Mathematical Journal of Okayama University

Volume 16, *Issue* 1 1973 *Article* 3

SEPTEMBER 1973

Über den Eigenidealen der Schiefringen

Takasaburo Ukegawa*

*Universität zu Kobe

ÜBER DEN EIGENIDEALEN DER SCHIEFRINGEN

Herrn Professor MASARU OSIMA zum 60. Geburtstag gewidmet

TAKASABURO UKEGAWA

Es sei S ein Schiefring mit Einselement 1, $\mathfrak{o}$ eine Ordnung von S, und $\mathfrak{o}^*$ sei eine Maximalordnung von S, die $\mathfrak{o}$ umfasst und mit $\mathfrak{o}$ äquivalent ist, und $\mathfrak{f}$ sei der Führer von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$, d. h. das in $\mathfrak{o}$ enthaltene grösste Ideal von $\mathfrak{o}$.

Wir zeigten in [2], dass die Gesamtheit von den zum $\mathfrak{f}$ teilerfremden $\mathfrak{o}$-Idealen, von deren inversen Idealen und von deren beiden endlichvielen Produkten, unter der Voraussetzung folgender Asanoscher Bedingungen A_1, A_2, A_3' über $\mathfrak{o}^*$ eine Abelsche Gruppe bildet; wo

A_1: $\mathfrak{o}^*$ sei eine Maximalordnung

A_2: Es gilt der Teilerkettensatz für ganze zweiseitige $\mathfrak{o}^*$-Ideale

A_3': Jedes Primideal von $\mathfrak{o}^*$ ist teilerlos.

In [5], nennen wir das Ideal, dessen Rechtsordung der Linksordnung gleich ist, ein *Eigenideal*, und zeigte, dass ein ganzes zweiseitiges $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{a}$ dann und nur dann zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd ist, wenn $\mathfrak{a}$ ein Verengungs- und zugleich auch ein Eigenideal ist.

In der vorliegenden Note betrachten wir diese Resultate unter etwas schwächerer Voraussetzungen, und versuchen die Bedingungen, womit die Gesamtheit der Eigenideale eine Gruppe erzeugt, ausserdem untersuchen die Struktur dieser Gruppe.

1. Reguläre Ideale

Es sei S ein Schiefring mit Einselement 1. Wir bezeichnen die Menge aller Einheiten von S mit S^*, und jedes Element von S^* heisst *regulär.* Ein Teilring $\mathfrak{o}$ von S heisst *r-Ordnung*, wenn jedes Element von S als ab^{-1}, wo $a \in \mathfrak{o}$, $b \in \mathfrak{o} \cap S^*$, darstellbar ist. Die *l-Ordnung* in gleicher Weise definiert wird, und eine r- und zugleich auch l-Ordnung heisst eine *Ordnung* von S. Eine Teilmenge $\mathfrak{r}$ von S heisst *$\mathfrak{o}$-r-Ideal*, wenn

1) aus $a \in \mathfrak{r}$, $b \in \mathfrak{r}$ folgt $a-b \in \mathfrak{r}$
2) aus $a \in \mathfrak{r}$, r beliebig in $\mathfrak{o}$ folgt $ar \in \mathfrak{r}$
3) $\mathfrak{r}$ enthält mindestens ein reguläres Element.

Das $\mathfrak{o}$-*l-Ideal* in gleicher Weise und $\mathfrak{o}$-*z-Ideal* als $\mathfrak{o}$-*r-* und zugleich auch $\mathfrak{o}$-*l*-Ideal definiert wird. Es seien $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{o}$ *r*-Ordnungen von S mit $\mathfrak{o}^* \supseteq \mathfrak{o}$, und $\mathfrak{f}$ sei *der Führer von* $\mathfrak{o}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{o}^*$, d. h. das in $\mathfrak{o}$ enthaltene grösste zweiseitige Ideal von $\mathfrak{o}^*$. Die zum $\mathfrak{f}$ teilerfremde $\mathfrak{o}$-*z*-Ideale heissen *regulär*.

Wenn $\mathfrak{f}$ ein $\mathfrak{o}^*$-*z*-Ideal ist, d. h. $\mathfrak{f}$ ein reguläres Element α enthält, so ist ersichtlich $\alpha\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}^*\alpha \subseteq \mathfrak{o}$. Umgekeht gibt es reguläre Elemente α, β mit $\beta\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}^*\alpha \subseteq \mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{o}^*\alpha\beta\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{f}$ ist ein $\mathfrak{o}^*$-*z*-Ideal. Also:

Hilfssatz 1. *Es seien* $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{o}$ *r-Ordnuugen von S mit* $\mathfrak{o}^* \supseteq \mathfrak{o}$, *und* $\mathfrak{f}$ *sei der Führer von* $\mathfrak{o}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{o}^*$. $\mathfrak{f}$ *ist dann und nur dann ein* $\mathfrak{o}^*$-*z-Ideal, wenn es reguläre Elemente* α, β *mit* $\mathfrak{o}^*\alpha \subseteq \mathfrak{o}$, $\beta\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}$ *gibt.*

Im folgenden setzen wir voraus, dass $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{o}$ *r*-Ordnungen von S mit $\mathfrak{o}^* \supseteq \mathfrak{o} \ni 1$ sind und der Führer $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ ein $\mathfrak{o}^*$-*z*-Ideal ist.

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mathfrak{g}$ *ein in* $\mathfrak{o}$ *enthaltenes* $\mathfrak{o}^*$-*z-Ideal.* Ist $\mathfrak{o}^*$ eine maximale *r*-Ordnung oder erzeugt die Gesamtheit von den zum $\mathfrak{g}$ teiler fremden $\mathfrak{o}^*$-*z*-Idealen und von deren inversen $\mathfrak{o}^*$-*z*-Idealen eine Gruppe, so ist $O_l(\mathfrak{a}) = O_r(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{o}$-*z*-Ideal $\mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$; wo $O_l(\mathfrak{a})$, $O_r(\mathfrak{a})$ die Links- bzw. Rechtsordnung von $\mathfrak{a}$ sind.

Beweis. Wir setzen $O_l(\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}_l$, $O_r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}_r$. Ersichtlich $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}_l$. Aus [2; Satz 1] $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}^*$, da aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$ $\mathfrak{a}$ regulär wird. Es ist $\mathfrak{o}_l\mathfrak{A} = \mathfrak{o}_l\mathfrak{a}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{a}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{A}$. Nun aus der Voraussetzung gilt $O_l(\mathfrak{A}) = \mathfrak{o}^*$: ist $\mathfrak{o}^*$ nämlich maximal, so ist $O_l(\mathfrak{A}) = \mathfrak{o}^*$, andernfalls, da $\mathfrak{o}^*$ das Einselement der Gruppe ist, $\mathfrak{o}_l^* = \mathfrak{o}_l^*\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}_l^*\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{o}^*$, wo $\mathfrak{o}_l^* = O_l(\mathfrak{A})$. Also $\mathfrak{o}_l \subseteq \mathfrak{o}^*$ ist, demnach $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{o}_l\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{o}^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, also $\mathfrak{o}_l\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Daraus folgt $\mathfrak{o}_l = \mathfrak{o}_l\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_l(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{o}_l\mathfrak{a}, \mathfrak{o}_l\mathfrak{g}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$, daher $\mathfrak{o}_l = \mathfrak{o}$ und in gleicher Weise $\mathfrak{o}_r = \mathfrak{o}$.

Definition. $\mathfrak{f}_l = \{x \mid \mathfrak{o}^*x \subseteq \mathfrak{o},\ x \in S\}$, $\mathfrak{f}_r = \{x \mid x\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o},\ x \in S\}$ heisst der *Links-* bzw. der *Rechtsführer* von $\mathfrak{o}$ hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$. Das maximale zweiseitige Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}^*$, die in ein einseitiges Ideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{o}^*$ enthalten ist, heisst die *Hülle* von $\mathfrak{r}$.

Hilfssatz 3. *Die* $\mathfrak{o}$-*z-Ideale* $\mathfrak{f}_l$, $\mathfrak{f}_r$ *sind ein* $\mathfrak{o}^*$-*l- bzw. ein* $\mathfrak{o}^*$-*r-Ideal, dessen Hülle* $\mathfrak{f}$ *ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{g}$ ein beliebiges in $\mathfrak{f}_l$ enthaltenes $\mathfrak{o}^*$-*z*- Ideal, so ist $\mathfrak{o}^*\mathfrak{g}\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{o}^*\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{f}$. Andererseits $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{f}_l$, also ist $\mathfrak{f}$ die Hülle von $\mathfrak{f}_l$.

Definition. Die in $\mathfrak{o}$ enthaltene $\mathfrak{o}$-z-Ideal $\mathfrak{n}$ heisst ein *Verengungsideal* (*V-Ideal*), *wenn* $\mathfrak{n}=\mathfrak{N}\cap\mathfrak{o}$ für irgendeines $\mathfrak{o}^*$-z-Ideal $\mathfrak{N}$ ist. Die $\mathfrak{o}$-z-Ideal $\mathfrak{a}$ mit $O_l(\mathfrak{a})=O_r(\mathfrak{a})=\mathfrak{o}$, heisst ein *Eigenideal* (*E-Ideal*) ([2]). Wir bezeichnen V-Ideal und auch E-Ideal mit *V-E-Ideal*.

Hilfssatz 4. *Ist* $\mathfrak{n}$ *ein V-E-Ideal, so ist*
$\{x\,|\,x\,\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{o},\ x\in\mathfrak{o}^*\}=\mathfrak{o}$ *und auch* $\{x\,|\,\mathfrak{n}x\subseteq\mathfrak{o},\ x\in\mathfrak{o}^*\}=\mathfrak{o}$, *d. h.* $\mathfrak{n}^{-1}\cap\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}$.

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{o}^*\mathfrak{n}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{N}$. Aus $x\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{o}$, $x\in\mathfrak{o}^*$ folgt, dass $x\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}\mathfrak{o}\cap\mathfrak{N}=\mathfrak{n}$, also $x\in\mathfrak{o}$.

Hilfssatz 5. *Ist* $\mathfrak{n}$ *eit V-E-Ideal ist, so ist*

$$(\mathfrak{k}_r:\mathfrak{n})_r=\{x\,|\,\mathfrak{n}x\subseteq\mathfrak{k}_r,\ x\in\mathfrak{o}^*\}=\mathfrak{k}_r$$
$$(\mathfrak{k}_l:\mathfrak{n})_l=\{x\,|\,x\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{k}_l,\ x\in\mathfrak{o}^*\}=\mathfrak{k}_l.$$

Beweis. Es sei $x\in(\mathfrak{k}_r:\mathfrak{n})_r$, so ist $\mathfrak{n}x\subseteq\mathfrak{k}_r$, also $\mathfrak{n}x\mathfrak{o}^*\subseteq\mathfrak{o}$, also $x\mathfrak{o}^*\subseteq\mathfrak{o}$ nach Hilfssatz 4, daher $x\in\mathfrak{k}_r$ nach der Definition von $\mathfrak{k}_r$, d. h. $(\mathfrak{k}_r:\mathfrak{n})_r\subseteq\mathfrak{k}_r$, also $(\mathfrak{k}_r:\ \mathfrak{n})_r=\mathfrak{k}_r$.

Definition. Die r-Ordnung $\mathfrak{o}$, die 1 enthält, heisst die *Asanosche r-Ordnung*, wenn die Gesamtheit der $\mathfrak{o}$-z-Ideale eine Gruppe erzeugt ([4]). Nach [4] ist die Asanosche r-Ordnung $\mathfrak{o}^*$ gleichbedeutend mit eine maximale r-Ordnung, in der jedes $\mathfrak{o}^*$-z-Ideal ein projektiver rechtsseitiger $\mathfrak{o}^*$-Modul ist.

Satz 1. *Es sei ferner* $\mathfrak{o}^*$ *die Asanosche r-Ordnung, und* $\mathfrak{n}$ *sei ein in* $\mathfrak{o}$ *enthaltenes* $\mathfrak{o}$-*z-Ideal.* $\mathfrak{n}$ *ist dann und nur dann ein V-E-Ideal von* $\mathfrak{o}$, *wenn* $(\mathfrak{k},\mathfrak{n})=\mathfrak{o}$ *ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{n}$ ein V-E-Ideal von $\mathfrak{o}$, und wir setzen $(\mathfrak{k},\mathfrak{n})=\mathfrak{d}$, $\mathfrak{o}^*\mathfrak{d}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{D}$. Es ist $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{o}\cap(\mathfrak{o}^*\mathfrak{n}\mathfrak{o}^*,\mathfrak{f})=(\mathfrak{o}\cap\mathfrak{o}^*\mathfrak{n}\mathfrak{o}^*,\mathfrak{f})=(\mathfrak{n},\mathfrak{f})=\mathfrak{d}$, d. h. $\mathfrak{D}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{d}$. Wäre $\mathfrak{D}\subsetneqq\mathfrak{o}$, so gäbe es ein ganzes $\mathfrak{o}^*$-z-Ideal $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{k}_r\supseteq\mathfrak{k}=\mathfrak{D}\mathfrak{C}$, also $\mathfrak{k}\subsetneqq\mathfrak{C}$, und also $\mathfrak{k}_r\not\supseteq\mathfrak{C}$, da $\mathfrak{k}$ die Hülle von $\mathfrak{k}_r$ ist. Es gibt also ein x mit $x\in\mathfrak{C}$, $x\notin\mathfrak{k}_r$, daher folgt $\mathfrak{n}x\subseteq\mathfrak{D}x\subseteq\mathfrak{D}\mathfrak{C}=\mathfrak{k}\subseteq\mathfrak{k}_r$, also $x\in(\mathfrak{k}_r:\ \mathfrak{n})_r=\mathfrak{k}_r$ nach Hilfssatz 5. Das ist ein Widerspruch, also ist $\mathfrak{D}=\mathfrak{o}^*$, also $\mathfrak{d}=\mathfrak{o}$, d. h. $(\mathfrak{k},\ \mathfrak{n})=\mathfrak{o}$. Umgekehrt ist $(\mathfrak{k},\ \mathfrak{n})=\mathfrak{o}$, so ist nach Hilfssatz 2 und [2; Satz 2] $\mathfrak{n}$ ein V-E-Ideal.

Es sei $\mathfrak{g}$ ein beliebiges in $\mathfrak{o}$ enthaltenes $\mathfrak{o}^*$-z-Ideal, also $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{k}$. Wir bezeichnen mit G die Gesamtheit von den zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden $\mathfrak{o}$-z-Idealen, von deren inversen $\mathfrak{o}$-z-Idealen und von deren beiden endlichvielen Produkten. Wir nehmen nicht an, dass $\mathfrak{o}^*$ maximal ist.

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 16 [1973], Iss. 1, Art. 3

Jetzt nehmen wir an, dass G eine Gruppe ist, so gilt:

1. Die zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden $\mathfrak{o}$-z-Ideale sind Eigenideale von $\mathfrak{o}$. Weiter ist jedes Ideal von G ein Eigenideal von $\mathfrak{o}$.
2. Der Teilerkettensatz gilt für die zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden $\mathfrak{o}$-z-Ideale.
3. Jedes zu $\mathfrak{g}$ teilerfremde Primideal ist teilerlos.
4. Das Produkt zweier zu $\mathfrak{g}$ teilerfremdes Primideal von $\mathfrak{o}$ ist kommutativ.
5. Jedes zu $\mathfrak{g}$ teilerfremde $\mathfrak{o}$-z-Ideal ist eindeutig darstellbar als ein Potenzprodukt von zu $\mathfrak{g}$ teilerfremdes Primidealen von $\mathfrak{o}$.

Entsprechend bis jetzt ausgesprochenen, bezeichnen wir mit G^* die Gesamtheit von den zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden $\mathfrak{o}^*$-z-Idealen, von deren inversen Idealen und von deren beiden endlichvielen Produkten. Wir setzen über $\mathfrak{o}^*$ voraus, dass G^* eine Gruppe ist, so erhalten Wir wie vorher $1\sim5$, nur $\mathfrak{o}$ durch $\mathfrak{o}^*$ ersetzt werden muss.

Unter letzten Annahmen erhalten wir:

Hilfssatz 6. $\mathfrak{p}$ *sei ein Primideal von* $\mathfrak{o}$ *mit* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g})=\mathfrak{o}$, *so ist* $\mathfrak{p}^{-1}\neq\mathfrak{o}$.

Beweis. Wäre $\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$, so würde $\mathfrak{f}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{f}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}=\mathfrak{f}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{o}$, wo $\mathfrak{P}=\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}\mathfrak{o}^*$ ist, also $\mathfrak{f}\mathfrak{P}^{-1}\subseteq\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$. Daraus erhalten wir $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{f}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{o}\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{o}^*\mathfrak{P}=\mathfrak{P}$, d. h. $\mathfrak{f}\subseteq\mathfrak{P}$, also $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{P}$, daher $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{P}\cap\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$ entgegen der Annahme $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g})=\mathfrak{o}$.

Unter derselben Voraussetzung wie Hilfssatz 6 haben wir:

Hilfssatz 7. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal von* $\mathfrak{o}$, *mit* $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g})=\mathfrak{o}$, *so ist* $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}\subseteq\mathfrak{o}$ da $\mathfrak{p}$ ein Eigenideal von $\mathfrak{o}$ ist, also $\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}\mathfrak{o}^*\subseteq\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}^*\subseteq\mathfrak{o}^*\mathfrak{o}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*$. Da $\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}=\mathfrak{P}$ ist, so folgt $\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{P}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}\subseteq\mathfrak{o}^*$. Nun nach der entsprechenden Eigenschaft 3 für G^*, ist $\mathfrak{P}$ maximal als $\mathfrak{o}^*$-z-Ideal ([2; Satz 7]), also $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}^*$ oder $\mathfrak{P}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*$. Wäre $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}^*$, so würde $\mathfrak{o}^*\supseteq\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}^*\supseteq\mathfrak{p}^{-1}$ da nach der entsprechenden 1 für G^* $O_r(\mathfrak{P})=\mathfrak{o}^*$ ist. Nun nach Hilfssatz 2 ist $\mathfrak{p}$ ein E-Ideal von $\mathfrak{o}$ und nach [2; Satz 2] ist $\mathfrak{p}$ ein V-Ideal von $\mathfrak{o}$, d. i. $\mathfrak{p}$ ist ein V-E-Ideal von $\mathfrak{o}$. Also nach Hilfssatz 4 ist $\mathfrak{o}=\mathfrak{p}^{-1}\cap\mathfrak{o}^*=\mathfrak{p}^{-1}$ da $\mathfrak{o}^*\supseteq\mathfrak{p}^{-1}$ ist, entgegen Hilfssatz 6, daher $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{P}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}^*$. Also folgt $\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}^*=\mathfrak{o}^*$, daraus folgt $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$, da $(\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}, \mathfrak{g})=\mathfrak{o}$ ist; ebenso $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$.

Satz 2. S *sei Schiefring mit Einselement* 1, *und* $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{o}$ *seien r-Ordnungen von* S, *mit* $\mathfrak{o}^*\supseteq\mathfrak{o}\ni1$, *ferner setzen wir die Existenz eines in* $\mathfrak{o}$

enthaltenes $\mathfrak{o}^*$*-z-Ideals* $\mathfrak{g}$ *voraus. G ist dann und nur dann eine Gruppe, wenn* G^* *eine Gruppe ist, dabei* $G \cong G^*$ *als Gruppe.*

Beweis. Es sei G^* eine Gruppe, und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges $\mathfrak{o}$-z-Ideal, mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}$, so ist $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{o}$. $\mathfrak{A}$ sei das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ ([2 ; Satz 2]). Aus der Eigenschaft 5 für G^* ist $\mathfrak{A}$ als ein Produkt der zu $\mathfrak{g}$ teilerfremden Primideale von $\mathfrak{o}^*$ eindeutig darstellbar: $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r$, $(\mathfrak{P}_i, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}^*$. Also nach [2 ; Satz 7] $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r$, wo $\mathfrak{p}_i$ die zu $\mathfrak{P}_i$ entsprechenden Primideale sind. Nun nach Hilfssatz 7 ist $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_r^{-1} \cdots \mathfrak{p}_1^{-1} = \mathfrak{o}$, daher $\mathfrak{p}_r^{-1} \cdots \mathfrak{p}_1^{-1} \subseteq \mathfrak{a}^{-1}$, also $\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_r^{-1} \cdots \mathfrak{p}_1^{-1} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{o}$, da $\mathfrak{a}$ ein E-Ideal von $\mathfrak{o}$ ist, somit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{o}$, und ebenso $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist. Umgekehrt sei G eine Gruppe, und $\mathfrak{A}$ sei ein beliebiges $\mathfrak{o}^*$-z-Ideal mit $(\mathfrak{A}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{o}^*$, so ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}$ ([2 ; Satz 1]), wo $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{o}$ ist. Wir setzen $O_l(\mathfrak{A}) = \mathfrak{o}_l^*$, $O_r(\mathfrak{A}) = \mathfrak{o}_r^*$, so ist $\mathfrak{o}_l^*\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_l^*\mathfrak{o}^*\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_l^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A} = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}$. Daraus erhalten wir $\mathfrak{o}_l^* = \mathfrak{o}^*$, ebenso $\mathfrak{o}_r^* = \mathfrak{o}^*$. Nun ist $\mathfrak{A}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*$, daher $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{A}^{-1}$. Also $\mathfrak{o}^* = \mathfrak{A}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}^* \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} \subseteq \mathfrak{o}^*$, somit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{o}^*$ und ebenso $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{o}^*$.

Satz 3. *S sei ein Schiefring mit Einselement* 1, *und* $\mathfrak{o}^*$ *die Asanosche r-Ordnung von S, und* $\mathfrak{o}$ *sei eine in* $\mathfrak{o}^*$ *enthaltene* 1 *enthaltende r-Ordnung von S, deren Führer* $\mathfrak{f}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{o}^*$ *ein* $\mathfrak{o}^*$*-z-Ideal ist. Dann erzeugt die Gesamtheit von den regulären* $\mathfrak{o}$*-z-Idealen und von deren inversen* $\mathfrak{o}$*-z-Idealen eine multiplikative abelsche Gruppe, und sie ist das direktes Produkt der von der regulären Primidealen erzeugten unendlichen Zyklen.*

Satz 4. *Unter derselben Voraussetzung wie Satz* 3, *sei* $\mathfrak{g}$ *ein beliebiges in* $\mathfrak{o}$ *enthaltenes* $\mathfrak{o}^*$*-z-Ideal. Ist* $\mathfrak{a}$ *ein in* $\mathfrak{o}$ *enthaltenes* $\mathfrak{o}$*-z-Ideal, so ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r\mathfrak{a}_0$, *wobei* $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ *zu* $\mathfrak{g}$ *teilerfremde Primideale von* $\mathfrak{o}$ *sind und* $\mathfrak{a}_0$ *einen Teiler einer Potenz von* $\mathfrak{g}$ *bedeutet. Ferner ist* $\mathfrak{a}_0$ *mit jedem zu* $\mathfrak{g}$ *teilerfremden* $\mathfrak{o}$*-z-Ideal kommutativ und die obige Darstellung von* $\mathfrak{a}$ *ist eindeutig.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}^*\mathfrak{a}\mathfrak{o}^*$. Nach [4 ; Zusatz 2. 2] ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r\mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{P}_1 \cdots, \mathfrak{P}_r$ zu $\mathfrak{g}$ teilerfremde Primideale von $\mathfrak{o}^*$ sind und $\mathfrak{C}$ ein Teiler einer Potenz von $\mathfrak{g}$ ist: $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{g}^\rho$. Wir setzen $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_r^{-1} \cdots \mathfrak{p}_1^{-1}\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i \cap \mathfrak{o}$ $(i = 1, \cdots, r)$ zu $\mathfrak{g}$ teilerfremde Primideale von $\mathfrak{o}$ sind. Nun ist $\mathfrak{p}_i^{-1}\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}_i^{-1}\mathfrak{p}_i\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*$, also $\mathfrak{p}_i^{-1}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{P}_i^{-1}$; und ebenso $\mathfrak{o}^*\mathfrak{p}_i^{-1} = \mathfrak{P}_i^{-1}$ $(i = 1, \cdots, r)$. Daher ist $\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}_0\mathfrak{o}^* = \mathfrak{o}^*\mathfrak{p}_r^{-1} \cdots \mathfrak{p}_1^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{o}^* = \mathfrak{P}_r^{-1} \cdots \mathfrak{P}_1^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{g}^\rho$, also $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{o}\mathfrak{a}_0\mathfrak{o} \supseteq \mathfrak{g}\mathfrak{a}_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\mathfrak{o}^*\mathfrak{a}_0\mathfrak{o}^*\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\mathfrak{C}\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^{\rho+2}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\mathfrak{p}_r \cdots \mathfrak{p}_1$. Nun ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{g}$ teilerfremdes Primideal von $\mathfrak{o}$, so ist $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_0)$

$=\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1}\subseteq\mathfrak{p}\mathfrak{o}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}$. Also ist $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_0)=(\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}_0)\subseteq\mathfrak{a}_0$. somit $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\subseteq\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}$, und ebenso $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0\supseteq\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}$, d. i. $\mathfrak{p}\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}_0\mathfrak{p}$.

Satz 5. *Unter derselben Voraussetzung wie Satz* 3, *gilt für jedes in* $\mathfrak{o}$ *enthaltenes* $\mathfrak{o}$-*z-Ideal* $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_r\mathfrak{a}_0,$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ *reguläre Primideale von* $\mathfrak{o}$ *sind und* $\mathfrak{a}_0$ *ein Teiler einer Potenz von* $\mathfrak{f}$ *ist. Ferner ist* $\mathfrak{a}_0$ *mit jedem regulären* $\mathfrak{o}$-*z-Ideal kommutativ und die obige Darstellung von* $\mathfrak{a}$ *ist eindeutig.*

2. Eigenideale

Es sei S ein Schiefring mit Einselement 1, $\mathfrak{o}$ eine r-Ordnung von S. Wenn eine $\mathfrak{o}$ enthaltende Menge G von $\mathfrak{o}$-z-Ideale eine Gruppe bildet, so ist ersichtlich jedes Element von G ein Eigenideal von $\mathfrak{o}$. Nun untersuchen wir die Bedingung, womit die Gesamtheit der Eigenideale von $\mathfrak{o}$ eine Gruppe bildet.

Hilfssatz 8 ([4; Lemma 1. 2]). *Es sei* $\mathfrak{o}$ *eine r-Ordnung von S, und* $\mathfrak{r}$ *sei* $\mathfrak{o}$-*r-Ideal. Es ist* $O_l(\mathfrak{r})=\mathfrak{r}\mathfrak{r}^{-1}$ *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{r}$ *ein projektives rechtsseitiges* $O_r(\mathfrak{r})$-*Ideal ist, dabei* $\mathfrak{r}$ *ein durch endlich viele Elemente erzeugtes* $O_r(\mathfrak{r})$-*Ideal ist.*

Daraus ergibt sich der folgende

Satz 6. *Es sei S ein Schiefring mit Einselement* 1, $\mathfrak{o}$ *sei eine* 1 *umfassende Ordnung, d. i. r- und auch l-Ordnung von S. G sei die Gesamtheit von den ganzen Eigenidealen von* $\mathfrak{o}$, *von deren inversen Ideaen, und von deren beiden endlichvielen Produkten, so bildet G eine Gruppe dann und nur dann, wenn jedes ganze Eigenideal von* $\mathfrak{o}$ *ein links- und zugleich auch rechtsseitiger projektiver* $\mathfrak{o}$-*Modul ist.*

Nun folgt aus Sätze 5, 6:

Satz 7. *S sei ein Schiefring mit Einselement* 1, $\mathfrak{o}^*$ *sei die Asanosche Ordnung, d. i. Asanosche r- und l-Ordnung, und* $\mathfrak{o}$ *sei eine in* $\mathfrak{o}^*$ *enthaltene* 1 *enthaltende Ordnung von S, und G sei wie in Satz* 6. *Ist der Führer* $\mathfrak{f}$ *von* $\mathfrak{o}$ *hinsichtlich* $\mathfrak{o}^*$ *ein* $\mathfrak{o}^*$-*z-Ideal, und ist jedes ganze E-Ideal von* $\mathfrak{o}$ *ein links- und auch rechtsseitiger projektiver* $\mathfrak{o}$-*Modul,* *so bildet G eine Gruppe, und sie ist ein direktes Produkt von der aus regulären $\mathfrak{o}$-z-Idealen erzeugten Untergruppe G_0 und der Untergruppe F, die aus den E-Idealen, die Teiler einer Potenz von $\mathfrak{f}$ sind, erzeugt wird*: $G=G_0\times F$.

Zum Schlusse geben wir ein Beispiel von $\mathfrak{o}$-z-Ideal, das ein E-Ideal von $\mathfrak{o}$ ist und zugleich nicht ein reguläres Ideal ist. Daraus ergibt sich im Satz 6 die Nötigkeit der Bedingung, dass E-Ideale von $\mathfrak{o}$ links- und auch rechtsseitig projektiv sind, wenn auch $\mathfrak{f}$ ein $\mathfrak{o}^*$-z-Ideal ist.

Z sei der Ring der ganzen ratilnalen Zahlen, $C=(m)$ sei ein Ideal von Z, und Q sei der Quotientenkörper von Z. Wir setzen $S=\sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}Q$, $\mathfrak{o}^*=\sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}Z$, $\mathfrak{o}=\begin{pmatrix} Z & C & Z \\ C & Z & Z \\ C & C & Z \end{pmatrix}$, so ist $\mathfrak{o}$ ein Ring, dessen Führer hinsichtlich $\mathfrak{o}^*$ $\sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}C=\mathfrak{f}$ ist. Da $\mathfrak{o}^*$ die Asanosche Bedingungen A_1, A_2, A_3 befriedigende reguläre Maximalordnung von S ist, so ist $\mathfrak{o}$ eine reguläre Ordnung von S. Es sei $\mathfrak{a}=\begin{pmatrix} Z & C & Z \\ C & Z & Z \\ C & C & C \end{pmatrix}$, so ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{o}$-z-Ideal von $\mathfrak{o}$. Durch leichte Berechnung ergibt sich, dass $\mathfrak{o}$ ein Eigenideal von $\mathfrak{o}$ ist: $O_l(\mathfrak{a})=O_r(\mathfrak{a})=\mathfrak{o}$. Aber, da $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{f}$ ist, ist $\mathfrak{a}$ regulär nicht.

Ferner in diesem Beispiel ist $\mathfrak{a}$ ein idempotentes Ideal, d. i. $\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}$, also ist G eine Gruppe nicht, daraus folgt die Nötigkeit der vorhergesagte Bedingung.

In diesem Zusammenhang, nach [2; Satz 2], ist alles reguläres $\mathfrak{o}$-z-Ideal durch $\mathfrak{b}=\mathfrak{B}\cap\mathfrak{o}=\begin{pmatrix} (a) & (ma) & (a) \\ (ma) & (a) & (a) \\ (ma) & (ma) & (a) \end{pmatrix}$ gegeben, wo a eine beliebige zu m teilerfremde ganze rationale Zahle bedeutet, und $\mathfrak{B}=\begin{pmatrix} (a) & (a) & (a) \\ (a) & (a) & (a) \\ (a) & (a) & (a) \end{pmatrix}$ ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. ASANO: Theorie der Ringe und Ideale, Tokyo, 1949 (Japanisch).

[2] K. ASANO und T. UKEGAWA: Ergänzende Bemerkungen über die Arithmetik in Schiefringen, J. Inst. Polytechnics, Osaka City Univ. **3** (1952), 1—7.

[3] M. HARADA: On generalization of Asano's maximal order in a ring, Osaka J. Math. **1** (1964), 61—68.

[4] J. C. ROBSON: Non-commutative Dedekind rings, J. Alg. **9** (1968), 249—265.

[5] T. UKEGAWA: Über zum Führer teilerfremde Ideale einer Ordnung, J. Inst. Polytechnics, Osaka City Univ. **5** (1954), 71—73.

UNIVERSITÄT ZU KOBE

(*Eingegangen am 8, Mai, 1972*)