Mathematical Journal of Okayama University

Volume 15, *Issue* 1 1971 *Article* 4

DECEMBER 1971

Zur modularen Darstellungstheorie symmetrischer und alternierender Gruppen III

Adalbert Kerber*

*Justus Liebig-Universität

ZUR MODULAREN DARSTELLUNGSTHEORIE SYMMETRISCHER UND ALTERNIERENDER GRUPPEN III

ADALBERT KERBER

In Litv. [1] wurde folgender Satz über die verallgemeinerten Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen bewiesen:

Satz 1. *Die verallgemeinerten Zerlegungszahlen der symmetrischen Gruppen S_n bzgl. p sind für alle n und alle p ganzrational.*

Auch konnte dort angegeben werden, wie die Berechnung dieser verallgemeinerten Zerlegungszahlen auf die Ermittlung von Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen zurückgeführt werden kann. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Tatsache, dass Zentralisatoren von p-Elementen aus S_n direkte Produkte aus Kranzprodukten $Z_{p^j} \wr S_r$ zyklischer p-Gruppen Z_{p^j} mit symmetrischen Gruppen sind. Soweit das auch für p-Elemente alternierender Gruppen gilt, lassen sich deren verallgemeinerte Zerlegungszahlen ganz analog ermitteln. Dabei zeigte sich, dass die verallgemeinerten Zerlegungszahlen von A_3 bzgl. $p=3$ nicht ganzrational sind, dass also folgendes gilt ([1]):

Satz 2. *Die verallgemeinerten Zerlegungszahlen alternierender Gruppen sind nicht immer ganzrational.*

Doch hat kürzlich M. Osima folgendes bewiesen ([6]):

Satz 3. *Die verallgemeinerten Zerlegungszahlen alternierender Gruppen A_n sind bzgl. $p=2$ für alle n ganzrational.*

Man kann nun fragen, wie Satz 1 und Satz 3 gemeinsam verallgemeinert werden können. Als eine Antwort darauf soll hier folgender Satz bewiesen werden:

Satz 4. *Ist* GF(p) *Zerfällungskörper für die Zentralisatoren der p-Elemente aus der endlichen Gruppe G und sind die Werte der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von $G \wr S_n$ auf den p-singulären Elementen ganzrational, dann hat $G \wr S_n$ ganzrationale verallgemeinerte Zerlegungszahlen bzgl. p.*

Satz 4 umfasst die beiden Sätze 1 und 3, ein Spezialfall von Satz 4 ist

Satz 5. *Die verallgemeinerten Zerlegungszahlen der Kranzprodukte*

$S_m \wr S_n$ *sind für alle* m, n *und* p *ganzrational.*

1. Kranzprodukte

Ist G eine Gruppe, H eine Permutationsgruppe auf der Ziffernmenge $\Omega=\{1, \cdots, n\}$, dann versteht man unter dem *Kranzprodukt* $G \wr H$ von G und H die Menge

$$\{(f;\, h) \mid f \text{ Abbildung von } \Omega \text{ in } G,\ h \in H\}$$

zusammen mit der Verknüpfung

$$(f;\, h)(f';\, h') :=(ff'_h;\, hh').$$

(Zu $f': \Omega \rightarrow G$ und $h \in H$ sei f'_h durch

$$f'_h(h(i)) :=f'(i) \ \forall i \in \Omega,$$

zu zwei Abbildungen f und f' deren Produkt ff' durch

$$ff'(i) :=f(i)f'(i) \ \forall i \in \Omega$$

definiert. Produkte von Permutationen sind hier von rechts nach links zu lesen, also

$$hh'(i) :=h(h'(i)) \ \forall i \in \Omega.$$

Es folgt daraus, dass

$$(f_h)_{h'}=f_{h'h}$$

gilt. Ausserdem sei noch zu f eine Abbildung f^{-1} durch

$$f^{-1}(i) :=f(i)^{-1} \quad \forall i \in \Omega$$

definiert und mit e wollen wir die Abbildung mit

$$e(i) :=1_G \quad \forall i \in \Omega$$

bezeichnen.)

Zur Herleitung der Darstellungstheorie von $G \wr H$ geht man vom Normalteiler

$$G^* :=\{(f;\, 1_H) \mid f: \Omega \rightarrow G\}=G_1 \times \cdots \times G_n$$

mit

$$G_i :=\{(f;\, 1_H) \mid f(j)=1_G \quad \forall j \neq i\} \simeq G$$

aus, von der *Basisgruppe* G^* von $G \wr H$. Diese besitzt mit der Untergruppe

$$H' := \{(e ; h) \mid h \in H\} \simeq H$$

ein zu H isomorphes Komplement, es gilt

$$G \wr H = G^* H', \quad G^* \triangleleft G \wr H, \quad G^* \cap H' = 1_{G \wr H} = (e ; 1_H).$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall $G \wr S_n$, also *Kränze um symmetrische Grnppen*, die auch die Namen *volle monomiale Gruppen* über G und *Symmetrien* von G tragen.

Um Satz 4 beweisen zu können, müssen wir die Zentralisatoren von p-Elementen in solchen Gruppen genauer kennen. Dazu können wir auf O. Ores Beschreibung der Zentralizatoren von Elemnten aus solchen Gruppen zurückgreifen ([4]). Zuvor muss allerdings W. Spechts Charakterisierung der Konjugiertenklassen von $G \wr S_n$ beschrieben werden (vgl. [7]). Es sei $(f ; h) \in G \wr S_n$, wir wollen die zu diesem konjugierten Elemente bestimmen.

Dazu legen wir zunächst die Schreibweise von h fest: h sei wie üblich als Produkt paarweise ziffernfremder Zyklen geschrieben, und in den zyklischen Faktoren $(j\ h(j) \cdots h^r(j))$ von h stehe die kleinste Ziffer an erster Stelle. Mittels $f: \Omega \to G$ können wir dann jedem dieser Zyklen auf eindeutige Weise das zugehörige *Zyklenprodukt* bzgl. f

$$ff_h \cdots f_{h^r}(j) = f(j) f(h^{-1}(j)) \cdots f(h^{-r}(j)) \in G$$

zuordnen.

Weiter sei $K_1, \cdots, K_s$ eine im folgenden feste Reihenfolge der Konjugiertenklassen der im folgenden stets als endlich vorausgesetzten Gruppe G. Ist dann h vom *Typ*

$$Th = (a_1, \cdots, a_n),$$

d. h. sind für $1 \leq k \leq n$ genau a_k der zyklischen Faktoren von h Zyklen der Lägen k, so mögen für $1 \leq i \leq s$ genau a_{ik} der a_k Zyklenprodukte zu den Zyklen der Länge k aus h der Konjugiertenklasse K_i aus G angehören. Die Matrix

$$T(f ; h) := (a_{ik}), \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq k \leq n,$$

aus diesen nicht negativen ganzen Zahlen a_{ik} heisse *Typ* von $(f ; h)$. Und ganz analog zu dem bekannten Satz, dass die Elemente $h \in S_n$ vom gleichen Typ $(a_1, \cdots, a_n)$ konjugiert sind, gilt hier ([7]):

1.1 *Die Elemente gleichen Typs* (a_{ik}) *bilden eine Konjugiertenklasse in* $G \wr S_n$.

Dieses Ergebnis erleichtert eine Beschreibung des Zentralisators von $(f;\, h)$.

Betrachten wir zunächst den Spezialfall

$$(f;\, h) \in G \wr S_n,\quad Th=(0,\, \cdots,\, 0,\, 1),$$

h sei also ein Zyklus der Länge n. Der Typ $T(f;\, h)=(a_{ik})$ ist in diesem Fall eine Matrix mit genau einem nicht verschwindenden Koeffizienten, einer 1 in der letzten Spalte. Da Zentralisatoren konjugierter Elemente konjugierte Untergruppen sind und uns die Gestalt des Zentralisators von $(f;\, h)$ nur bis auf Isomorphie genau interessiert, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass für dieses f aus $(f;\, h)$ gilt

$$(f;\, 1_H) \in G_1,\ \text{also}\ f(i)=1_G\ \ \forall i \neq 1,\ \ f(1) \in K_i,$$

wenn $a_{in}=1$ dieser einzige nicht verschwindende Koeffizient von (a_{ik}) ist. $(f;\, h)$ ist nun einerseits trivialerweise mit seinen sämtlichen Potenzen vertauschbar, zum andern aber auch mit den Elementen $(f';\, 1_H) \in G^*$, deren Abbildungen f' konstant sind auf Ω und als Bildmenge ein Element des Zentralisators von $f(1)$ in G haben:

$$f' : f'(i)=g \in Z_G(f(1))\, \forall i \in \Omega.$$

Die Untergruppe dieser $(f';\, 1_H)$ ist die Diagonale der Basisgruppe von $Z_G(f(1)) \wr S_n \leq G \wr S_n$:

$$\mathrm{Diag}\,(Z_G(f(1))^*).$$

Multiplizieren wir diese mit der von $(f;\, h)$ erzeugten zyklischen Untergruppe, so erhalten wir eine Untergruppe des Zentralisators:

$$\mathrm{Diag}\,(Z_G(f(1))^*)\langle(f;\, h)\rangle \leq Z_{G \wr S_n}(f;\, h).$$

Diese hat die Ordnung

$$|\, Z_G(f(1))\, | \cdot n = n\, |\, G\, |\, /\, |\, K_i\, |,$$

was nach Spechts Formel für die Ordnung der Klasse von $(f;\, h)$ ([7]) bereits die Ordnung von $Z_{G \wr S_n}(f;\, h)$ ist. Also haben wir:

1.2 *Ist h ein Zyklus der Länge n und* $(f;\, 1_H) \in G_1$, *dann ist der*

Zentralisator von $(f;\, h)$ *in* $G \wr S_n$ *das Produkt aus der Diagonale der Basisgruppe von* $Z_G(f(1)) \wr S_n$ *mit der von* $(f;\, h)$ *erzeugten zyklischen Untergruppe*:

$$Z_{G\wr S_n}(f;\, h)=\mathrm{Diag}\,(Z_G(f(1))^*)\langle(f;\, h)\rangle.$$

Um daraus den Zentralisator eines allgemeinen Elements $(f;\, h)$ vom Typ $T(f;\, h)=(a_{ik})$ herzuleiten, bezeichnen wir zunächst einmal mit h_{ik}^j $(1\leq j\leq a_{ik})$ die a_{ik} zyklischen Faktoren der Länge k von h, deren Zyklenprodukte bzgl. f in K_i liegen, falls solche vorkommen. Es sei

1.3 $$h_{ik}^j=(r_{ik}^j\ h(r_{ik}^j)\ \cdots\ h^{k-1}(r_{ik}^j)),$$

r_{ik}^j also die jeweils kleinste Ziffer.

Von f aus $(f;\, h)$ können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass

$$f(r_{ik}^j)\in K_i,\quad f(h^{-1}(r_{ik}^j))=\cdots=f(h^{-k+1}(r_{ik}^j))=1_G$$

gilt.

Ist dazu f_{ik}^j die durch

1.4 $$f_{ik}^j(r)=\begin{cases} f(r_{ik}^j) & r=r_{ik}^j \\ 1_G & \text{sonst}\end{cases}$$

definierte Abbildung, dann ist

1.5 $$(f;\, h)=\prod_{i,j,k}(f_{ik}^j;\, h_{ik}^j)$$

und diese Faktoren sind paarweise vertauschbar.

Genau so wie man schliesst, dass der Zentralisator einer Permutation vom Typ $(a_1, \cdots, a_n)$ in S_n isomorph zum direkten Produkt $\times_i (Z_i \wr S_{a_i})$ ist (vgl. [3]), folgt nun hier ([4]):

1.6 *Ist* $T(f;\, h)=(a_{ik})$, *so gilt für den Zentralisator von* $(f;\, h)$ *in* $G\wr S_n$:

$$Z_{G\wr S_n}(f;\, h)\simeq \mathop{\times}_{i,k}(Z_{G\wr S_k}(f_{ik}^1;\, h_{ik}^1)\wr S_{a_{ik}}),$$

dabei ist (vgl. 1.2)

$$Z_{G\wr S_k}(f_{ik}^1;\, h_{ik}^1)\simeq\mathrm{Diag}(Z_G(f(r_{ik}^1))^*)\langle(f_{ik}^1;\, h_{ik}^1)\rangle.$$

Mathematical Journal of Okayama University, Vol. 15 [1971], Iss. 1, Art. 4

2. Darstellungen von Kranzprodukten

Zur Herleitung der irreduziblen Darstellungen von $G \wr H$ über algebraisch abgeschlossenem Grundkörper K wendet man Cliffords Theorie der Darstellungen von Gruppen mit Normalteilern auf die Basisgruppe G^* als Normalteiler an (vgl. [2]).

Die irreduziblen K-Darstellungen von G^* sind genau die äusseren direkten Produkte

2.1 $$F^* := F_1 \# \cdots \# F_n$$

aus irreduziblen K-Darstellungen F_i von G mit den darstellenden Matrizen

$$F^*(f\,;1_H) := F_1(f(1)) \times \cdots \times F_n(f(n)) \text{ (Kroneckerprodukt).}$$

Ist $F^1, \cdots, F^t$ ein vollständiges System paarweise inäquivalenter irreduzibler K-Darstellungen von G, so heisse F^* *vom Typ* $(n_1, \cdots, n_t)$, wenn für $1 \leq j \leq t$ genau n_j der Faktoren F_i von F^* zu F^j äquivalent sind. Ist nun S_{n_j} die Untergruppe derjenigen Permutationen aus der symmetrischen Gruppe S_n $(\geq H)$ auf $\Omega = \{1, \cdots, n\}$, die höchstens die n_j Indizes der zu F_j äquivalenten Faktoren F_i von F^* vertauschen, dann gilt für die *Trägheitsgruppe* $G \wr H_{F^*}$ von F^* (vgl. [2]):

2.2 $$G \wr H_{F^*} = G^*(H' \cap S'_{(n)}) = G \wr (H \cap S_{(n)})$$

mit

$$S'_{(n)} := S'_{n_1} \times \cdots \times S'_{n_t}$$

und

$$S'_{n_j} := \{(e\,;h) \mid h \in S_{n_j}\}.$$

Die Untergruppe

2.3 $$H'_{F^*} := H' \cap S'_{(n)}$$

heisse *Trägheitsfaktor* von F^*.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können und wollen wir annehmen, dass äquivalente Faktoren von F^* sogar gleich sind. F^* kann unter dieser Annahme leicht zu einer Darstellung $\widetilde{F}^*$ von $G \wr H_{F^*}$ erweitert werden. Man braucht dazu nur, wenn

2.4 $$F^*(f;1_H)=(f^1_{\alpha_1\beta_1}(f(1))\cdots f^n_{\alpha_n\beta_n}(f(n)))$$

ist,

2.5 $$\widetilde{F}^*(f;h)=(f^1_{\alpha_1\beta_{h^{-1}(1)}}(f(1))\cdots f^n_{\alpha_n\beta_{h^{-1}(n)}}(f(n)))$$

zu setzen, wenn $(f;h)\in G\wr H_{F^*}$. Das prüft man leicht nach.

Die Einschränkung dieser Darstellung auf die Basisgruppe ist offenbar F^*, also ist $\widetilde{F}^*$ irreduzible Darstellung.

Ist zudem F'' eine irreduzible K-Darstellung des Trägheitsfaktors H'_{F^*}, F' die ihr gemäss

2.6 $$F'(f;h):=F''(e:h)$$

entsprechende Darstellung der Trägheitsgruppe, so ist die induzierte Darstellung

2.7 $$F:=(\widetilde{F}^*\otimes F')\uparrow G\wr H$$

($(\widetilde{F}^*\otimes F')(f;h):=\widetilde{F}^*(f;h)\times F'(f;h)$, Kroneckerprodukt) irreduzible K-Darstellung von $G\wr H$ und jede K-Darstellung von $G\wr H$ ist nach Cliffords Theorie von dieser Form.

3. Beweis von Satz 4

Zum Beweis der Tatsache, dass die verallgemeinerten Zerlegungungszahlen einer endlichen Gruppe ganzrational sind, genügt der Beweis von zweierlei (vgl. [5]): man weist nach, dass die Brauercharaktere der Zentralisatoren von p-Elementen dieser Gruppe und die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere dieser Gruppe auf p-singulären Elementen ganzrationale Werte haben.

Unter den Voraussetzungen von Satz 4 bleibt also zum Beweis nur zu zeigen, dass, falls GF(p) Zerfällungskörper für die Zentralisatoren von p-Elementen in G ist, die Brauercharaktere der Zentralisatoren von p-Elementen in $G\wr S_n$ ganzrational sind.

Ist $(f;h)$ ein p-Element aus $G\wr S_n$ und vom Typ (a_{ik}), so gilt nach 1.6 für dessen Zentralisator:

3.1 $$Z_{G\wr S_n}(f;h)\simeq\bigtimes_{i,k}(Z_{G\wr S_k}(f^1_{ik};h^1_{ik})\wr S_{a_{ik}}).$$

Es genügt deshalb zu beweisen, dass die Brauercharaktere der direkten Faktoren

3.2 $$Z_{G \wr S_k}(f_{ik}^1 ; h_{ik}^1) \wr S_{a_{ik}}$$

dieses Zentralisators ganzrationale Werte haben.

Nach der im letzten Paragraphen beschriebenen Konstruktion der Darstellungen von Kranzprodukten ist das jedenfalls dann der Fall, wenn die irreduziblen p-modularen Darstellungen von

3.3 $$Z_{G \wr S_k}(f_{ik}^1 ; h_{ik}^1)$$

in GF(p) geschrieben werden können. Dazu reicht aber die Voraussetzung von Satz 4 hin, denn wegen 1.2 ist 3.3 eine Erweiterung des Zentralisators eines p-Elements von G mit einer zyklischen p-Gruppe. GF(p) ist also auch für 3.3 Zerfällungskörper, demnach also auch für die Basisgruppe von 3.2. Nach 2.4/2.5 kann also auch jede der Darstellungen $\widetilde{F}^*$ in GF(p) geschrieben werden. Der Trägheitsfaktor jeder p-modularen irreduziblen Darstellung der Basisgruppe von 3.2 ist nach 2.3 direktes Produkt aus symmetrischen Gruppen, hat also ebenfalls GF(p) als Zerfällungskörper, nach 2.7 gilt das dann auch für 3.2 selbst und mithin auch für 3.1.

Die Brauercharaktere von Zentralisatoren von p-Elementen in $G \wr S_n$ sind also ganzrational, wenn GF(p) Zerfällungskörper für die Zentralisatoren von p-Elementen in G ist.
Damit ist Satz 4 bewiesen.

Setzen wir $G=\{1\}$, so erhalten wir als erstes Korollar von Satz 4 den Satz 1.

Ist $h \in S_n$ vom Typ $(a_1, \cdots, a_n)$, dann gilt bekanntlich

$$Z_{S_n}(h) \simeq \underset{i}{\times} (Z_{p^i} \wr S_{a_{p^i}}).$$

Einzige p-modulare irreduzible Darstellung der Basisgruppe von $Z_{p^i} \wr S_{a_{p^i}}$ ist die Einsdarstellung, deren Trägheitsfaktor ist $S'_{a_{p^i}}$, also ist GF(p) Zerfällungskörper für $Z_{p^i} \wr S_{a_{p^i}}$ und damit auch für $Z_{S_n}(h)$. Also ist auch Satz 5 ein Korollar zu Satz 4. M. Osima hat bewiesen, dass GF(2) Zerfällungskörper für die Zentralisatoren von 2-Elementen in alternierenden Gruppen ist ([6]), also folgt aus Satz 4 auch Satz 3.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. KERBER: Zur modularen Darstellungstheorie symmetrischer und alternierender Gruppen,

Mitt. math. Sem. Univ. Giessen **68** (1966), iii+80 S. (Zbl **139**, MR **33**).
[2] A. KERBER: Zur Darstellungstheorie von Kranzprodukten, Can. J. Math. **20** (1968), 665—672 (Zbl **157**, MR **38**).
[3] A. KERBER: Zur Darstellungstheorie von Symmetrien symmetrischer Gruppen, Mitt. math. Sem. Univ. Giessen **80** (1969), 1—27 (Zbl **167**, MR **40**).
[4] O. ORE: Theory of monomial groups, Trans. Amer. Math. Soc. **51** (1942), 15—64 (Zbl **28**, MR **3**).
[5] M. OSIMA: On the generalized decomposition numbers of the symmetric group, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 289—296 (MR **36**).
[6] M. OSIMA: On the generalized decomposition numbers of the alternating group, Symposium on Group Theory, Kyoto Univ., 1968, 51—55 (Japanese).
[7] W. SPECHT: Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe. Schriften Berlin **1** (1932), 1—32 (Zbl **4**).

MATHEMATISCHES INSTITUT DER
JUSTUS LIEBIG-UNIVERSITÄT
6300 GIESSEN (W.-GERMANY)
ARNDTSTRASSE 2

(*Received November 21, 1970*)