岡山大学経済学会雑誌39(４)，2008，91～97

所得分布の不平等計測：η-不変性基準とローレンツ優越

吉　田　建　夫

1　は じ め に

所得不平等度尺度は異なった状態にある所得分配の間で不平等度を比較するうえで欠かせない統計的用具であり，今日に至るまで数多くの不平等度尺度が提案され実証分析に用いられている。これらの不平等度尺度は，各構成員の所得がどのように変化した場合に不平等が不変に保たれるかという性質に応じて，（ⅰ）相対的不平等度尺度，（ⅱ）絶対的不平等度尺度，（iii）中間的不平等度尺度，に大別することが可能である。相対的尺度とは，全構成員の所得の比例的変化に対して不平等度が不変に保たれる性質を有する尺度のことをいう。これに対して絶対的尺度とは，全構成員の所得の絶対的な同一金額の変化に対して不平等度が不変に保たれる性質を持つ尺度のことを指す。中間的不平等尺度とは，文字通り，相対的尺度と絶対的尺度のどこか中間に不平等不変経路が位置しているような尺度の総称である。より形式的には，全構成員の所得の比例的な増加に対しては不平等度は上昇するが，全構成員の所得の同一額の増加に対しては不平等度は減少するような性質を有する尺度のことをいう。中間的不平等度尺度が有すべきこの性質は Bossert and Pfingsten（1990）によって折衷的性質 compromise property と名付けられている。中間的不平等度概念に関しては，Kolm（1976a, b）による独創的な研究が著わされたのを契機に論者の間で徐々に関心が高まり，特に1990年代以降，Pfingsten（1986，1988），Bossert and Pfingsten（1990），Krtscha（1994），Seidl and Pfingsten（1997），Del Río and Ruiz–Castillo（2000），Zoli（1998，1999），Ebert（2004），Zheng（2004，2007），Yoshida（2005）等により，異なった中間的不平等度概念とそれに基づく様々な不平等度尺度が提案されている。

本論文は近年筆者が提唱した中間的不平等概念である η–不平等不変性（Yoshida，2005）を仮定する。η–不平等不変性は Krtscha（1993）が公平な折衷概念 fair compromsise concept と名付けた非線形の中間的不平等概念を一般化してより厳密に定式化したものであって，相対的不平等概念と絶対的不平等概念を両端に含むパラメトリックな中間的不平等概念である。筆者は前論文（Yoshida，2005）において，この新しい不平等概念を，所得分布の社会的厚生基準によるランキングにかかわるフレームワークの中で性格付けることを試みた。本論文では社会的厚生から不平等度計測そのものに焦点を移動させることとする。より具体的には，η–不平等不変性を有する不平等度尺度関数のクラスをそれに対応するローレンツ優越によって性格付けることを本論文の目的とする。

2　基本概念と諸記号

2.1　不平等度尺度：定義

すべての正の自然数の集合を記号$\mathbb{N}$，すべての実数の集合を記号$\mathbb{R}$を用いて表す。$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$，$\mathbb{R}_{++} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$であり，$\mathbb{R}^n_+$は$n$個の$\mathbb{R}_+$のデカルト積を表す。人口が$n \in \mathbb{N}$である所得分布はベクトル$y := (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{D}^n := \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0^n\}$によって表される。なお$0^n := (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$である。本論文が想定するあらゆる所得分布の集合は$\mathbb{D} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}^n$によって表される。更に，任意に与えられた所得分布$y \in \mathbb{D}$についてこの分布を$l$回複製して作る新しい所得分布を$y^{[l]} := \underbrace{(y, ..., y)}_{l} \in \mathbb{D}^{l \cdot n(y)}$によって表そう。所得分布$y \in \mathbb{D}$の算術平均所得を$m(y)$によって表す。最後に$e^n := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$は全構成員が１単位の所得を稼得する単位所得分布を表すものとする。

定義１． 下記の３性質をすべて満たす実数値関数$M : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$を不平等度尺度と呼ぶ。

Ａ１（S-凸性）． 任意の$y \in \mathbb{D}$と任意の重確率行列$Q \in B(n(y))$－但し$B(n) := \{Q \mid Q$ はサイズnの重確率行列$\}$である－に対して

$$M(Q\,y) \leqq M(y)$$

が成立する。

Ａ２（完全平等分配の規模に関する不変性）． 任意の$\xi \in \mathbb{R}_{++}$と任意の$n \in \mathbb{N}$に対して$M(\xi e^n) = M(e^n)$が成立する。

Ａ３（人口に対する対称性）． 任意の$y \in \mathbb{D}$と任意の$l \in \mathbb{N}$に対して$M(y^{[l]}) = M(y)$が成立する。

ここでＡ１は不平等度尺度$M : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$が所得に対して対称的かつ Pigou–Dalton の所得移転原理を満たすことと同値である。Ａ２はＡ１と相俟って完全平等時に不平等度が最小値をとることを保証している[1]。Ａ３は同一の所得分布を複数個合併しても不平等度には何等影響を与えないことを意味している。

さて，異なった総所得を持つ所得分布の間で不平等を比較するためには不平等不変経路－すなわち社会の総所得の変化に応じて各構成員の所得がどのように変化した場合に不平等度が不変に保たれるか－に関する性質が更に追加されなければならない。冒頭でも触れたように，このような不平等不変経路には（ｉ）相対的不平等概念，（ii）絶対的不平等概念，（iii）中間的不平等概念，がある。本論文は近年筆者が提唱した中間的不平等概念であるη–不平等不変性（Yoshida，2005）を仮定する。η–不平等不変性は Krtscha（1993）が公平な折衷概念 fair compromsise concept と名付けた概念を一般化してより厳密に定式化したものであって，相対的不平等概念と絶対的不平等概念を両端に含むパラメトリックな中間的不平等概念である。$M : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$が満たすべき性質として次の性質を導入しよう。

1　任意の$y \in \mathbb{D}$と任意の$\xi \in \mathbb{R}_{++}$に対して

$$M(y) \geqq M\left(Q^E_y\right) = M\left(m(y)e^{n(y)}\right) = M\left(\xi e^{n(y)}\right)$$

が成立する。なお，$Q^E \in B(n(y))$は各要素が$1/n(y)$であるような重確率行列である。

Ａ４（η-不平等不変性）． 不平等不変性を表現するパラメータ $\eta \in [0,1]$ の値が任意にひとつ与えられているとする。任意の $y \in \mathbb{D}$ と

$$y + \tau \cdot \left(\xi_\eta \cdot \frac{y}{m(y)} + \left(1 - \xi_\eta\right) \cdot e^{n(y)} \right) \in \mathbb{D}$$

を満たす任意の $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$M\left(y + \tau \cdot \left(\xi_\eta \cdot \frac{y}{m(y)} + \left(1 - \xi_\eta\right) \cdot e^{n(y)} \right) \right) = M(y)$$

が成立する。ここで $\xi_\eta = \xi\left(\frac{\tau}{m(y)}; \eta\right) := \frac{(\tau/m(y)+1)^\eta - 1}{\tau/m(y)}$ である。

Ａ４を満たす関数 $M : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}$ は明らかにＡ２を満たしているから，Ａ１，Ａ３及びＡ４を満たす $M : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}$ は定義１の意味において不平等度尺度であると言える。以下では各 $\eta \in [0,1]$ に対して記号$\mathcal{M}(\eta)$ を用いて η–不平等不変的な不平等度尺度の関数族を表すことにしよう，すなわち

$$\mathcal{M}(\eta) := \{M : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R} \mid M \text{ はＡ１，Ａ３及びＡ４を満たす.}\}$$

とする。

2.2　ローレンツ曲線基準

各 $\eta \in [0,1]$ を与件として，われわれは η–不平等不変性に対応するローレンツ曲線基準－以下 η–ローレンツ準順序と呼ぶ－を定義することができる（Yoshida，2005）。この概念を導入するための準備として，任意に与えられた $y \in \mathbb{D}$ に対して，ベクトルの各要素を昇順に並べ換えて作る y の permutation を $\tilde{y} := (\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_{n(y)})$ と表したうえで，関数 $S(y, k/n(y); \eta)$ を

$$S(y, k/n(y); \eta) := \begin{cases} \dfrac{1}{n(y)} \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\tilde{y}_i - m(y)}{m(y)^\eta}, & \text{if } k = 1, 2, ..., n(y) : \\ 0, & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

と定義しておこう。η–ローレンツ曲線関数は $S(y, k/n(y); \eta)$ を用いることにより

$$F(y, (k+\theta)/n(y); \eta) := (1-\theta) \cdot S(y, k/n(y); \eta) + \theta \cdot S(y, (k+1)/n(y); \eta)$$
$$\text{（すべての } k \in \{0, 1, ..., n(y) - 1\} \text{ と } \theta \in [0,1] \text{ に対して）}$$

と定義される。すなわち，η–ローレンツ曲線はローレンツ曲線図表上において隣接する各点 $(k/n(y), S(y, k/n(y); \eta)), k = 0, ..., n(y)$，を直線補間することにより描かれる曲線である。$\eta$–ローレンツ準順序は反射律と推移律を満たす $\mathbb{D}$ 上の二項関係

$$L_\eta := \left\{(x, y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D} \mid F(x, p; \eta) \geqq F(y, p; \eta) \text{ for all } p \in [0,1]\right\}$$

として定義される。

3 同値定理

以上の準備のもとにわれわれは次の定理を提出することができる。

定理１． パラメータ $\eta \in [0,1]$ を与件とする。ふたつの所得分布 $x, y \in \mathbb{D}$ について，$M(x) \leqq M(y)$ がすべての$M \in \mathcal{M}(\eta)$ に対して成立するための必要十分条件は $(x, y) \in L_\eta$ が成立することである。

証明. （必要性）準備として関数 $\hat{S}(y, k/n(y); \eta), k = 0, ..., n(y)$，を

$$\hat{S}(y, k/n(y); \eta) := -S(y, k/n(y); \eta) = \frac{1}{n(y)} \cdot \frac{k \cdot m(y) - H(y; k)}{m(y)^{\eta}}$$

と定義しよう。ここで $H(y; k), k = 0, ..., n(y)$，は

$$H(y; k) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i, & \text{if } k = 1, ..., n(y); \\ 0, & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

を表すものとする。$H(y; k), k = 0, ..., n(y)$ は y について対称的かつ凹関数であるから，y の S–凹関数となる。したがって関数 $\hat{S}(y, k/n(y); \eta), k = 0, ..., n(y)$，は y の S–凸関数であることに注意しておこう。また，$\hat{S}(y, k/n(y); \eta)$ が η–不平等不変性を満たすことは

$$\begin{aligned}
&\hat{S}\left(y + \tau \cdot \left(\xi_\eta \cdot \frac{y}{m(y)} + (1 - \xi_\eta) \cdot e^{n(y)}\right), k/n(y); \eta\right) \\
&= \frac{1}{n(y)} \cdot \frac{k\left(m(y) + \tau\right) - \sum_{i=1}^{k}\left[\tilde{y}_i + \tau \cdot \left(\xi_\eta \cdot \tilde{y}_i/m(y) + 1 - \xi_\eta\right)\right]}{\left(m(y) + \tau\right)^{\eta}} \\
&= \frac{1}{n(y)} \cdot \frac{\left(1 + \tau \cdot \xi_\eta/m(y)\right) \cdot \left[k \cdot m(y) - \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i\right]}{\left(m(y) + \tau\right)^{\eta}} \\
&= \frac{1}{n(y)} \cdot \frac{\left[(m(y) + \tau)/m(y)\right]^{\eta} \cdot \left[k \cdot m(y) - \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i\right]}{\left(m(y) + \tau\right)^{\eta}} \\
&= \frac{1}{n(y)} \cdot \frac{k \cdot m(y) - H(y; k)}{m(y)^{\eta}} = \hat{S}(y, k/n(y); \eta)
\end{aligned}$$

により確認される。

以上の準備のもとで，関数 $M_\eta(y; (k + \theta)/n(y)), k = 0, ..., n(y)$，$\theta \in [0,1]$，を

$$\begin{aligned}
M_\eta(y; (k + \theta)/n(y)) &:= -F(y, (k + \theta)/n(y); \eta) \\
&= (1 - \theta) \cdot \hat{S}(y, k/n(y); \eta) + \theta \cdot \hat{S}(y, (k + 1)/n(y); \eta)
\end{aligned}$$

と定義すれば，上述から明らかなようにこの関数はＡ１とＡ４を満たしている。更に任意に与えられ

た $p \in [0,1]$ のもとで

$$M_\eta(y;p) = M_\eta(y^{[l]};p) \text{（任意の } y \in \mathbb{D}\text{， } l \in \mathbb{N} \text{に対して）}$$

が成立するからＡ３が満たされていることも明らかである。以上により，任意に与えられた $p \in [0,1]$ に対して，関数 $M_\eta(y;p)$ は関数族$\mathcal{M}(\eta)$ のメンバーであることが明らかになった。ところでいま仮定により，関数族$\mathcal{M}(\eta)$ に所属するすべての不平等度尺度 M に対して $M(x) \leqq M(y)$ が成立するとされている。したがって

$$F(x,p;\eta) = -M_\eta(x;p) \geqq -M_\eta(y;p) = F(y,p;\eta)$$

が任意の $p \in [0,1]$ に対して成立していることがわかった。

（十分性）逆に $(x,y) \in L_\eta$ が成立しているとする。$\tau = m(y) - m(x)$ とおいたうえで所得分布ベクトル $z \in D$ を

$$z := \begin{cases} x + \tau \cdot \left(\xi(\tau/m(x);\eta) \cdot \dfrac{x}{m(x)} + \left(1 - \xi\left(\tau/m(x);\eta\right)\right) \cdot e^{n(x)} \right), & \text{if } \tau \neq 0; \\ x & \text{if } \tau = 0 \end{cases}$$

としよう[2]。ベクトル z はベクトル x と η–不平等概念の意味で不平等度が同一であるから，Ａ４を満たしているすべての $M: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ に対して

$$M(z) = M(x) \tag{1}$$

が成立する。他方，本証明の必要性パートでも確認されたように，ベクトル x からこのようなベクトル z への移動においては，ローレンツ曲線関数 F は不変に保たれるから

$$F(z,p;\eta) = F(x,p;\eta) \text{（すべての } p \in [0,1] \text{ に対して）} \tag{2}$$

が成立する。したがって，すべての $p \in [0,1]$ に対して

$$\begin{aligned} F\left(z^{[n(y)]},p;\eta\right) &= F(z,p;\eta) && \text{（Ａ３による）} \\ &= F(x,p;\eta) && \text{（(2)による）} \\ &\geqq F(y,p;\eta) && \text{（} (x,y) \in L_\eta \text{ による）} \\ &= F\left(y^{[n(z)]},p;\eta\right) && \text{（Ａ３による）} \end{aligned}$$

が成立している。この式を $m(z) = m(x) + \tau = m(y)$ を考慮して書き改めると，$\sum_{i=1}^{n(y)\cdot n(z)} \tilde{z}_i^{[n(y)]} = \sum_{i=1}^{n(y)\cdot n(z)} \tilde{y}_i^{[n(z)]}$ かつ

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{z}_i^{[n(y)]} \geqq \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i^{[n(z)]} \quad \left(k = 1, \ldots, n(y) \cdot n(z) - 1\right)$$

2　言うまでもなく，$n(z) = n(x)$ である。

が成立するから[3]，Hardy, Littlewood and Pólya（1952）の定理[4]により，ある重確率行列 $Q \in B(n(y) \cdot n(z))$ が存在して

$$M\left(z^{[n(y)]}\right) \leqq M\left(y^{[n(z)]}\right) \tag{3}$$

がＡ１を満たすすべての $M: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ に対して成立する。最後にＡ３を考慮に入れたうえで(1)と(3)を組み合わせることにより，すべての$M \in \mathcal{M}(\eta)$ に対して

$$\begin{aligned} M(x) &= M(z) && \text{((1)による)} \\ &= M\left(z^{[n(y)]}\right) && \text{（Ａ３による）} \\ &\leqq M\left(y^{[n(z)]}\right) && \text{((3)による)} \\ &= M(y) && \text{（Ａ３による）} \end{aligned}$$

が成立することが明らかにされた。 □

参照文献

Berge C (1963) Topological spaces. Oliver and Boyd.

Bossert W, Pfingsten A (1990) Intermediate inequality : Concepts, indices, and welfare implications. Math Soc Sci 19 : 117–134.

Dasgupta P, Sen A, Starrett D (1973) Notes on the measurement of inequality. J Econ Theory 6 : 180–187.

Del Río C, Ruiz–Castillo J (2000) Intermediate inequality and welfare. Soc Choice Welfare 17 : 223–239.

Ebert U (2004) Coherent inequality views : linear invariant measures reconsidered. Math Soc Sci 47 : 1–20.

Hardy G, Littlewood JE, Pólya G (1952) Inequalities (2nd ed). Cambridge UP.

Kolm SC (1976a) Unequal inequalities. I. J Econ Theory 12 : 416–442.

Kolm SC (1976b) Unequal inequalities. II. J Econ Theory 13 : 82–111.

Kolm SC (1999) The rational foundations of income inequality measurement. In : Silber J (ed) Handbook on Income Inequality Measurement : 19–94. Kluwer Academic Publishers.

Krtscha M (1994) A new compromise measure of inequality. In : Eichhorn W (ed) Models and measurement of welfare and inequality : 111–119. Springer–Verlag.

Pfingsten A (1986) Distributionally–neutral tax changes for different inequality concepts. J Public Econ 30 : 385–393.

Pfingsten A (1988) Progressive taxation and redistributive taxation : different labels for the same product? Soc Choice Welfare 5 : 235–246.

Seidl C, Pfingsten A (1997) Ray invariant inequality measures. Research on Economic Inequality 7 : 107–129.

Yoshida T (2005) Social welfare rankings of income distributions : A new parametric concept of intermediate inequality. Soc Choice Welfare 24 : 557–574.

Zheng B (2004) On intermediate measures of inequality. Res Econ Inequality 12 : 135–157.

Zheng B (2007) Unit–consistent decomposable inequality measures. Economica 74, 97–111.

Zoli C (1998) A surplus sharing approach to the measurement of inequality. Discussion Paper in Economics 98/25. Department of Economics and Related Studies, University of York.

Zoli C (1999) A generalized version of the inequality equivalence criterion : A surplus sharing characterization, complete and partial orderings. In : Harrie de Swart (ed) Logic, game theory and social choice : 427–441. Tilburg University Press.

3 ここで $\tilde{z}^{[l]}$ は $z^{[l]} \in \mathbb{D}^{l \cdot n(z)}$ の各要素を昇順に並べ換えて作られる $z^{[l]}$ の permutation であって，$\tilde{z}$ を ℓ 回複製して作られる所得分布ではないことに注意しなければならない。$\tilde{y}^{[l]}$ も同様である。

4 Berge（1963，pp. 184－188），Dasgupta, Sen and Starrett（1973，pp. 182－183）も併せて参照されたい。

Measurement of Income Inequality : The η–invariance and its Associated Lorenz Dominance

Tateo Yoshida

In a recent paper, Yoshida (Social Choice and Welfare 24 : 557–574 ; 2005) has proposed a new concept of intermediate inequality which is referred to as the η–inequality equivalence. The aim of this paper is to characterize the class of inequality measures possessing this property in terms of the associated Lorenz dominance. For each $\eta \in [0, 1]$, we place a class $\mathcal{M}(\eta)$ of inequality measures satisfying the η–inequality equivalence. Then we show that a necessary and sufficient condition for two income distributions to be ranked unambiguously according to the class $\mathcal{M}(\eta)$ is that the associated η–Lorenz curves do not intersect.