

氏名	平 戸 良 弘
授与した学位	博 士
専攻分野の名称	理 学
学位授与番号	博甲第2527号
学位授与の日付	平成15年 3月25日
学位授与の要件	自然科学研究科システム科学専攻 (学位規則第4条第1項該当)
学位論文の題目	Homotopy groups of homogeneous spaces of exceptional Lie groups (例外リー群の等質空間のホモトピー群)
論文審査委員	教授 三村 護    教授 島川 和久    教授 酒井 隆

#### 学 位 論 文 内 容 の 要 旨

$G_2$ ,  $F_4$  及び  $E_6$  をそれぞれ階数 2, 4, 6 のコンパクト, 単連結, 単純例外型リー群とし, 等質空間  $F_4/G_2$ ,  $F_4/\text{Spin}(9)$ ,  $E_6/F_4$  を考える.  $F_4/G_2$  のホモトピー群は 2-成分が 23 次元まで,  $F_4/\text{Spin}(9)$  のホモトピー群は 23 次元まで,  $E_6/F_4$  のホモトピー群も 23 次元まで, それぞれ決定されている.

本論文では,  $F_4/G_2$  のホモトピー群の 2-成分を 45 次元まで,  $F_4/\text{Spin}(9)$  のホモトピー群の 2-成分を 38 次元まで,  $E_6/F_4$  のホモトピー群の 2-成分を 39 次元まで, それぞれ決定した. 計算は以下のような方法で行った.

$F_4/G_2$  に関しては, ファイバーが 15 次元球面で, 全空間が  $F_4/G_2$  で, 底空間が 23 次元球面であるファイバー空間が存在することが知られている. まず, このファイバー空間に伴ったホモトピー完全系列の境界準同型を, 球面のホモトピー群の生成元の間関係式を調べる事により計算した. 次に, 戸田と三村による, ホモトピー完全系列における二次的合成 (Toda bracket) に関する定理を用いて, 群拡大を決定した.

$F_4/\text{Spin}(9)$  に関しては, ファイバーが 7 次元球面で, 全空間が  $F_4/\text{Spin}(9)$  の閉道空間で, 底空間が 23 次元球面の閉道空間であるファイバー空間が存在することが知られている.

このファイバー空間に伴ったホモトピー完全系列を用い,  $F_4/G_2$  の場合と同様の方法で, そのホモトピー群を決定した.

$E_6/F_4$  に関しては, 9 次元球面の  $E_6/F_4$  への包含写像のホモトピーファイバー,  $X$  と書くことにする, を利用した. すなわち, ファイバーが  $X$  で, 全空間が 9 次元球面で, 底空間が  $E_6/F_4$  であるファイバー空間を用いて計算を行った. まず  $X$  のコホモロジー環を求め, その情報から  $X$  の胞体構造を調べ, 次に  $X$  とその部分複体である 16 次元球面との対のホモトピー完全系列を用いて,  $X$  のホモトピー群を求めた. そして,  $X$  のホモトピー群の情報と, ファイバー空間に伴ったホモトピー完全系列に関する先の場合と同様の議論を用いて,  $E_6/F_4$  のホモトピー群を計算した.

## 論文審査結果の要旨

コンパクト, 単連結, 単純例外型リー群  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  の等質空間に関しては,  $F_4/G_2, F_4/\text{Spin}(9), E_6/F_4$  のホモトピー群が23次元まで決定されている.

本論文では  $F_4/G_2, F_4/\text{Spin}(9), E_6/F_4$  のホモトピー群の 2-成分が, それぞれ 45, 38, 39 次元まで決定されている. これらの結果は  $G_2, F_4, E_6$  のより高い次元のホモトピー群の計算への応用が考えられる.  $F_4/G_2$  のホモトピー群は, ファイバーが  $S^{15}$ , 全空間が  $F_4/G_2$ , 底空間が  $S^{23}$  であるファイバー空間を考え, それに伴ったホモトピー完全系列を調べる事により決定されている.  $F_4/\text{Spin}(9)$  のホモトピー群は, ファイバーが  $S^7$ , 全空間が  $F_4/\text{Spin}(9)$  の閉道空間, 底空間が  $S^{23}$  の閉道空間であるファイバー空間を考え, それに伴ったホモトピー完全系列を調べる事により決定されている.  $E_6/F_4$  に関しては, そのCW-復体としての構造を調べ, そして  $S^9$  の  $E_6/F_4$  への包含写像のホモトピーファイバーを用いることにより, 先の場合と同様の方法でホモトピー群を決定している. これらのホモトピー群の決定過程において, 球面のホモトピー群の生成元の合成および二次的合成(Toda Bracket)に関するいくつかの新しい関係式が得られている.

以上のように, 本論文は例外リー群の等質空間のホモトピー論において新しい重要な結果を与えており, その内容はこの理論の発展において有用であると判断されるので, 本論文は博士(理学)の学位に値するものと認める.