mathfrak{D}_s(\nu)$ eine Fortsetzung D_i. Ist nun D eine Derivation aus $\mathfrak{D}_s(\nu)$, so induziert D in $\mathfrak{O}_1$ eine Derivation aus $\mathfrak{D}_1(\nu) = \mathfrak{D}_{0,1}(\nu)$. Man kann daher ein Element ξ_1 aus $\bar{\mathfrak{O}}$ so bestimmen, daß D und $\xi_1 D_1$ in $\mathfrak{O}_1$ ein und dieselbe Derivation induzieren; d.h. $D - \xi_1 D_1$ bildet den ganzen Ring $\mathfrak{O}_1$ auf das Nullelement aus $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu$ ab. Also induziert $D - \xi_1 D_1$ in $\mathfrak{O}_2$ eine Derivation aus $\mathfrak{D}_{1,2}(\nu)$. Dann kann man ein Element ξ_2 aus $\bar{\mathfrak{O}}$ so bestimmen, daß $D - \xi_1 D_1 - \xi_2 D_2$ den ganzen Ring $\mathfrak{O}_2$ auf das Nullelement aus $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu$ abbildet; d.h. $D - \xi_1 D_1 - \xi_2 D_2$ induziert in $\mathfrak{O}_3$ eine Derivation aus $\mathfrak{D}_{2,3}(\nu)$. Durch vollst¨ndige Induktion beweist man sofort, daß $D = \xi_1 D_1 + \cdots\cdots + \xi_s D_s$ ist, wo die ξ_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ passend gewählte Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnen. Somit haben wir bewiesen:

Hilfssatz 6. *Es sei $\mathfrak{o} = \mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{O}_s$ $(\leqq \bar{\mathfrak{O}})$ eine Folge der Hauptordnungen von der Stufe s und $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$. Dann existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes $\nu \geqq N$ eine beliebige Derivation D aus dem Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_s, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ von der Form $\xi_1 D_1 + \cdots\cdots + \xi_s D_s$ ist, wo die ξ_i $(i = 1, \cdots\cdots, s)$ Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnen. Dabei bezeichnet D_i $(1 \leqq i \leqq s)$ eine Fortsetzung eines erzeugenden Elementes von $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_i, \mathfrak{O}_{i-1}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$ auf $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_s, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^\nu)$.*

Es sei $\tilde{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{K}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\tilde{K}$. Ist dann $\tilde{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ von einer endlichen Stufe, so existiert nach Hilfssatz 5 eine solche natürliche Zahl N, daß für jedes $\nu \geqq N$ der Derivationenmodul $\tilde{\mathfrak{D}}(\nu) = \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ stets eine Fortsetzung des Derivationenmoduls $\mathfrak{D}(\nu) = \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ ist, wo $\tilde{\mathfrak{P}}$ das Primideal aus $\tilde{\mathfrak{O}}$ bezeichnet. Ordnet man daher einer jeden Derivation D aus $\tilde{\mathfrak{D}}(\nu)$ die durch D induzierte Derivation aus $\mathfrak{D}(\nu)$ zu, so entsteht dadurch ein $\tilde{\mathfrak{O}}$-Homomorphismus Φ von $\tilde{\mathfrak{D}}(\nu)$ *auf* $\mathfrak{D}(\nu)$. Dabei besteht der Kern von Φ ersichtlich aus allen denjenigen Derivationen aus $\tilde{\mathfrak{D}}(\nu)$, welche $\bar{\mathfrak{O}}$ auf das Nullelement aus $\tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu$ abbilden:

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 2, Art. 3

d. h. der Kern von Φ ist der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$. Man erhält also folgende $\tilde{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})\Big/\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu}) \cong \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu}).$$

Außerdem können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$, $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ und $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ bzw. die Maximaldimensionen d, δ und d besitzen, wenn wir ν von vornherein hinreichend groß nehmen. Somit haben wir folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 7. *Es sei $\tilde{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{K}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$ mit $\tilde{\mathfrak{P}}$ als dem Primideal. Ist dann $\tilde{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ von einer endlichen Stufe, so kann man eine natürliche Zahl N so bestimmen, daß für jedes $\nu \geq N$ die Derivatiouenmoduln $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$, $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ und $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ bzw. die Maximaldimensionen $\tilde{d}$, δ und d besitzen, und daß die $\tilde{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation*

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})\Big/\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu}) \cong \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$$

besteht. Ferner gilt die Dimensionsrelation:

$$\tilde{d} = \delta + d.$$

§6. Differenten im Kleinen Es sei $\bar{K}$ wieder eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$ mit $\mathfrak{P}$ als dem Primideal. Ferner sei die Maximaldimension der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{r})$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots)$ mit d bezeichnet. Dann definieren wir das Ideal $\mathfrak{D}(\bar{K}/\bar{k}) = \mathfrak{P}^{d}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ als die *Differente* von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada.

Zunächst nehmen wir an, daß $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{o}$ von der Stufe 1 ist: $\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{o}[\theta]$. Bezeichnet dann $f(x) = 0$ die normierte definierende Gleichung von θ in $\mathfrak{o}$, so besitzt der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/(f'(\theta)))$ nach Hilfssatz 2 die Maximaldimension d; ferner gilt noch die $\bar{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:

$$\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/(f'(\theta))) \cong \bar{\mathfrak{O}}/(f'(\theta)).$$

Daraus schließt man sofort, daß $\mathfrak{D}(\bar{K}/\bar{k}) = \mathfrak{P}^{d} = (f'(\theta))$ ist. Nach Struktur von $\bar{\mathfrak{O}}$ ist ein beliebiges Element γ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ als ein Polynom $g(\theta)$ in θ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ darstellbar. Dabei kann man ohne Einschränkung annehmen, daß der Grad von $g(x)$ nach x nicht größer ist als der von $f(x)$. Mit Hilfe der bekannten Eulerschen Formel beweist man leicht, daß die Spur von $\frac{r}{f'(\theta)} = \frac{g(\theta)}{f'(\theta)}$ nach k zu $\bar{\mathfrak{o}}$ gehört; d.h. $(f'(\theta))$ ist ein Teiler der von R. Dedekind definierten Differente $\mathfrak{D}^*(\bar{K}/\bar{k})$ von $\bar{K}/\bar{k}$[1]. Da bekanntlich $\mathfrak{D}^*(\bar{K}/\bar{k})$ ein Teiler von $f'(\theta)$ ist[2], so muß $(f'(\theta)) = \mathfrak{D}^*(\bar{K}/\bar{k})$ sein. Mithin ist bewiesen:

Die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada stimmt mit der von R. Dedekind definierten überein, falls $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ von der Stufe 1 *ist.*

Nun sei $\bar{k} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots\cdots \subset K_s = \bar{K}$ eine Folge der Körper, welche über $\bar{k}$ endlich separabel sind, und die $\mathfrak{O}_i$ $(i = 0, 1, \cdots\cdots, s)$ seien bzw. die Hauptordnungen von den K_i $(i = 0, 1, \cdots\cdots, s)$, wo $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{O}_0$ gesetzt ist. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Folge $\mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{O}_s$ von der Stufe s ist. Dann behaupten wir, daß die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada mit der von R. Dedekind definierten übereinstimmt. Da für $s = 1$ die Behauptung bereits bewiesen worden ist, so nehmen wir an, daß die Behauptung bis $s - 1$ richtig ist. Nun sei $\mathfrak{P}_{s-1}$ das Primideal aus $\mathfrak{O}_{s-1}$. Dann kann man eine natürliche Zahl N so bestimmen, daß für jedes $\nu \geqq N$ der Derivationenmodul $\mathfrak{D}_{s-1}(\nu) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{s-1}, \bar{\mathfrak{o}};\ \mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{P}_{s-1}^{\nu})$ mit $\mathfrak{O}_{s-1}$ als Multiplikatorenbereich die Maximaldimension d_{s-1} besitzt. Nach Annahme ist die Differente $\mathfrak{P}_{s-1}^{d_{s-1}}$ von $K_{s-1}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada identisch mit der von R. Dedekind definierten. Bezeichnet man nun mit e den Exponenten des Primideals $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}_s = \bar{\mathfrak{O}}$ in $\mathfrak{P}_{s-1}$, so kann man nach Hilfssatz 7 eine natürliche Zahl N_1 so bestimmen, daß für jedes $\nu \geqq N_1$ der Derivationenmodul $\mathfrak{D}_s(\nu) = \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ bzw. $\mathfrak{D}_{s-1,s}(\nu) = \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{O}_{s-1};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich die Maximaldimension d_s bzw. δ_s besitzt, und daß die $\bar{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation

$$\mathfrak{D}_s(\nu)\Big/\mathfrak{D}_{s-1,s}(\nu) \cong \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{s-1}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$$

gilt. Wenn man also die Zahl N von vornherein so bestimmt, daß die Ungleichung $eN \geqq N_1$ gilt, so besteht für jedes $\nu \geqq N$ die $\bar{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:

$$\mathfrak{D}_s(e\nu)\Big/\mathfrak{D}_{s-1,s}(e\nu) \cong \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{s-1}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{e\nu}).$$

Weil nach Satz 4 $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{s-1}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{e\nu})$ die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\mathfrak{D}_{s-1}(\nu)$ zu $\bar{\mathfrak{O}}$ ist und die Dimension von $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{s-1}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{e\nu})$

1), 2) H. Hasse, a. a. O., S. 315 - 320.

gleich ed_{s-1} ist, so erhält man aus der obigen Isomorphierelation die Gleichung:

$$d_s = \delta_s + ed_{s-1};$$

d.h. es gilt:

$$\mathfrak{P}^{d_s} = \mathfrak{P}^{\delta_s}\mathfrak{P}^{ed_{s-1}} = \mathfrak{P}^{\delta_s}\mathfrak{P}_{s-1}^{d_{s-1}}.$$

Da $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{O}_{s-1}$ von der Stufe 1 ist, so ist nach Induktionsannahme $\mathfrak{P}^{\delta_s}$ die Differente von $\bar{K}/K_{s-1}$ im Sinne von R. Dedekind. Wegen des bekannten Schachtelungssatz über die Differenten[1] ist dann $\mathfrak{P}^{d_s}$ die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von R. Dedekind. Anderseits ist das Ideal $\mathfrak{P}^{d_s}$ definitionsgemäß die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada; somit ist die Behauptung auch für s bewiesen.

Hilfssatz 8. *Es sei $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$. Ist dann $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ von einer endlichen Stufe, so stimmt die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada mit der von R. Dedekind definierten überein.*

Nach Hilfssatz 4 ist $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{o}}$ von einer endlichen Stufe, wenn $\bar{K}$ über $\bar{k}$ *galoissch* ist. Somit haben wir bewiesen:

Zusatz. *Ist $\bar{K}$ über $\bar{k}$ endlich separabel und galoissch, so stimmen die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada und die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von R. Dedekind einander überein.*

Satz 5. *Ist $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$, so stimmen die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada und die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von R. Dedekind einander überein.*

Beweis. Zum Beweis betrachten wir eine endliche separable, galoissche Erweiterung $\tilde{K}$ über $\bar{k}$, welche $\bar{K}$ enthält. Die Hauptordnungen von $\bar{K}$ und $\tilde{K}$ seien bzw. mit $\bar{\mathfrak{O}}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}$ bezeichnet. Ferner seien $\mathfrak{P}$ und $\tilde{\mathfrak{P}}$ bzw. die Primideale aus $\bar{\mathfrak{O}}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}$. Ist dann e der Exponent von $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\tilde{\mathfrak{P}}$, so existiert nach Hilfssatz 7 eine natürliche Zahl ν von der Art, daß die Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})$, $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})$ und $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})$ bzw. die Maximaldimensionen $\tilde{d}$, δ uud $\tilde{d}_0$ besitzen, und daß die $\tilde{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})\Big/\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu}) \cong \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})$$

gilt, weil nach Hilfssatz 4 $\tilde{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ von einer endlichen Stufe ist.

1) H. Hasse, a.a.O., S. 316-317.

Da nach Satz 4 $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})$ die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ zu $\tilde{\mathfrak{O}}$ ist, so ist

$$\tilde{d}_0 = ed,$$

wo d die Maximaldimension der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{r})$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots)$ mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich bezeichnet. Aus der obigen $\tilde{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation erhält man die Gleichung

$$\tilde{d} = \delta + ed.$$

Weil $\tilde{\mathfrak{O}}$ über $\bar{\mathfrak{O}}$ bzw. $\bar{\mathfrak{o}}$ von einer endlichen Stufe ist, so ist nach Hilfssatz 8 $\tilde{\mathfrak{P}}^{\delta}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{P}}^{\tilde{d}}$ die Differente von $\tilde{K}/\bar{K}$ bzw. $\tilde{K}/\bar{k}$ im Sinne von R. Dedekind. Nach dem Schachtelungssatz über die Differenten ist $\tilde{\mathfrak{P}}^{\tilde{d}-\delta} = \tilde{\mathfrak{P}}^{ed} = \mathfrak{P}^{d}$ die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von R. Dedekind, aber das Ideal $\mathfrak{P}^{d}$ ist nach Definition die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada. Mithin ist der Satz bewiesen.

Satz 6. Schachtelungssatz. *Es sei $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$ und $\tilde{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{K}$. Ferner seien $\bar{\mathfrak{O}}$ und $\tilde{\mathfrak{O}}$ bzw. die Hauptordnungen von $\bar{K}$ und $\tilde{K}$. Ist dann $\tilde{\mathfrak{P}}$ das Primideal aus $\tilde{\mathfrak{O}}$, so existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes $\nu \geqq N$ stets die $\tilde{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation*

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})\Big/\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu}) \cong \mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$$

gilt. Dabei sind $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$, $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ und $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ die Derivationenmoduln mit $\tilde{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$. Dann existiert eine natürliche Zahl N_0 von der Art, daß für jedes $\nu \geqq N_0$ der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ stets die Maximaldimension d besitzt. Ist nun e der Exponent von $\tilde{\mathfrak{P}}$ in $\mathfrak{P}$, so ist nach Satz 4 $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})$ die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ zu $\tilde{\mathfrak{O}}$ und infolgedessen ist die Dimension ed von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{e\nu})$ maximal. Nun können wir eine natürliche Zahl N mit $N \geqq eN_0$ so bestimmen, daß für jedes $\nu \geqq N$ die Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ und $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu})$ mit $\tilde{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich bzw. die Maximaldimensionen $\tilde{d}$ und δ besitzen. Dann ist nach Satz 5 $\tilde{\mathfrak{P}}^{\tilde{d}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{P}}^{\delta}$ gleich der Differente von $\tilde{K}/\bar{k}$ bzw. $\tilde{K}/\bar{K}$ im Sinne von R. Dedekind. Wegen des Schachtelungssatzes über die Differenten im Sinne von R. Dedekind ist daher das Ideal $\tilde{\mathfrak{P}}^{\tilde{d}-\delta}$ die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 2, Art. 3

von R. Dedekind. Weil nach Satz 5 $\mathfrak{P}^a = \tilde{\mathfrak{P}}^{ea}$ die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ im Sinne von R. Dedekind ist, so gilt offenbar die Gleichung:

$$\tilde{d} - \tilde{\delta} = ed.$$

Ordnet man nun jeder Derivation $\tilde{D}$ aus $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ die durch $\tilde{D}$ induzierte Derivation D aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ zu, so bestimmt die Zuordnung $\tilde{D} \to D$ einen $\tilde{\mathfrak{O}}$-Homomorphismus von $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ in $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$; daher ist die Faktorgruppe $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)/\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ $\tilde{\mathfrak{O}}$-isomorph in $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ abgebildet. Weil die Kompositionslänge der $\tilde{\mathfrak{O}}$-Moduln von $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)/\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ gleich $\tilde{d} - \tilde{\delta}$ ist, und weil die Kompositionslänge der $\tilde{\mathfrak{O}}$-Moduln von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ gleich ed ist, so folgt aus der obigen Isomorphie

$$\tilde{d} - \tilde{\delta} \leqq ed.$$

Da, wie oben gezeigt, die Gleichung $\tilde{d} - \tilde{\delta} = ed$ besteht, so muß die Faktorgruppe $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)/\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{O}};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ mit dem Modul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \tilde{\mathfrak{O}}/\tilde{\mathfrak{P}}^\nu)$ $\tilde{\mathfrak{O}}$-isomorph sein.

§7. Relationen zwischen den Differenten und Quasidifferenten im Kleinen. Es sei $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$ und $\bar{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$. Bezeichnet dann $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$, so ist jedes von Null verschiedenes Ideal bekanntlich eine Potenz $\mathfrak{P}^r$ von $\mathfrak{P}$ $(r \geqq 0)$. Nach Satz 3 existiert das maximale Ideal $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{P}^{d_0}$ von der Art, daß der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ die Maximaldimension d besitzt. Dabei heißt das Ideal $\mathfrak{D}_0$ die Quasidifferente von $\bar{K}/\bar{k}$.

Es sei zunächst $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ der Nullmodul. Dann bestätigt man leicht, daß $d_0 = d = 0$ ist; d. h. die Quasidifferente von $\bar{K}/\bar{k}$ ist gleichzeitig die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$. Ist aber $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ kein Nullmodul, so existiert eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis $D_1, \cdots\cdots, D_s$ von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$. Wir bezeichnen mit den $\mathfrak{P}^{e_i}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ bzw. die annullierenden Ideale von den D_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$. Für ein beliebiges Element γ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ sei $\mathfrak{P}^{\mu_i(\gamma)}$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag von $D_i(\gamma)$[1]. Dann gilt ersichtlich die Ungleichung $e_i + \mu_i(\gamma) \geqq d_0$ $(1 \leqq i \leqq s)$, weil $\mathfrak{P}^{e_i} D_i(\gamma) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{d_0}$ ist, d. h. es ist $\mu_i(\gamma) \geqq d_0 - e$. Ferner gibt es sicher ein Element γ_i aus

1) Ist $D_i(\gamma) = 0$, so soll unter dem $\mathfrak{P}$-Beitrag von $D_i(\gamma)$ das Ideal $\mathfrak{P}^{d_0}$ verstanden werden.

$\bar{\mathfrak{O}}$ von der Art, daß der $\mathfrak{P}$-Beitrag $\mu_i(r_i)$ von $D_i(r_i)$ gleich $\mathfrak{P}^{d_0-e_i}$ ist; denn sonst würde das annullierende Ideal von D_i ein echter Teiler von $\mathfrak{P}^{e_i}$ sein.

Wir setzen $e = \mathrm{Max}\,(e_1, \cdots\cdots, e_s)$ und nehmen an, daß $d_0 \neq e$ ist. Dann ist offenbar $d_0 > e$; wegen $e_i + \mu_i(r) \geqq d_0$ $(1 \leqq i \leqq s)$ gilt für jedes i $(1 \leqq i \leqq s)$ und für ein beliebiges Element r aus $\bar{\mathfrak{O}}$:

$$\mu_i(r) > 0.$$

Nun definieren wir für jedes D_i $(1 \leqq i \leqq s)$ eine Operation D_i^*, indem wir für ein beliebiges Element r aus $\bar{\mathfrak{O}}$

$$D_i^*(r) \equiv \pi^{-1}D_i(r) \qquad \mathrm{mod}\quad \mathfrak{P}^{d_0-1}$$

setzt, wo π ein beliebig festgelegtes Primelement von $\mathfrak{P}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnet. Nach Definition ist $D_i^*(r)$ als eine Restklasse mod $\mathfrak{P}^{d_0-1}$ durch $D_i(r)$ und π eindeutig bestimmt. Nun wollen wir zeigen, daß D_i^* eine Derivation aus dem Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0-1})$ ist. Es seien nämlich r_1, r_2 Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$. Dann gilt:

$$D_i(r_1 + r_2) \equiv D_i(r_1) + D_i(r_2) \qquad \mathrm{mod}\quad \mathfrak{P}^{d_0};$$

hieraus folgt ohne weiteres:

$$\begin{aligned} D_i^*(r_1 + r_2) &\equiv \pi^{-1}D_i(r_1 + r_2) \equiv \pi^{-1}D_i(r_1) + \pi^{-1}D_i(r_2) \\ &\equiv D_i^*(r_1) + D_i^*(r_2) \qquad \mathrm{mod}\quad \mathfrak{P}^{d_0-1}. \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus $D_i(r_1 r_2) = r_2 D_i(r_1) + r_1 D_i(r_2)$ die Kongruenz:

$$D_i^*(r_1 r_2) \equiv \pi^{-1}D_i(r_1 r_2) \equiv r_2 D_i^*(r_1) + r_1 D_i^*(r_2) \qquad \mathrm{mod}\quad \mathfrak{P}^{d_0-1}.$$

Da D_i^* offenbar $\bar{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich besitzt, so sind $D_1^*, \cdots\cdots, D_s^*$ Derivationen aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0-1})$; ferner sind die annullierenden Ideale von den D_i^* $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ bzw. gleich $\mathfrak{P}^{e_i}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$.

Nun gelte für die Elemente $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_s$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$:

$$H^* = \lambda_1 D_1^* + \cdots\cdots + \lambda_s D_s^* = 0.$$

Dann gilt für ein beliebiges Element r aus $\bar{\mathfrak{O}}$:

$$H^*(r) = \lambda_1 D_1^*(r) + \cdots\cdots + \lambda_s D_s^*(r) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\quad \mathfrak{P}^{d_0-1};$$

daraus folgt ohne weiteres:

$$H(r) \equiv \pi H^*(r) \equiv \lambda_1 D_1(r) + \cdots\cdots + \lambda_s D_s(r) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\quad \mathfrak{P}^{d_0}.$$

Weil dabei r alle Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ durchlaufen kann, so schließt man aus der obigen Kongruenz, daß $H=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i D_i$ die Nullderivation aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ ist. Da $D_1, \cdots\cdots, D_s$ eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ ist, so müssen nach Definition $\lambda_1 D_1, \cdots\cdots, \lambda_s D_s$ die Nullderivation sein; hieraus folgt ohne Schwierigkeit, daß $\lambda_1 D_1^*, \cdots\cdots, \lambda_s D_s^*$ die Nullderivation aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0-1})$ sind. Somit ist gezeigt, daß $D_1^*, \cdots\cdots, D_s^*$ $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind. Der von $D_1^*, \cdots\cdots, D_s^*$ erzeugte Untermodul von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0-1})$ besitzt offenbar die Dimension $e_1+\cdots\cdots+e_s=d$, also gibt ein echter Teiler $\mathfrak{P}^{d_0-1}$ von $\mathfrak{P}^{d_0}$ dem Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0-1})$ die Maximaldimension d an, was aber ein Widerspruch ist. Daher muß $d_0=e$ sein. Es gilt also folgender

Satz 7. *Es sei $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$ und $\mathfrak{P}^{d_0}$ die Quasidifferente von $\bar{K}/\bar{k}$. Ist dann $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ kein Nullmodul, so ist $\mathfrak{P}^{d_0}$ gleich dem Minimalideal unter den annullierenden Idealen der Derivationen einer beliebigen $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$.*

Ferner gilt folgender

Satz 8. *Es sei $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$. Dann ist die Quasidifferente $\mathfrak{P}^{d_0}$ von $\bar{K}/\bar{k}$ stets ein Teiler der Differente von $\bar{K}/\bar{k}$. Ferner ist die Quasidifferente von $\bar{K}/\bar{k}$ dann und nur dann gleich der Differente von $\bar{K}/\bar{k}$, wenn der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ $\bar{\mathfrak{O}}$-zyklisch ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ der Nullmodul, so ist, wie bereits bewiesen, $\mathfrak{P}^{d_0}=\bar{\mathfrak{O}}=\mathfrak{P}^{d}$. Andernfalls besitzt $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis $D_s, \cdots\cdots, D_s$. Bezeichnet nun $\mathfrak{P}^{e_i}$ das annullierende Ideal von D_i $(1\leq i\leq s)$, so ist $e_1+\cdots\cdots+e_l=d$ die Dimension von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$; ferner ist $\mathfrak{P}^{d}$ die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$. Da nach Satz 7 $\mathfrak{P}^{d_0}$ das Minimalideal unter den $\mathfrak{P}^{e_i}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, s)$ ist, so ist $\mathfrak{P}^{d_0}$ offenbar ein Teiler von $\mathfrak{P}^{d}$.

Nun nehmen wir an, daß $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ $\bar{\mathfrak{O}}$-zyklisch ist. Dann ist $\mathfrak{P}^{d_0}=\bar{\mathfrak{O}}$ die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$, wenn $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ der Nullmodul ist; andernfalls besitzt $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis mit einem einzigen Basiselement D. Das annullierende Ideal von D ist nach Satz 7 einerseits die Quasidifferente von $\bar{K}/\bar{k}$ und anderseits definitionsgemäß die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$.

Umgekehrt sei die Quasidifferente $\mathfrak{P}^{d_0}$ von $\bar{K}/\bar{k}$ gleich der Differente $\mathfrak{P}^{d}$ von $\bar{K}/\bar{k}$. Ist dann $\mathfrak{P}^{d}=\bar{\mathfrak{O}}$, so ist $\mathfrak{P}^{d_0}=\bar{\mathfrak{O}}$, und $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ ist als der Nullmodul sicher $\bar{\mathfrak{O}}$-zyklisch. Ist aber $\mathfrak{P}^{d}\neq\bar{\mathfrak{O}}$, so besitzt $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ eine $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis $D_1, \cdots\cdots, D_s$. Bezeichnet nun

$\mathfrak{P}^{e_i}$ das annullierende Ideal von D_i $(1 \leqq i \leqq s)$, so ist $e_1 + \cdots\cdots + e_s = d$. Ferner ist nach Satz 7

$$d_0 = \operatorname{Max}(e_1, \cdots\cdots, e_s).$$

Wenn also $\mathfrak{P}^{d_0} = \mathfrak{P}^d$ ist, so muß notwendig $s = 1$ sein; d.h. $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{d_0})$ ist $\bar{\mathfrak{O}}$-zyklisch.

Es sei γ ein Element aus der Hauptordnung $\bar{\mathfrak{O}}$ einer endlichen separablen Erweiterung $\bar{K}$ vom Grade n über $\bar{k}$. Dann bezeichnen wir mit $\gamma^{(1)} = \gamma, \gamma^{(2)}, \cdots\cdots, \gamma^{(n)}$ die sämtlichen konjugierten Elemente zu γ. Das Element $(\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}) \cdots\cdots (\gamma^{(1)} - \gamma^{(n)})$ heißt die *Differente* von γ[1]. Nach der Differententheorie von R. Dedekind ist bekannt, daß die Differente $\mathfrak{D}$ von $\bar{K}/\bar{k}$ ein gemeinsamer Teiler der Differenten aller Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ ist. Nun beweisen wir folgenden

Satz 9. *Ist $\bar{K}$ eine endliche separable Erweiterung über $\bar{k}$, so ist die Differente $\mathfrak{D}$ von $\bar{K}/\bar{k}$ dann und nur dann der größte gemeinsame Teiler der Differenten aller ganzen Elemente aus $\bar{K}$, wenn die Hauptordnung $\bar{\mathfrak{O}}$ von $\bar{K}$ über der Hauptordnung $\bar{\mathfrak{o}}$ von $\bar{k}$ von der Stufe* 1 *ist.*

Beweis. Es sei θ ein (ganzes) Element aus $\bar{K}$ von der Art, daß $\bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{o}}[\theta]$ ist. Wie bereits in §6 gezeigt, ist dann die Differente von θ gleich der Differente $\mathfrak{D}$ von $\bar{K}/\bar{k}$. Da $\mathfrak{D}$ in der Differente eines beliebigen ganzen Elementes aus $\bar{K}$ aufgeht, so ist $\mathfrak{D}$ der größte gemeinsame Teiler der Differenten aller ganzen Elemente aus $\bar{K}$.

Umgekehrt sei $\mathfrak{D}$ der größte gemeinsame Teiler der Differenten aller ganzen Elemente aus $\bar{K}$. Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$, so ist $\mathfrak{D}$ eine Potenz $\mathfrak{P}^d$ $(d \geqq 0)$ von $\mathfrak{P}$. Ferner sieht man sofort ein, daß es ein ganzes Element θ aus $\bar{K}$ gibt, dessen Differente $\mathfrak{D}(\theta)$ mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^d$ übereinstimmt. Ferner ist bekannt, daß der Quotient $\mathfrak{D}(\theta)/\mathfrak{D}$ ein Ideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$ ist, dessen Elemente alle zu $\bar{\mathfrak{o}}[\theta]$ gehören[2]. Da aber $\mathfrak{D}(\theta)/\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{O}}$ ist, so muß $\bar{\mathfrak{O}} \leqq \bar{\mathfrak{o}}[\theta]$ sein; wegen $\bar{\mathfrak{O}} \geqq \bar{\mathfrak{o}}[\theta]$ ist also $\bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{o}}[\theta]$.

Wir wollen fortdauernd alle Bezeichnungen aus Satz 9 festhalten. Ist nun $\bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{o}}[\theta]$, so ist, wie bereits in §2 gezeigt, für jede ganze rationale Zahl r $(\geqq 0)$ der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ $\bar{\mathfrak{O}}$-zyklisch, wo $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnet. Nach Satz 8 ist die Quasidifferente $\mathfrak{D}_0$ von $\bar{K}/\bar{k}$ gleich der Differente von $\bar{K}/\bar{k}$. Es gilt also folgender

1) Die Differente von γ gehört auch zu $\bar{\mathfrak{O}}$, weil sie ein ganzes Element aus $\bar{K}$ ist.
2) Vgl. etwa E. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig, 1923, S. 134 - 135.

Zusatz 1 zu Satz 9. *Ist die Differente $\mathfrak{D}$ von $\bar{K}/\bar{k}$ gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Differenten aller ganzen Elemente aus $\bar{K}$, so stimmt $\mathfrak{D}$ mit der Quasidifferente von $\bar{K}/\bar{k}$ überein.*

Nun nehmen wir an, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von $\bar{K}$ über dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ von $\bar{k}$ separabel ist. Dann existiert, wie bereits bemerkt (S. 129), ein ganzes Element θ aus $\bar{K}$ derart, daß $\bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{o}}[\theta]$ ist. Nach Satz 9 und Zusatz 1 zu Satz 9 gilt daher folgender

Zusatz 2 zu Satz 9. *Ist der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von $\bar{K}$ über dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ von $\bar{k}$ separabel, so ist die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ der größte gemeinsame Teiler der Differenten aller ganzen Elemente aus $\bar{K}$.*

Zusatz 3 zu Satz 9. *Es sei $\mathfrak{D}_0$ die Quasidifferente von $\bar{K}/\bar{k}$. Dann ist die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ ein gemeinsamer, aber kein größter gemeinsamer Teiler der Differenten aller ganzen Elemente aus $\bar{K}$, wenn der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{D}_0)$ nicht $\bar{\mathfrak{O}}$-zyklisch ist.*

Beweis. Ist die Differente $\mathfrak{D}$ von $\bar{K}/\bar{k}$ der größte gemeinsame Teiler aller ganzen Elemente aus $\bar{K}$, so ist nach Satz 9 $\bar{\mathfrak{O}} = \bar{\mathfrak{o}}[\theta]$. Dann muß, wie in §2 gezeigt, der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}};\ \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{D}_0)$ ein zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul sein, w.z.b.w.

Beispiel. Es sei P ein Körper von einer Primzahlcharakteristik $p\ (\geqq 3)$ und t ein transzendentes Element über P. Wir betrachten dann einen rationalen Funktionenkörper $k = P(t;\ \pi)$ einer Unbestimmten π mit $P(t)$ als Konstantenkörper. Ist nun φ eine Bewertung von k mit π als Primelement, welche $P(t)$ trivial bewertet, so bezeichnen wir mit $\bar{k}$ die perfekte Hülle von k in bezug auf φ. Ferner bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{o}}$ den Bewertungsring von $\bar{k}$ (in bezug auf φ) und mit $\mathfrak{p}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{o}}$. Da offenbar der Restklassenkörper $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{p}$ mit $P(t)$ isomorph ist, so ist $\bar{\mathfrak{o}}/\mathfrak{p}$ unvollkommen; es gibt also ein Element c aus $\bar{\mathfrak{o}}$ von der Art, daß die Kongruenz $x^p \equiv c \bmod \mathfrak{p}$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ nicht lösbar ist. Das Polynom $\varphi_1(x) = x^p + \pi x + \pi$ aus $\bar{\mathfrak{o}}[x]$ ist nach dem bekannten Eisensteinschen Satz in $\bar{k}[x]$ irreduzibel. Da $\varphi_1(x)$ keine mehrfache Nullstelle besitzt, so ist $\varphi_1(x)$ separabel in $\bar{k}[x]$. Ist also π_1 eine Nullstelle von $\varphi_1(x)$, so ist der Körper $K_1 = \bar{k}(\pi_1)$ vom Grade p über $\bar{k}$. Man bestätigt dabei ohne weiteres, daß die Verzweigungsordnung von K_1 über $\bar{k}$ gleich p ist und π_1 ein Primelement der Fortsetzung von φ auf K_1. Daraus folgt weiter, daß der Restklassengrad von K_1 über $\bar{k}$ gleich 1 ist. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{O}_1$ die Hauptordnung von K_1, so ist $\mathfrak{O}_1 = \bar{\mathfrak{o}}[\pi_1]$, weil K_1 über $\bar{k}$ vollverzweigt ist. Nun sei $\mathfrak{P}_1$ das Primideal aus $\mathfrak{O}_1$. Dann kann man wie üblich $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ identifizieren, weil der Restklassengrad von K_1 über $\bar{k}$ gleich 1 ist; also ist die Kongruenz $x^p \equiv c \mod \mathfrak{P}_1$ in K_1 nicht lösbar.

Ferner betrachten wir das Polynom $\varphi_2(x) = x^p + \pi_1^2 x - c$ aus $\mathfrak{O}_1[x]$ und dann den Körper $\bar{K} = K_1(\eta)$, welcher aus K_1 durch Adjunktion einer Nullstelle η von $\varphi_2(x)$ entsteht. Die Hauptordnung von $\bar{K}$ soll mit $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnet werden. Weil $\varphi_2(\eta) = 0$ ist, so gilt offenbar die Kongruenz:

$$\eta^p \equiv c \qquad \mod \mathfrak{P},$$

wo $\mathfrak{P}$ das Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnet. Da die Kongruenz $x^p \equiv c \mod \mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{O}_1$ nicht lösbar ist, so gibt es kein Element aus $\mathfrak{O}_1$, welches mod $\mathfrak{P}$ mit η kongurent ist; d.h. die η enthaltende Restklasse $\bar{\eta}$ mod $\mathfrak{P}$ ist rein-inseparabel vom Grade p über $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{P}_1$. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{P}_1$ durch Adjunktion von $\bar{\eta}$ entsteht; der Restklassenkörper von $\bar{K}$ ist also rein-inseparabel von Grade p über $\mathfrak{O}_1/\mathfrak{P}_1$, und infolgedessen ist $\bar{K}$ über K_1 unverzweigt. Ferner ist $\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}_1[\eta]$.

Da $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{o}[\pi_1]$ und $\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}_1[\eta]$ sind, so ist die Differente von $K_1/\bar{k}$ gleich $(\varphi_1'(\pi)) = (\pi) = (\pi_1)^p = \mathfrak{P}_1^p$ und die Differente von $\bar{K}/K_1$ gleich $(\varphi_2'(\pi_2)) = (\pi_1)^2 = \mathfrak{P}^2$. Wegen $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$ ist also nach dem Schachtelungssatz über Differenten die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$ gleich $\mathfrak{P}^{p+2}$. Daher ist die Maximaldimension der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ $(r = 0, 2, \cdots\cdots)$ gleich $p + 2$.

Nun wollen wir die Struktur des Derivationenmoduls $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$ bestimmen. Zunächst ist klar, daß $\mathfrak{D}_1(p+1) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_1, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$ ein zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul ist, weil $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{o}[\pi_1]$ ist. Ein erzeugendes Element $D^{(1)}$ von $\mathfrak{D}_1(p+1)$ ist nach Hilfssatz 2 von der Dimension p, weil $\mathfrak{P}^{p+1}$ durch $\varphi_1'(\pi_1) = \mathfrak{P}_1^p = \mathfrak{P}^p$ teilbar ist. Wegen $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{o}[\pi_1]$ ist also das annullierende Ideal von $D^{(1)}(\pi_1)$ gleich $\mathfrak{P}^p$. Da $D^{(1)}(\varphi_1(\pi_1)) = \varphi_1'(\pi_1) D^{(1)}(\pi_1) = \pi D^{(1)}(\pi_1) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ ist, so kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $D^{(1)}(\pi_1) \equiv \pi_1 \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ ist. Nun setzen wir $\varphi_2^{D^{(1)}}(\eta) = \eta D^{(1)}(\pi_1^2)$. Dann ist offenbar:

$$\varphi_2^{D^{(1)}}(\eta) = 2\pi_1 \eta D^{(1)}(\pi_1) \equiv 2\pi_1^2 \eta \qquad \mod \mathfrak{P}^{p+1}.$$

Da $\varphi_2'(\eta) = \pi_1^2$ ist, so ist die Kongruenz

$$\varphi_2^{D^{(1)}}(\eta) + \varphi_2'(\eta) x \equiv 2\pi_1^2 \eta + \pi_1^2 x \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{p+1}$$

in $\bar{\mathfrak{O}}$ lösbar. Wir können daher $D^{(1)}$ auf $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$ so fortsetzen, daß $D^{(1)}(\eta) \equiv -2\eta \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ ist.

Nun ist $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{O}_1; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$ ein zyklischer $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul, und ein erzeugendes Element $D^{(2)}$ dieses Moduls besitzt die Dimension 2, weil $\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}_1[\eta]$ und $\varphi_2'(\eta) = \pi_1^2$ ist. Da $D^{(2)}(\varphi_2(\eta)) = \pi_1^2 D^{(2)}(\eta) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ ist, so können wir annehmen, daß $D^{(2)}(\eta) \equiv \pi_1^{p-1} \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ ist.

Jetzt setzen wir

$$D_1 = D^{(1)} \quad \text{und} \quad D_2 = \pi_1^{p-1}D^{(1)} + 2\eta D^{(2)}.$$

Dann verifizieren wir ohne Mühe, daß

$$D_1(\pi_1) \equiv \pi_1, \quad D_1(\eta) \equiv -2\eta \qquad \mod \mathfrak{P}^{p+1}$$

und

$$D_2(\pi_1) = \pi_1^{p-1}D_1(\pi_1) \equiv \pi_1^p, \quad D_2(\eta) \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{p+1}$$

sind. Da offenbar $D^{(2)} = (2\eta)^{-1}(D_2 - \pi_1^{p-1}D_1)$ ist, so erzeugen D_1, D_2 den Modul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$, weil nach Hilfssatz 6 die $D^{(1)}, D^{(2)}$ den Modul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$ erzeugen.

Nun wollen wir zeigen, daß D_1, D_2 $\bar{\mathfrak{O}}$-unabhängig sind. Zum Beweis nehmen wir an, daß für Elemente λ_1, λ_2 aus $\bar{\mathfrak{O}}$ $H = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = 0$ ist. Dann gilt

$$H(\eta) = \lambda_1 D_1(\eta) + \lambda_2 D_2(\eta) = \lambda_1 D_1(\eta) \equiv -2\lambda_1\eta \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{p+1},$$

woraus $\lambda_1 \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ folgt. Daher ist $\lambda_1 D_1 = 0$ und infolgedessen $\lambda_2 D_2 = H = 0$, w. z. b. w. Somit haben wir bewiesen, daß $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$ ein $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul mit D_1, D_2 als $\bar{\mathfrak{O}}$-Basis ist.

Da $D_1(\pi_1) \equiv \pi_1$, $D_1(\eta) \equiv -2\eta \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ sind und $\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{o}[\pi_1, \eta]$ ist, so ist das annullierende Ideal von D_1 gleich $\mathfrak{P}^{p+1}$; d. h. die Dimension von D_1 ist gleich $p+1$. Weil $D_2(\pi_1) \equiv \pi_1^p$, $D_2(\eta) \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{p+1}$ sind, so ist die Dimension von D_2 gleich 1. Also ist $p+2$ die Dimension von $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$, und $\mathfrak{P}^{p+2}$ ist die Differente von $\bar{K}/\bar{k}$, was aber bereits bewiesen worden ist.

Besitzt nun für $r \leq p$ der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ die Dimension $p+2$, so muß nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ $\bar{\mathfrak{O}}$-isomorph auf $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{p+1})$ abgebildet werden. Dies ist aber unmöglich, weil die Dimension jeder Derivation aus $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^r)$ höchstens gleich r $(\leq p)$ ist und infolgedessen stets kleiner ist als $p+1$. Daher ist $\mathfrak{P}^{p+1}$ das maximale Ideal unter den Idealen $\mathfrak{P}^\nu$ $(\nu \geq 0)$, welche den Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\bar{\mathfrak{O}}, \bar{\mathfrak{o}}; \bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{P}^{\nu})$ die Maximaldimension $p+2$ angeben; d.h. $\mathfrak{P}^{\nu+1}$ ist die Quasidifferente von $K/\bar{k}$.

Kapitel III. Differenten im Großen.

In diesem Kapitel bezeichnet k durchweg den Quotientenkörper eines Noetherschen Ringes $\mathfrak{o}$ und K eine endliche separable Erweiterung über k, deren Hauptordnung wir mit $\mathfrak{O}$ bezeichnen wollen. Ist nun $\mathfrak{p}\ (\neq 0)$ ein Primideal aus $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{O}$, so ziehen wir den $\mathfrak{p}$-adischen Körper $k_{\mathfrak{p}}$ von k und den $\mathfrak{P}$-adischen Körper $K_{\mathfrak{P}}$ von K in Betracht. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ bzw. die Hauptordnung von $k_{\mathfrak{p}}$ und $K_{\mathfrak{P}}$; das Primideal aus $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ bzw. $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ wird wieder mit $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

§7. Neue Difinition der Differenten im Großen. Es sei r eine nicht-negative ganze rationale Zahl. Dann ist jedes Element aus $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ mod $\mathfrak{P}^r$ mit einem Element aus $\mathfrak{O}$ kongruent; ferner identifiziert man wie üblich den Restklassenring $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r$ mit dem $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r$. Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz 9. *Es sei* $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}; \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ $(r \geqq 0)$ *ein Derivationenmodul mit* $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ *als Multiplikatorenbereich. Dann ist* $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}; \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$*-isomorph auf den Derivationenmodul* $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ *mit* $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ *als Multiplikatorenbereich abgebildet.*

Beweis. Der Einfachheit halber setzen wir $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(r) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}; \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ und $\mathfrak{D}(r) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$. Weil $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}} \geqq \mathfrak{O} \geqq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \geqq \mathfrak{o}$ sind, so induziert eine Derivation $D_{\mathfrak{P}}$ aus $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(r)$ stets eine Derivation D aus $\mathfrak{D}(r)$. Es sei γ ein durch $\mathfrak{P}^{r+1}$ teilbares Element aus $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$. Dann kann man für ein Primelement π_0 von $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$ ein für $\mathfrak{P}$ ganzes Element γ' aus $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ so bestimmen, daß $\gamma = \gamma'\pi_0^{r+1}$ ist. Hieraus folgt sofort:

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{P}}(\gamma) &= \pi_0^{r+1}D_{\mathfrak{P}}(\gamma') + \gamma' D_{\mathfrak{P}}(\pi_0^{r+1}) \\ &= \pi_0^{r+1}D_{\mathfrak{P}}(\gamma') + (r+1)\gamma'\pi_0^{r}D_{\mathfrak{P}}(\pi_0) \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^r. \end{aligned}$$

Nun existiert zu einem Element α aus $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ ein Element α_0 aus $\mathfrak{O}$, welches der Kongruenz

$$\alpha \equiv \alpha_0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^{r+1}$$

genügt. Setzt man also $\alpha - \alpha_0 = \gamma$, so gilt nach dem oben Bewiesenen:

$$D_{\mathfrak{P}}(\alpha) = D_{\mathfrak{P}}(\alpha_0) + D_{\mathfrak{P}}(\gamma) = D_{\mathfrak{P}}(\alpha_0) = D(\alpha_0);$$

hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß dann und nur dann $D_{\mathfrak{P}} = 0$ ist, wenn die durch $D_{\mathfrak{P}}$ induzierte Derivation D aus $\mathfrak{D}(r)$ gleich Null ist. Die Zuordnung $D_{\mathfrak{P}} \to D$ stellt daher einen $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$-Isomorphismus von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(r)$ in $\mathfrak{D}(r)$ her.

Umgekehrt sei D eine Derivation aus $\mathfrak{D}(r)$. Ist dann γ_0 ein durch $\mathfrak{P}^{r+1}$ teilbares Element aus $\mathfrak{O}$, so kann man für ein Primelement π_0 von $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$ die zueinander primen Ideale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{O}$ so bestimmen, daß $\gamma_0\mathfrak{A} = \pi_0^{r+1}\mathfrak{B}$ ist. Offenbar ist dabei $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}) = 1$. Ferner kann man ein zu $\mathfrak{P}$ primes Ideal $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{O}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{AC}$ ein Hauptideal (α_0) aus $\mathfrak{O}$ ist. Wegen der Gleichung $(\gamma_0\alpha_0) = \gamma_0\mathfrak{AC} = \pi_0^{r+1}\mathfrak{BC}$ ist $\mathfrak{BC}$ auch ein Hauptideal aus $\mathfrak{O}$; es gibt also ein Element β_0 aus $\mathfrak{O}$ mit $\gamma_0\alpha_0 = \pi_0^{r+1}\beta_0$. Daraus folgt sofort: $\alpha_0 D(\gamma_0) = \alpha_0 D(\gamma_0) + \gamma_0 D(\alpha_0) = (r+1)\beta_0\pi_0^r D(\pi_0) + \pi_0^{r+1}D(\beta_0) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^r$; aus der Relation $(\alpha_0, \mathfrak{P}) = 1$ schließt man $D(\gamma_0) = 0$.

Ist nun α ein Element aus $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$, so bestimmen wir ein Element α_0 aus $\mathfrak{O}$ mit $\alpha \equiv \alpha_0 \bmod \mathfrak{P}^{r+1}$, und wir setzen

$$D_{\mathfrak{P}}(\alpha) = D(\alpha_0).$$

Gilt aber für ein Element α_0' aus $\mathfrak{O}$ auch die Kongruenz $\alpha \equiv \alpha_0' \bmod \mathfrak{P}^{r+1}$, so erhält man $D(\alpha_0 - \alpha_0') = 0$, weil $\alpha_0 - \alpha_0'$ durch $\mathfrak{P}^{r+1}$ teilbar ist; d.h. es ist $D(\alpha_0) = D(\alpha_0')$. Somit ist gezeigt, daß $D_{\mathfrak{P}}(\alpha)$ durch α eindeutig bestimmt, aber von der Wahl der Elemente α_0 mit $\alpha \equiv \alpha_0 \bmod \mathfrak{P}^{r+1}$ unabhängig ist. Ferner kann man leicht bestätigen, daß $D_{\mathfrak{P}}$ eine Derivation aus $D_{\mathfrak{P}}(r)$ ist, welche in $\mathfrak{O}$ die ursprüngliche Derivation D induziert. Die oben definierte Zuordnung $D_{\mathfrak{P}} \to D$ bildet also den Derivationenmodul $D_{\mathfrak{P}}(r)$ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$-isomorph auf den Modul $\mathfrak{D}(r)$ ab, w.z.b.w.

Nun sei D eine Derivation aus $\mathfrak{D}(r) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ und α_0 ein beliebiges Element aus $\mathfrak{O}$. Dann ist nach Definition $D(\alpha_0)$ eine Restklasse aus $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r$. Weil der Restklassenring $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r$ mit dem $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r$ identifiziert ist, so kann man $D(\alpha_0)$ als eine Restklasse $D^{(0)}(\alpha_0)$ aus $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r$ auffassen. Dadurch entsteht aus D eine Derivation aus dem Derivationenmodul $\mathfrak{D}^{(0)}(r) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ mit $\mathfrak{O}$ als Multiplikatorenbereich. Ordnet man also jeder Derivation D aus $\mathfrak{D}(r)$ auf obige Weise die Derivation $D^{(0)}$ aus $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$ zu, so entsteht offenbar ein Isomorphismus I von $\mathfrak{D}(r)$ auf $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$, und $\mathfrak{D}(r)$ ist die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$ zu $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$.

Es sei D eine Derivation aus $\mathfrak{D}(r)$ und $D^{(0)}$ die D zugeordnete Derivation aus $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$. Ist dann λ ein Element aus $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$, so existiert offenbar ein Element λ_0 aus $\mathfrak{O}$ derart, daß $\lambda D = \lambda_0 D$ ist. Ersichtlich ist bei Anwendung des obigen Isomorphismus I λD auf die Derivation $\lambda_0 D^{(0)}$ abgebildet.

Weil $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ eine endliche Basis besitzt, so existiert eine $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$-Basis $D_1, \cdots\cdots, D_s$ von $\mathfrak{D}(r)$, wenn $\mathfrak{D}(r)$ von Null verschieden ist. Nun seien die $D_i^{(0)}$ $(i = 1, \cdots\cdots, s)$ bzw. die den D_i $(i = 1, \cdots\cdots, s)$ zugeordneten Derivationen aus $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$. Dann sieht man leicht ein, daß $D_1^{(0)}, \cdots\cdots, D_s^{(0)}$ auch eine $\mathfrak{O}$-Basis von $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$ bilden. Ferner ist die Kompositionslänge des zyklischen $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$-Moduls $\{D_i\}$ $(1 \leq i \leq s)$ gleich der Kompositionslänge des zyklischen $\mathfrak{O}$-Moduls $\{D_i^{(0)}\}$. Also ist die Dimension von $\mathfrak{D}(r)$ gleich der von $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$. Wenn insbesondere $\mathfrak{D}(r)$ ein zyklischer $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$-Modul von der Dimension e ist, so ist $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$ auch ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul von der Dimension e. Aus Hilfssatz 9 folgt daher

Hilfssatz 10.. *Es sei* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(r) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ $(r \geq 0)$ *ein Derivationenmodul mit* $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$ *als Multiplikatorenbereich und* $\mathfrak{D}^{(0)}(r) = \mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ *ein Derivationenmodul mit* $\mathfrak{O}$ *als Multiplikatorenbereich. Dann ist für jedes* r *die Dimension von* $\mathfrak{D}(r)$ *gleich der von* $\mathfrak{D}^{(0)}(r)$.

Bemerkung 1. Wenn $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ *separabel* ist, so ist es auch $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$, wie in §5 bemerkt, über $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ von der Stufe 1. Hieraus folgt nach Satz 1, daß für eine beliebige, nichtnegative ganze rationale Zahl r der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ $\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}$-zyklisch. Nach dem oben Gezeigten muß dann der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ $\mathfrak{O}$-zyklisch sein.

Wie bereits in §3 gezeigt, existieren höchstens endliche viele Primideale $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{P}_s$ aus $\mathfrak{O}$, für welche die Maximaldimensionen d_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^r)$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots;\ i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ von Null verschieden sind. Bezeichnet man daher für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{P}\ (\neq 0)$ aus $\mathfrak{O}$ mit $d_{\mathfrak{P}}$ die Maximaldimension der Derivationendomuln $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots)$, so definiert das Produkt

$$\mathfrak{D}(K/k) = \prod_{\mathfrak{P} \in \mathfrak{O}} \mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$$

sicher ein Ideal aus $\mathfrak{O}$. Wir definieren dann das Ideal $\mathfrak{D}(K/k)$ als die *Differente* von K/k im Sinne von A. Weil und Y. Kawada.

Nun betrachten wir für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{P}\,(\neq 0)$ aus $\mathfrak{O}$ den $\mathfrak{P}$-Beitrag $\mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$ der Differente $\mathfrak{D}(K/k)$ von K/k in Sinne von A. Weil und Y. Kawada. Dabei ist $d_{\mathfrak{P}}$ nach Definition die Maximaldimension der Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{O},\mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots)$; ferner ist $d_{\mathfrak{P}}$ nach Hilfssatz 10 auch die Maximaldimension des Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}};\ \mathfrak{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$ $(r = 0, 1, \cdots\cdots)$, wo $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Also ist $\mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$ nach Definition die Differente von $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ im Sinne von A. Weil und Y. Kawada. Weil nach Satz 5 $\mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$ auch die Differente von $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ im Sinne von R. Dedekind ist, so ist $\mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag der Differente von K/k im Sinne von R. Dedekind[1]. Somit ist gezeigt, daß für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{P}\,(\neq 0)$ aus $\mathfrak{O}$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag der Differente von K/k im Sinne von A. Weil und Y. Kawada mit dem $\mathfrak{P}$-Beitrag der Differente von K/k im Sinne von R. Dedekind übereinstimmt.

Wir haben in §3 die Quasidifferente $\mathfrak{D}_0$ von K/k definiert. Ist nun $\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}}$ der $\mathfrak{P}$-Beitrag von $\mathfrak{D}_0$, so kann man nach Hilfssatz 10 leicht bestätigen, daß $\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}}$ auch die Quasidifferente von $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$; also ist nach Satz 8 $\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}}$ ein Teiler der Differente $\mathfrak{P}^{d_{\mathfrak{P}}}$ von $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$. Hieraus schließt man sofort, daß die Quasidifferente von K/k stes ein Teiler der Differente von K/k ist. Zusammenfassend haben wir bewiesen:

Satz 10. *Die Differente von K/k im Sinne von A. Weil und Y. Kawada stimmt mit der Differente von K/k im Sinne von R. Dedekind überein. Ferner ist die Quasidifferente von K/k ein Teiler der Differente von K/k.*

Bemerkung 2. Nach dem Differentensatz von R. Dedekind ist bekannt, daß ein Primideal $\mathfrak{P}\,(\neq 0)$ aus $\mathfrak{O}$ dann und nur dann in der Differente von K/k aufgeht, wenn $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{P}^2$ teilbar ist oder der Restklassenkörper $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ inseparabel ist.

§8. Differente im Großen einer endlichen separablen Erweiterung ohne Primideale mit inseparablen Restklassenkörpererweiterungen. Es sei k ein am Anfang dieses Kapitels angegebener Körper und K eine endliche separable Erweiterung mit $\mathfrak{O}$ als Hauptordnung. Dann betrachten wir für ein von Null verschiedenes Ideal $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ den Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O},\mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$. Ist nun $\mathfrak{A} = \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{P}_i^{a_i}$ die Primidealpotenzzerlegung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{O}$, so gilt die folgende $\mathfrak{O}$-Isomorphe-relation:

1) H. Hasse, a. a. O., S. 321 - 322.

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A}) \cong \sum_{i=1}^{s} \oplus\, \mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{a_i}).$$

Ferner nehmen wir an, daß für jeden Primteiler $\mathfrak{P}_i\,(1 \leq i \leq s)$ von $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i$ über $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}_i$ separabel ist, wo $\mathfrak{p}_i$ das durch $\mathfrak{P}_i$ teilbare Primideal aus $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Für ein jedes $i\,(1 \leq i \leq s)$ ist der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{a_i})$ nach Bemerkung 1 in §7 ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul, dessen erzeugendes Element mit D_i bezeichnet werden soll. Dabei ist das annullierende Ideal von D_i offenbar ein Teiler von $\mathfrak{P}_i^{a_i}$. Da $\mathfrak{O}$ ein Noetherscher Ring ist, so kann man ein Element ξ_i aus $\mathfrak{O}$ so bestimmen, daß

$$\xi_i \equiv 1 \quad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_i^{a_i} \qquad \text{und} \qquad \xi_i \equiv 0 \quad \mathrm{mod}\ \mathfrak{A}\mathfrak{P}_i^{-a_i}$$

gelten. Dann ist das Element $D_0 = (D_1, D_2, \cdots\cdots, D_s)$ ein erzeugendes Element der direkten Summe $\sum_{i=1}^{s} \oplus\, \mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}_i^{a_i})$. Denn ein Element D aus dieser direkten Summe ist von der Form:

$$D = (\lambda_1 D_1, \lambda_2 D_2, \cdots\cdots, \lambda_s D_s) \qquad \lambda_i \in \mathfrak{O}\ \ (i = 1, 2, \cdots\cdots, s);$$

hieraus schließt man ohne weiteres:

$$\begin{aligned} D &= (\lambda_1 D_1, \lambda_2 D_2, \cdots\cdots, \lambda_s D_s) = (\lambda_1 \xi_1 D_1, \lambda_2 \xi_2 D_2, \cdots\cdots, \lambda_s \xi_s D_s) \\ &\quad (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \xi_i D_1, \cdots\cdots, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \xi_i D_s) = (\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \xi_i) D_0, \end{aligned}$$

weil für $j \neq i$ $\xi_j D_i = 0$ und $\xi_i D_i = D_i$ ist. Daher ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul. Somit haben wir bewiesen:

Hilfssatz 11. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein von Null verschiedenes Ideal aus der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ von K. Ferner sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Primteiler von $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus $\mathfrak{o}$. Ist dann $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ stets separabel, so ist der Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ ein zyklischer $\mathfrak{O}$-Modul.*

Von nun an nehmen wir an, daß für ein beliebiges, von Null verschiedenes Primideal $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$ der Restklassenkörper $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ stets über dem Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ separabel ist, wo $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Dann ist nach Bemerkung 1 in §7 jeder Derivationenmodul $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o};\ \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^r)$ $(r \geq 0)$ stets $\mathfrak{O}$-zyklisch. Aus Hilfssatz 10 und aus Zusätzen 1, 2 zu Satz 9 folgt ohne weiteres, daß der $\mathfrak{P}$-Beitrag der Quasidifferente von K/k gleich ist dem $\mathfrak{P}$-Beitrag der Differente von K/k. Somit haben wir bewiesen:

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 2 [2008], Iss. 2, Art. 3

Satz 11. *Es sei k der Quotientenkörper eines Noetherschen Ringes $\mathfrak{o}$ und K eine endliche separable Erweiterung über k mit $\mathfrak{O}$ als Hauptordnung. Ferner sei $\mathfrak{P}\,(\neq 0)$ ein beliebiges Primideal aus $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{p}$ das durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primideal aus $\mathfrak{o}$. Ist dann der Restklassenkörper $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ stets separabel über dem Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, so stimmt die Differente $\mathfrak{D}$ von K/k mit der Quasidifferente von K/k überein; d.h. $\mathfrak{D}$ ist das größte Ideal unter denjenigen Idealen $\mathfrak{A}$, die den Derivationenmoduln $\mathfrak{D}(\mathfrak{O}, \mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{A})$ die Maximaldimension angeben.*

Bemerkung. Enthält $\mathfrak{o}$ kein Primideal, dessen Restklassenkörper unvollkommen ist, so ist die Differente von K/k nach Satz 11 gleich der Quasidifferente von K/k. Wenn insbesondere $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers endlichen Grades ist, so ist für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}\,(\neq 0)$ aus $\mathfrak{o}$ der Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ endlicher Körper, also ist vollkommen. Man darf daher die Quasidifferente von K/k schlechthin als die Differente von K/k definieren.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY.

(*Received December 18, 1952*)