

# *Mathematical Journal of Okayama University*

---

*Volume 1, Issue 1*

1952

*Article 7*

MARCH 1952

---

## Note sur la dérivée de Lie d'un être géométrique

Yoshihiro Tashiro\*

\*

Copyright ©1952 by the authors. *Mathematical Journal of Okayama University* is produced by  
The Berkeley Electronic Press (bepress). <http://escholarship.lib.okayama-u.ac.jp/mjou>

## NOTE SUR LA DÉRIVÉE DE LIE D'UN ÊTRE GÉOMÉTRIQUE

YOSHIHIRO TASHIRO

Dans mon Mémoire récent "Sur la dérivée de Lie d'un être géométrique et son groupe d'invariance",<sup>1)</sup> nous avons obtenu une formule entre les dérivées de Lie d'un être géométrique spécial, soit linéaire,

$$(1) \quad (X_\nu X_\mu) \mathcal{Q}^A = c_{\nu\mu}^\alpha X_\alpha \mathcal{Q}^A,$$

$X_\alpha$  étant les opérateurs de la différentiation de Lie par rapport aux déformations d'un groupe continu  $G_r$ , et  $c_{bc}^a$  les constantes de structure du groupe. Par conséquent, les résultats se limitaient à tels êtres et en outre les expressions étaient surabondantes et compliquées.

Cette Note est un addenda pour démontrer l'existence de la formule (1) pour un être géométrique général et pour raccourcir les expressions. Comme conséquence, beaucoup de résultats dans DL seront aussi applicables aux êtres géométriques généraux par petites modifications.

1. Dans un espace général à  $n$  dimensions, un être géométrique est un être consistant en  $N$  composantes  $\mathcal{Q}^A(x)$ , qui, par un changement de coordonnées  $\bar{x}^\lambda = f^\lambda(x^1, \dots, x^n)$ , se transforment suivant la loi

$$\mathcal{Q}^A(\bar{x}) = F^A(\mathcal{Q}^B, x^\lambda, f^\lambda, f^\lambda_{,\nu_1}, \dots, f^\lambda_{,\nu_1 \dots \nu_k}), \quad f^\lambda_{,\nu_1 \dots \nu_s} \equiv \frac{\partial^s f^\lambda}{\partial x^{\nu_1} \dots \partial x^{\nu_s}}$$

$$(A = 1, \dots, N; \lambda, \mu, \nu, \omega = 1, \dots, n; s = 1, \dots, k)$$

où les fonctions du second membre, qui s'écriront brièvement comme  $F^A(\mathcal{Q}, x, \bar{x})$ , possèdent des propriétés

$$(3) \quad \begin{aligned} a) & \quad F^A(F(\mathcal{Q}, x, \bar{x}), \bar{x}, \bar{x}) = F^A(\mathcal{Q}, x, \bar{x}), \\ b) & \quad F^A(\mathcal{Q}, x, x) \equiv F^A(\mathcal{Q}^B, x^\lambda, x^\lambda, \delta_{\nu_1}^\lambda, 0, \dots, 0) = \mathcal{Q}^A, \\ c) & \quad F^A(F(\mathcal{Q}, x, \bar{x}), \bar{x}, x) = \mathcal{Q}^A, \end{aligned}$$

1) Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 2, 1951, pp. 166—181; il sera cité comme DL.

$(x^\lambda)$ ,  $(\bar{x}^\lambda)$ ,  $(\bar{\bar{x}}^\lambda)$  étant trois systèmes quelconques de coordonnées.

Par rapport à une déformation infinitésimale  $\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda \delta t$ , la *dérivée de Lie* d'un être géométrique  $\Omega^A(x)$ , qui est définie par

$$(4) \quad X\Omega^A = \lim_{\delta t \rightarrow 0} (\bar{\Omega}^A(\bar{x}) - \Omega^A(\bar{x})) / \delta t,$$

a comme composantes des expressions

$$(5) \quad X\Omega^A = \xi^\lambda \Omega^A_{,\lambda} - \xi^A(x, \Omega),$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport aux variables  $x^\lambda$  et nous avons posé

$$\begin{aligned} \xi^A(x, \Omega) &\equiv \xi^\lambda_{, \nu_s} F^A_{\lambda \nu_s} \equiv \sum_{s=0}^k \xi^\lambda_{, \nu_1 \dots \nu_s} F^A_{\lambda \nu_1 \dots \nu_s}, \\ F^A_{\lambda \nu_1 \dots \nu_s} &= \left[ \frac{\partial F^A}{\partial f^{\lambda, \nu_1 \dots \nu_s}} \right]_{f^\lambda = x^\lambda, f^{\lambda, \nu_1} = \delta^{\lambda \nu_1}, f^{\lambda, \nu_1 \dots \nu_s} = 0} \\ &\quad (s = 0, 1, \dots, k; t = 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Les composantes de la dérivée de Lie d'un être géométrique  $\Omega^A$  se transforment suivant la loi

$$(6) \quad \bar{X}\bar{\Omega}^A = \frac{\partial F^A}{\partial \Omega^B} X\Omega^B \quad (A, B = 1, \dots, N),$$

où et désormais la convention de sommation sera aussi adoptée à l'indice capital. Par conséquent, pour que la dérivée de Lie d'un être géométrique soit *elle-même* un être géométrique, il faut et il suffit que les fonctions de transformation  $F^A(\Omega, x, \bar{x})$  soient linéaires en ses composantes  $\Omega^A$ , un tel être géométrique s'étant appelé un être géométrique *linéaire* dans DL. L'*union*  $\{\Omega^A, X\Omega^A\}$  d'un être géométrique et de sa dérivée de Lie est aussi un être géométrique.

2. Considérons maintenant deux transformations infinitésimales quelconques

$$(7) \quad \begin{aligned} \text{b)} \quad \bar{x}^\lambda &= x^\lambda + \xi^\lambda_s \delta s, \\ \text{c)} \quad \bar{\bar{x}}^\lambda &= x^\lambda + \xi^\lambda_t \delta t. \end{aligned}$$

Quand on effectue successivement ces deux transformations, en négligeant des quantités infinitésimales d'ordre supérieur à deux, le premier membre de (3 a) est égal à

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}^A &= \bar{Q}^A(\bar{x}) + \xi_c^A(\bar{Q}, \bar{x})\delta t + \frac{1}{2}(\xi_c \xi_c)^A \delta t^2 \\
 (8) \quad &= Q^A + \xi_b^A \delta s + \frac{1}{2}(\xi_b \xi_b)^A \delta s^2 \\
 &\quad + \xi_c^A \delta t + (\xi_{c,\mu}^A \xi_b^\mu + \xi_{c,B}^A \xi_b^B) \delta s \delta t + \frac{1}{2}(\xi_c \xi_c)^A \delta t^2,
 \end{aligned}$$

où la virgule précédant la capitale indique la dérivée partielle par rapport à la composante  $Q^B$  et l'on a posé symboliquement

$$(\xi \xi)^A = \sum_{\nu=0}^k \sum_{\ell=0}^k \xi^{\lambda, \nu_1 \dots \nu_s} \xi^{\mu, \omega_1 \dots \omega_\ell} \left[ \frac{\partial F^A}{\partial f^{\lambda, \nu_1 \dots \nu_s} \partial f^{\mu, \omega_1 \dots \omega_\ell}} \right] \begin{matrix} f^\lambda = x^\lambda \\ f^{\lambda, \nu_1} = \partial_{\nu_1}^\lambda \\ f^{\lambda, \nu_1 \dots \nu_s} = 0 \end{matrix}$$

D'autre part, en tenant compte de

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \xi_b^\lambda \delta s + \xi_c^\lambda \delta t + \xi_{c,\mu}^\lambda \xi_b^\mu \delta s \delta t$$

le deuxième membre de (3 a) est égal à

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \bar{Q}^A &= Q^A + \xi_b^A \delta s + \xi_c^A \delta t + (\xi_{c,\mu}^\lambda \xi_b^\mu)_{,\nu_s} F_{\lambda}^{A\nu_s} \delta s \delta t \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\xi_b \delta s + \xi_c \delta t, \xi_b \delta s + \xi_c \delta t)^A.
 \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de  $\delta s$  et de  $\delta t$  dans deux expressions (8) et (9), nous obtenons des identités

$$(10) \quad \xi_b^\mu \xi_{c,\mu}^A + \xi_{c,B}^A \xi_b^B = (\xi_{c,\mu}^\lambda \xi_b^\mu)_{,\nu_s} F_{\lambda}^{A\nu_s} + (\xi_b \xi_c)^A$$

qui sont variables pour vecteurs quelconques  $\xi_b^\lambda$  et  $\xi_c^\lambda$ .

La dérivée de Lie du vecteur  $\xi_c^\lambda$  par la déformation infinitésimale correspondant à  $\xi_b^\lambda$  est un vecteur :

$$(11) \quad \xi_{bc}^\lambda \equiv X_b \xi_c^\lambda = \xi_b^\mu \xi_{c,\mu}^\lambda - \xi_c^\mu \xi_{b,\mu}^\lambda.$$

La dérivée de Lie de l'union  $\{Q^A, X_c Q^A\}$  par rapport à une déformation correspondant à  $\xi_b^\lambda$  est l'union de

$$(12) \quad X_b Q^A = \xi_b^\lambda Q_{,\lambda}^A - \xi_b^A(x, Q)$$

et

$$\begin{aligned}
 (13) \quad X_b X_c Q^A &= \xi_b^\mu (\xi_{c,\mu}^\lambda Q_{,\lambda}^A + \xi_c^\lambda Q_{,\lambda\mu}^A - \xi_{c,\mu}^A - \xi_{c,B}^A Q_{,\mu}^B) \\
 &\quad - \xi_{b,B}^A (\xi_c^\mu Q_{,\mu}^B - \xi_c^B).
 \end{aligned}$$

En échangeant les indices  $b$  et  $c$  de (13), retranchant le résultat de (13) et tenant compte de (12) et (5), nous avons enfin les formules

$$\begin{aligned} (X_b X_c) Q^A &= \xi_{bc}^\lambda Q^A_{,\lambda} - \xi_{bc, \nu}^\lambda F^A_{\lambda \nu} \\ &= \xi_{bc}^\lambda Q^A_{,\lambda} - \xi_{bc}^A \\ &= X_{bc} Q^A, \end{aligned}$$

$X_{bc}$  étant l'opérateur de Lie correspondant à la déformation infinitésimale du vecteur  $\xi_{bc}^\lambda$ .

Si  $\xi_a^\lambda$ ,  $\xi_b^\lambda$ ,  $\xi_c^\lambda$  sont les vecteurs d'un groupe  $G_r$  à  $r$  paramètres, nous avons  $\xi_{bc}^\lambda = c_{bc}^a \xi_a^\lambda$ , et ensuite

$$(X_b X_c) Q^A = c_{bc}^a X_a Q^A,$$

où  $c_{bc}^a$  sont les constantes de structure du groupe  $G_r$ .

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,  
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received February 10, 1951)