UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCÓGNITAS NO 8.º ANO DE ESCOLARIDADE

Rosa Maria de Oliveira Ferreira Pedro Dias

Relatório de estágio

Mestrado em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DE SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES A DUAS INCÓGNITAS NO 8.º ANO DE ESCOLARIDADE

Rosa Maria de Oliveira Ferreira Pedro Dias

Relatório de estágio orientado pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Relatório de estágio apresentado para a obtenção do grau de Mestre em Educação

Área de especialização em Didática da Matemática

2012

Resumo

O presente trabalho apresenta um relatório de uma unidade de ensino sobre a resolução de sistemas de equações que procura estudar a relação entre a abordagem utilizada na sala de aula e a aprendizagem realizada pelos alunos. Visa ainda perceber até que ponto a compreensão da noção de equação e as possíveis dificuldades na manipulação algébrica, nomeadamente na simplificação de expressões algébricas, condicionam a compreensão formal da noção de sistema de equações. A metodologia utilizada consistiu na lecionação dos sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas a uma turma do 8.º ano de escolaridade utilizando uma estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório através da aplicação de um conjunto diversificado de tarefas e valorizando as discussões coletivas. A análise de dados deu especial atenção às produções escritas de todos os alunos da turma, bem como aos momentos de discussão. Além disso, foi recolhido material vídeo e áudio e documental que foi igualmente analisado e mobilizado para a construção deste relatório.

Os resultados confirmam que a já prevista dificuldade na manipulação algébrica constitui um forte fator de insucesso de aprendizagem dos sistemas de equações. Contudo, essa dificuldade não pareceu afetar a compreensão da noção de sistemas de equações. Os alunos, para além de mostrarem compreender a necessidade de encontrarem um par ordenado para satisfazer a conjunção de duas equações, mostraram ainda compreender a interpretação gráfica de sistemas de equações, bem como a importância de aprender como criar sistemas de equações para resolver problemas. Algumas destas estratégias foram encontradas pelos alunos com o auxílio do Geogebra e permitem identificar um claro progresso na sua aprendizagem e uma fácil adaptação à utilização deste *software*. O papel das tecnologias na aprendizagem deverá mesmo ser objeto de estudo e desenvolvimento futuro.

Palavras-chave: sistemas de equações, tarefas, resolução de problemas, análise gráfica, *software* geometria.

Abstract

The present work presents a report of a teaching unit about the study of the solution of systems of equations that seeks to study the relationship between the approach used in the classroom and students' learning. It also seeks to know how far the understanding of the notion of equation and the possible difficulties in algebraic manipulation, particularly in simplifying algebraic expressions, conditions the understanding of conceptual formal system of equations. The methodology used consisted in teaching systems of first degree equations with two unknowns to a class of grade 8 students using an exploratory teaching strategy using a diversity of tasks. Data analysis gave especial attention to the written productions of all students in the class as well as to collective discussions. In addition, video and audio records and other documental data was also analyzed and mobilized for the construction of this report.

The results confirm that the already anticipated difficulty in algebraic manipulation is a strong factor of failure in learning systems of equations. However, this difficulty did not seem to affect the understanding of the notion of systems of equations. The students not only seem to understand the need of finding an ordered pair to solve two equations simultaneously, but also understood the graphic interpretation of systems of equations as well as the importance of learning how to create them to solve problems. Some of these strategies were established by the students with the support of Geogebra and allow the identification of a global progress in student learning and also an easy adaptation to the use of this software. The role of technology in learning process must be object of further studies.

Keywords: systems of equations, task, problem solving, graphic analysis, geometry software

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor João Pedro da Ponte pelas suas críticas, conselhos e ensinamentos e sobretudo pela motivação e incentivo. Um agradecimento especial pela disponibilidade e apoio permanentes que fizeram toda a diferença no solitário processo de pesquisa e escrita.

À escola onde lecionei pela confiança e abertura demonstradas. E aos meus alunos que tanto colaboraram neste trabalho e com partilhei agradáveis momentos de discussão e reflexão. Os resultados obtidos serão sempre deles e para eles.

Aos colegas com quem partilhei os dois anos do mestrado, sobretudo a Adélia Prates e a Celina Tavares. Foram colegas, companheiras de percurso e para sempre amigas.

À minha colega e amiga Sandra Cadima com quem partilhei dúvidas e angústias.

À minha amiga Luísa Delgado pelas longas conversas.

À minha mãe pelo exemplo de força e coragem.

Ao meu marido pela ajuda e apoio incondicionais. Aos meus filhos pela paciência e por compreenderem o pouco tempo que tive disponível durante dois anos. Sem vocês nada disto teria sido possível.

Índice

Índice de anexos

Índice de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Este relatório descreve a conceção, realização e avaliação de uma unidade de ensino sobre sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas no 8.º ano de escolaridade. Neste capítulo apresento a minha motivação para a realização deste trabalho, descrevo os aspetos principais da unidade de ensino bem como as condições existentes na escola.

1.1. Objetivo do trabalho

Num mundo em permanente mudança, a literacia matemática assume, cada vez mais, grande importância. Vivemos hoje numa sociedade em que *compreender* e *usar* Matemática se tornaram prioridades para a vida quotidiana, para o exercício de uma cidadania consciente, para a resolução de problemas exigidos no local de trabalho e para todos aqueles que pretendam ingressar em áreas profissionais que exijam um conhecimento matemático mais aprofundado.

Desde que sou professora que assisto a debates acesos sobre o ensino da Matemática. O insucesso nesta disciplina provocou-me sempre um grande sentimento de frustração. Ciente de que aqueles que compreendem Matemática serão melhor sucedidos no seu percurso de vida, tentei sempre ao longo da minha atividade profissional que os meus alunos fizessem uma aprendizagem efetiva, certa de que o estudo de conceitos e procedimentos rotineiros não é suficiente para que estes percebam Matemática.

A Álgebra é uma das áreas em que tenho notado que os alunos encontram mais dificuldades. É frequente ouvir a frase “deixei de perceber Matemática quando os números passaram a letras". Sabendo que a atividade algébrica exige, com grande frequência, um elevado grau de abstração, é neste tema que um maior número de alunos questiona a utilidade da sua aprendizagem. Deste modo, sem entenderem o significado dos símbolos e qual a sua utilidade, a Matemática torna-se, para muitos alunos, a execução de procedimentos de rotina que utilizam sem saberem muito bem porquê. Os exercícios são repetitivos e, na maior parte das vezes, apenas é exigida a aplicação de regras e procedimentos, levando aqueles que não as compreendem a "decorar". Assim, a Álgebra tem sido frequentemente vista como uma ferramenta para manipular símbolos e resolver problemas e, devido à exigência de um elevado grau de abstração, desprovida de significado prático. Se a isto acrescentarmos a heterogeneidade das turmas, as diferentes atitudes em relação à escola, a par das condições de trabalho em casa e do fraco acompanhamento familiar, não é difícil entender que é necessário utilizar diferentes estratégias para que os alunos se interessem pelo estudo da Matemática.

Com a generalização do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) senti a necessidade de refletir sobre as minhas práticas em sala de aula, nomeadamente na escolha e elaboração de tarefas que proporcionem experiências de aprendizagem significativas, para proporcionar uma aprendizagem com verdadeira compreensão. Assim, este trabalho tem como propósito geral estudar a relação entre a abordagem utilizada na sala de aula e a aprendizagem realizada pelos alunos. Visa ainda perceber até que ponto a compreensão da noção de equação e as possíveis dificuldades na manipulação algébrica, nomeadamente na simplificação de expressões algébricas, condicionam a compreensão formal da noção de sistema de equações. Procura ainda analisar as aprendizagens dos alunos tendo em vista a melhoria da minha prática letiva.

Para atingir estes objetivos, procurarei verificar a adequação da abordagem utilizada na sala de aula (estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório, envolvendo a utilização de diferentes tipos de tarefas) e o modo como esta se reflete na aprendizagem dos alunos.

Desde sempre que o estudo da Álgebra é o que mais me interessa e desafia enquanto professora. Sendo o pensamento algébrico, de acordo com o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), um dos quatro eixos fundamentais para o ensino-aprendizagem da Matemática foi para mim claro que o meu trabalho se focaria neste tema. Sabendo que iria lecionar a alunos do 8.º ano e que estes iriam estudar sistemas de equações pela primeira vez neste ano, considerei que seria interessante estudar a aprendizagem dos alunos neste tópico. Considero importante perceber até que ponto a compreensão da noção de equação e as possíveis dificuldades na manipulação algébrica, nomeadamente na simplificação de expressões algébricas, condicionam a compreensão da noção formal de sistema de equações. Certamente que a sua resolução formal poderá ficar comprometida mas será que não poderá ter sucesso a compreensão (i) da necessidade de conjugar duas condições para que determinadas situações possam ter solução, (ii) da utilização de diversas estratégias para obter a solução do sistema de equações, (iii) da interpretação correta da solução obtida, (iv) da interpretação gráfica, e (v) das estratégias de geração de sistemas de equações? Para conseguir responder a estas questões decidi selecionar para foco deste trabalho o ensino dos sistemas de equações no 8.º ano.

1.2. A unidade de ensino

A unidade de ensino a que se refere este trabalho corresponde ao tópico *Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas* do 8.º ano do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). Na sua organização, foram principalmente tidos em consideração os objetivos e indicações metodológicas do programa, as orientações curriculares constantes na brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte, Branco & Matos, 2009) e as recomendações das *Normas* do NCTM (2007). Uma vez que esta unidade de ensino se destina a alunos que se encontram a frequentar o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), considero que este trabalho será realizado num contexto curricular inovador.

Este trabalho inclui assim, um conjunto diversificado de tarefas matemáticas (exercícios, problemas e tarefas de exploração e de investigação) escolhidas de modo a proporcionar uma aprendizagem mais efetiva do tema sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas. Ao longo da unidade de ensino as tarefas são desenvolvidas a pares, em grupos de quatro alunos cada e são objeto de avaliação formativa. No final da unidade, é aplicada uma ficha de avaliação, a ser resolvida individualmente. Pretendo ainda, que ao longo desta unidade de ensino os alunos tenham um maior contato com as novas tecnologias, nomeadamente nas tarefas de exploração e de investigação, pois considero de grande importância o auxílio que o Geogebra pode trazer para a compreensão dos sistemas de equações.

A escola onde leciono apenas dispõe de duas salas de informática que estão a maior parte do tempo ocupadas com aulas de tecnologias de informação e comunicação, Como resultado dessa limitação de recursos a grande maioria dos alunos da turma não está familiarizada com o *software* de geometria dinâmica a utilizar nestas tarefas nem está habituada a utilizar computadores na aula de Matemática. Trata-se pois de um recurso cuja utilização implica um período inicial de adaptação. Deste modo é necessário mais tempo que o espectável para a lecionação desta unidade. Assim, para que a lecionação das aulas seja feita de acordo com a planificação que fiz e com os objetivos que estabeleci e para que ao mesmo tempo, a planificação da unidade de ensino, realizada pelo grupo de Matemática, não fique comprometida estou, com o acordo do conselho de turma e autorização da direção da escola, a utilizar algumas das aulas de apoio e acompanhamento ao estudo, habitualmente lecionadas pela colega de Língua Portuguesa, com o intuito de ensinar os alunos a usar o Geogebra

Também os alunos, na sua maioria, ao alterarem a rotina das aulas de acompanhamento ao estudo, geralmente caracterizada pela realização de fichas de trabalho, se mostraram entusiasmados com a perspetiva de trabalharem com o Geogebra. Quanto a mim, espero com este trabalho, poder melhorar a minha prática letiva, melhorando também os meus conhecimentos sobre as tarefas a propor aos alunos e sobre o modo de as concretizar na sala de aula.

1.3. Organização do relatório

No segundo capítulo deste relatório procuro enquadrar os sistemas de equações nos Currículos do Ensino Básico. Faço ainda uma breve contextualização da importância do estudo da Álgebra ao longo do último século, bem como das diferentes perspetivas de abordagem do seu ensino ao longo do tempo. Trata-se de uma perspetiva evolutiva uma vez que o ensino da Álgebra passou por diversas fases, correspondendo a indicações diversas relativamente aos seus processos de ensino. Trata-se de perspetivas diferentes espelhadas em sucessivos programas curriculares correspondentes a prioridades ditadas pela evolução pedagógica, científica e tecnológica da sociedade. Termino o capítulo com a descrição e caracterização da turma com que vou realizar este trabalho.

No terceiro capítulo descrevo a planificação da unidade de ensino. Apresento uma pequena revisão da literatura sobre as tarefas no ensino e explico a estratégia e a hipótese de ensino-aprendizagem que formulei. Descrevo ainda a forma como os alunos foram avaliados. Em seguida, apresento as tarefas que escolhi para lecionar esta unidade de ensino e a metodologia utilizada na sua realização. Especifico ainda quais as dificuldades que antecipei para cada uma delas e a forma como pretendo ultrapassá-las.

No capítulo seguinte faço a avaliação e reflexão sobre a forma como decorreu esta unidade de ensino. Descrevo ainda de forma detalhada a realização das tarefas e das aulas em que estas foram realizadas, bem como os resultados da avaliação das fichas sumativas.

Por fim, no quinto capítulo, faço uma reflexão sobre o trabalho realizado, apresento as conclusões que considero mais importantes e levanto algumas questões para futura investigação.

Capítulo 2

Enquadramento e contexto

Os sistemas de equações estão incluídos no tema Álgebra. Sendo este relatório relativo a uma unidade sobre sistemas de equações, e existindo reduzida investigação sobre este tópico, optei por realizar um enquadramento e contextualização mais abrangentes tratando da evolução do ensino da Matemática no seu conjunto.

2.1. Enquadramento curricular da unidade

O currículo da disciplina de Matemática, tanto em Portugal como noutros países, tem sofrido grandes alterações de acordo com a época em que se vive. A reforma curricular é natural e depende tanto de mudanças sociais como da evolução da própria Matemática. Mas não são só os conteúdos curriculares que mudaram e evoluíram. Também evoluiu a noção de currículo. Neste momento, quando se fala em currículo a ideia associada já não é apenas a de um documento com uma listagem de temas que o professor tem que abordar mas sim a de um documento que envolve a seleção de tópicos a abordar, que inclui o plano dos materiais educativos e onde se dá uma maior importância ao papel do professor na sua interpretação e na reformulação que este faz quando o adapta às situações concretas (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997).

Como indica Schubring (1987), no final do século XIX, o desenvolvimento da indústria, consequência da revolução industrial, tinha provocado profundas transformações na sociedade alterando por completo o mercado de trabalho e o respetivo sistema de relações laborais. A estrutura do sistema educacional em vigor, bem como os currículos escolares, eram oriundos de uma sociedade agrícola e estavam longe de corresponder às necessidades desta nova sociedade. A Matemática escolar lecionava então conteúdos bastante elementares e seguia uma metodologia que privilegiava uma abordagem formal, desligada de qualquer aplicação prática. Esta nova sociedade exigia conhecimentos matemáticos mais amplos, mais modernos e avançados e que servissem de base para uma aplicação técnica mais eficaz, compatível com o desenvolvimento industrial e comercial. De acordo com este autor, desde o início do século XIX alguns países fizeram reformas curriculares com base nestas novas necessidades – em Inglaterra o movimento Perry deu maior ênfase a métodos de ensino prático, na Alemanha Felix Klein orientava o ensino para o pensamento funcional enquanto em França se introduziam elementos de cálculo diferencial. Em 1908, realiza-se o IV Congresso Internacional de Matemática, onde é criado o ICMI (International Comission on Mathematical Instruction) uma comissão internacional para analisar e acompanhar as reformas curriculares no ensino da Matemática que são desenvolvidas em diversos países. Surge, deste modo o primeiro movimento de reforma curricular em Matemática.

De acordo com Ponte (2002), entre os anos quarenta e cinquenta a Álgebra era o tema mais importante do programa de Matemática. Em Portugal, os programas continham uma listagem com os conteúdos a abordar e algumas notas e recomendações para os diferentes ciclos. Segundo refere este autor, apesar de algumas indicações pedagógicas constantes nos Programas de Matemática, estes anos são marcados pela memorização e mecanização. No entanto, apesar do ensino da Matemática ser essencialmente orientado para o cálculo, os resultados dos alunos nessa área eram considerados fracos. José Sebastião e Silva (1947) era uma das vozes críticas em relação ao ensino da Matemática, referindo a necessidade de alterar tanto os programas de ensino como as metodologias, no sentido de se tornarem adequadas à época. De igual modo, noutros países os resultados do ensino da Matemática a par dos programas e metodologias utilizadas, eram motivo de controvérsia. Os grandes avanços científicos e tecnológicos conseguidos durante e após a segunda guerra mundial davam peso a uma comunidade científica que considerava ser grande o desfasamento entre o que os alunos estudavam no ensino secundário e o que necessitavam saber quando ingressavam no ensino superior, cujos programas estavam também a sofrer fortes alterações com a introdução de novos temas.

No final dos anos cinquenta, em plena guerra fria, o lançamento do satélite artificial Sputnik 1 pelos soviéticos, provoca grandes tensões no mundo ocidental, intensificando-se a pressão para a modernização do ensino da Matemática. As pressões surtem efeito e quase cinquenta anos depois do IV Congresso Internacional de Matemática, a história da educação matemática no século XX fica marcada pelo Seminário de Royaumont, França em 1959, onde se discutiram novos rumos para a Matemática escolar, nomeadamente qual a base curricular mais adequada para a formação científica de jovens estudantes. Segundo Guimarães (2003), este acontecimento foi decisivo para o início da primeira grande reforma no ensino de Matemática no século XX, pois, para além de se proporem novos conteúdos curriculares, também se discutiram novas metodologias de ensino. Este encontro tomou dimensões internacionais e deu origem ao chamado *movimento da Matemática moderna*. Defendendo uma visão unificadora da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, este movimento pretendia proporcionar aos alunos uma melhor compreensão das ideias matemáticas e um melhor desempenho no cálculo. Os currículos de Matemática foram completamente reformulados com a introdução de novos tópicos e a eliminação de tópicos tradicionais (Ponte, 2002). Foi introduzida uma nova abordagem da Matemática e uma nova linguagem caraterizada pelo simbolismo da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. A mudança dos conteúdos veio acompanhada por uma mudança na metodologia de ensino, valorizando o ensino pela descoberta, o que implicava o abandono do método expositivo por parte do professor e do papel passivo do aluno, procurando antes o diálogo com os alunos e levando-os a uma participação ativa que conduzisse, sempre que possível, à redescoberta dos conceitos.

No início dos anos 70 nos estados Unidos, surge um forte movimento de revolta contra a Matemática moderna. Este movimento, conhecido por *Back to basics*, usa os maus resultados dos estudantes na admissão à universidade para exigir o regresso às competências básicas. O *Back to basics* originou uma forte oposição da comunidade educativa que argumentava que as competências básicas iam para além do cálculo e tinham que incluir outros aspetos tais como a resolução de problemas.

Os anos 80 começam com um novo movimento de reforma do ensino da Matemática através de algumas publicações importantes. A *Agenda for action* do NCTM (1980) referia oito recomendações para o ensino da Matemática: (i) o foco do ensino da Matemática é a resolução de problemas; (ii) as capacidades básicas devem ser definidas de forma a incluírem mais do que destreza de cálculo; (iii) os programas de Matemática devem tirar todas as vantagens das calculadoras e dos computadores em todos os níveis de ensino; (iv) o sucesso dos programas de Matemática e da aprendizagem dos estudantes deve ser avaliado de uma forma mais abrangente do que a dos testes convencionais; (v) deve ser exigido aos estudantes mais estudo de Matemática e os currículos devem ser construídos com um maior número de opções para incluir as diversas necessidades da população estudantil; (vi) os professores devem demonstrar um alto nível de profissionalismo; (vii) o apoio público ao ensino da Matemática deve subir para um nível compatível com a importância da compreensão da Matemática para o indivíduo e para a sociedade. O relatório *Mathematics counts*, coordenado por W. Cockcroft (1982) apresenta uma análise do ensino da Matemática em Inglaterra e no País de Gales enfatizando os seguintes aspetos: (i) resolução de problemas, incluindo a aplicação da Matemática à vida real; (ii) trabalho de natureza investigativa; (iii) trabalho prático apropriado; (iv) discussão entre o professor e os alunos e entre os próprios alunos; (v) utilização de máquinas de calcular e de computadores, com precaução.

Já no final da década, *As Normas para o currículo e avaliação da Matemática escolar*, do NCTM (1989) referem que o principal objetivo da Matemática escolar é desenvolver o poder matemático dos alunos (*mathematical power*), entendendo-se por poder matemático a capacidade para explorar, conjeturar e raciocinar logicamente bem como a aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas e promover o desenvolvimento da autoconfiança. Em termos internacionais, e de acordo com Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) as orientações curriculares que se afirmam na década de 80 e 90 valorizam principalmente quatro ideias: (i) a natureza das competências matemáticas que merecem especial atenção no processo de ensino aprendizagem; (ii) o impacto das novas tecnologias na Matemática e na sociedade; (iii) a emergência de novos domínios na Matemática; (iv) o aprofundamento da investigação sobre o processo de aprendizagem.

Em Portugal, a discussão sobre a renovação do currículo de Matemática fica marcada pelo seminário de Vila Nova de Milfontes (1988) organizado pela APM. Deste seminário salientam-se as seguintes ideias: (i) o ensino da Matemática deve proporcionar aos alunos experiências diversificadas em contextos de aprendizagem ricos e variados; (ii) a aprendizagem da Matemática deve constituir para os alunos uma experiência pessoal positiva; (iii) os currículos e programas de Matemática devem admitir e encorajar experiências de aprendizagem que estejam ligadas a motivações e interesses individuais. Quanto às orientações destacam-se: (i) a resolução de problemas deve estar no centro da aprendizagem da Matemática; (ii) as aplicações da Matemática devem ocupar um lugar relevante no conjunto das atividades de aprendizagem; (iii) o ensino e a aprendizagem da Matemática devem tirar todo o partido possível das calculadoras e computadores; (iv) a escolha dos conteúdos matemáticos a incluir nos currículos escolares, bem como a sua exploração e desenvolvimento têm que ser reavaliados.

No nosso país, no final dos anos 80 e associada à reorganização dos planos curriculares, ocorreu uma reformulação geral nos programas onde a resolução de problemas ganhou um lugar de relevo no ensino básico, tornando a valorizar-se a Geometria e admitindo-se o uso das novas tecnologias. Em 2001 é realizada uma nova reorganização curricular com a publicação do *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais* (ME-DEB, 2001). Estas orientações falam de um ensino por competências, integrando conhecimentos, capacidades e atitudes a desenvolver pelo aluno ao longo de um ciclo. Recomenda-se mesmo que o ensino seja feito a partir de situações do quotidiano e que sejam proporcionadas aos alunos experiências de aprendizagem significativas.

O desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino e aprendizagem da Matemática nos últimos quinze anos e a necessidade de melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos são duas das razões que levaram à publicação em 2007 de um reajustamento do Programa de Matemática para o ensino básico (ME, 2007) que introduz mudanças significativas. Assim, os objetivos gerais do ensino da Matemática passam a ser: (i) promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados; (ii) desenvolver atitudes positivas face à Matemática e à capacidade de apreciar esta ciência. Estas finalidades são concretizadas através de nove objetivos gerais do ensino da Matemática: (i) conhecer fatos e procedimentos; (ii) conhecer a Matemática; (iii) lidar com diversas representações; (iv) comunicar matematicamente; (v) raciocinar matematicamente; (vi) resolver problemas; (vii) estabelecer conexões; (viii) fazer Matemática de um modo autónomo; (ix) apreciar Matemática. Relativamente aos temas matemáticos estão organizados em; (i) Números e Operações; (ii) Geometria e Medida; (iii) Álgebra; (iv) Organização e Tratamento de Dados. Em comparação com os programas de 1990/91 existe uma revalorização da Álgebra por forma a dar resposta a alterações sociais que são consequência de um desenvolvimento cada vez maior da sociedade atual. Este programa destaca também três capacidades transversais: (i) Resolução de problemas; (ii) Raciocínio; (iii) Comunicação matemática As orientações metodológicas dizem respeito à diversidade de tarefas, resolução de problemas, raciocínio matemático, comunicação matemática, representações, conexões, diversidade de recursos, cálculo mental, lugar da História da Matemática e papel da Matemática no mundo atual bem como a diferentes formas de trabalho na sala de aula. O programa apresenta também várias perspetivas orientadoras para a abordagem dos temas, valorizando o sentido de número, o sentido espacial, o pensamento algébrico e a literacia estatística.

2.2. Sistemas de equações nos currículos atuais do ensino básico

São três os objetivos específicos do *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007) em relação ao tópico "Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas": (i) resolver sistemas de equações pelo método de substituição; (ii) interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações; e (iii) resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações. Nas notas, o programa refere que, na interpretação gráfica de sistemas, se deve tratar os casos de sistemas possíveis e determinados e sistemas possíveis e indeterminados, bem como os sistemas impossíveis.

Já as *Normas* do NCTM (2007) referem que os programas de ensino deverão preparar os alunos para o uso de símbolos algébricos na representação e análise de situações e estruturas matemáticas. Este documento indica que os alunos devem: (i) compreender o significado de formas equivalentes de expressões, equações, desigualdades e relações; (ii) escrever formas equivalentes de equações, desigualdades e sistemas de equações, resolvendo-os com destreza – mentalmente ou com papel e lápis, em casos simples, e usando a tecnologia em todos eles; e (iii) usar a Álgebra simbólica para representar e explicar relações matemáticas.

Os sistemas de equações são um dos tópicos da Álgebra, um dos quatro grandes temas do *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007). O grande objetivo da Álgebra no ensino básico é desenvolver o pensamento algébrico nos alunos. Esta é a perspetiva que está subjacente ao programa quando refere que o propósito geral de ensino é desenvolver o pensamento algébrico nos alunos, a sua capacidade de representar através de símbolos situações matemáticas e não matemáticas, bem como a capacidade de resolver problemas em diferentes contextos.

É também esta a perspetiva que o NCTM (2007) apresenta quando refere que o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação, permitindo assim: (i) compreender padrões, relações e funções; (ii) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos, (iii) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (iv) analisar a variação em diversos contextos.

Assim, inclui-se no pensamento algébrico a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções, bem como a capacidade de manipular símbolos e de generalizar. Também a representação, o raciocínio e a resolução de problemas estão incluídas neste pensamento. A primeira está relacionada com a capacidade de usar diferentes sistemas de representação. Na segunda vertente, que diz respeito ao raciocínio dedutivo e ao raciocínio indutivo, assumem grande importância o relacionar, o generalizar e o deduzir. Por último, na resolução de problemas e modelação de situações, pretende-se usar diferentes representações algébricas para interpretar e resolver problemas.

2.3. Caraterização da turma

A turma de 8.º ano em que decorre este trabalho é composta por vinte alunos, dez do sexo feminino e dez do sexo masculino. Duas das alunas integraram a turma em dezembro, uma vinda de uma escola próxima e outra vinda do Brasil. Catorze alunos são de nacionalidade portuguesa e, dos restantes, dois são naturais do Brasil, três de Angola e um da Guiné. A média de idades é de catorze anos, sendo oito o número de alunos com idade superior à esperada. Um aluno está sob a tutela da comissão de proteção de crianças e jovens.

O comportamento da turma é pouco satisfatório e o aproveitamento global é fraco. Quatro alunos sofreram retenções no 1.º ciclo, três alunos no 2.º e seis alunos no 3.º. Três destes alunos sofreram retenções em dois ciclos. Cinco alunos estão a repetir o 8.º ano e quatro revelam interesses divergentes à escola.

Trata-se de uma turma bastante heterogénea, com três alunos muito bons a todas as disciplinas. São alunos acompanhados pelas famílias, que estudam diariamente e não têm dificuldades na aquisição e na compreensão dos conteúdos lecionados. Têm aspirações sociais, culturais e profissionais, gostam de estar na escola e aceitam com entusiasmo os desafios que lhes são colocados. Embora se salientem pela positiva em relação aos restantes colegas, estão perfeitamente integrados na turma. Em contrapartida, dois alunos não revelam qualquer tipo de interesse pelo estudo e, embora gostem de estar na escola, dentro da sala de aula, sempre que podem, perturbam o seu bom funcionamento. Os restantes alunos revelam falta de hábitos e métodos de trabalho, e baixas expetativas face à escola e ao futuro. Alguns deles têm elevada falta de assiduidade e são muito pouco pontuais. Muitos demonstram dificuldades na aquisição e compreensão dos conteúdos lecionados e, embora tentem realizar as tarefas propostas pelos professores dentro da sala de aula, na sua maioria não realizam, as tarefas propostas como trabalho de casa. Além disso, referem que só estudam para os testes e que consideram que o insucesso que obtêm nas diferentes disciplinas tem origem na rapidez com que os assuntos são tratados e no fato de se esquecerem com facilidade dos tópicos lecionados. No entanto, alguns destes alunos, embora não sejam auxiliados em casa no estudo, pois são oriundos de meios socioculturais muito baixos onde frequentemente são eles os membros da família com mais habilitações literárias, têm encarregados de educação que comparecem nas reuniões e que verificam a caderneta onde estão habitualmente registadas as ocorrências mais relevantes. Contudo, por não valorizarem o suficiente a escola, aceitam com alguma facilidade que os seus educandos não estudem determinadas disciplinas, pois também eles as associam a um grau de dificuldade elevado. Destes vinte alunos, dez têm apoio a Língua portuguesa, dez têm apoio a Matemática e dez têm apoio a Inglês.

A adaptação dos alunos à disciplina de Matemática nem sempre foi pacífica. Deparando-se com uma estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório, complementada por momentos de exposição e de sistematização das aprendizagens por mim conduzidos, não foi fácil para este grupo aceitar as normas socio matemáticas necessárias a um ambiente de sala de aula propício à aprendizagem, onde o trabalho individual a pares ou em grupo se vai alternando de acordo com as situações. Para a maioria destes alunos, trabalhar em grupo era sinónimo de não trabalhar ou de provocar situações de indisciplina que impedissem o normal funcionamento da aula. Assim, aquando da constituição dos grupos, distribuí os alunos mais problemáticos e os momentos de maior turbulência foram-se dissipando até praticamente desaparecerem. Para os alunos, passou a ser perfeitamente natural realizar tarefas em grupo, podendo inclusivamente afirmar que lhes é muito mais agradável, pois têm a noção que compreendem melhor a realização das tarefas.

No que concerne ao aproveitamento na disciplina de Matemática, trata-se de uma turma com grande insucesso, situação que não é muito diferente nas restantes disciplinas. Muitos dos alunos fizeram uma parte significativa do seu percurso escolar com aproveitamento inferior a três. Apresentando uma atitude negativa em relação à Matemática e um grande desinteresse, não realizam a maior parte das tarefas propostas, registando, alguns deles, problemas de indisciplina. Convictos de que não vale a pena estudar Matemática porque nunca vão passar, desistem antes de tentar. Levar estes alunos a alterar a sua atitude na sala de aula, efetuar com algum empenho as tarefas propostas e estudar Matemática, realizando os trabalhos que proponho para casa, foram alguns dos objetivos que tracei para o 1.º período. Não fui bem-sucedida com a totalidade da turma, mas mais de metade dos alunos passaram a trabalhar embora, na sua maioria, apenas dentro da sala de aula. É na realidade uma turma constituída por alunos com grandes dificuldades, agravadas pela entrada tardia de duas alunas, uma vinda de uma escola do concelho que optou por uma planificação diferente a Matemática, o que fez com que esta não assistisse ao tópico Números racionais e Funções, e outra vinda do Brasil, e que também não domina aqueles tópicos. Estas alunas chegaram à escola em dezembro pelo que não foram avaliadas.

Para além dos três alunos referidos que são de facto bastante bons, gostam de Matemática e aceitam os desafios que lhes proponho com facilidade e entusiasmo, salienta-se uma outra aluna que não atinge resultados tão bons, mas se revela igualmente empenhada e com características idênticas aos colegas referidos. No passado ano letivo, os três primeiros foram avaliados com nível cinco e a última aluna com nível quatro. Dos restantes alunos, três realizam as tarefas propostas dentro e fora da sala de aula e estão a fazer um grande esforço para ultrapassarem as dificuldades que sentem e dois trabalham dentro da sala de aula mas, por vezes, têm comportamento desestabilizador. Todos os outros são alunos com grandes dificuldades em Álgebra, nomeadamente nas operações com números inteiros e com números racionais e na manipulação algébrica. Já em relação às equações compreendem o significado da incógnita, compreendem as noções de equação e de solução de uma equação. Contudo, a resolução de equações do 1.º grau com parenteses e com denominadores utilizando as regras de resolução fica comprometida pelas dificuldades que têm em operar com números inteiros e com números racionais e na manipulação algébrica.

Ainda assim, considero que os alunos estão a fazer progressos na medida em que já encaram as tarefas que lhes proponho de uma forma natural e começam a trabalhar de modo mais organizado. Também constato com agrado o facto de não faltarem às aulas de apoio, que também são lecionadas por mim, pois para alguns destes alunos, esta atitude significa uma mudança muito grande na sua relação com o estudo da Matemática.

Capítulo 3

Unidade curricular

Neste capítulo apresento a planificação da unidade de ensino. Após uma breve revisão da literatura sobre tarefas, formulo a hipótese geral de ensino-aprendizagem subjacente à unidade e descrevo a perspetiva geral e procedimentos de avaliação que irei pôr em prática. De seguida, faço uma apresentação das tarefas escolhidas, dos objetivos a alcançar com a sua realização e o que pretendo vincar na síntese final de cada uma delas. Apresento ainda uma antecipação das dificuldades dos alunos nas diferentes fases de resolução de cada tarefa, bem como da estratégia prevista para as ultrapassar.

3.1. Abordagem geral

3.1.1. Tarefas no ensino-aprendizagem

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o estudo dos sistemas de equações, a par do estudo das equações dos 1.º e 2.º graus e das inequações, além de fornecer aos alunos um conjunto de ferramentas que lhes permitem modelar situações da realidade, contribui para desenvolver a capacidade de utilizar linguagem algébrica, o raciocínio matemático e a capacidade de resolver problemas. Contudo, o trabalho com sistemas de equações corre o risco de se tornar incompreensível para o aluno, se se desligar dos referentes concretos e se tornar numa prática repetitiva de exercícios tendo em vista a mecanização de procedimentos. Para se minimizar esse risco, tornando o trabalho dos alunos profícuo e melhorando as capacidades acima referidas, é necessária uma cuidadosa seleção de tarefas orientadas para a aprendizagem

De acordo com Ponte (2005), o que os alunos aprendem resulta da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre esta atividade. Daqui ressalta a importância da diversificação de tarefas, procurando evitar a mecanização de procedimentos. As *Normas* do NCTM (2007) referem que, num ensino efetivo, são utilizadas tarefas de Matemática significativas para introduzir conceitos e para motivar e desafiar os alunos. Assumem assim que a seleção das tarefas deve procurar motivar os alunos e envolvê-los na sua aprendizagem.

Também as orientações metodológicas gerais do *Programa de Matemática* (ME, 2007) realçam a importância das tarefas propostas pelo professor quando referem que a aprendizagem matemática resulta do trabalho realizado pelo aluno que, em grande parte, é estruturado em função dessas tarefas. Deste modo, estas orientações recomendam que se proporcionem ao aluno diversos tipos de experiências matemáticas para que seja efetiva a sua aprendizagem. Incluem-se nestas experiências a resolução de problemas, a realização de tarefas de investigação, a realização de projetos, a participação em jogos e a resolução de exercícios. As tarefas devem proporcionar aos alunos experiências informais, fundamentais para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos, remetendo para uma segunda etapa a resolução formal, bem como o trabalho com situações de maior complexidade. A diversificação das tarefas revela-se condição necessária para um ensino eficaz, sendo necessário determinar quais as combinações mais favoráveis à aprendizagem.

Segundo Ponte (2005), as tarefas podem ser de vários tipos e organizadas de acordo com duas dimensões fundamentais: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio é uma dimensão que varia entre reduzido e elevado e é utilizado há muito tempo para classificar uma questão. O grau de estrutura, de utilização mais recente, varia entre aberto e fechado. Uma tarefa é fechada quando, de uma forma muito clara, se diz o que é dado e o que é pedido, como acontece nos exercícios e nos problemas. Estas tarefas distinguem-se pelo seu grau de desafio – o exercício com desafio reduzido e o problema com desafio elevado. Uma tarefa é aberta quando existe um grau de indeterminação no que é dado, no que é pedido, ou em ambos os aspetos, como se verifica nas tarefas de exploração e de investigação. A diferença entre estas está no grau de desafio – as tarefas de exploração apresentam um grau de desafio reduzido, enquanto as tarefas de investigação têm um grau de desafio elevado. O jogo é uma das tarefas que se utilizam há mais tempo no ensino da Matemática e tem em vista atingir um certo objetivo em conformidade com um conjunto de regras bem definidas.

A duração de uma tarefa e o contexto em que está inserida são outras duas dimensões de grande importância. A duração pode ser curta se se tratar de um exercício, média se se estiver a trabalhar com problemas, tarefas de exploração ou de investigação, e longa se se tratar de uma tarefa com características de investigação prolongada ou de um projeto. Em relação ao contexto, as tarefas podem ser enquadradas em contexto da realidade, Matemática pura e semirrealidade, sendo os dois últimos os mais frequentes nos manuais escolares. De acordo com Skovsmose (2000) a semirrealidade aparece em situações que, embora pareçam reais, não têm grande significado para o aluno. As tarefas de modelação são as que decorrem num contexto de realidade. Nesta dimensão, os exercícios, os problemas e as investigações podem surgir em qualquer contexto.

Vários autores valorizam as tarefas de investigação e a resolução de problemas enquanto experiências de aprendizagem. Contra o papel privilegiado que os exercícios têm tido no processo de ensino-aprendizagem pronunciam-se Christiansen e Walther (1986) que os consideram tarefas rotineiras para as quais existem procedimentos que conduzem a soluções já conhecidas. Na perspetiva destes investigadores, deve ser dada primazia a atividades de construção, exploração e resolução de problemas, tarefas não rotineiras e abertas, para cuja resolução não se conhece um procedimento. Por outro lado, Schoenfeld (1996), realça que os problemas devem ser relativamente acessíveis, ter caminhos diferentes, servirem como uma boa introdução para uma ideia importante e funcionarem ainda como ponto de partida para uma exploração matemática. Este autor refere que, quando bem escolhidos, os problemas podem envolver os alunos em discussões, levando-os a pensar matematicamente. Goldenberg (1999) refere que as tarefas de investigação levam os alunos a conjeturar, explorar conexões entre vários conceitos e matérias e descobrir processos de resolução. Para isso é necessário que o aluno aprenda a ser um investigador, o que se alcança através da realização de investigação. Nesta mesma linha de pensamento, Braumann (2002) refere que a aprendizagem da Matemática pode ter uma parte investigativa importante, onde a exploração, a descoberta de estratégias, a tentativa e o erro estão incluídas. Já Pólya (2003) realça que uma experiência matemática similar à atividade criativa dos matemáticos é essencial para os alunos, referindo que para aprender Matemática é preciso fazer Matemática. Também Gravemeijer (2005) enfatiza a utilização de problemas contextualizados com a intenção de levar os alunos a construir modelos que mais tarde se transformam em conceitos, defendendo que estas atividades estabelecem conexões entre o que o aluno já sabe e o que vai ainda aprender. Segundo as *Normas* do

NCTM (2007) a resolução de problemas constitui um pilar de toda a Matemática escolar, ao permitir desenvolver ideias, capacidades e conhecimentos matemáticos, realçando que os bons problemas podem levar à exploração de ideias matemáticas, aumentar a perseverança e a necessidade de se compreender e usar diferentes estratégias.

Nesta unidade de ensino, de acordo com as orientações metodológicas gerais do *Programa de Matemática* (ME, 2007), bem como com as orientações da brochura *Álgebra no ensino básico* (Ponte, Branco & Matos, 2009), as tarefas foram selecionadas tendo em conta a sua proximidade com a realidade, o seu grau de clareza e as características da turma, de modo a poderem ser entendidas, em princípio, por todos os alunos e evitando numa primeira fase a formulação de questões numa linguagem demasiado formal. Assim, as tarefas da unidade seguem a perspetiva subjacente ao programa. A resolução de problemas e a modelação de situações têm uma presença importante procurando-se que proporcionem oportunidades para utilizar conceitos e procedimentos de complexidade crescente sem descurar os procedimentos de rotina necessários à consolidação de conhecimentos. Com estas tarefas pretendo proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem significativas para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de sistemas de equações.

Valorizo a diversificação de tarefas na aprendizagem, incluindo exercícios e problemas quer do manual adotado na escola quer de outros manuais. Assim, a unidade de ensino inclui exercícios e problemas, a par de tarefas de carácter exploratório e investigativo. Estas tarefas favorecem um maior envolvimento do aluno, levando-o não só a colocar questões e a formular conjeturas, testá-las e reformulá-las mas também a apresentar os resultados discutindo e argumentando com os colegas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). As tarefas apresentadas contemplam situações que promovem, por parte dos alunos, uma exploração informal com o intuito de os levar a encontrar provas e explicações que permitam alcançar um conhecimento mais formal. Por outro lado, a sua constituição evidencia diferentes níveis de dificuldade, permitindo que os alunos ponham em prática os conhecimentos que vão adquirindo e conduzindo a uma melhor compreensão dos conceitos.

3.1.2. Estratégia e hipótese de ensino-aprendizagem

A seleção das tarefas pressupõe a definição de uma estratégia de ensino. Optei assim por uma estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório complementada por momentos de exposição e de sistematização das aprendizagens por mim conduzidos. Deste modo, a unidade de ensino foi planificada de forma a ter: (i) aulas com exposição de matéria e resolução de exercícios e problemas do manual adotado e de outros de referência; (ii) tarefas de exploração e de investigação; e (iii) momentos de reflexão, regulação e reformulação de estratégias, recorrendo ao *feedback* da professora e à autoavaliação dos alunos. Ao longo da unidade de ensino as tarefas são desenvolvidas individualmente, em pares ou em pequenos grupos, são orientadas para a aprendizagem e são seguidas de discussão na sala de aula. A hipótese geral de ensino-aprendizagem subjacente à unidade é a seguinte: a diversificação do tipo de tarefas matemáticas conduz os alunos a um melhor desenvolvimento da compreensão da resolução de sistemas de equações bem como a uma aprendizagem efetiva da sua resolução. Assim, assumindo esta hipótese e tendo como ponto de referência as orientações curriculares, considero que a estratégia a seguir para levar os alunos à aprendizagem da resolução de sistemas de equações, com compreensão, deve obedecer às seguintes condições: (i) ter como base os conhecimentos prévios dos alunos; (ii) dar ênfase à interpretação gráfica das soluções de um sistema de equações; (iii) promover a resolução de sistemas de equações pelo método de substituição; e (iv) promover a resolução e formulação de problemas envolvendo equações e sistemas de equações.

Para além da resolução de problemas, também as capacidades transversais de raciocínio e comunicação matemática, indicadas no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) estão presentes nesta unidade de ensino através de tarefas que visam proporcionar aos alunos experiências de ensino significativas para o respetivo desenvolvimento. Tendo em vista a comunicação matemática, tanto a discussão de resultados como de processos e ideias matemáticas são valorizadas quer no trabalho a realizar em grupo quer nos momentos de discussão coletiva.

3.1.3. Avaliação da aprendizagem

De acordo com *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) a avaliação deve: (i) ser congruente com o programa, (ii) constituir uma parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, (iii) usar uma diversidade de formas e instrumentos de avaliação, (iv) ter predominantemente um propósito formativo, (v) decorrer num clima de confiança em que os erros e as dificuldades são encarados de forma natural como ponto de partida para novas aprendizagens e, (vi) ser transparente para os alunos e para as suas famílias, baseando-se no estabelecimento de objetivos claros de aprendizagem. Pretende-se que, com a avaliação, seja possível fazer um balanço entre o que os alunos sabem e o que era esperado que soubessem, de modo a fornecer informações importantes sobre o grau de evolução das aprendizagens dos alunos para que o professor possa fazer um diagnóstico quer das dificuldades quer dos progressos dos alunos e refletir sobre a sua planificação e estratégia de ensino. Neste contexto, a avaliação deve ser contínua, estando implícita uma interpretação dos objetivos que foram atingidos pelos alunos. Deve também ser de caráter formativo devendo envolver os alunos, ajudando-os a analisar o trabalho realizado e a melhorá-lo.

Segundo as *Normas* do NCTM (2007), a avaliação deve ser feita não aos alunos mas para os alunos. Sendo que um dos objetivos da avaliação é melhorar a aprendizagem, referem que a primeira deverá ser mais do que um teste no final de um período de ensino com o objetivo de verificar o desempenho dos alunos em determinadas condições. Salientando que a aprendizagem é geralmente melhor nas turmas em se utiliza a avaliação formativa, reforçam a ideia de que a avaliação se deve tornar uma rotina na atividade da sala de aula e não um momento em que essa atividade se interrompe. A avaliação pode deste modo, fornecer aos professores as informações que necessitam para tomar decisões ao longo do processo de ensino.

Para Pinto e Santos (2006) a avaliação e as suas funções no campo escolar podem reproduzir-se em dois grandes quadros conceptuais: a avaliação sumativa, vista como medida ou balanço dos saberes, e a avaliação formativa, encarada como um instrumento de regulação pedagógica. Considerando que a avaliação faz o balanço sobre o afastamento ou aproximação entre a tarefa produzida e a desejada, ela será sumativa se a informação produzida for utilizada apenas como um meio para reter ou aprovar um aluno, será formativa se as informações recolhidas pelo professor forem utilizadas na melhoria das suas práticas pedagógicas. A análise destas informações, isto é, a interpretação do afastamento entre o produto esperado e o realizado e as orientações que posteriormente se fornecem aos alunos são as grandes características da avaliação formativa. Este envolvimento dos alunos no processo de avaliação, ajudando-os tanto na análise dos seus trabalhos como no aperfeiçoamento dos mesmos é feito através de um processo de comunicação oral ou escrito. Este *feedbackfeedback* tem aqui um papel de grande relevância, pois, quando realizado de uma forma descritiva, auxilia o aluno a progredir na sua aprendizagem.

Em relação à avaliação da unidade de ensino que estou a lecionar, seis tarefas são objeto de avaliação formativa, onde a regulação pedagógica se faz através de *feedback* descritivo. As fichas são novamente entregues aos alunos que de acordo com as indicações escritas e orais, tentam aperfeiçoar o seu trabalho. A sétima tarefa é uma ficha de avaliação sumativa.

Embora seja através da avaliação formativa que os professores conseguem retirar evidências necessárias para poderem fazer inferências sobre o que os alunos sabem e o que necessitam aprender, a avaliação formal não deve ser esquecida. Estando consciente de que este tipo de avaliação pode dar uma informação incompleta e por vezes distorcida dos conhecimentos dos alunos e do seu desempenho, pois encontram-se a trabalhar sobre pressão e limitados pelo tempo, considero que esta é também uma realidade para a qual temos que os preparar. Afinal, tanto professores como alunos são confrontados com avaliação externa através dos testes intermédios ao longo do ano letivo e com exames nacionais no final de cada ciclo. Para além disso quando estou a corrigir as fichas dos alunos não estou apenas interessada em atribuir uma classificação. É para mim importante e útil ter em atenção os erros cometidos e os objetivos atingidos com o intuito de poder tirar ilações sobre o nível de aprendizagem da turma, o que constitui a avaliação da aprendizagem

A avaliação das tarefas tem como referência os objetivos previamente definidos. Assim, após uma primeira avaliação, as tarefas são devolvidas aos alunos com o *feedback* escrito da professora, a fim de serem reformuladas na sala de aula ou em casa. O final da unidade inclui uma tarefa de avaliação sumativa que é realizada individualmente por todos os alunos da turma.

3.2. Organização da unidade de ensino

A unidade de ensino que apresento é constituída por sete fichas de trabalho organizadas a pensar nos processos e ideias matemáticas que pretendo que os alunos desenvolvam. Todas as fichas de trabalho têm um objetivo comum: alcançar de diferentes formas uma aprendizagem com compreensão dos sistemas de equações. A tarefa 1 foi adaptada do manual escolar *Matematicamente Falando 8* da Areal Editores, as tarefas 2 e 4 foram adaptadas da brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte, Branco & Matos, 2009), a tarefa 3 foi adaptada do manual *Matemática em Acção 8* da Lisboa Editora, as tarefas 5 e 6 foram adaptadas da DGIDC - *Funções e Equações* -8.º ano - proposta de Conjunto de Tarefas, a tarefa 7 é constituída por vários problemas, sendo o primeiro deles adaptado do teste intermédio de Matemática 9.º ano (maio de 2011), o segundo adaptado da Netprof.pt, o terceiro do manual escolar *Matemática em Acção 8* da Lisboa Editora.

3.2.1. Tarefa 1 – "O dinheiro da Salomé e da Inês"

Esta tarefa dá início ao estudo do tópico. Os alunos já trabalharam com equações do 1.º grau com duas variáveis no estudo das funções e na resolução de equações literais. O objetivo é levar os alunos a relembrar que a solução de cada uma das equações, isoladamente, não é um número mas sim um par ordenado de números e que estas equações admitem, por norma, uma infinidade de soluções. Pretendo ainda que os alunos entendam que, com a conjunção das duas equações, é possível encontrar o par ordenado que verifica simultaneamente as duas equações que traduzem as informações dadas. Deste modo, introduz-se a noção de sistema de equações do 1º grau a duas incógnitas. A tarefa consiste num exercício e terá a duração de 90 minutos sendo os primeiros 45 minutos para trabalho de grupo e os restantes para discussão e apresentação.

Os alunos trabalharão em grupos de quatro elementos. Cada um dos grupos fará a apresentação da resolução da tarefa. Na síntese final procurarei que seja vincada: (i) a compreensão do significado e interpretação da representação gráfica de um sistema de equações; (ii) a necessidade da conjunção de duas equações para se obter a resolução de um sistema.

É natural que os alunos revelem dificuldades na tradução das situações dadas para equações, principalmente na segunda equação cujo enunciado é menos claro, bem como dificuldades de conexão pois podem não entender que, embora não estejam a lidar com funções, a resolução gráfica é feita com uma equação em ordem a y. Podem ainda surgir dificuldades na marcação de pontos no referencial. Para obstar às dificuldades de tradução das situações pretendo reforçar a atenção dos alunos para uma leitura mais cuidada da alínea a) da tarefa e dar exemplos concretos de situações semelhantes. No que diz respeito às dificuldades de conexão pretendo relembrar que a equação de uma reta é sempre do tipo $y=mx+b$, fazendo a ponte com o que foi aprendido no estudo da função afim através de exemplos práticos, salientando ainda que para se obterem pares ordenados (x,y) é necessária a concretização das variáveis. Quanto à marcação de pontos no referencial pretendo recorrer ao programa Geogebra para uma melhor visualização.

3.2.2. Tarefa 2 – "Pesos"

Esta tarefa, na forma de um problema, será realizada nos primeiros 45 minutos de aula. O primeiro objetivo desta tarefa é que os alunos aprendam a identificar claramente as incógnitas, neste caso o peso de cada um dos jovens. Deverão depois conseguir escrever duas equações que traduzem o discurso e a linguagem natural de cada uma das personagens e os dados fornecidos. Por fim, pretendo que os alunos encontrem a solução do sistema, utilizando as estratégias que acharem adequadas, nomeadamente por tentativa e erro.

Esta tarefa será realizada em grupo. Na primeira parte da aula os alunos realizam a tarefa, apresentam os resultados e as estratégias que utilizaram. Nos últimos 45 minutos da aula será feita por mim, com a colaboração dos alunos, a exposição da resolução do sistema de equações pelo método de substituição. Na síntese final será vincada a resolução de sistemas de equações pelo método de substituição. Também será chamada a atenção dos alunos para a escrita de um sistema de equações na forma canónica.

Prevêem-se as seguintes dificuldades: (i) definição das incógnitas; (ii) escrita das equações, (iii) determinação da solução do sistema; (iv) interpretação da solução do problema. Para colmatar as dificuldades acima mencionadas procurarei, através de exemplos práticos, levar os alunos a perceber que quando não se conhece uma quantidade, esta tem que ser representada por um símbolo, a que chamamos incógnita. Quanto às dificuldades na escrita das equações tentarei que os alunos façam uma leitura atenta do problema, particularizando situações, que se assemelhem à situação em estudo. Relativamente à interpretação da solução do sistema ajudá-los-ei a contextualizar o resultado obtido.

3.2.3. Tarefa 3 - “Classificar sistemas”

Esta tarefa é de natureza exploratória. Pretendo com esta tarefa que os alunos explorem a representação e manipulação gráfica de um sistema e consigam interpretar a solução gráfica. Devem também perceber que a solução de um sistema possível e determinado se obtém pela intersecção de duas retas. Quando estas retas são paralelas, o sistema não tem solução, logo é impossível. Já quando as retas são coincidentes o sistema tem infinitas soluções.

Será realizada em pares, na sala de Informática, com recurso ao programa Geogebra e terá a duração de 90 minutos. Todos os grupos apresentarão os seus resultados. Da síntese final deverá constar a relação entre a classificação de sistemas de equações e as respetivas representações gráficas.

São de prever dificuldades na operação do programa Geogebra e na interpretação do sistema impossível e do sistema indeterminado. No primeiro caso os alunos serão apoiados sempre que necessário na manipulação das ferramentas do programa. Uma maneira de superar as dificuldades relacionadas com a interpretação do sistema impossível será a verificação do declive das retas, relembrando que retas com o mesmo declive são paralelas, o que pode ser verificado no Geogebra. Já no caso dos sistemas indeterminados, a verificação será feita através da identificação das retas coincidentes.

3.2.4. Tarefa 4 – “Formulando sistemas de equações”

Esta é uma tarefa de investigação. Pretendo que os alunos consigam escrever as equações que obedecem às condições impostas e que as comparem com as diferentes equações dos colegas. Esta comparação permitirá que, na discussão geral, os alunos identifiquem estratégias simples de geração de sistemas. Com recurso ao Geogebra os alunos poderão, por tentativas, encontrar diversas estratégias para a resolução da tarefa.
Será realizada em pares, na sala de informática, com recurso ao programa Geogebra e terá a duração de 90 minutos. Todos os grupos apresentarão os seus resultados. Tendo em atenção que por estarem a trabalhar a pares a turma fica com dez grupos de trabalho poderá ser necessário prolongar a discussão para a aula seguinte. A síntese final vincará a identificação de estratégias simples de geração de sistemas de equações. Não são de prever dificuldades na interpretação das questões na construção das retas no Geogebra

nem na escrita de uma equação que torne o sistema possível e com a solução (2,2). Contudo é natural que surjam dificuldades (i) na escrita de uma equação que torne o sistema indeterminado, (ii) na escrita de uma equação que torne o sistema impossível Assim e caso seja necessário, em grande grupo, será relembrada a tarefa anterior para exemplificar o que se pretende com esta tarefa. Estas dificuldades poderão ser superadas recordando a noção de declive de uma reta e por utilização de uma metodologia de tentativa e erro.

3.2.5. Tarefa 5 – "Resolver sistemas"

Esta tarefa inclui diversos exercícios cujo objetivo é a consolidação dos conhecimentos relativos à resolução de sistemas pelo método de substituição bem como a consolidação da noção de solução de um sistema.

A realização desta tarefa tem a duração de 90 minutos. Numa primeira parte será resolvida em grupos. Na segunda parte da aula o porta-voz de cada grupo irá ao quadro apresentar os seus resultados, que serão discutidos com toda a turma, comparando estratégias de substituição de modo a identificar as mais adequadas. A síntese final deverá vincar a possibilidade de existência de diversas estratégias de substituição para a resolução de um sistema de equações, identificando as mais adequadas.

São de prever dificuldades (i) na verificação da solução do sistema de equações dado o par ordenado, (ii) na utilização do método de substituição para a resolução dos sistemas de equações (iii) na manipulação simbólica, (iv) nas operações com números racionais. Todas estas dificuldades serão esclarecidas por mim à medida que surjam.

3.2.6. Tarefa 6 – "Resolvendo problemas"

Esta tarefa é constituída por cinco problemas. O seu objetivo é que os alunos adquiram destreza na identificação das incógnitas e que traduzam problemas em linguagem simbólica, por meio de sistemas de equações. Na última questão, pretendo que os alunos redijam o enunciado do problema dado o sistema de equações. Pretendo ainda que consolidem a sua aprendizagem na resolução de sistemas de duas equações a duas incógnitas, pelo método de substituição, bem como a interpretação da solução.

A resolução da tarefa tem a duração de 90 minutos. Numa primeira parte os alunos trabalham em grupo. Na segunda parte cada grupo fará a apresentação dos resultados de um dos problemas da tarefa. A síntese final deverá realçar aspetos a ter em conta quando se interpreta um problema, identificando-se com clareza as incógnitas e fazendo uma interpretação cuidada da solução, não esquecendo o contexto do problema. Será igualmente focada a necessidade de olhar para um sistemas de equações e saber a partir dele construir uma situação da vida real que traduza o que está escrito em linguagem simbólica. É natural que os alunos revelem dificuldades (i) na identificação clara das incógnitas, (ii) na tradução das situações dadas para equações, (iii) na resolução de sistemas de equações. Para tentar superar esta dificuldade vou numa primeira fase promover a discussão dentro dos grupos e, se necessário, numa segunda fase, promover a discussão destas resoluções em grande grupo, promovendo ainda o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e da comunicação matemática dos alunos. Será também interessante discutir outros métodos alternativos de resolução dos problemas.

3.2.7. Tarefa 7 - Ficha de avaliação sumativa

A ficha de avaliação sumativa é formada por três grupos. Pretendo, à semelhança dos objetivos referidos nos testes intermédios, aferir o desempenho dos alunos e ajudá-los a uma melhor consciencialização da progressão da sua aprendizagem após a lecionação da unidade de ensino. Pretendo ainda ajudar os alunos a familiarizarem-se com instrumentos de avaliação em condições semelhantes às da avaliação externa. É uma ficha para resolver em 45 minutos, e o nível de exigência está de acordo com a abordagem e o trabalho realizado no estudo desta unidade de ensino. As questões não estão formuladas de uma forma rotineira e apresenta algum equilíbrio entre processos matemáticos. Assim na questão 1 pretendo verificar se os alunos conseguem utilizar o método de substituição na resolução de sistemas de equações. Em relação à alínea a) da questão 2, o objetivo é determinar o domínio da linguagem simbólica. Pretendo deste modo verificar se os alunos conseguem interpretar e compreender o enunciado de um problema num determinado contexto, e escrevê-lo em linguagem natural. Nas alíneas b) e c) os alunos são confrontados com um problema num contexto do seu dia-a-dia e pretendo analisar o desembaraço que adquiriram para resolver problemas bem como as estratégias que utilizam para os resolver, daí que não indique na alínea c) o método de substituição para o resolverem. Na questão 3 pretendo que os alunos apliquem os seus conhecimentos relativamente à interpretação gráfica de um sistema de equações para escreverem um sistema de equações possível (determinado e indeterminado) e um impossível.

Tabela 1 - Tarefas a realizar na unidade de ensino

Aula	Tarefas	Origem	Natureza	N.º Blocos previstos
1	Tarefa 1 – "O dinheiro da Salomé e da Inês" e discussão geral;	Manual MF8	Exercício	0,5
2				0,5
3	Tarefa 2 "Pesos" e discussão geral; Resolução de sistemas: método de substituição.	Brochura	Problema	0,5
4				0,5
5	Tarefa 3 – "Classificar sistemas" e discussão geral	Manual escolar	Tarefa exploratória	0,5
6				0,5
7	Tarefa 4 – "Formulando sistemas de equações" e discussão geral	Brochura	Tarefa de investigação	0,5
8				0,5
9	Tarefa 5 - "Resolver sistemas" e discussão geral	DGIDC	Exercício	0,5
10				0,5
11	Tarefa 6 – "Resolvendo problemas" e discussão geral	DGIDC	Problema	0,5
12				0,5
13	Ficha de avaliação sumativa			0,5

Capítulo 4

Avaliação e reflexão

Neste capítulo faço a avaliação e a reflexão sobre a forma como decorreu esta unidade de ensino. Para isso utilizo partes das aulas que foram gravadas em áudio e vídeo. Nestas gravações dei especial atenção às apresentações e às conclusões dos alunos em grande grupo bem como a alguns diálogos entre alunos e entre mim e os alunos quando trabalhavam em grupo.

4.1. Tarefa 1

4.1.1. Primeira aula

Devido às alterações e ajustamentos que foram sendo introduzidas na planificação pelo grupo de Matemática, a primeira aula não teve início num bloco de 90 minutos como previsto, mas sim numa aula de 45 minutos. Decidi assim, que este meio bloco seria dedicado à realização da tarefa pelos alunos e que a apresentação e discussão dos resultados transitariam para a aula seguinte. Deste modo, com a realização da tarefa 1 "O dinheiro da Salomé e da Inês", dei início ao estudo dos sistemas de equações.

Depois dos alunos se sentarem em grupo, distribuí a ficha de trabalho e enfatizei a necessidade de estarem atentos e concentrados. Começaram então a trabalhar e, embora esta aula só tenha sido gravada em áudio, senti que a presença do gravador inibia a turma. Os alunos estavam nervosos e, ao contrário do habitual, em vez de falarem alto praticamente sussurravam para não serem gravados. Procurei tranquilizá-los, desvalorizando a presença do gravador e explicando que rapidamente o esqueceríamos. Os alunos começaram finalmente a trabalhar.

Numa primeira abordagem, três dos cinco grupos não leram com cuidado o enunciado da tarefa que lhes indicava claramente que deveriam designar por x o dinheiro da Salomé e por y o dinheiro da Inês. Em vez disso, começaram a atribuir valores procurando obter de imediato a solução. Esta situação é percetível no seguinte diálogo entre alunos do Grupo 4:

Gustavo: Elas duas juntas tem 10 euros não é?

Francisco: A Inês tem menos 6 euros que a outra… Então se esta tem menos 6 euros que a Salomé, uma tem 6 euros e a Inês tem 4 euros não é?

Após cada tentativa, os alunos voltavam a recomeçavam. Embora me parecesse que a primeira equação iria ser relativamente fácil, tal não se verificou. Pelo contrário, a resolução desta equação apresentou grandes dificuldades, não antecipadas.

O mesmo aconteceu com a segunda equação cujo enunciado é menos claro e onde estas dificuldades estavam já previstas. Fui assim muito solicitada pelos diversos grupos, que me pressionavam para que lhes desse uma resposta direta. Fui respondendo às suas questões com outras questões, de modo a direcionar a sua concretização e recomendando sempre que lessem cuidadosamente o enunciado.

O Grupo 4, convencido de que já tinha alcançado o resultado, tentava agora escrever as duas equações:

Luís: x é o dinheiro da Salomé não é?

Francisco: E y é o dinheiro da Inês, temos que pôr isto em duas equações…

Gustavo: $y = 10x$ … Não deve ser… $10 = 6x$

Luís: Ou…. $y = 6x - 10$ … A Inês deve ser $y = 10 - 6x$ … Vamos chamar a professora:

Francisco: Não sabemos fazer.

Professora: Têm que escrever duas equações que traduzam o que o enunciado diz. Como é que escrevo em linguagem matemática eu e tu temos 10 euros? E como é que escrevo que tenho menos 6 euros que tu?

Leonardo: $y + x = 10$ está certo?

Professora: Vocês é que sabem… O que acham? Parece-me que sim.

Francisco: Já fizemos de cabeça…

Professora: Independentemente disso têm que saber passar de linguagem natural para linguagem matemática. Mas será que chegaram, de cabeça, a um resultado certo?

António: A segunda equação deve ser $y + x = 10 - x$.

Luís: Não, deve ser $10x - 6 = y$

Francisco: Não, já sei é $x - 6 = y$

Este diálogo mostra a dificuldade do grupo em escrever as equações. Esta dificuldade foi sentida por toda a turma. Os alunos, embora entendessem o enunciado, tiveram grandes dúvidas em passar do concreto para o abstrato. Substituir o nome da Salomé e da Inês por *x* e *y*, respetivamente, não fazia sentido para alguns destes alunos, que, deste modo, escreviam equações ao acaso sem pensarem no que estavam a escrever. Comecei por pedir a todos os grupos que passassem para linguagem natural o que tinham escrito em linguagem matemática. Sem muita dificuldade, os grupos perceberam que o que tinham escrito não correspondia ao enunciado. Assim, para que conseguissem ultrapassar as dificuldades que estavam a sentir, grupo a grupo, fui colocando as mesmas questões:

Supondo que eu sou o *x* e tu és o *y* como é que escreves em linguagem matemática eu e tu juntos temos 10 euros? E como é que escreves que tenho menos 6 euros que tu?

Percebi que esta questão os ajudava quando observei, por exemplo, o Grupo 3 que, antes de escrever a equação com as incógnitas, escreveu os nomes das raparigas e só depois os substituiu. Quando questionados sobre o seu raciocínio referiram que tinham percebido que à Salomé também se podia chamar *x* e à Inês também se podia chamar *y*, depois era só substituir (figura 1).

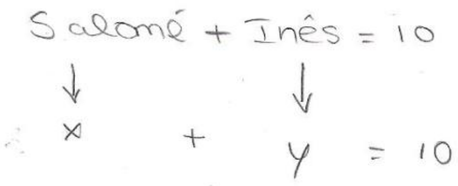


Figura 1- Registo do raciocínio dos alunos do Grupo 3

Também os outros grupos compreenderam que estavam a escrever equações incorretas e, depois de lerem em linguagem natural o que tinham escrito em linguagem matemática, acabaram por conseguir escrever a primeira equação.

A segunda equação levantou mais dificuldades do que a primeira, tal como previsto. No entanto, a sua escrita foi feita com cuidado, ponderação e de uma forma organizada, identificando já com clareza as incógnitas e lendo com atenção o enunciado. Para escrever esta equação, o Grupo 3 utilizou a estratégia que já tinha utilizado para escrever a primeira (figura 2).

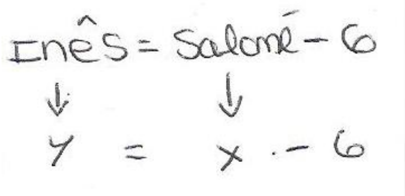


Figura 2 - Registo do raciocínio dos alunos do Grupo 3

Todos os grupos conseguiram escrever as suas equações (figura 3).

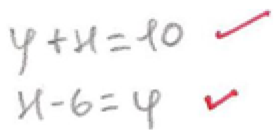


Figura 3 - Registo das equações obtido pelos alunos do Grupo 4

Como os alunos estavam esquecidos da necessidade de resolver a equação em ordem a *y*, a representação gráfica das equações levantou algumas dificuldades, tal como estava previsto. Deste modo, e de acordo com as dúvidas de cada grupo, fui perguntando como é que faziam os gráficos quando estudámos as funções. Foram-se lembrando que tinham que ter a equação escrita em ordem a *y* e a partir daí toda a turma, com exceção dos alunos do Grupo 1, conseguiu fazer a representação gráfica. Este mesmo grupo continuou a apresentar muitas dificuldades e não conseguiu construir o gráfico. Sinal evidente dessas dificuldades é também a quantidade excessiva de valores que os alunos atribuíram a *x* (figura 4):

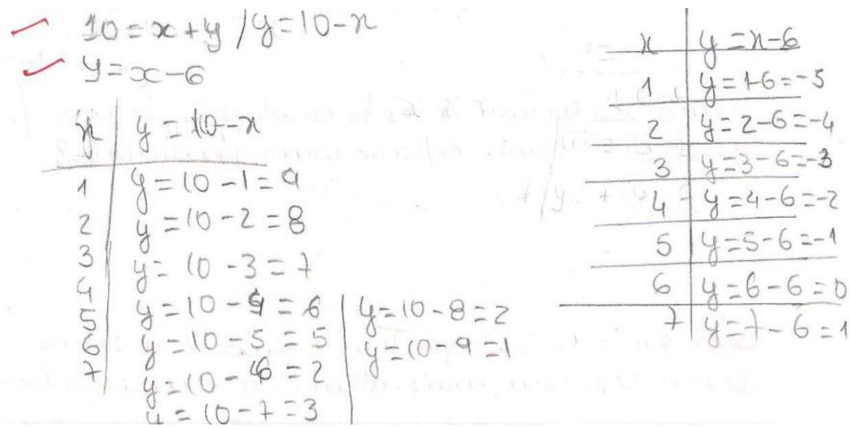


Figura 4 - Cálculos do Grupo 1 para construção do gráfico

A ficha foi concluída, tendo a aula terminado com a recolha das fichas de trabalho. A turma foi relembrada de que na aula seguinte seriam entregues as fichas com o respetivo *feedback* e que, após a reformulação das questões, se procederia à apresentação e discussão da tarefa.

4.1.2. Segunda aula

Esta aula foi gravada em áudio e em vídeo. Ao contrário da primeira, os alunos foram pontuais e aparentavam calma. Entreguei as fichas com o meu *feedback*. Na questão 3, o Grupo 3 e o Grupo 5 responderam que a solução comum às duas equações era o 8 e que representava o dinheiro da Salomé. Deste modo, o meu *feedback* foi levá-los a questionarem-se, através de perguntas, se essa seria a resposta correta. Se tinham compreendido que 8 euros era o dinheiro de uma das raparigas, o que tinha acontecido ao dinheiro da outra? Tinha dinheiro ou não? Em caso afirmativo quanto dinheiro tinha? As respostas foram reformuladas e com facilidade estes dois grupos compreenderam que a solução era o par ordenado comum às duas retas, relacionando assim as coordenadas do ponto de interseção das retas com o dinheiro das raparigas.

O Grupo 1 esteve comigo na primeira aula a esclarecer as dúvidas que tinha em relação à construção do gráfico. Não teve por isso, tempo para o construir e a partir daqui não fez mais nada na ficha. Deste modo o meu *feedback* teve como principal objetivo incentivar o grupo a construir o gráfico e a responder às restantes questões, uma vez que estavam principalmente preocupados com o atraso que tinham na resolução da ficha em relação aos restantes colegas. Ainda assim, mesmo depois de terem construído o gráfico e de perceberem que a solução era um par ordenado que representava o dinheiro das duas raparigas, quando responderam à questão 4 não tiveram em conta o enunciado e trocaram o dinheiro da Inês com o da Salomé, o que originou novo *feedback* com a indicação de terem que ler com mais atenção o que se perguntava no problema. Perceberam com esta indicação que tinham trocado os valores.

O Grupo 2 não respondeu à questão 3, embora tenha construído o gráfico. No entanto respondeu corretamente à questão 4 onde se pergunta quanto dinheiro tem cada uma das raparigas. Dirigi, por essa razão o meu *feedback* para uma análise mais cuidada do resultado do gráfico. Perceberam a questão, alegando que não tinham tido dúvidas e que se tinham esquecido de responder. O Grupo 4 resolveu toda a ficha corretamente.

Iniciámos assim a apresentação e discussão dos resultados.

Questão 1. Esta questão tinha sido bastante trabalhada na aula anterior, pelo que houve consenso na escrita das equações.

Questão 2. Nesta questão só os alunos do Grupo 1 é que não tinham conseguido construir o gráfico. Deste modo, para verificar se o diálogo que tinha mantido com o grupo os tinha levado a compreender a construção do gráfico e a superar as dificuldades sentidas, pedi ao seu porta-voz que explicasse à turma como construíram o gráfico. Na figura 5 pode observar-se o gráfico que o grupo construiu depois do diálogo que mantive com os alunos.

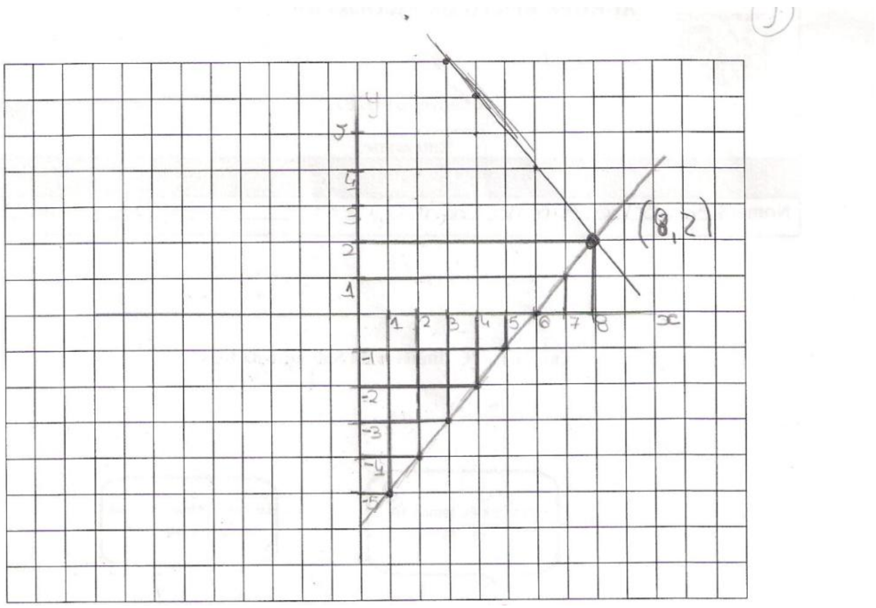


Figura 5 - Gráfico do Grupo 1 após *feedback* da professora

Após os alunos terem explicado a forma como construíram o gráfico, solicitei a uma das alunas desse grupo que fizesse a sua construção no quadro (figura 6).

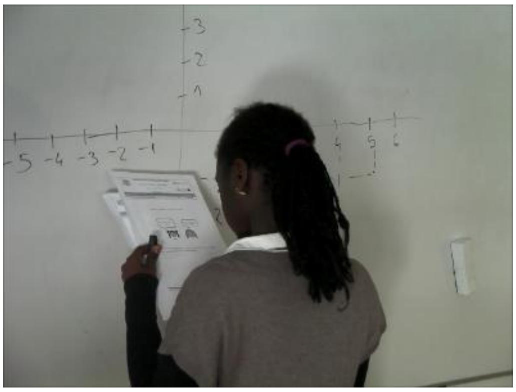


Figura 6 - Aluna constrói gráfico

Esta construção foi ainda feita com dificuldades, não tendo a aluna mostrado preocupação com a escala. Deste modo, após a união dos pontos, não conseguiu obter retas (figura 7).

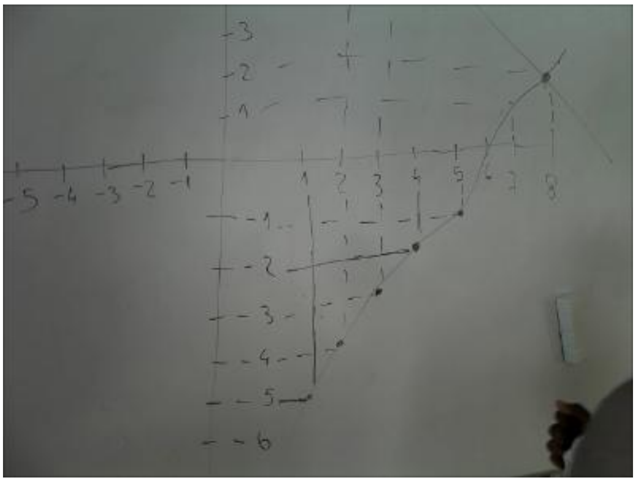


Figura 7 - Gráfico construído pelo Grupo 1

Quando confrontada com o resultado, a aluna explicou que “não tinha ficado direito por causa das distâncias entre os pontos”. Ainda assim, toda a turma concordou que o gráfico seria parecido com aquele, embora mais “direito” e passámos à análise e discussão da questão seguinte.

Questão 3. Perante a pergunta se há alguma solução comum às duas equações e qual o significado dessa solução, dois dos grupos respondem corretamente, não demonstrando dificuldades na interpretação da representação gráfica da solução de um sistema de equações (figura 8).

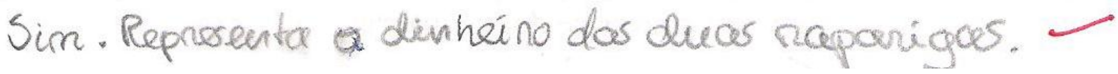


Figura 8 – Registo do Grupo 4

Este grupo, embora não explicite qual é a solução, percebe o seu significado identificando-o com o dinheiro das duas raparigas.

Registe-se que as dificuldades de identificação gráfica da solução foram sentidas por mais de metade dos alunos que interpretaram mal essa representação, atribuindo apenas um valor para a solução do sistema. Assim, um grupo não respondeu e dois dos grupos responderam de forma incompleta indicando apenas qual o dinheiro de uma das raparigas, utilizando o valor obtido em x (uma das coordenadas da solução) e esquecendo o valor da coordenada em y (figura 9):

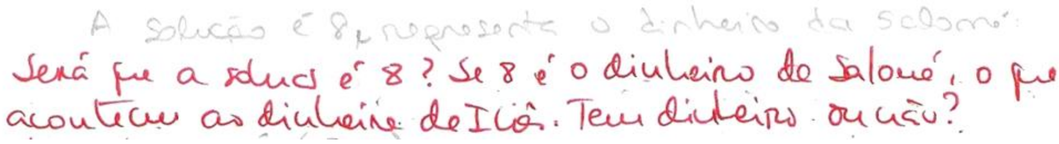


Figura 9 - Primeira versão da resposta do Grupo 5 com *feedback*

O efeito positivo do *feedback* pode ser visto na reformulação da resposta do grupo (figura 10):

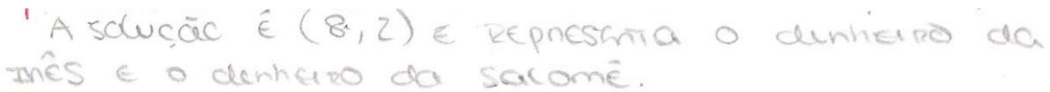


Figura 10 - Segunda versão da resposta do Grupo 5

Questão 4. Na última questão, à exceção do grupo que por não ter conseguido construir o gráfico ficou limitado nas outras questões, todos os restantes alunos perceberam que a solução do sistema correspondia ao valor do dinheiro das duas raparigas.

Um dos grupos trocou o dinheiro da Inês com o da Salomé (figura 11).

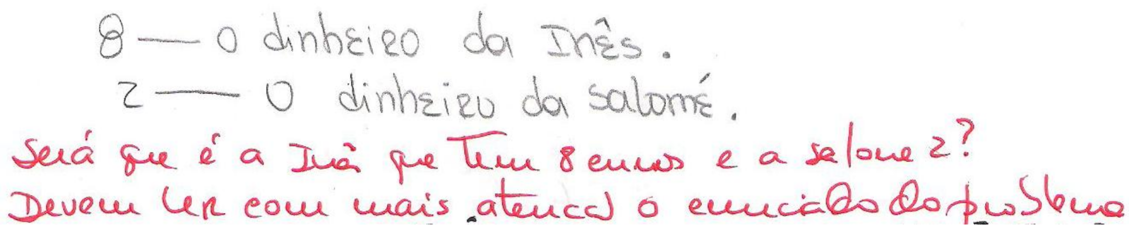


Figura 11- Primeira versão da resposta do Grupo 2 com *feedback*

As minhas anotações de *feedback* tiveram mais uma vez um efeito positivo, tendo o grupo, sem qualquer dificuldade, percebido que tinha trocado os resultados. É o que se verifica na reformulação da resposta (figura 12).

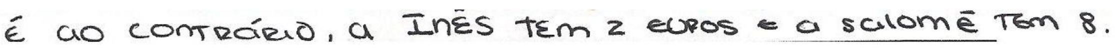


Figura 12 - Segunda versão da resposta do Grupo 2

Síntese final. Na síntese final procurei o envolvimento de toda a turma e incentivei os grupos a colaborarem comigo. No entanto, foi necessário direcionar mais o tipo de questões que queria respondidas para que esta síntese se revelasse profícua.

Professora: Compreenderam a escrita das equações?

Grupo 1 - Elsa: Sim 10= x+y representa o dinheiro da Salomé e da Inês e y= x-6 representa o dinheiro que a Inês tem.

Professora: Conseguiram perceber o que significa o resultado (8,2) no contexto do problema?

Grupo 3 - Carlos: 8 representa o dinheiro da Salomé e 2 representa o dinheiro da Inês

Professora: É exatamente isso. Mas e se só tivermos uma equação? O que acontece se por exemplo, o problema apenas dissesse A Inês e a Salomé têm 10 euros?

Grupo 5 - Angelina: Não conseguia fazer o problema

Professora: Porquê?

Grupo 5 - Joana: Porque não há um ponto comum.

Professora: Certo. Mas tínhamos alguma solução para o problema?

Grupo 5 – Angelina: Tínhamos muitas. Vários valores. Como só havia uma equação havia muitas soluções.

Professora: Então precisamos de quantas equações para resolver este problema?

Grupo 5 - Angelina: Duas.

Professora: E vocês o que concluíram? (a professora está a dirigir-se ao Grupo 4 que tem o porta voz de braço no ar a pedir para falar)

Grupo 4 - Francisco: As retas do gráfico são as equações da duas raparigas e o ponto comum foi (8,2) por isso e como a diferença entre o dinheiro da Inês e o dinheiro da Salomé é de 6 euros, presumimos que 8 euros eram da Salomé e 2 euros eram da Inês.

Professora: E se vos desse só uma equação o que aconteceria?

Grupo 4 - Francisco: Não conseguíamos encontrar um ponto comum e teríamos infinitas soluções.

Neste diálogo salienta-se o fato dos alunos compreenderem que a solução gráfica do sistema de equações corresponde ao dinheiro das duas raparigas e que necessitavam de duas condições para obterem uma solução pois, como é referido por Francisco, se só tivessem uma equação para trabalhar teriam infinitas soluções. Utilizar a expressão "infinitas soluções" e não "muitas soluções" demonstra uma aprendizagem mais profunda do significado em questão, a par de uma capacidade de comunicação matemática mais desenvolvida.

Penso que ficou compreendido o significado e a interpretação da representação gráfica de um sistema de equações, bem como a justificação para a necessidade da conjunção de duas equações para a obtenção da solução de um sistema de equações. Com esta síntese foram atingidos os objetivos que estabeleci para esta tarefa.

4.1.3. Reflexão

A primeira aula não correu tão bem quanto eu esperava. Alguns alunos chegaram atrasados e entraram na sala com um comportamento agitado. Este comportamento fez com que os colegas se desconcentrassem prejudicando assim o início da realização da tarefa. Já a segunda aula correu bem. Os alunos tiveram um comportamento correto e trabalharam de modo ativo, tendo a tarefa sido realizada num ambiente propício à aprendizagem.

A tarefa viria a apresentar mais dificuldades na escrita da primeira equação do que as antecipadas. Já no decorrer da tarefa e quando tentava orientar os alunos na escrita da segunda equação, percebi que a maneira como tentei ajudá-los não foi a melhor. Ao perguntar-lhes "como é que escreves que tenho menos 6 euros que tu?" fiz com que não se preocupassem mais com a frase do que com o problema. Todos consideram mais importante responder à questão que lhes tinha colocado, perdendo assim de vista o enunciado da tarefa, pelo que tiveram que ser chamados à atenção.

Da análise desta tarefa e do trabalho desenvolvido pelos alunos fica claro que estes perceberam a necessidade de representar determinado tipo de problemas que surgem no nosso quotidiano através de sistemas de equações, que se podem depois procurar resolver. Esta perceção é fundamental para todos os alunos, mas assume grande importância para turmas como esta, com alunos pouco empenhados e pouco motivados para o trabalho escolar. A aproximação da Matemática a uma realidade que para eles faça sentido é um dos fatores que consegue de algum modo minorar as suas atitudes em relação à escola e em particular à Matemática. Contudo, estes alunos não são aqueles que revelam mais dificuldades nesta turma.

Alguns dos alunos com mais dificuldades esforçaram-se e conseguiram nesta tarefa ultrapassar algumas das dificuldades que sentiram. Estou a referir-me à escrita das equações que, como mencionei, só foi conseguida depois de abordagens muito concretas, utilizando exemplos com colegas e também à construção do gráfico em que para um dos grupos foi praticamente necessário explicar ponto por ponto, para que o conseguissem construir. Relacionar a solução do gráfico com o contexto do problema e compreender claramente a noção de infinitas soluções, são duas aprendizagens que penso não terem sido realizadas por estes alunos. Acredito, pelo conhecimento que tenho dos alunos, que alguns deles continuam a não conseguir, de uma forma autónoma, relacionar a solução obtida no gráfico com o contexto do problema. Também a noção de infinitas soluções não creio que esteja bem clara para esses alunos, uma vez que continuam a referir-se a muitas soluções.

Parece-me também pertinente fazer aqui referência à qualidade da comunicação oral, sendo que, quando realizada em grupo, foi na maioria dos grupos semelhante à realizada habitualmente ao longo do ano letivo, isto é, pouco cuidada, chamando por exemplo "letra" ou "coisa" às incógnitas. Contudo, nos momentos de discussão coletiva os alunos foram bastante mais cuidadosos no vocabulário que utilizaram, falando em incógnitas e em infinitas soluções e respeitando as opiniões dos colegas.

Durante a aula, alguns alunos tiveram que ser chamados à atenção sobre o comportamento e sobre a necessidade de o melhorar. Também foram chamados à atenção sobre o trabalho realizado, pois considero que este foi pouco produtivo revelando falta de empenho e concentração. A presença do gravador e a noção de que estavam a ser objeto de um trabalho académico terão contribuído para alguma instabilidade de alunos já de si pouco disciplinados. É uma consequência da observação-participante que deverá ser ponderada na análise dos resultados obtidos.

Globalmente, considero que a turma trabalhou bem e percebeu aquilo que para mim é importante nesta tarefa: a compreensão do significado e interpretação da representação gráfica de um sistema de equações bem como da necessidade de conjunção das duas equações para obter a solução do sistema. Considero, ainda, que a turma se esforçou para compreender a tarefa e envolveu-se na discussão em grande grupo com entusiasmo. No final desta segunda aula, depois de terminada esta primeira tarefa, quando auscultados por mim, alguns alunos consideraram que tinha sido fácil.

4.2. Tarefa 2

4.2.1. Terceira aula

Esta tarefa teve início na segunda metade do bloco. A metodologia utilizada foi a mesma da tarefa anterior, pelo que os alunos já se encontravam sentados em grupo, tendo encarado a segunda tarefa como a continuidade da primeira. Distribuí as fichas de trabalho e, de imediato, começaram a trabalhar. Incentivei os alunos a representar as suas ideias matemáticas de modo a que estas fizessem sentido para eles, só se preocupando depois com representações mais formais.

Nesta tarefa o gravador ficou com o Grupo 2, composto por um aluno médio (Renato), por dois alunos com bastantes dificuldades (Paulo e Rui) e por um aluno que, embora não demonstre problemas de aprendizagem, revela interesses divergentes à escola e está sob a tutela da comissão de proteção de crianças e jovens (Pedro). Este é o grupo que à partida considerei o mais problemático da turma, uma vez que, embora o Grupo 1 tenha na sua constituição duas alunas com grandes dificuldades de aprendizagem, estas são esforçadas e bem comportadas.

Enquanto circulava pelos grupos percebi que todos consideravam a tarefa muito fácil, não me questionando praticamente sobre nada. Assim, por algum tempo, apenas observei o que ia acontecendo. Entretanto o Grupo 3 resolveu o problema. Este grupo, embora tenha utilizado uma representação aritmética na sua resolução, formalizou as condições, através da escrita das equações. Optei por escrever de imediato o meu *feedback*, que teve como principal objetivo levar o grupo a explicar o seu raciocínio (figura 13).

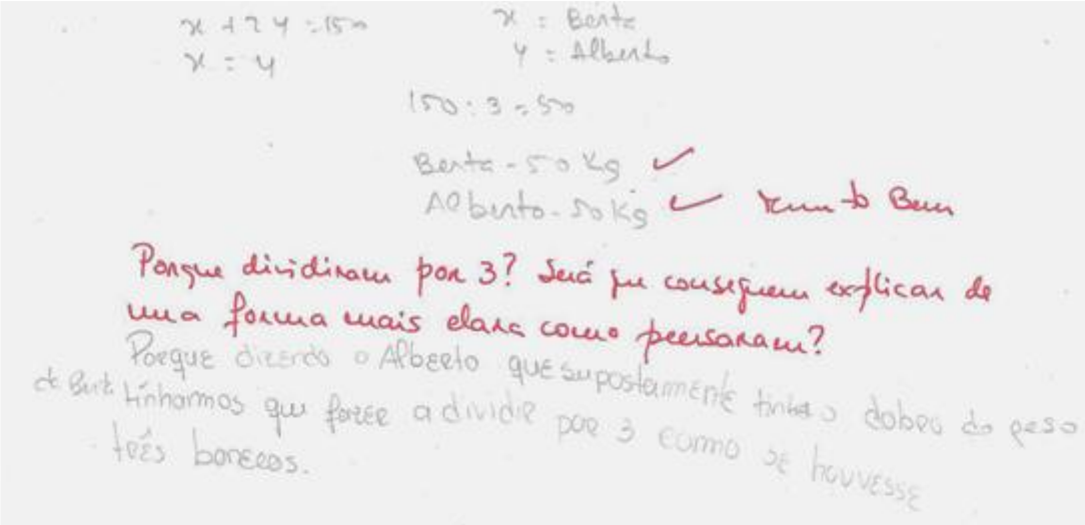


Figura 13 - Registo do Grupo 3 após *feedback*

Os Grupos 4 e 5 tinham conseguido alcançar, de uma forma informal, os resultados pretendidos, mas não formalizaram as condições, pois não escreveram as equações. Estas dificuldades foram antecipadamente previstas (figuras 14 e 15).

Figura 14 - Registo do Grupo 4

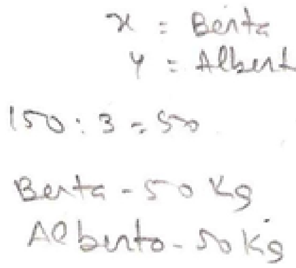


Figura 15 - Registo do Grupo 5

Assim, relembrei a estes grupos que deveriam agora passar para a formalização, lendo com atenção o enunciado do problema, indicando com clareza aquilo que era pedido e escrevendo as equações. Ao mesmo tempo ia fornecendo *feedback* para que continuassem a trabalhar de uma forma mais orientada.

Quando abordei o Grupo 1 sobre as dificuldades que estavam a sentir os alunos referiram que não tinham muitas dificuldades e que já sabiam o peso do Alberto e da Berta só não sabendo escrever as equações (figura 16).

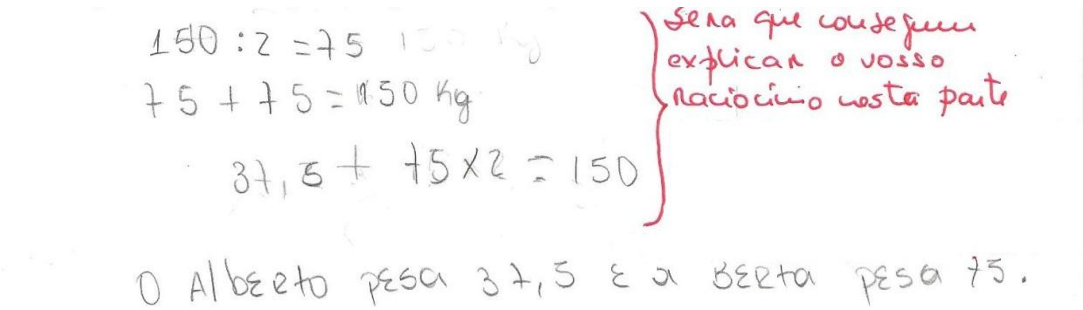


Figura 16 - Registo do Grupo 1 com *feedback*

De imediato solicitei que explicassem o seu raciocínio, conforme se pode observar, e a resposta ao meu *feedback* foi a seguinte (figura 17).

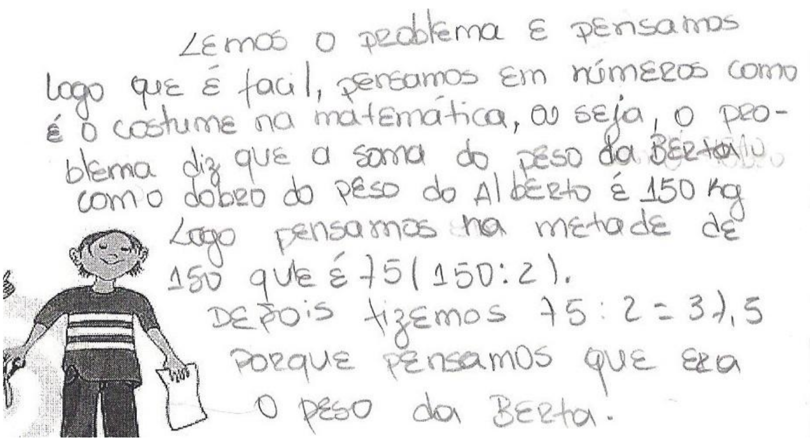


Figura 17 - Primeira versão do Grupo 1 após *feedback*

Perante a justificação, questionei as alunas sobre o peso dos dois meninos, optando por falar sobre a segunda equação pois é a mais fácil de entender.

Professora: Será esse o peso do Alberto e da Berta? O que nos diz o enunciado sobre a resposta da Berta ao Alberto?

Grupo 1 - Elsa: diz que eles pesam o mesmo… Então o que fizemos está mal.

Grupo 1 – Ana: Já sei pesam 150 a dividir por dois. Dá 75 kg cada um.

Professora: Será? Eles pesam o mesmo mas o que é que o Alberto diz à Berta?

Grupo 1 – Elsa: Já percebi ele pesa o dobro dela. Temos que fazer tudo de novo.

O Grupo 2 solicitou a minha ajuda porque não conseguia avançar.

Pedro: Temos que ler o enunciado. "O Alberto diz à Berta : a soma do teu peso com o dobro do meu é 150 kg. Berta respondeu: em contrapartida, tu pesas o mesmo que eu". Então… esperem o que concluímos? A soma... (lê novamente o enunciado) o peso dela mais o dobro do peso dele…. O dela mais 2 vezes o peso dele… em contrapartida tu pesas o mesmo que eu.

Renato: Então? Temos que saber qual é o peso deles.

Rui: A soma do peso dos dois é o dobro…..

Renato: Não é nada disso…

Rui: Mas nós temos que saber qual é o peso do Alberto…. 150 a dividir…não é *x* igual a 2 a dividir por 150 dá-me a calculadora.

Pedro: Não é assim ó stora chegue aqui. O peso dos dois conta como um não é?

Professora: Porquê?

Pedro: porque o Alberto tem 2 vezes o peso da Berta

Rui: Então é 2 a dividir por150 não é? (faz a conta na máquina de calcular)

Professora: O que vos parece esse resultado?

Pedro: Mas não percebo o resultado da conta. Isto são duas equações não é?

Professora. Sim.

Renato: Não pode ser 2 a dividir por 150 já disse! É a dividir por 3.

Professora: O que é que é a dividir por 3?

Renato: Cada frase é uma equação certo? Uma equação é o que o Alberto diz à Berta. E agora?

Professora: Já pensaram como vão escrever o que pretendem saber?

Pedro: O Alberto é o *x* e a Berta é o *y*.

Professora: O Alberto e a Berta?

Renato: Não, o peso do Alberto e o peso da Berta é que são as incógnitas.

Professora: Não será melhor começarem a escrever o que estão a dizer?

[…]

Rui: O Alberto pesa 75 kg. Fica 150 a dividir por 2

Rafael: É mentira fica $150 = x + y \times 2$

Paulo: Mas eles pesam o mesmo…

Renato: Mas isso não é a primeira equação pois não? Então não digam tudo junto. Stora pode chegar aqui? Veja lá se isto está certo?

Professora: Esta equação representa o quê?

Pedro: O que o Alberto diz.

Professora Muito bem. E a Berta diz o quê?

Paulo: Ah ainda não acabou….

Pedro: Diz que o peso dela é igual ao dele.

Professora: Muito bem, continuem.

Pedro: (torna a ler o enunciado) vejam lá a soma do teu peso – que é o dela- com o dobro do dele é 150 que é o peso dela mais 2 vezes o dele.

Paulo: Mas isso é o que já está aqui…

Pedro: Estou a ver tudo do princípio. A segunda frase o que quer dizer? Sabem? Eu peso o mesmo que tu….$x = y$ conclusão isto é fácil.

Renato: vai dar 50 ….$x = y$ então cada um pesa 50 kg. Por isso é que falei à bocado é 150 a dividir por 3.

Rui: Não percebo…

Renato: Eles pesam os dois 100 kg e os outros 50 é para o dobro. Qual é o número que com o dobro dá 150? É cinquenta…50+50+50 dá 150

Paulo: Como?

Renato: O dobro de 50 é 100… A soma do meu peso com o dobro do dela é 50 + 100 logo vai dar 150. Ó stora o Paulo não percebe veja lá se não é assim… A soma do meu peso com o dobro do dela é 50… + 2×50 que é 100 vai dar 150.

Professora: Concluindo…

Pedro: O Alberto pode pesar 100kg e a Berta 50.

Professora: Ainda há pouco disseste que eles pesavam o mesmo.

Pedro: Sim já entendi.

Também como na aula anterior são percetíveis nesta transcrição as dificuldades deste grupo na interpretação do enunciado bem como na escrita das equações, que tal como referido anteriormente, tinham sido anteriormente previstas. Assim são grandes as dificuldades que dois dos cinco grupos manifestam na resolução da tarefa.

O Grupo 2 compreende a necessidade de ler com atenção o enunciado, entende que é necessário calcular o peso dos dois meninos e percebe que vai ter que trabalhar com duas equações mas não consegue continuar. Como os intervenientes no enunciado são dois, dividem 2 por 150 para saber o peso de cada um. Quando são confrontados com o resultado da operação ficam surpreendidos e não compreendem o que está mal. Embora um dos alunos perceba, de uma forma intuitiva, que tem que dividir 150 por 3, não consegue explicar porquê. Com a minha orientação identificam as incógnitas e após mais discussão começam a utilizar a estratégia que lhes tinha sugerido na aula anterior e que lhes permite avançar na realização da tarefa. Assim, assumem-se como sendo as personagens do enunciado e começo a ouvir frases como “ o meu peso mais o dobro do teu é 150 mas tu pesas o mesmo que eu”. A partir daqui começam a atribuir valores e conseguem. Após a discussão em grupo encontram uma resolução correta da tarefa através de uma estratégia de tentativa e erro. Ainda assim, e apesar de terem identificado corretamente as incógnitas na discussão, quando as escrevem fazem-no de uma forma incorreta (figura 18).

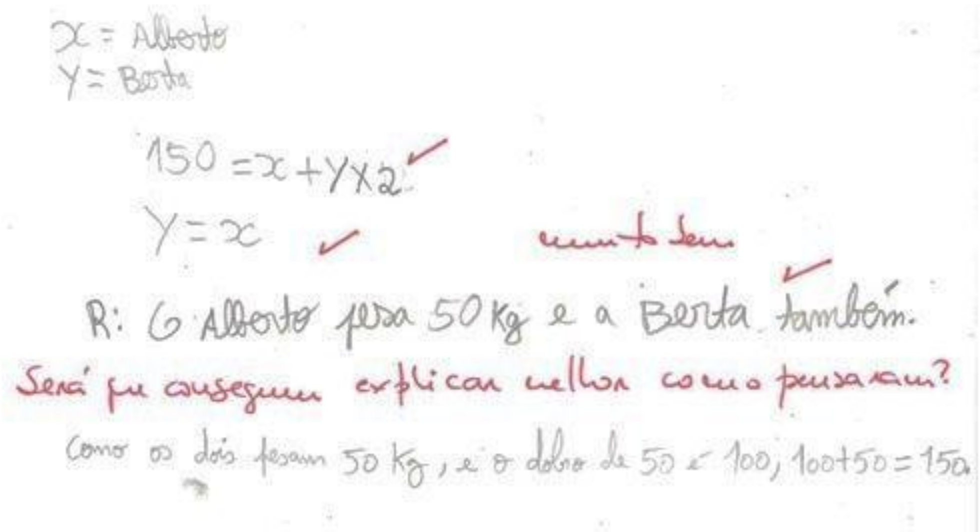


Figura 18 - Primeira Versão do Grupo 2 após *feedback*

Já o Grupo 1, como na segunda parte do enunciado está escrito que o Alberto e a Berta pesam o mesmo, divide o peso total por 2 através de representações aritméticas. Em seguida torna a dividir o resultado por 2, justificando que o peso do Alberto é o dobro do da Berta e pensa que obteve a solução do problema. Como se pode observar na figura 16 estas alunas tentam inclusivamente confirmar a solução mas, como erram as contas, chegam a um resultado de pesos diferentes embora com o valor que pretendiam, esquecendo-se das indicações do enunciado. Não evidenciam sentido crítico para refletir sobre o resultado obtido e só após a minha intervenção é que se apercebem que o peso de um é o dobro do peso do outro. Recomeçam a trabalhar e chegam ao resultado correto, identificando as incógnitas e formalizando as condições, contudo, não apresentam qualquer justificação (figura 19).

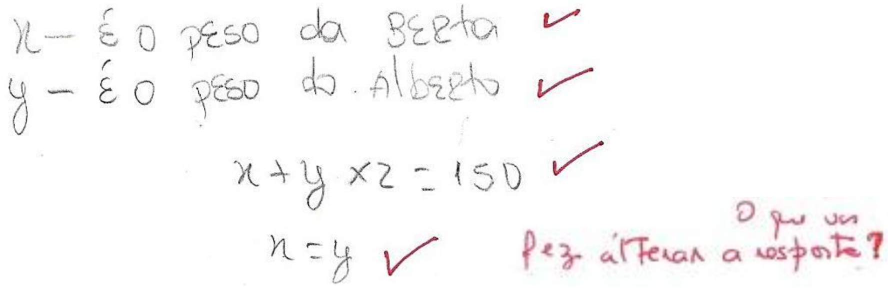


Figura 19 - Segunda versão do Grupo 1 após *feedback*

Os grupos que tinham tido menos dificuldade já tinham terminado a tarefa e estavam prontos para a discussão em grande grupo. O Grupo 4 escreveu as equações explicando que como o peso dos dois era igual, experimentaram o 50, somaram esse número com o seu dobro e obtiveram um resultado que consideravam correto através de uma estratégia de tentativa e erro (figura 20).

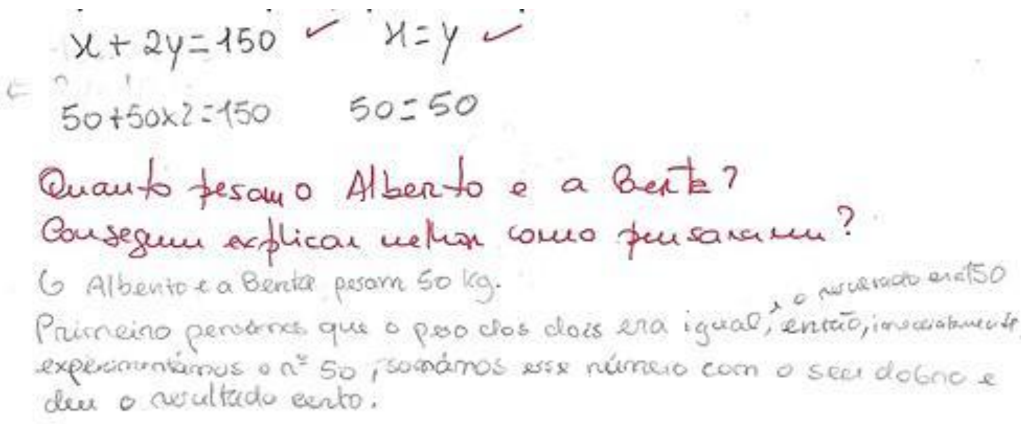


Figura 20 - Primeira versão do Grupo 4 após *feedback*

O Grupo 5 também conseguiu alcançar os resultados pretendidos. Ao contrário dos alunos do Grupo 4, os alunos deste grupo pensaram que, se um deles tinha o dobro do peso do outro, então podiam considerar que tinham três meninos e, por isso, dividiram por 3. Este grupo utilizou, mentalmente, a criação de figuras para resolver o problema (figura 21).

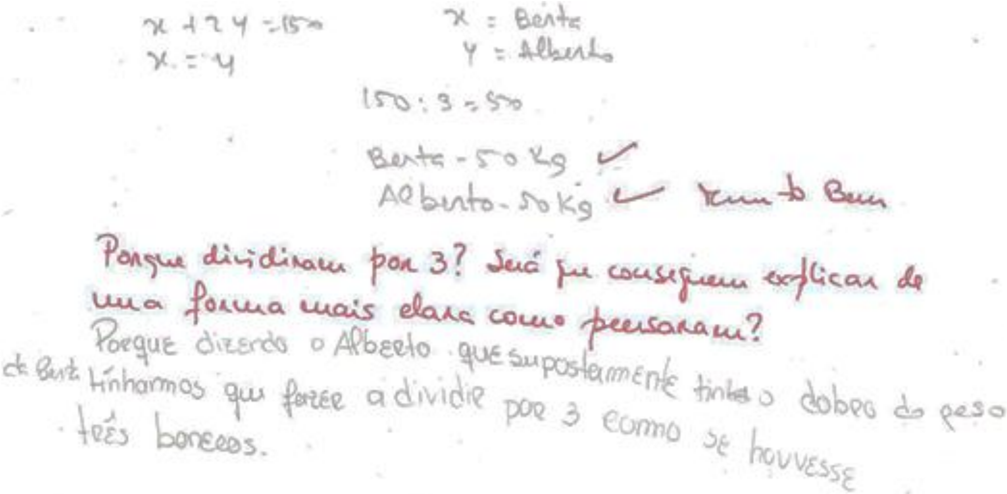

x + 2y = 150 x = Berta
x = y y = Alberto
150 : 3 = 50
Berta - 50 Kg
Alberto - 50 Kg Muito Bem
Porque dividiram por 3? Será que conseguem explicar de uma forma mais clara como pensaram?
Porque dizendo o Alberto que supostamente tinha o dobro do peso de Berta tínhamos que fazer a dividir por 3 como se houvesse três bonecos.

Figura 21 - Primeira versão do Grupo 5 após *feedback*

Quando iniciámos a discussão das estratégias utilizadas e dos resultados obtidos, procurei o envolvimento de toda a turma. A participação dos alunos foi espontânea e dinâmica. Como o Grupo 1 era aquele que no momento me preocupava mais pois não conseguiu corresponder ao meu *feedback*, foi por ele que comecei.

Professora: Pelo que vi das vossas fichas todos os grupos definiram as incógnitas por *x* e *y* e disseram que *x* é o Alberto e *y* é a Berta. Estou a dizer bem?

Toda a turma: Sim

Professora: Então o que o problema pretende é saber quem é o Alberto e a Berta?

Turma: Sim. O peso dos dois.

Professora: Então não estou a perceber…o *x* e o *y* são os meninos ou os pesos dos meninos?

Grupo 1- Ana: É a mesma coisa….

Grupo 2 - Renato: Não é, não. Já tínhamos visto com a professora. O que queremos descobrir é o peso deles.

Professora: Meninos isto é muito importante. Temos que definir muito bem o que queremos saber. Todos vocês foram pouco rigorosos nesta parte do problema. Temos que saber definir com clareza o que pretendemos saber. Muito bem, agora que já esclarecemos este importante pormenor a que conclusões chegaram? Gostava que o grupo 1 iniciasse a discussão.

Grupo 1 – Elsa: Concluímos que o Alberto pesa 37,5 kg e a Berta pesa 75kg….

Grupo 3 – Carlos: não concordamos. O peso dos dois é igual. Então se dividirmos 150 por 3 vai dar o peso deles mas com mais 50 kg que irá ser o dobro do peso do Alberto.

Professora: E porque dividiram por 3? As equações que escreveram não têm nenhuma divisão. Vocês escreveram $x+\left(y\times 2\right)=150$.

Grupo 2 - Pedro: (Interrompe sem deixar o colega acabar) Concordo com o Carlos também fizemos 150 a dividir por 3 porque pensámos se o peso do Alberto é o dobro do peso da Berta pesam os dois 50 e sobra mais 50 que é o dobro do 50 do Alberto.

Grupo 5 – Angelina: Também dividimos por 3…

Professora: Mas porquê?

Grupo 5 – Rita: Como o Alberto diz que o teu peso mais o dobro do meu é 150 nós fizemos como se tivéssemos 3 bonecos ou seja 150 a dividir por 3 e assim ficámos a saber o peso de cada um.

Professora: Mas vocês começaram todos a falar e interromperam o grupo 1 que estava a apresentar as conclusões a que chegaram.

Grupo 1 - Elsa: A primeira coisa que fizemos foi dividir 150 por 2 que deu 75 e depois fizemos 75 a dividir por 2 para sabermos o peso da Berta…em vez de pensarmos no dobro pensamos só em dividir. Mas depois vimos que 75×2 mais 37,5 não dava 150 e fizemos tudo de novo porque estava mal.

Professora: Mas continuaram a pensar que o peso do Alberto era 75 kg?

Grupo 1 – Ana: Sim e não percebíamos porque estavam todos a dividir por 3. Só depois é que vimos que era o dobro e o dobro é 2 vezes mais uma dá 3.

Professora Uma quê? Onde foram buscar esse mais um?

Grupo 1 – Ana: Então o peso da Berta é uma e o do Alberto conta como duas vezes por isso dá 3.

Grupo 4 – Francisco: nós primeiro pensámos que o peso dos dois era igual e que o resultado dos pesos era 150 mas depois vimos que era o dobro de um mais o outro. Então pensámos no número 50, somámos esse número com o seu dobro e deu 150 e o resultado estava certo porque fomos substituir e deu-nos bem.

Professora. Foram substituir o quê?

Grupo 4 – Francisco: Então substituímos o *x* por 50. Depois como eles são iguais vimos que estava certo…onde estava $x = y$ pusemos 50=50 e depois na outra equação fizemos 50 + 50 x 2 e também deu bem.

Professora: Muito bem. Vamos agora aproveitar esta ideia do grupo do Francisco. O que eles fizeram foi substituir *x* por 50. Ao fazerem isto ficaram logo a saber o valor de *y* porque têm os dois o mesmo valor. Isto que eles fizeram é parecido com a resolução de um sistema de equações pelo método de substituição. Chama-se sistemas de equações porque as duas equações têm que ser resolvidas simultaneamente. Aqui é muito simples de ver porque como os valores de *x* e de *y* são iguais podemos substituir logo na primeira equação.

Desta transcrição considero importante salientar que os alunos minimizaram a importância da definição correta das incógnitas não dando grande relevância ao facto das incógnitas serem os pesos e não os nomes. Assim pretendo nas próximas tarefas continuar a trabalhar esta situação. Realço o facto de as alunas do Grupo 1 iniciarem a apresentação indicando os resultados incorretos, para depois conseguirem explicar o que tinham feito mal, o que me leva a crer que, apesar de não terem respondido ao meu *feedback*, perceberam o que tinham errado e aperfeiçoaram o seu trabalho. Considero ainda interessante verificar que, quer utilizando representações aritméticas, quer utilizando mentalmente a criação de figuras, quer através do tentativa e erro, todos eles conseguiram chegar ao final da tarefa. Compreenderam o que tinham feito e conseguiram alcançar o modo de representação algébrica pois todos eles acabaram por atribuir letras aos valores desconhecidos escrevendo as equações.

O Grupo 4 foi um pouco mais além na apresentação e discussão dos resultados que obteve. Ao explicar que substituiu o valor de *x* por 50 (e como o *y* era igual a *x*) obteve a igualdade 50=50 o que me permitiu fazer a introdução da resolução do sistema de equações pelo método de substituição. Assim escrevi no quadro as duas equações e, antes de começar a explicar o método de substituição, relembrei a turma que tínhamos concluído na aula anterior que as duas equações tinham que ser resolvidas em simultâneo e por isso tínhamos falado na conjunção das duas equações. Como todos se lembravam escrevi $2x+y=150 \wedge x=y$ e disse-lhes que também podíamos escrever aquela conjunção de outra forma: $\begin{cases} 2x+y=150 \\ x=y \end{cases}$

Aceitaram esta nova forma de representação sem problemas e a partir daqui comecei por confirmar com a turma que o *x* era igual ao *y*. Todos concordaram. De seguida perguntei se são iguais onde está *y* posso substituir por *x*? Não perceberam. Optei então por utilizar números explicando se 4 é igual a 2+2 onde está 4 posso substituir por 2+2? Todos concordaram. Então tornei a perguntar se o *x* é igual ao *y* onde está *x* posso substituir por *y*? Desta vez entenderam e concordaram comigo. Deste modo na equação de cima escrevi $2y+y=150$. Alguns alunos perceberam logo que a seguir ficavam com $3y=150$. Resolveram a equação fazendo $y=\frac{150}{3}$ e obtendo $y=50$. Sem eu dizer nada concluíram que como o *y* era igual ao *x* então cada um valia 50. A aula terminou tendo sido recolhidas as fichas de trabalho.

4.2.2. Quarta aula

Como a resolução e discussão da tarefa demorou mais tempo do que o previsto, usei uma parte da aula de acompanhamento ao estudo para os alunos resolverem novamente o sistema de equações pelo método de substituição treinando assim um pouco mais este procedimento. A utilização da aula de acompanhamento ao estudo já tinha sido autorizada pela direção da escola com a aprovação do conselho de turma.

Alguns dos alunos não perceberam a necessidade de utilizar este método, uma vez que tinham obtido a solução correta sem o utilizarem. Deste modo, expliquei que o sistema que resolvemos era muito simples e que, por essa razão, se conseguia fazer com bastante facilidade. Quando os sistemas se complicam este método facilita a sua resolução. Expliquei ainda que embora tivessem que saber usar este método na resolução de sistemas de equações, existem outras maneiras de os resolver e que eles têm toda a liberdade para as usarem desde que não lhes seja exigida no enunciado dos exercícios ou problemas a resolução através do método de substituição.

Síntese final. Na síntese final procurei o envolvimento de toda a turma. Direcionei o tipo de questões que queria ver respondidas, com o intuito de verificar se os objetivos que defini para esta tarefa, identificar claramente as incógnitas, escrever as duas equações que traduzem o enunciado do problema e obter a solução do sistema tinham sido alcançados. Procurei ainda, usando as estratégias utilizadas pelo Grupo 4, chegar ao método de substituição de uma forma encadeada e percetível para os alunos.

4.2.3. Reflexão

Esta tarefa foi realizada em duas aulas de 45 minutos. Os alunos demoraram mais tempo do que o previsto a resolver a tarefa e a apresentar e discutir os resultados, o que fez que a introdução do método de substituição necessitasse de ser novamente feita na aula seguinte. A planificação das aulas não ficou posta em causa porque utilizei uma aula de acompanhamento ao estudo.

Considero que as aulas correram bem. Todos os alunos trabalharam. As dificuldades sentidas coincidiram com as que tinha anteriormente previsto, contudo os alunos foram mais autónomos nas tentativas que realizaram para as superar. Verifiquei que leram o enunciado com atenção e, em conversa dentro do grupo, seguiam as orientações que lhes tinha sugerido na primeira aula, ou seja, falavam na primeira pessoa, passando o diálogo do enunciado do problema para uma conversa entre eles, tentando assim perceber de uma forma mais clara o que lhes era pedido.

Contudo, os alunos não sentiram necessidade de escrever as equações. Constatei que a grande preocupação de todos era perceberem o problema e encontrarem a solução. Aqui pondero se não terão sido influenciados por mim, pois no início da aula incentivei-os a representar as suas ideias matemáticas em primeiro lugar de modo que estas fizessem sentido para eles e só depois se preocuparem com representações mais formais. Assim, na segunda aula salientei que a escrita formal das equações é igualmente importante e que se espera que eles o façam.

Saliento o facto de apenas o Grupo 1 ter definido corretamente as incógnitas, neste caso o peso de cada um dos jovens. Os restantes grupos só se aperceberam do erro quando foram chamados à atenção. Realço ainda a dificuldade dos Grupos 1 e 2 em escrever as equações. Estas dificuldades já tinham sido antecipadamente previstas. No entanto, na sua maioria, os alunos resolveram a tarefa compreendendo o que estavam a fazer, utilizando diferentes estratégias para alcançarem os resultados pretendidos. De salientar ainda que o Grupo 4 conseguiu ir um pouco mais além na realização da tarefa, substituindo o valor de x por 50.

Uma das dificuldades antecipadas foi a interpretação da solução do problema. Esta dificuldade não foi sentida na turma. Todos os alunos perceberam que os valores encontrados correspondiam ao peso dos dois meninos. Mesmo os alunos do grupo 1, que na sua primeira tentativa de resolução erraram o problema, acabaram por se aperceber do erro cometido através do meu *feedback* e da análise da solução obtida.

A qualidade da comunicação oral melhorou em relação à primeira aula. Os alunos tentaram, quer em pequeno grupo, quer em coletivo, expressar as suas ideias de uma forma mais cuidada, notando-se um esforço para utilizar uma linguagem mais correta e utilizar termos matemáticos sempre que havia oportunidade.

Considero que ficou compreendida a resolução de um sistema de equações pelo método de substituição. No entanto, penso que ainda não está bem esclarecida para a maioria destes alunos a necessidade de identificar com clareza as incógnitas.

Globalmente, a turma trabalhou bem, melhor do que é habitual. Nesta turma tenho um pequeno grupo de alunos que se empenha muito pouco. Assim, foi com alguma surpresa que vi Pedro a trabalhar e inclusivamente a tentar liderar o grupo, como demonstra o diálogo acima transcrito. Também Rita, que tem atitudes semelhantes ao colega, trabalhou em grupo e participou na discussão. Estes dois alunos não demonstram problemas de aprendizagem mas apresentam pouco interesse no trabalho escolar. Deste modo, no final da aula e na presença dos colegas que também estavam admirados por os ver a trabalhar, elogiei o trabalho que tinham desenvolvido e questionei-os sobre a diferença de atitudes. A resposta foi que desta vez não era preciso saber Matemática para fazer a tarefa, logo tinham participado e até tinham gostado. Considero que esta tarefa foi encarada por toda a turma como um desafio, como algo que faz parte das suas realidades e a que aderiram de forma espontânea.

4.3. Tarefa 3

4.3.1. Quinta e sexta aulas

Esta tarefa foi planificada para 90 minutos e teve início na primeira parte do bloco. Como se tratava de uma tarefa de natureza exploratória que implicava a utilização de *software* de geometria dinâmica, a aula decorreu na sala de informática. Dado que na escola em que leciono não existem condições para que as aulas de matemática decorram frequentemente nas salas de informática, são poucos os alunos que sabem trabalhar com o *software* de geometria dinâmica. Para evitar que realizassem esta tarefa sem nunca terem trabalhado com o Geogebra, uma das aulas de acompanhamento ao estudo foi utilizada para explorar este *software*.

Sendo a natureza da tarefa diferente das anteriores e a metodologia a utilizar para a resolver também, expliquei claramente aos alunos o que pretendia com esta tarefa salientando que deveriam introduzir as duas equações de cada sistema no Geogebra e verificar o resultado que obtinham. Deveriam ainda interpretar esse resultado e confirmá-lo através da resolução algébrica.

Para que todos os alunos tivessem oportunidade de trabalhar com o computador esta tarefa foi realizada em pares, ficando neste caso a turma constituída por dez grupos. Notando que a turma estava agitada e ansiosa por começar a trabalhar com os computadores enfatizei uma vez mais a necessidade de estarem atentos e concentrados. Foi distribuído o enunciado da tarefa e todos os alunos começaram a trabalhar com o Geogebra.

Figura 22 – Alunos na sala de informática em plena resolução da Tarefa 3.

O gravador ficou com o Grupo 9, composto por Angélica e Carlos. Estes alunos gostam de Matemática, são muito empenhados e aceitam com entusiasmo os desafios que lhes são propostos. São dois dos três alunos que têm na turma mais sucesso a Matemática e às restantes disciplinas. A parte da tarefa a resolver com o Geogebra revelou-se fácil para este dois alunos não surgindo deste modo uma discussão em pequeno grupo. Como as respostas, embora corretas, não apresentavam justificação, escrevi de imediato o meu *feedback* que teve como objetivo levá-los a explicar como tinham chegado aquelas conclusões (figura 23).

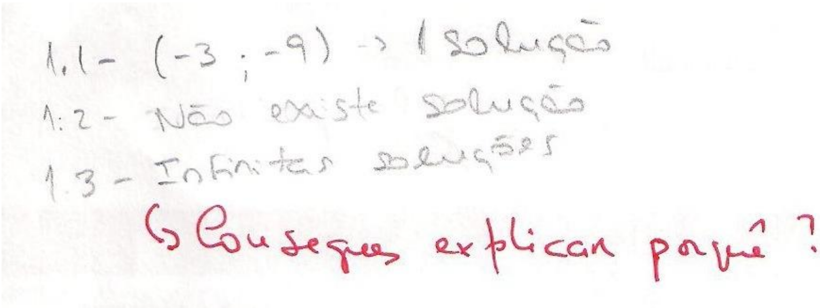

1.1 - (-3 ; -9) -> 1 solução
1.2 - Não existe solução
1.3 - Infinitas soluções
↳ Consegues explicar porquê ?

Figura 23 - Registo do Grupo 9 com *feedback*.

Assim, os alunos concluíram que o primeiro sistema de equações tinha uma solução porque da interseção das retas resultava um ponto em comum. No segundo sistema de equações, depois de verificarem que as retas eram paralelas, concluíram que este não tinha solução. Já no terceiro sistema de equações (e embora tenham explicado que este tinha infinitas soluções) não classificaram as retas de forma matematicamente correta, referindo-se a retas coincidentes como retas que "estão uma em cima da outra" (figura 24)

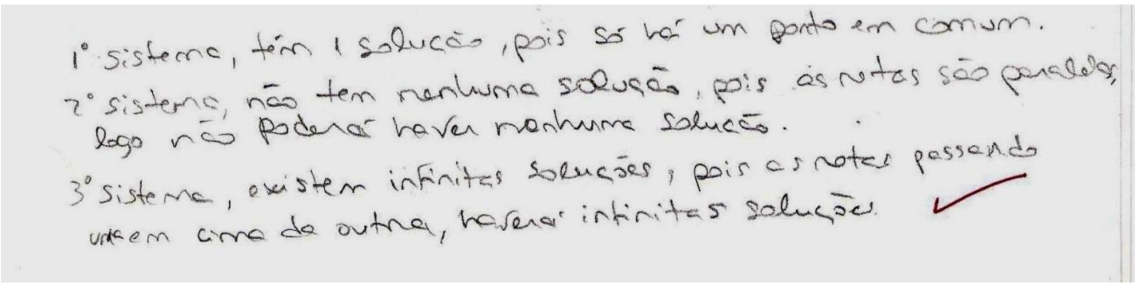

1º sistema, têm 1 solução, pois só há um ponto em comum.
2º sistema, não tem nenhuma solução, pois as retas são paralelas, logo não poderá haver nenhuma solução.
3º sistema, existem infinitas soluções, pois as retas passando uma em cima da outra, haverá infinitas soluções.

Figura 24 - Primeira versão do Grupo 9 após *feedback*.

Também o Grupo 7, formado pelo Francisco e pelo Luís não sentiu dificuldades nesta fase da tarefa. Este grupo foi o único que utilizou uma linguagem matematicamente correta em toda a tarefa (figura 25).

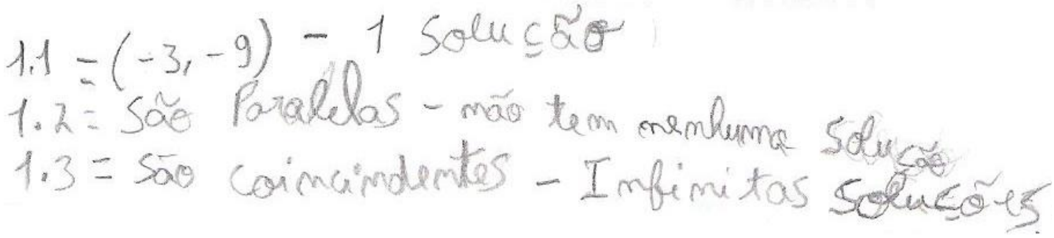

1.1 = (-3, -9) - 1 Solução
1.2 = São Paralelas - não tem nenhuma Solução
1.3 = São coimcimdentes - Infinitas Soluções

Figura 25 - Registo do Grupo 7

Os restantes grupos trabalharam sem solicitar a minha ajuda no primeiro sistema de equações, percebendo que a solução era o ponto de interseção das duas retas. Quando no segundo sistema de equações se depararam com retas paralelas, começaram a duvidar do resultado obtido e solicitavam a minha ajuda para lhes dizer onde tinham errado. Embora estivessem a conseguir colocar as retas no Geogebra, não conseguiam interpretar os resultados obtidos.

Depressa percebi que alguns grupos estavam a desanimar perante os obstáculos que surgiam. Assim, salientei que não deviam considerar que estavam a cometer erros sem analisar os seus resultados. Não sendo sensíveis a este discurso as alunas do Grupo 10 continuavam a solicitar a minha ajuda:

Elisa: Stora temos isto mal. Já andámos com a reta para cima e para baixo e não encontramos o ponto onde elas se cruzam. Como é que isto se faz?

Professora: Porque é que querem encontrar o ponto de interseção?

Isabel: Para ficarmos com o resultado.

Professora: E aqui qual foi o resultado que obtiveram?

Isabel: Nenhum! Isto é impossível as retas não se cruzam. Não há solução.

Professora: Qual é a posição dessas retas?

Elisa: São paralelas.

Professora: Então o que podem concluir supondo que fizeram tudo bem?

Elisa: O sistema é impossível.

Professora: Porquê?

Elisa: Porque não tem solução as retas não se cruzam.

Professora. Então, graficamente um sistema de equações é impossível quando…

Elisa: As retas são paralelas.

A partir deste diálogo estas alunas conseguiram compreender que se tornava necessário analisar os resultados e que estavam a pensar corretamente. Deste modo, embora não tenham respondido à questão em análise (que apenas perguntava quantas soluções tinha o sistema) foram mais longe e acabaram por classificá-lo. Esta situação ocorreu em vários grupos (figura 26).

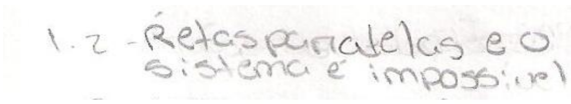

1.2 - Retas paralelas e o sistema é impossível

Figura 26 - Registo do Grupo 10.

Este tipo de discussão foi surgindo nos restantes grupos pois as dificuldades sentidas eram idênticas. Assim, e de acordo com as dúvidas de cada grupo, orientei o meu *feedback*, questionando os grupos sobre as conclusões a tirar em relação a um sistema de equações que tinha como representação gráfica duas retas paralelas. Se para eles a solução do sistema era o ponto de interseção de duas retas o que podiam concluir neste caso? (figura 27).

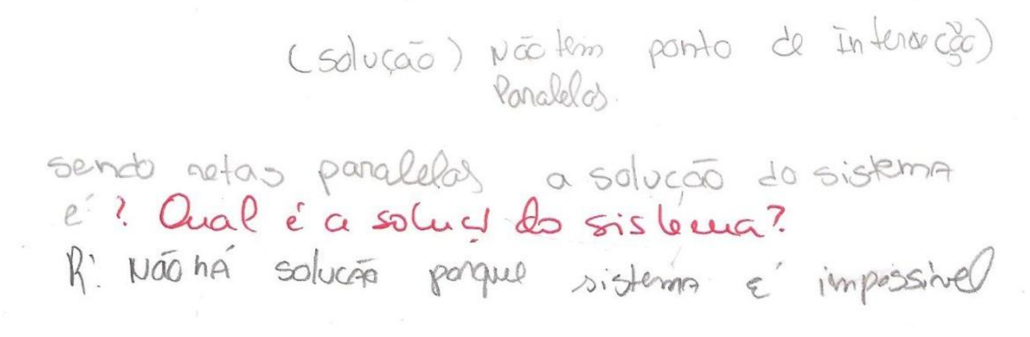

(solução) não tem ponto de interseção)
Paralelas.
sendo retas paralelas a solução do sistema
é ? Qual é a solução do sistema?
R: NÃO HÁ solução porque sistema é impossível

Figura 27 - Registo do Grupo 2 após *feedback*.

Na resolução gráfica do último sistema as dúvidas surgiram porque os alunos, por falta de experiência a trabalhar com o Geogebra, não se apercebiam que as retas eram coincidentes. Deste modo, sugeri que colocassem o cursor em cima da reta e verificassem quantas retas estavam indicadas. Perceberam que estavam desenhadas duas retas coincidentes, embora a maior parte dos grupos não as tenha identificado pelo nome correto, referindo-se às mesmas como “uma reta em cima da outra”.

Apesar das conversas que tive com os diferentes grupos, os alunos do Grupo 3 (embora escrevam que o sistema não tem solução) verificam que as retas são coincidentes e classificam o sistema como indeterminado, o que revela que não perceberam a diferença entre um sistema indeterminado e um sistema sem solução, situação que tinham encontrado na alínea anterior. Isto revela ainda que o meu *feedback* não se revelou eficaz (figura 28).

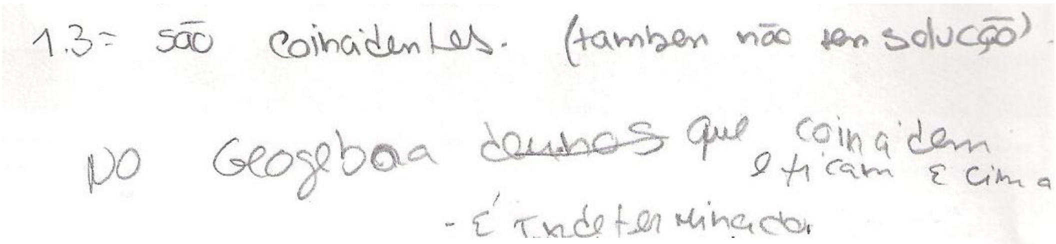


Figura 28 - Registo do Grupo 3 após *feedback*.

Na questão seguinte era pedido aos alunos que confirmassem algebricamente as respostas obtidas no Geogebra. Os resultados não surpreenderam. Apenas os Grupos 7 e 9 conseguiram chegar aos resultados pretendidos De referir que o primeiro sistema de equações foi resolvido corretamente por todos os grupos (figura 29).

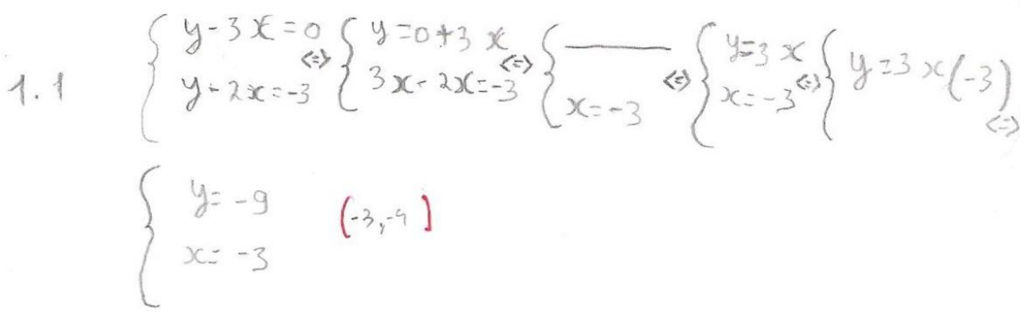


Figura 29 - Registo do Grupo 7.

Enquanto circulava pela sala fui orientando os alunos, dando as indicações necessárias para que progredissem na realização da tarefa. A resolução dos sistemas de equações pelo método de substituição revelou que a maioria dos alunos percebeu o método mas que a sua resolução fica comprometida pelas dificuldades que têm em operar com números inteiros e com números racionais bem como na manipulação algébrica. (figura 30).

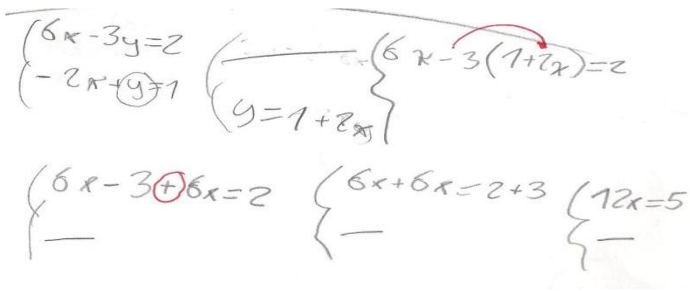


Figura 30 - Registo do Grupo 1

Outro erro que surgiu com alguma frequência foi a resolução de uma das equações em ordem a *-y* e não em ordem a *y*. De salientar que, além de não questionarem a solução a que chegaram, ainda responderam que esta está em consonância com o resultado obtido no Geogebra. Esta situação verificou-se nos Grupos 1, 2,3,4 e 8 (figura 31).

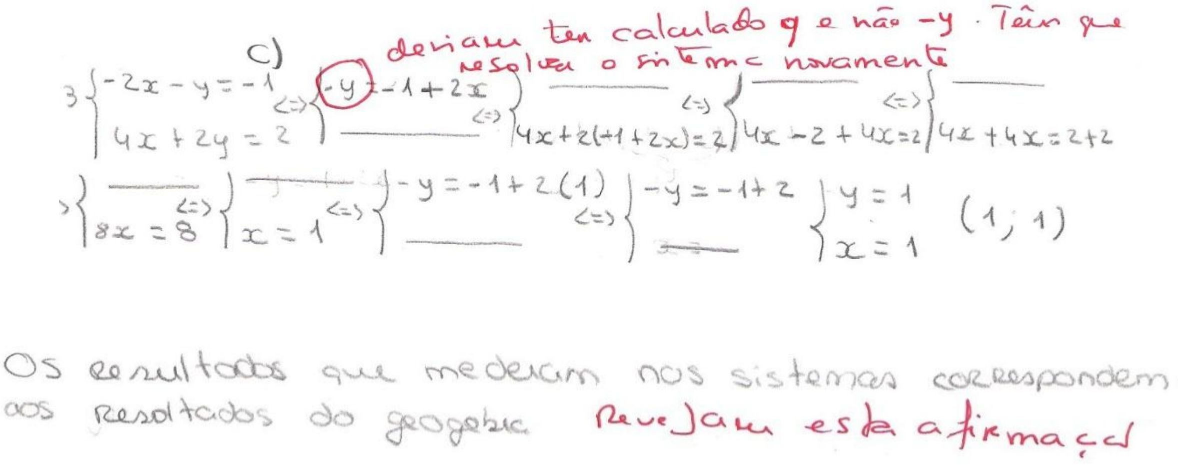
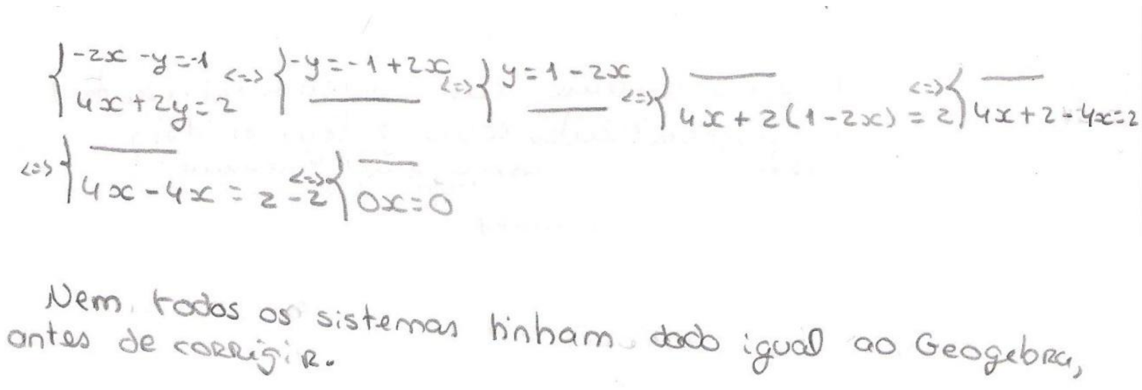


Figura 31 - Registo do Grupo 4 com *feedback*.

A resolução deste sistema de equações foi realizada de forma correta após o meu *feedback* (figura 32).



$$\begin{cases} -2x - y = -1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -1 + 2x \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 4x + 2(1 - 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 4x + 2 - 4x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 4x - 4x = 2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 0x = 0 \end{cases}$$

Nem todos os sistemas tinham dado igual ao Geogebra, antes de corrigir.

Figura 32 - Versão do Grupo 4 após feedback.

Síntese final. Esta fase da aula, onde se fez uma discussão alargada dos resultados obtidos, já se tornou parte da rotina da turma. Também a presença da câmara de vídeo e do gravador já é praticamente ignorada. Como a discussão não surgia espontaneamente foi necessário direcionar o tipo de questões para as áreas em que pretendia resposta e que estão relacionadas com os objetivos que defini para esta tarefa: interpretar a solução gráfica de um sistema de equações e compreender que a solução de um sistema possível e determinado se obtém pela intersecção de duas retas. Quando estas retas são paralelas, o sistema não tem solução, logo é impossível. Já quando as retas são coincidentes o sistema tem infinitas soluções.

Professora: Em relação à questão 1.1. gostava de saber a que conclusões chegaram.

Grupo 6 – Elsa: Obtivemos as mesmas soluções no Geogebra e no método de substituição.

Professora: E quantas soluções obtiveram?

Grupo 6 – Elsa: Duas. Uma para o x e outra para o y.

Grupo 9 – Angelina: Não concordo, só tem uma porque só há um ponto em comum (cruza os dedos para demonstrar).

Professora: Duas soluções? Na ficha colocaram outra resposta. Não estou a entender.

Grupo 6 - Elsa: Colocámos duas soluções. Escrevemos $(-3,-9)$ porque *o* $x=-3$ e o $y=-9$

Grupo 9 – Angelina: Isso está mal -3 e -9 são as coordenadas do x e do y não são as soluções.

Grupo 9 – Carlos: Concordo com a Angelina, só há um ponto em comum, não podem existir duas soluções.

Grupo 6 – Elsa: Então porque é que há dois valores?

Grupo 6 – Joana: Não pode ter duas soluções e um ponto em comum?

Professora: Isso será possível? O que é que estudámos até agora?

Grupo 6 – Joana: Então… Há duas equações para termos um ponto em comum, porque se só tivermos uma equação não vamos encontrar nenhum ponto…

Grupo 7 – Francisco: Vocês estão a pensar que os valores do x e do y são duas soluções mas a solução é o ponto que obtemos depois de marcarmos esse valores estão a perceber?

Professora: Elsa, continuas com dúvidas nos gráficos? Lembras-te na primeira tarefa quando foste ao quadro fazer o gráfico? Para marcares um ponto tinhas que ter duas coordenadas uma em x e outra em y.

Grupo 6 – Elsa: Já entendi é como no gráfico. Também tive dúvidas na outra aula nessa parte. Agora já entendi. Para marcar um ponto preciso dos dois valores.

Grupo 9 – Carlos: Para dar a solução que é o ponto em comum.

Grupo 6 – Elsa: Eu pensava que tínhamos bem porque quando fizemos as contas deu o mesmo resultado.

Professora: Esse valores são as coordenadas do x e do y. Alguém mais tem um resultado diferente deste?

Turma: Não.

Professora: Vamos então, à semelhança das equações ver como se classifica este sistema.

Grupo 7 – Francisco: Este sistema é possível e determinado porque temos uma solução, neste caso $(-3,-9)$.

Professora: E como é a representação gráfica deste sistema?

Grupo 3 – António: Duas retas que se cruzam. Concorrentes.

Professora: Exatamente. Resumindo…

Grupo1 – Renato: Quando um sistema de equações tem um gráfico com duas retas concorrentes é possível e determinado e o ponto em comum é a solução do sistema.

Professora: Vamos então passar ao segundo sistema de equações. O que obtiveram?

Grupo 6 – Joana: é impossível sabem porquê? Nunca iremos encontrar um ponto em comum porque elas são paralelas. Depois resolvemos as equações e deu 5.

Professora: Deu 5 o quê?

Grupo 6 – Joana: O x, o x é igual a 5.

Grupo 9 – Carlos: Não é nada $0x$ é que é igual a 5.

Grupo 4 – Sofia. É a mesma coisa, o zero não conta.

Grupo 9 – Carlos: Não é nada $0x$ é que é igual a 5 por isso é que o sistema é impossível.

Grupo 7 – Francisco: Se multiplicares qualquer número por zero nunca dá 5 é por isso que é impossível. Se fizeres $x=3$ vem $3\times 0=0$ como zero é diferente de 5 não dá ou seja se fizeres isto com qualquer número o resultado dá sempre zero e nunca dá 5.

Professora: E se multiplicar por zero?

Grupo 7 – Francisco: Por zero não dá fica $0=0$

(…)

Professora: Resumindo?

Grupo 4 – Sofia: O segundo sistema não tem solução porque é impossível e o gráfico são duas retas paralelas.

Professora: E o terceiro sistema de equações o que vos deu?

Grupo 2 – Pedro: Deu duas retas uma em cima da outra.

(…)

Grupo 7 – Francisco: Concluímos que o sistema é possível e indeterminado porque no gráfico a solução são duas retas coincidentes quer dizer que todos os pontos são solução e depois de o resolvermos dá $0x=0$. Qualquer número dá.

Professora: O que o Francisco disse está correto. Se vocês forem substituindo o x por diferentes valores o resultado dá sempre $0=0$. Ora esta igualdade é sempre verdadeira. Então todos os números que conhecemos verificam esta igualdade ou seja para $x=1$ vem $0\times 1=0$ para $x=2$ vem $0\times 2=0$ etc., assim sabemos que o sistema é possível mas é indeterminado porque tem infinitas soluções.

A transcrição desta discussão alargada tem o intuito de salientar alguns aspetos que considero bastante importantes. Em primeiro lugar foi devido a este momento de sala de aula que me apercebi que um dos grupos considerava que um sistema de equações podia ter duas soluções, não percebendo a diferença entre ponto e coordenadas de um ponto. Esta situação, que tentarei trabalhar novamente em aulas seguintes, estava perfeitamente camuflada por um resultado correto (figura 33).

1.1. $\begin{cases} y - 3x = 0 \\ y - 2x = -3 \end{cases}$

solução (-3; -9)

Figura 33 - Registo do Grupo 6.

A segunda razão para a transcrição em causa prende-se com o facto de ter ficado agradavelmente surpreendida pela qualidade da linguagem utilizada e pela capacidade de transmitir esclarecimentos que considero complexos. Exemplo destes esclarecimentos são os de Francisco para explicar as razões que tornam um sistema de equações impossível e possível e determinado.

4.3.2. Reflexão

Esta tarefa foi realizada em 90 minutos. Os alunos ocuparam cerca de 60 minutos a trabalhar em grupo, sendo os restantes 30 minutos preenchidos com a apresentação e discussão dos resultados obtidos. Apesar da excitação da turma pelo facto de se trabalhar com computadores, a maioria dos alunos acalmaram e trabalharam bem. As dificuldades sentidas pelos alunos foram superiores às previstas, nomeadamente na situação acima transcrita em que as alunas confundem coordenadas de pontos com pontos.

Depois de lerem o enunciado, os alunos começaram a trabalhar no Geogebra e realizaram sem dificuldades o primeiro sistema. A partir daqui revelaram-se menos autónomos do que anteriormente. Pouco habituados a utilizar o Geogebra, quando não percebiam os resultados que obtinham depreendiam que tinham feito qualquer coisa errada e não tentavam interpretar os resultados. Deste modo comecei a ser solicitada pelos grupos para que lhes dissesse o que estava mal. Sendo esta turma constituída por um grande número de alunos que duvida das suas capacidades (principalmente a Matemática), senti que alguns deles estavam a sentir-se frustrados e a desistir da tarefa pelo que o meu *feedback* foi sempre imediato e orientado no sentido de os incentivar a continuarem a trabalhar com empenho.

Na resolução dos sistemas de equações pelo método de substituição, apenas os Grupos 7 e 9 conseguiram fazer corretamente os três casos. Os restantes grupos perceberam o método, mas erraram nas operações. Aqui tenho que salientar pela negativa a falta de sentido crítico dos alunos, pois, perante resultados diferentes para o mesmo sistema de equações, concluem que obtêm resultados iguais no Geogebra e no método de substituição.

Parece-me pertinente fazer referência à importância que a síntese final pode ter para melhorar substancialmente a comunicação oral. Considero que nesta tarefa a discussão coletiva foi boa. Muito boa até, se tivermos em conta as características da turma. Foi grande o envolvimento da maioria dos alunos. Esforçando-se por entender os diferentes pontos de vista, discutiram com seriedade e interesse os resultados tentando sempre utilizar uma linguagem correta. A clareza com que alguns alunos verbalizaram as soluções obtidas demonstra claramente a evolução que têm tido nesta capacidade transversal. Contudo, esta comunicação quando realizada em pequeno grupo continua a ser pouco cuidada.

Ao longo da aula foram várias as vezes que alguns alunos foram chamados à atenção sobre o comportamento que estavam ter bem como sobre o trabalho realizado, que considero praticamente nulo. Atendendo a que estes alunos na tarefa anterior tinham surpreendido pela positiva falei com eles para perceber o que estava a acontecer. Sendo alunos que apesar de não apresentarem problemas de aprendizagem, apresentam interesses divergentes aos da escola e que raramente se empenham dentro ou fora da sala de aula, referiram que tinham gostado da outra tarefa e por isso a tinham feito. Esta era diferente e só lhes interessava estar no Geogebra.

Globalmente, considero que a turma trabalhou bem. Tendo pouca experiência em tarefas de exploração, esforçaram-se e gostaram de a realizar. Aperceberam-se que precisavam de ser mais persistentes ao enfrentar dificuldades em vez de desistirem. Esta perceção é fundamental para o empenho e motivação de alguns destes alunos. Considero ainda que perceberam a importância da discussão para a consolidação de conceitos e esclarecimento de dúvidas pois no final da aula alguns dos alunos com mais dificuldades referiram que tinham percebido muito bem a classificação dos sistemas de equações.

4.4. Tarefa 4

4.4.1. Sétima aula

Esta tarefa, planificada para 90 minutos, tem início numa aula de 45 minutos e é realizada a pares. É a primeira tarefa de investigação proposta a estes alunos e implica a utilização de *software* de geometria dinâmica. Faltaram à aula os dois alunos do Grupo 3 e um aluno do Grupo 8. A aluna deste grupo, para não trabalhar sozinha ficou com os colegas do Grupo 6.

Depois de distribuir as fichas de trabalho (uma por aluno) verificou-se uma certa agitação. Os alunos rapidamente perceberam que era uma tarefa diferente da que tinham realizado antes, não percebendo muito bem o que tinham que fazer. Assim, optei por ler com os alunos o enunciado e explicar o que se pretendia com a tarefa proposta:

> Vão escrever a equação $4x - y = 6$ no Geogebra. A seguir vão encontrar outra equação que forme com a do enunciado um sistema possível e indeterminado. Isto para a alínea a. As outras alíneas são realizadas de modo semelhante.

De imediato comecei a ser solicitada por alguns grupos que não tinham percebido a minha intervenção:

> Renato - Grupo 1: Stora, como é que fazemos para saber se o sistema é possível e indeterminado?
>
> Professora: Na última aula estudámos a representação gráfica dos sistema de equações. Qual é a representação gráfica de um sistema possível e indeterminado?
>
> Renato: Já sei. Então temos que inventar uma reta que seja coincidente.
>
> Professora: Têm que trabalhar com o Geogebra e obter uma equação que considerem corresponder ao que pretendem.

Já mais calmos e a trabalhar com o Geogebra, fui dialogando com os alunos, procurando ajudá-los quando solicitada. A ajuda foi sempre feita através do questionamento. Enquanto ia passando pelos vários grupos fui-me apercebendo que a maioria dos alunos estava apenas a escrever as equações, não apresentando qualquer tipo de justificação. Deste modo, fui alertando os grupos para a necessidade de justificarem as suas resoluções. O meu *feedback* ia sendo feito de imediato à medida que os alunos iam trabalhando, tendo como principal objetivo solicitar a justificação das respostas ou chamar à atenção sobre alterações nas equações. Numa primeira abordagem, e estando todos os alunos a terminar a primeira questão, apenas os alunos do Grupo 2 não tinham conseguido encontrar uma equação que tornasse o sistema de equações possível e indeterminado. Tinham lido mal o enunciado e estavam a estudar retas que tornavam o sistema possível e determinado (figura 34).

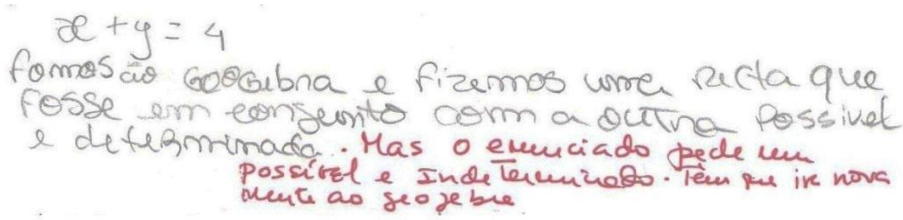

$x + y = 4$
Fomos ao Geogebra e fizemos uma recta que fosse em conjunto com a outra possível e determinado. Mas o enunciado pede um possível e indeterminado. Têm que ir novamente ao geogebra

Figura 34 - Registo do Grupo 2

Os alunos deste grupo, mesmo depois de serem alertados para o facto de estarem a responder a uma questão que não tinha sido colocada, não reformularam a sua resposta. Os restantes grupos tinham conseguido resolver a questão corretamente. Os alunos do Grupo 7 trocaram os sinais à equação dada e obtiveram no Geogebra duas retas coincidentes. Contudo, não conseguiram explicar, após o meu *feedback*, porque utilizaram esta estratégia (figura 35).

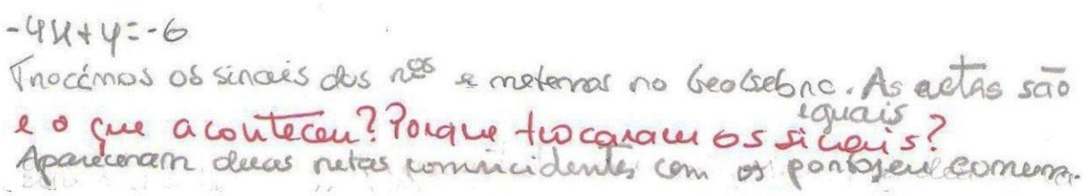

$-4x+y=-6$
Trocámos os sinais dos nºs e metemos no Geogebra. As retas são iguais
e o que aconteceu? Porque trocaram os sinais?
Apareceram duas retas coincidentes com os pontos em comum.

Figura 35 - Registo do Grupo 7 após *feedback.*

Os alunos dos Grupos 1, 5, 6 e 9 multiplicaram os dois membros da equação por 2. Os alunos dos Grupos 5 e 6 apenas apresentam como justificação, após *feedback*, o facto de terem obtido retas coincidentes. No entanto, os alunos dos Grupos 1 e 9 chegaram um pouco mais longe nas suas justificações após o *feedback*. Assim, os alunos do Grupo 1 justificam que multiplicaram os valores para obterem retas coincidentes, mas “o computador mudou a equação, ficando igual à outra”. A partir daqui foram multiplicando por outros números e verificaram que ficavam sempre com a equação igual à do enunciado (figura 36).

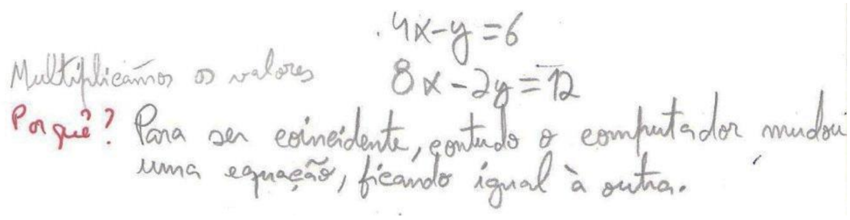


Figura 36 - Registo do Grupo 1 após *feedback.*

Os alunos do Grupo 9 referiram, na primeira versão do trabalho, que tinham que multiplicar por 2 cada um dos termos da equação. Procurei, por isso, levá-los a refletir sobre o que aconteceria se multiplicassem os dois membros da equação por outro número qualquer (figura 37).

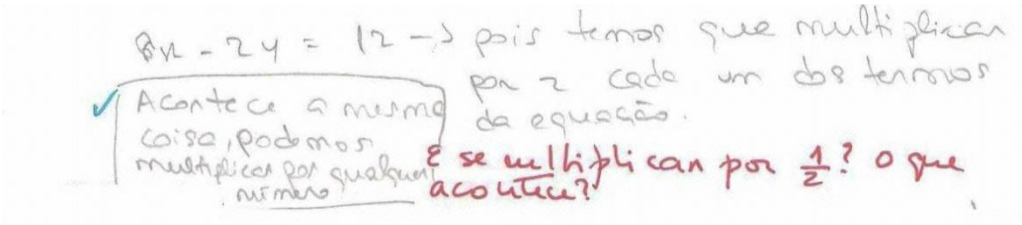


Figura 37 - Registo do Grupo 9 após *feedback.*

Na segunda questão, todos os grupos conseguiram obter, sem grandes dificuldades, equações que tornassem o sistema de equações impossível. Nesta fase, já tinham compreendido que tinham que encontrar retas paralelas à reta dada no enunciado e, por isso trabalhavam entusiasmados. Também tinham percebido que as retas tinham que ser paralelas porque era essa a representação gráfica de um sistema de equações impossível de acordo com o que tinham aprendido na aula anterior. No entanto muitas das justificações, que foram apenas escritas depois do meu *feedback*, estão incompletas. Os alunos dos Grupos 2, 6 e 10 não conseguiram justificar corretamente a razão pela qual a equação que escreveram transforma o sistema de equações num sistema de equações impossível (figura 38).

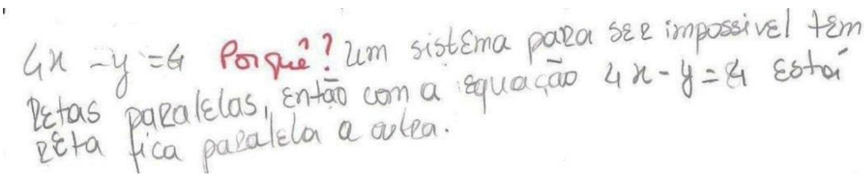
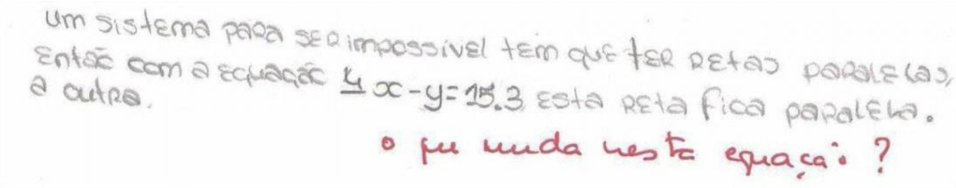


Figura 38 - Registo do Grupo 6 após *feedback.*

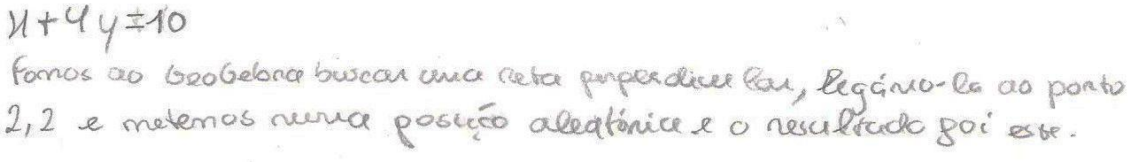
Os alunos do Grupo 10 não reformularam a questão após o *feedback* (figura 39).


Um sistema para ser impossível tem que ter retas paralelas, então com a equação $4x - y = 15.3$ esta reta fica paralela à outra.

o que muda nesta equação ?

Figura 39 - Registo do Grupo 10 após *feedback*.

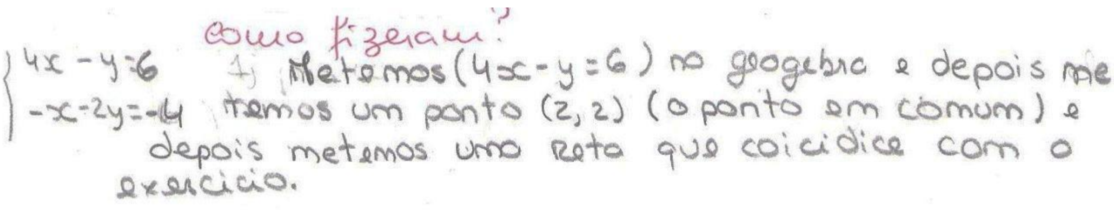
Na última questão foram sentidas mais dificuldades do que na anterior. Embora os alunos soubessem que as retas eram concorrentes, alguns grupos não percebiam como responder à questão com a imposição da solução (2,2). Assim, e através do questionamento, orientei o meu *feedback* para a interpretação da solução de um sistema de equações. Fui colocando questões como: Será que tinham compreendido o significado da solução de um sistema de equações? Em caso afirmativo o que significava a solução (2,2)? Como é que se encontrava no Geogebra a solução do sistema? Os grupos que estavam a sentir mais dificuldades foram aqueles que ao longo das tarefas realizadas tinham manifestado mais dúvidas na construção de gráficos e na interpretação da solução de um sistema de equações. Os alunos dos Grupos 2 e 5 não resolveram a questão. Os alunos do Grupo 7 resolveram-na e foram claros na justificação (figura 40).


$x + 4y = 10$

Fomos ao Geogebra buscar uma reta perpendicular, ligámo-la ao ponto 2,2 e metemos numa posição aleatória e o resultado foi este.

Figura 40 - Registo do Grupo 7

Os restantes grupos apresentaram diversas justificações e utilizaram uma linguagem matemática pouco cuidada (figura 41).



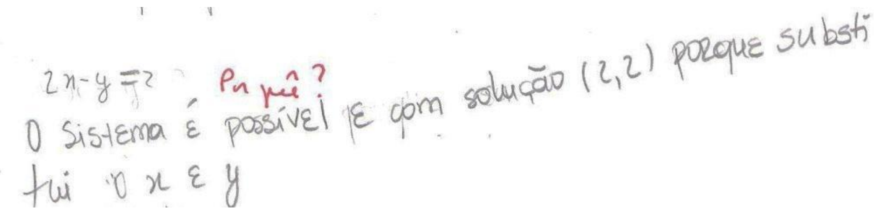
Como fizeram?

$4x - y = 6$
$-x - 2y = -4$

1) Metemos ($4x - y = 6$) no geogebra e depois me- -temos um ponto (2,2) (o ponto em comum) e depois metemos uma reta que coicidice com o exercicio.

Figura 41 - Registo do Grupo 4 após *feedback*.

Os alunos dos Grupos 6 e 9 depois de terem encontrado a equação e após o meu *feedback* a solicitar a justificação, só o conseguiram fazer através da verificação da solução (figura 42).



$2x - y = 2$ Porquê?

O sistema é possível e com solução (2,2) porque substi tui o x e y

Figura 42 - Registo do Grupo 6 após *feedback*.

A aula terminou com a conclusão da tarefa e com a recolha das fichas de trabalho.

4.4.2. Oitava aula

Depois de entregues as fichas de trabalho iniciámos a apresentação e discussão de resultados.

Questão 1. Esta questão foi bastante trabalhada na aula quando expliquei o que pretendia com a tarefa proposta. Assim, a maioria dos alunos percebeu que necessitava de encontrar uma reta coincidente com a reta dada. Começaram então a desenhar no Geogebra, retas ao acaso, que iam alterando até ficarem coincidentes com a reta dada no enunciado. Os alunos do Grupo 7 verificaram que se trocassem os sinais à equação obtinham uma reta coincidente com a dada (figura 36). Já os alunos dos Grupos 1 e 9 verificaram que se multiplicassem os dois membros da equação dada por um número qualquer, quando colocavam essa equação no Geogebra ela ficava coincidente com a reta dada. Constataram ainda que o programa alterava automaticamente a equação e que esta ficava sempre igual à do enunciado da tarefa (conforme figuras 37 e 38). Estas "descobertas" permitiram discutir com toda a turma duas estratégias simples de geração de sistemas de equações. Como alguns alunos não viam qualquer tipo de vantagem em utilizar este tipo de estratégias, referindo que tinham conseguido responder à questão sem as conhecerem, solicitei que resolvessem a questão sem utilizar o Geogebra. Perceberam então que, sem o auxílio do computador, estas estratégias eram bastantes importantes pois permitiam-lhes resolver este tipo de questões.

Questão 2. Para resolverem esta questão os alunos utilizaram a mesma estratégia. Sabendo que tinham que obter uma reta paralela, foram desenhando no Geogebra retas paralelas e anotando as equações que iam aparecendo. Depois de anotarem algumas equações os alunos dos Grupos 1 e 9 concluíram que se mantivessem o primeiro membro da equação e alterassem o segundo obteriam sempre sistemas impossíveis (figura 43).

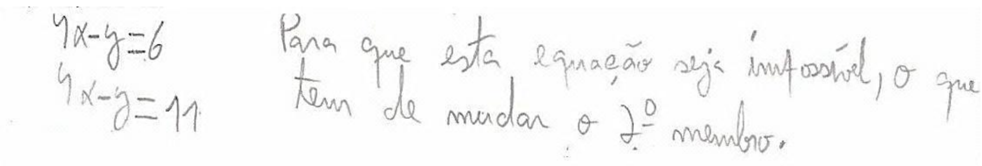


Figura 43 - Registo do Grupo 1

A esta conclusão também chegaram os alunos dos Grupos 5 e 7, mas só após o meu *feedback*, que foi orientado para que justificassem os resultados obtidos. Mais uma vez através das conclusões de alguns alunos conseguimos estudar na turma uma estratégia de geração de sistemas impossíveis. Toda a turma percebeu, com relativa facilidade, que se se mantivesse o primeiro membro da equação e se alterasse o segundo, o sistema era impossível.

Questão 3. Cientes que tinham que encontrar uma reta concorrente com a do enunciado, a dificuldade de alguns grupos foi trabalharem com a solução (2,2). Se o enunciado não tivesse a solução do sistema de equações, iriam mais uma vez colocar retas ao acaso sabendo que o resultado estaria certo desde que fossem retas concorrentes. Deste modo alguns grupos tiveram que rever uma vez mais o significado da solução de um sistema de equações. Constatei, por isso, que, para alguns alunos, a interpretação da solução de um sistema de equações ainda não está bem compreendida. Constatei também que continuam a surgir dificuldades em localizar um ponto no Geogebra, pois fui solicitada para os esclarecer sobre a localização do ponto de coordenadas (2,2). Mais uma vez, os Grupos 1 e 9 encontraram uma estratégia de geração de sistemas de equações, realçando que, quando têm a solução de um sistema e uma equação, se fizerem uma equação que no primeiro membro tenha $x + y =$ e no segundo membro colocarem a soma das coordenadas dos pontos, vão ter sempre um sistema com essa solução. O Grupo 9 referiu ainda que podiam variar as equações uma vez que tinham feito outra equação e também estava bem. Contudo, na sua resolução, a justificação não é clara (figura 44).

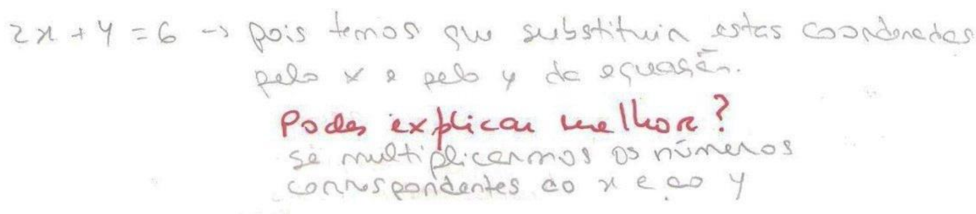


Figura 44 - Registo do Grupo 9 após *feedback.*

Os Grupos 2 e 5 não resolveram a questão. O Grupo 4 errou na resolução.

Síntese final. Quase toda a turma participou nesta síntese com entusiasmo. Gostaram de realizar esta tarefa. A maioria dos alunos da turma conseguiu escrever as equações solicitadas. Embora muitos deles não tenham utilizado nenhuma estratégia para escrever as equações pedidas, na discussão dos resultados conseguiram perceber as estratégias que alguns colegas utilizaram, percebendo ainda que existem diferentes estratégias de geração de sistemas de equações. É de notar que, para além das dificuldades já previstas, surgiram também dificuldades na interpretação das questões. Com esta síntese foram atingidos os objetivos que estabeleci para esta tarefa.

4.4.3. Reflexão

Esta tarefa foi realizada em duas aulas de 45 minutos. As aulas correram bem e os alunos trabalharam bastante. Porém, demoraram mais tempo do que o programado na fase da apresentação e discussão dos resultados, o que fez com que esta discussão se prolongasse para a aula de acompanhamento ao estudo. Esta situação já tinha sido prevista, tendo em conta o grande número de grupos a apresentar e a discutir os resultados.

Após a fase inicial da tarefa, em que a minha ajuda foi bastante solicitada pelos alunos, estes passaram a revelar a partir daí uma maior autonomia. Contudo, na sua maioria, continuam a não apresentar justificações nas respostas às questões. As dificuldades sentidas pelos alunos foram superiores às por mim antecipadas, pois, ao contrário do que previ, sentiram dificuldades na interpretação das questões, o que me levou a explicar em grande grupo o que pretendia com a tarefa proposta. Foi ainda necessário, tal como previsto, relembrar uma parte da tarefa anterior.

Os alunos dos Grupos 1, 7 e 9 conseguiram encontrar estratégias simples de geração de sistemas de equações. Enquanto os Grupos 7 e 9 são formados por alunos que não sentem grandes dificuldades na disciplina de Matemática e cujos resultados obtidos não me surpreendem, os alunos do Grupo 1 não revelam estas caraterísticas, pelo que foi para mim gratificante verificar que se empenharam e que conseguiram encontrar regularidades em todas as questões, levantando conjeturas e tirando conclusões.

A qualidade da discussão dos resultados foi boa. Os alunos empenharam-se na apresentação dos resultados obtidos, explicando com clareza as estratégias que utilizaram e as razões que os tinham levado a utilizar as referidas estratégias. Quando os grupos que tinham conseguido obter estratégias de geração de sistemas de equações apresentaram os seus trabalhos, muitos dos restantes colegas não valorizaram estas conclusões. Esta situação deu origem a uma discussão mais forte sobre a importância das estratégias e penso que, no fim da discussão, a maioria da turma tinha percebido a importância de conhecer e dominar estratégias simples de geração de sistemas de equações.

Globalmente, a turma trabalhou bastante bem. O comportamento foi bastante razoável. Antes de iniciarmos esta aula falei com os alunos sobre os diferentes tipos de tarefa que tinham realizado até esta fase e expliquei-lhes o que era uma tarefa de investigação e o que se pretendia na sua realização. Assim deparei-me com uma turma entusiasmada por estar a realizar uma tarefa de investigação. Sentiram-se importantes. Para estes alunos, com baixas espectativas em relação à escola, tarefas de investigação são algo que só os "bons" alunos fazem. Também eu, quando percebi a importância que esta tarefa estava a ter para muitos dos alunos, me senti ansiosa, com a noção clara de que se corresse mal poderia ter alunos a desistirem de trabalhar. Mas as aulas correram bem com alunos que no final comentavam que estavam cansados, mas bem-dispostos e orgulhosos do trabalho realizado. Considero, assim, que foram atingidos os objetivos que defini para esta tarefa.

4.5. Tarefa 5

4.5.1. Nona e décima aulas

Esta tarefa é constituída por um conjunto de exercícios que têm como objetivo, principal consolidar conhecimentos relativos à resolução de sistemas de equações. Após quatro aulas lecionadas na sala de informática, esta aula decorreu na sala habitual e a metodologia utilizada foi, novamente, a realização da tarefa em grupos de quatro alunos. A ausência de quatro alunos obrigou a uma restruturação dos grupos. Como considero importante que todos os alunos resolvam os sistemas de equações e antevendo situações de alunos que provavelmente passariam a aula a ver os colegas trabalhar, entreguei uma ficha de trabalho a cada um. Depois de distribuídas as fichas, esclareci que, embora estivessem a trabalhar em grupo, no final da aula recolheria todas as fichas individuais. Depois de enfatizar mais uma vez a necessidade se concentrarem toda a turma começou a trabalhar.

Enquanto circulava pela sala fui reparando que não surgiam muitas dúvidas na realização do primeiro exercício. Todos começaram a resolver o primeiro sistema pela segunda equação conforme sugestão do enunciado e consideraram-no fácil. Também na resolução do segundo exercício (e apesar de alguns alunos já não se recordarem do procedimento necessário para o resolver) as dúvidas foram esclarecidas por outros elementos dos grupos. O exercício 3.1 já tinha uma das incógnitas resolvida em ordem a outra, pelo que também foi resolvido corretamente pelos grupos.

Os exercícios 3.2 e 3.3 já levantaram dificuldades a diversos alunos de diferentes grupos. Observei que alguns alunos estavam a tentar resolver o sistema sem a ajuda do resto do grupo, justificando que assim percebiam melhor. Aceitei a justificação e fui esclarecendo algumas dúvidas individuais à medida que ia sendo solicitada. Renato, que nesta aula foi integrado no Grupo 1, cometeu um erro muito comum ao esquecer-se do sinal antes do parêntesis (figura 45).

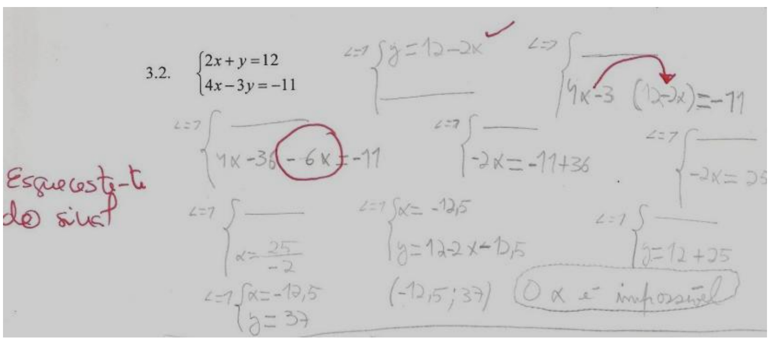


Figura 45 - Registo de Renato com feedback.

Também Paula, integrada no Grupo 3, errou ao não obedecer às regras dos sinais na adição algébrica (figura 46).

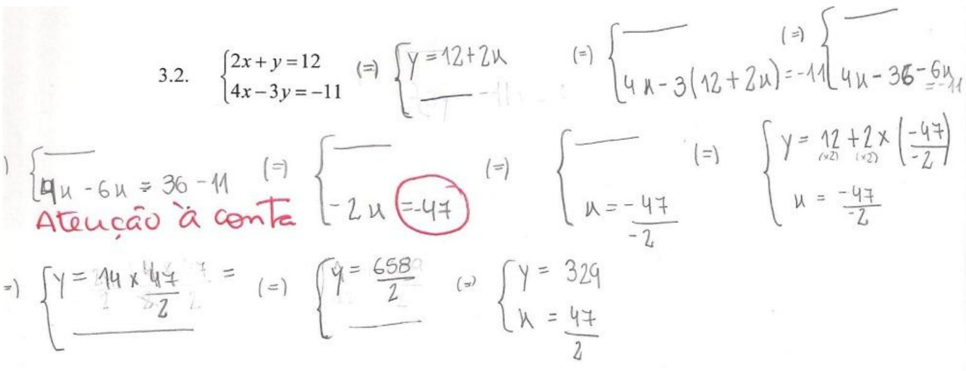


Figura 46 - Registo de Paula com *feedback*.

Gustavo, do Grupo 4, cometeu erros sucessivos nas operações com números e revelou baixo nível de compreensão na resolução de sistemas de equações pelo método de substituição (figura 47).

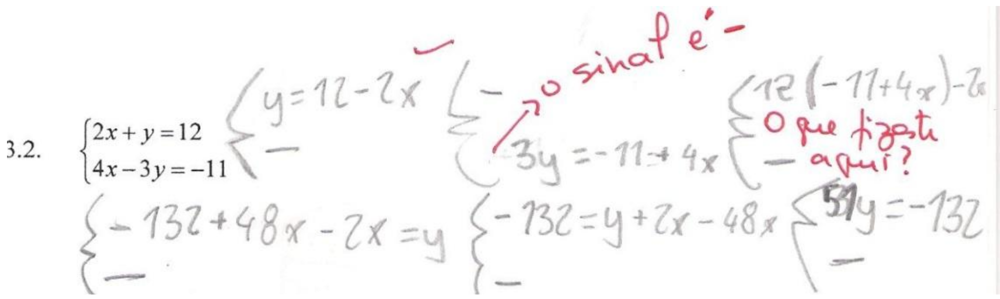


Figura 47 - Registo de Gustavo com *feedback*.

Nos exercícios 3.4 e 3.5 registaram-se muitas dificuldades por parte dos alunos. Todos os grupos solicitaram ajuda. As operações que tinham que efetuar até colocarem os sistemas de equações na forma canónica tornavam-se muito complicadas pois, devido às dificuldades em operar com números racionais e na manipulação algébrica, os erros sucediam-se uns atrás dos outros. Só três alunos conseguiram resolver os sistemas e mesmo assim um deles enganou-se e substituiu o valor de x em y (figura 48).

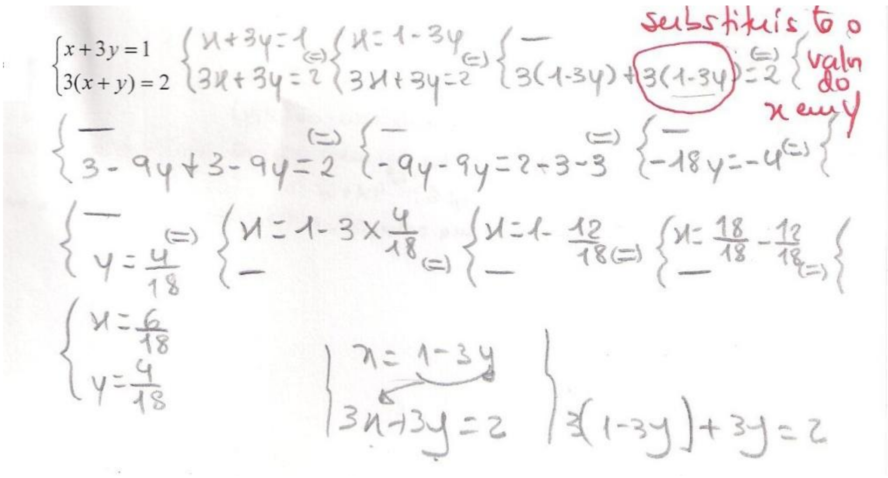


Figura 48 - Registo do Francisco com *feedback*

Fui continuando a esclarecer as dúvidas que iam surgindo, relembrando regras e procedimentos mas comecei a deparar com grupos em que todos os alunos tinham soluções diferentes para o mesmo sistema de equações. Um exemplo a salientar pela positiva é Gustavo que foi dos poucos alunos que aplicou corretamente a propriedade distributiva quando desembaraçou de parênteses na primeira equação e reduziu corretamente ao mesmo denominador todos os termos da segunda equação (figura 49).

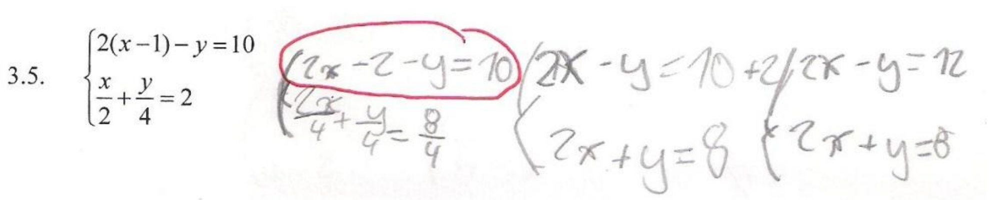


Figura 49 - Registo do aluno Gustavo.

Os grupos terminaram a tarefa e iniciámos a sua correção no quadro. A resolução dos sistemas de equações foi apresentada pelo porta-voz de cada grupo e, à medida que esta se desenrolava, as dúvidas que surgiam eram esclarecidas. Deste modo, sempre que era necessário um esclarecimento nalgum passo da resolução era feita uma pausa e, em grupo, tentávamos esclarecer as situações em causa. No final de cada resolução, iam sendo analisados e corrigidos os erros cometidos e comparadas as diferentes estratégias de substituição utilizadas, confrontando a que estava no quadro com as utilizadas pelos restantes grupos e identificando as mais adequadas. No exercício 1 todos os alunos seguiram as indicações do enunciado e perceberam que fazia todo o sentido resolver a segunda equação em primeiro lugar porque só tinha uma incógnita. Perceberam ainda a necessidade de estarem sempre atentos ao enunciado das tarefas pois muitas vezes o grau de dificuldade varia de acordo com a estratégia que se utiliza para a resolver.

No exercício 2, depois de relembrados os alunos como se fazia a verificação da solução de um sistema de equações, dado o par ordenado, a resolução foi feita sem qualquer dificuldade (figura 50).

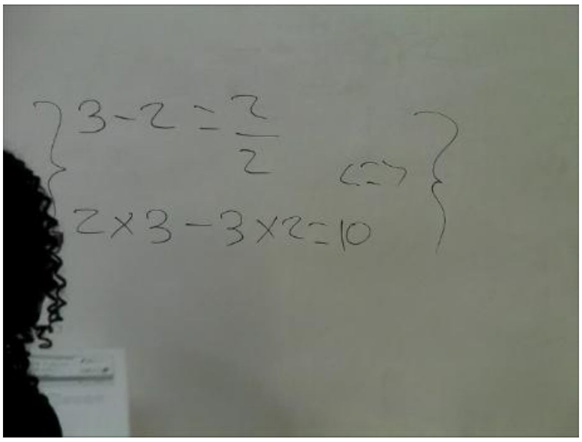


Figura 50 - Resolução do exercício 2.

A resolução do exercício 3.1 foi realizada tranquilamente pela maioria dos alunos. Quase todos repararam que a primeira equação já estava resolvida em ordem a uma incógnita e por isso fizeram a sua substituição com relativa facilidade. Os alunos que revelaram dificuldades em substituir o valor de x por $y+10$ rapidamente perceberam após o esclarecimento (figura 51).

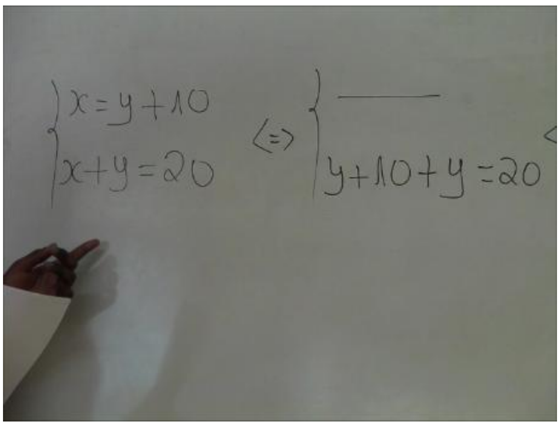


Figura 51 - Resolução do exercício 3.1

Os exercícios 3.2 e 3.3 apresentavam um grau de dificuldade semelhante. Surgiram algumas dificuldades num elevado número de alunos. No exercício 3.2 essas dificuldades não estavam relacionadas com o início da resolução (quase todos perceberam que era conveniente começar pela incógnita com coeficiente 1), mas sim em substituir na outra equação essa incógnita pela expressão obtida. Essas dificuldades, que surgiram porque o coeficiente de y é 3, foram esclarecidas por outros colegas que tinham percebido a questão e por mim. No exercício 3.3 todos começaram a resolver o sistema de equações pela segunda equação e em ordem a y, contudo erraram porque a resolveram em ordem a $-y$. Depois de terem compreendido a diferença resolveram o exercício com menos dificuldades que o anterior.

Nos exercícios 3.4 e 3.5 surgem equações com parêntesis e com denominadores e as dificuldades aumentam. Aqui, foi necessário recordar uma vez mais as regras anteriormente estudadas. Deste modo o sistema de equações foi resolvido com todo o cuidado, com uma explicação passo a passo, realizada por mim com a colaboração da turma. Ainda assim os alunos sentiram, na sua maioria, necessidade de rever a resolução, que desta vez foi feita por mim.

Síntese final. A síntese final teve a participação de toda a turma e embora tenha sido feita uma síntese à medida que cada sistema de equações era resolvido, voltei a enfatizar a importância de se identificarem as estratégias de substituição de resolução de um sistema de equações mais indicadas. Para o aluno uma escolha adequada da estratégia de resolução pode, como se viu pelas tarefas resolvidas na aula, diminuir o grau de dificuldade da resolução de um sistema de equações.

4.5.2. Reflexão

Esta tarefa foi programada para duas aulas de 45 minutos. Contudo, devido às dificuldades manifestadas pelos alunos, tive necessidade de a prolongar para mais uma aula de acompanhamento ao estudo. As aulas correram bem. Após duas aulas com uma tarefa de exploração e outras duas com uma tarefa de investigação, a turma sentiu-se bem a realizar esta tarefa só de exercícios que, pela sua natureza, decorreu num ambiente mais calmo. Os alunos trabalharam com empenho e as dificuldades sentidas coincidiram com as anteriormente previstas. Embora continuem pouco autónomos, tentam superar as suas dificuldades revelando-se mais persistentes. No entanto as dificuldades que os alunos têm na manipulação algébrica e na operação de números racionais, condicionam os resultados que gostariam de obter na realização das tarefas.

Os alunos com mais dificuldades trabalharam com empenho e aperceberam-se da necessidade de tentarem superar as dificuldades acima referidas. O comportamento da turma foi bom. O facto de faltarem às aulas quatro alunos, forçou-me a reorganizar os grupos por forma a mantê-los equilibrados. Estes alunos estiveram presentes na aula de acompanhamento ao estudo mas não participaram na discussão.

Considero, depois de analisada a tarefa, que os alunos perceberam que existem várias maneiras de iniciar a resolução de um sistema de equações e que, numa primeira abordagem, devem analisar o que vão fazer primeiro. Esta perceção pode ser fundamental para o sucesso da resolução. Em relação à qualidade da discussão oral e embora já exista por parte dos alunos um esforço para a realizarem de uma forma mais cuidada, não a considerei tão boa como em aulas anteriores. Ao longo das aulas fui sempre utilizando frases como "substituir na equação essa incógnita", "expressão obtida" para que os alunos se fossem familiarizando com elas, contudo ainda não conseguiram, na sua maioria, expressar-se através destas frases e integrá-las no seu vocabulário matemático. Globalmente, considero que a turma trabalhou bem e atingiu os objetivos definidos para esta tarefa, consolidando os seus conhecimentos relativos à resolução de sistemas pelo método de substituição e à noção de solução de um sistema.

4.6. Tarefa 6

4.6.1. Décima primeira e décima segunda aulas

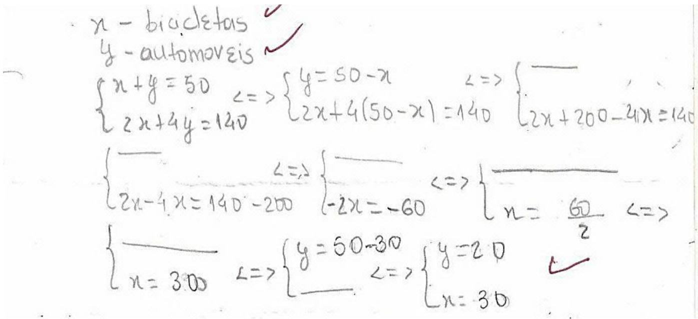
Esta é a última tarefa que planifiquei para a unidade de ensino. Tem a duração de 90 minutos, sendo os primeiros 45 para realização da tarefa em grupo e a restante parte da aula para apresentação e discussão das estratégias utilizadas e dos resultados obtidos. A tarefa é constituída por quatro problemas.

Depois de distribuir as fichas (uma por aluno) e sabendo à partida que iam surgir dificuldades na realização de algumas das questões da tarefa, reforcei uma vez mais a ideia de que não existe apenas um método ou um procedimento para se resolverem problemas, e enfatizei a importância de lerem os enunciados com atenção e de refletirem sobre as estratégias a utilizar.

Enquanto circulava pela turma verifiquei que a grande dúvida no primeiro problema se prendia com a identificação das incógnitas. Alguns grupos discutiam entre si a necessidade de trabalharem com quatro incógnitas. Esta dificuldade é percetível no diálogo que se segue, entre alunos do Grupo 1:

> Ana: Este problema é diferente. Precisamos de mais incógnitas… Um x, um y, um a e um b.
>
> Elisa: Porquê? Não sabemos fazer coisas assim. É sempre um x e um y.
>
> Ana: Sim porque temos que saber quantos carros temos, quantas bicicletas temos e quantas rodas de carros e quantas rodas de bicicletas.
>
> (…)
>
> Elsa: Não, não é preciso fazer assim. Se x forem os carros e y as bicicletas, multiplicamos por 2 e por 4 e temos as rodas…. Acho eu.

Após este tipo de reflexão, que surgiu nos Grupos 1, 2 e 3 todos os alunos foram avançando e conseguiram resolver o primeiro problema (figura 52).



x - bicicletas

y - automoveis

$$\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+4y=140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=50-x \\ 2x+4(50-x)=140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ 2x+200-4x=140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ 2x-4x=140-200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -2x=-60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x=\frac{60}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ x=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=50-30 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=20 \\ x=30 \end{cases}$$

Figura 52 - Registo do Grupo 1

Este problema tem para os alunos um significado muito real, existindo um entendimento claro do que se pretende. Assim, a partir do momento em que conseguiram identificar com clareza as incógnitas, conseguiram escrever as equações. Surgiram no entanto na resolução do sistema de equações algumas dificuldades na manipulação algébrica e nas operações com números racionais que fui esclarecendo.

No segundo problema surgiram dificuldades na escrita da segunda equação. O facto de o enunciado ser mais abstrato e da linguagem matemática utilizada ser mais complexa levou a que a maioria dos grupos solicitasse a minha ajuda. Embora tivessem identificado corretamente as incógnitas na primeira equação, a escrita da segunda equação exige um domínio da linguagem matemática que a maioria destes alunos ainda não tem. Para muitos deles escrever simbolicamente “metade do maior” ou “subtrair $\frac{2}{3}$ do outro” não é tarefa fácil. Deste modo o meu *feedback* foi imediato e teve como propósito levá-los a estruturar ideias. Sugeri que fossem escrevendo à medida que iam lendo. Fui perguntando: Se tinham decidido que o maior número era x como se escrevia metade de x? Qual é o símbolo que se utiliza para representar a palavra subtrair em Matemática? Então como se escreve subtrair $\frac{2}{3}$ de um número? As respostas foram reformuladas e a escrita da equação foi sendo feita. No entanto, e apesar destas dificuldades, apenas os alunos do Grupo 4 não resolveram o problema por um sistema de equações, optando por o resolver através de representações aritméticas (figura 53).

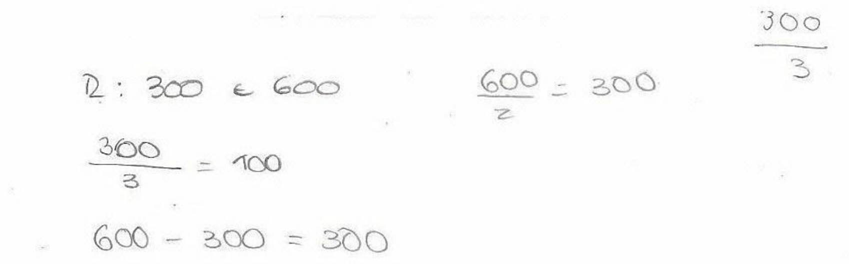


Figura 53 - Registo do Grupo 4

Como os alunos não tinham apresentado qualquer tipo de justificação na resolução do problema, solicitei que me explicassem o que tinham feito, o que fizeram oralmente. Solicitei ainda que refletissem sobre o trabalho realizado e que tentassem resolver o problema através de um sistema de equações.

No terceiro problema surgiram, tal como no segundo, muitas dificuldades. Os alunos dos Grupos 1 e 2 já não se recordavam das características de um triângulo isósceles, pelo que tive que os relembrar. Contudo, mesmo os grupos que não sentiram essa dificuldade, não estavam a conseguir avançar na sua resolução. Senti que as questões que me colocavam e a ajuda que me era solicitada era imprecisa, não sabiam muito bem qual era a sua dificuldade. Tendo em conta que esta situação estava, pela primeira vez, a acontecer na turma toda, sugeri que todos desenhassem um triângulo isósceles e que colocassem na figura todos os dados que pudessem retirar do enunciado.

Logo após o meu *feedback*, os alunos do Grupo 4 obtiveram as dimensões do triângulo. Mais uma vez, os alunos deste grupo resolveram o problema sem escrever as equações (figura 54).

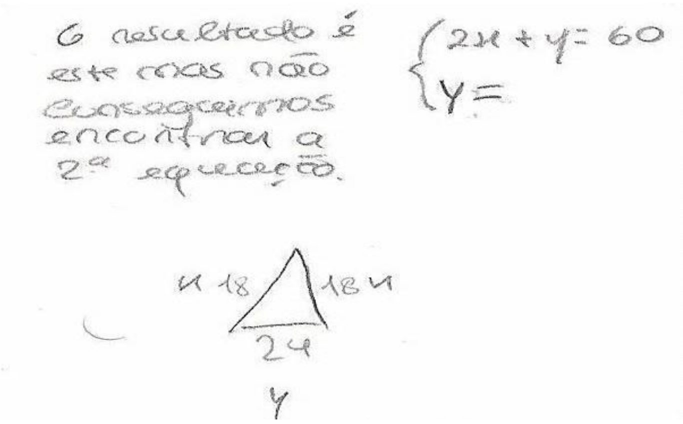


Figura 54 - Registo do Grupo 4

Os alunos do Grupo 3, solicitaram a minha ajuda para a escrita da segunda equação. Não estavam a perceber a relação entre o comprimento da base e dos lados. Como os alunos do Grupo 4 também não tinham conseguido escrever a mesma equação, esclareci os dois grupos lendo o enunciado em que a base tinha mais 6 cm de comprimento que os lados. Não fui propositadamente mais esclarecedora, pois considerei que corria o risco de lhes dizer a equação. O meu *feedback* revelou-se eficaz para os alunos do Grupo 4 que resolveram o problema corretamente, mas não foi totalmente compreendido pelos alunos do Grupo 3 pois consideraram que a base era igual à soma dos comprimentos dos dois lados do triângulo (figura 55).

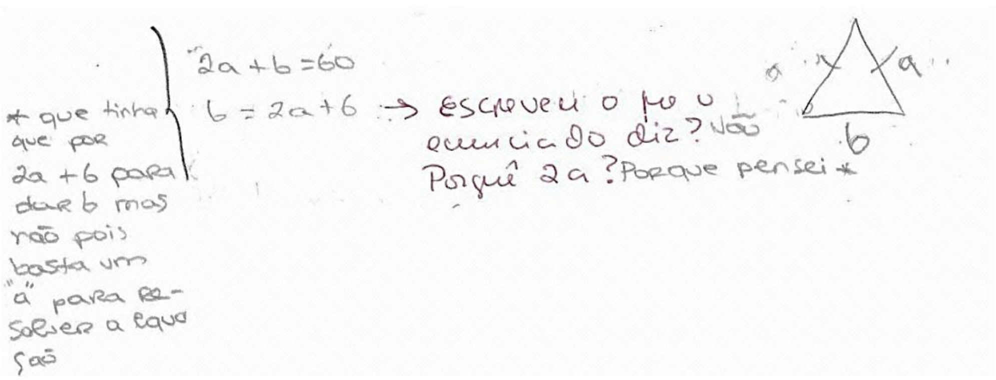


Figura 55 - Registo do Grupo 3 com *feedback*.

Depois de escreverem a equação escrevi de imediato o meu *feedback*, sugerindo que lessem o que tinham escrito e que comparassem com o enunciado do problema. Desta forma, e embora a justificação do que tinham feito não seja muito clara, perceberam que tinham que considerar apenas o comprimento de um lado (figura 56).

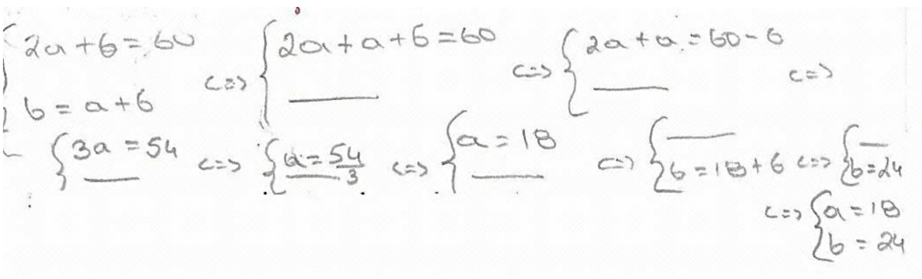


Figura 56 - Registo do Grupo 3 após feedback

Os alunos dos Grupos 1 e 5 também tiveram dificuldades na escrita da segunda equação do problema, que conseguiram resolver após o meu *feedback*. Os alunos do Grupo 2 não resolveram o problema.

No quarto problema era solicitada a redação de um enunciado, dado um sistema de equações. À partida todos os alunos consideraram que seria uma tarefa mais fácil mas, quando começaram a escrever, três dos cinco grupos sentiram dificuldades na passagem da linguagem matemática para linguagem natural. Tal como anteriormente, sugeri que desenhassem a figura com os dados do enunciado, que neste caso são as equações. Porém, nem todos os alunos tinham compreendido que a primeira equação representava o perímetro e estavam a escrever o que liam ou seja, para a equação $2x+2y=16$ escreviam "o dobro da largura e do comprimento" (figura 57).

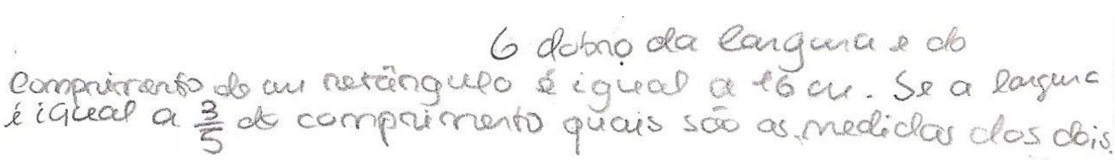


Figura 57 - Registo do Grupo 4

Perguntei aos alunos se tinham desenhado a figura e responderam que não. Não percebiam porque é que eu não estava a aceitar aquele enunciado. Depois de terem desenhado a figura, e de colocarem o x e o y na largura e no comprimento, questionei-os sobre o que estavam a ver. Deste modo, foram percebendo que a primeira equação representava o perímetro do retângulo e que a segunda equação representava uma das medidas do referido retângulo (tal como tinham referido) Todos os alunos, à exceção dos do Grupo 5, que escreveram o enunciado corretamente, sentiram o mesmo tipo de dificuldade (figura 58).

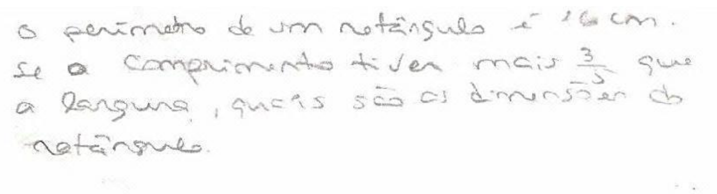

o perímetro de um retângulo é 16 cm. se o comprimento tiver mais $\frac{3}{5}$ que a largura, quais são as dimensões do retângulo.

Figura 58 - Registo do Grupo 5

Iniciámos assim a apresentação e discussão de resultados.

Problema 1. Este problema levantou algumas dificuldades na identificação das incógnitas. Os alunos dos Grupos 1, 2 e 3 após lerem o enunciado pensaram que necessitavam de identificar quatro incógnitas. Assim, para verificar se o diálogo que mantive com estes grupos tinha sido profícuo, pedi ao porta-voz de cada grupo que explicasse quais as incógnitas que tinham identificado e como tinham resolvido o problema. Todos eles conseguiram fazê-lo, referindo ainda que tinham compreendido todo o problema e que este era fácil. Para verificar a sua compreensão do problema decidi perguntar o que poderíamos pensar se obtivéssemos, por exemplo, o resultado $x = 20,5$. Nesta questão houve consenso na resposta. Responderam que não podia ser porque à partida sabiam que só podiam ter números inteiros na resposta. Estavam a tratar de carros, de bicicletas e de rodas.

Problema 2. Neste problema surgiram dificuldades na escrita da segunda equação. Houve consenso na identificação das incógnitas, mas a linguagem do problema levantou dúvidas aos alunos dos Grupos 1, 2, 3 e 5. Contudo, referiram que quando começaram a escrever a equação passo a passo e à medida que iam lendo, o problema ficou mais fácil. Os alunos do Grupo 4 foram os únicos que não resolveram o problema usando um sistema de equações. Por isso, pedi ao porta-voz que explicasse aos colegas que estratégias tinham utilizado. Os colegas ouviram a explicação e embora no final entendessem e até considerassem mais fácil o método utilizado, referiram que "já estavam mais habituados a usar sistemas de equações".

Problema 3. O Grupo 4 resolveu o problema sem dificuldades através de tentativa e erro, dizendo que não sabia escrever a segunda equação. Todos os outros grupos sentiram dificuldades na escrita da segunda equação. Deste modo, pedi aos porta-vozes que explicassem à turma como tinham conseguido escrever as equações. Todos conseguiram explicar. Solicitei ainda ao Grupo 4, uma vez mais, que expusesse o método utilizado. Depois desta explicação, chamei à atenção da turma para o facto de que, embora tivessem liberdade para escolher a estratégia a utilizar, também era necessário aprender a escrever equações.

Problema 4. Este último problema foi bastante trabalhado com os grupos, pelo que não surgiu grande discussão à sua volta. Deste modo, salientei que deveria haver cuidado da parte deles nas transcrições que faziam, analisando o que estava escrito simbolicamente, referindo que apenas o Grupo 5 tinha identificado a primeira equação como o perímetro do retângulo. Por fim, chamei à atenção para o facto de nenhum dos grupos em nenhum dos problemas ter respondido às questões corretamente. Todos se limitaram a apresentar o resultado do sistema de equações como se fosse essa a pergunta que estava a ser feita.

Síntese final. Quase toda a turma participou nesta síntese, salientando os aspetos mais importantes da tarefa, ou seja, interpretar o enunciado do problema cuidadosamente, identificar com clareza as incógnitas e interpretar a solução do problema não esquecendo o contexto em que se está a trabalhar. Com esta síntese foram atingidos os objetivos que estabeleci para esta tarefa.

4.6.2. Reflexão

Esta tarefa de resolução de problemas foi a última de um conjunto de tarefas que planifiquei para esta unidade de ensino. As aulas correram bem. No entanto, tal como previsto, a tarefa viria a apresentar bastantes dificuldades. Continuando os alunos a revelar-se, na sua maioria, pouco autónomos, esta foi a tarefa em que mais necessitaram da minha ajuda para conseguirem progredir na sua resolução. Logo no primeiro problema constatei que era fundamental ler com eles o enunciado e ajudá-los a organizar ideias tentando interpretar o que estava escrito para que a cada passo compreendessem o que estavam a fazer sem se desviarem do que era pedido.

Da análise desta tarefa e do trabalho que os alunos desenvolveram parece-me claro que perceberam a necessidade de ler cuidadosamente o enunciado do problema, a fim de perceberem o que é pedido, de identificarem com clareza as incógnitas e escreverem as equações. Também entenderam a importância de lerem as equações que escreveram com o objetivo de verificarem se está de acordo com o enunciado.

A maioria dos alunos esforçou-se por ultrapassar estas dificuldades nomeadamente na identificação das incógnitas e na escrita das equações. Também os alunos do Grupo 4, que resolveram a maioria dos problemas através de processos aritméticos e de tentativa e erro, esforçaram-se e conseguiram sempre fazê-lo através de sistemas de equações. Contudo, pelo conhecimento que tenho dos alunos, acredito que alguns continuam a não conseguir, de uma forma autónoma, resolver problemas deste tipo.

Em relação à escrita de uma resposta contextualizada considero, que os alunos necessitam de tempo para que esta faça parte da resolução completa do problema. Já relativamente a análise crítica da solução acredito que o sucesso está dependente do tipo de problema a resolver. Se o contexto do problema estiver relacionado com o dia-a-dia destes alunos a resposta será positiva, tal como aconteceu com a primeira questão desta tarefa. Se o problema for mais abstrato será certamente mais difícil a análise crítica da solução.

A comunicação oral revelou-se abaixo do esperado, tanto em grupo como na apresentação e discussão dos resultados obtidos. Os alunos mostraram-se mais interessados em dizerem o que tinham feito do que em explicar como e porquê. Saliento, no entanto, que os alunos do Grupo 4 souberam explicar com clareza as estratégias que utilizaram para resolver os problemas não recorrendo a sistemas de equações. Porém realço que para estes alunos é neste momento perfeitamente natural a utilização de termos e expressões que conduzem progressivamente a uma linguagem matemática mais cuidada. Globalmente, considero que a turma teve um bom comportamento, trabalhou bem e percebeu o que era fundamental nesta tarefa: analisar cuidadosamente o enunciado do problema, identificar as incógnitas e utilizar estratégias diversificadas para o resolver.

4.7. Avaliação das fichas sumativas

A ficha de avaliação sumativa foi realizada após a última aula da unidade de ensino e teve a duração de 45 minutos. É formada por três grupos de questões.

Questão 1. Na questão 1 pretendo verificar se os alunos conseguem utilizar o método de substituição na resolução de sistemas de equações. De acordo com os critérios de correção (Anexo 3) a realização desta questão está dividida em seis etapas cuja análise considero pertinente para ter uma noção mais clara da progressão das aprendizagens dos alunos.

Dos vinte alunos da turma, dois não responderam à questão. Dezoito alunos resolveram corretamente a 1.ª equação (ou a 2.ª equação) em ordem a uma das incógnitas (x ou y), quinze substituíram sem erros na outra equação essa incógnita pela expressão obtida, cinco resolveram corretamente a equação obtida, nove substituíram corretamente na 1.ª equação (ou na 2.ª equação) a incógnita (x ou y) pelo valor encontrado, quatro resolveram sem erros a equação obtida e seis indicaram a solução do sistema de equações. Um aluno resolveu corretamente toda a questão e outro apresentou um resultado incompleto, por não ter indicado a solução do sistema de equações (figura 63). Três alunos, um dos quais Luís, erraram todas as etapas de resolução do sistema de equações à exceção da primeira (figura 59). Este aluno, depois de ter resolvido a equação em ordem a x não conseguiu substituir na segunda equação essa incógnita pelo valor obtido, trabalhando novamente com as duas incógnitas.

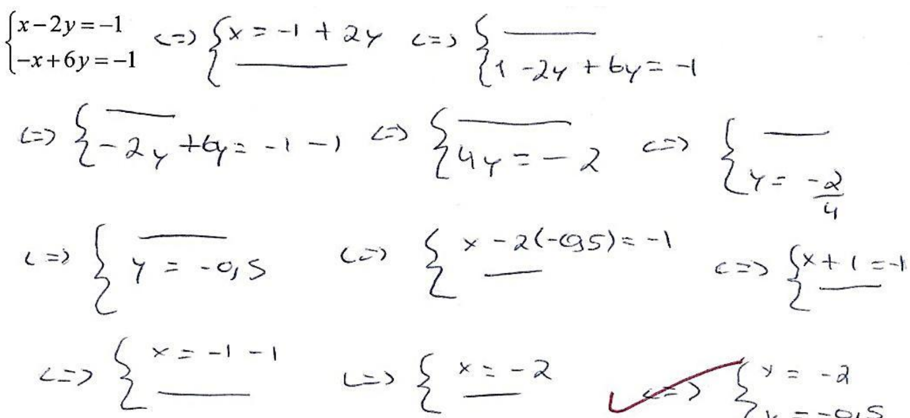


Figura 59 - Resposta de Carlos

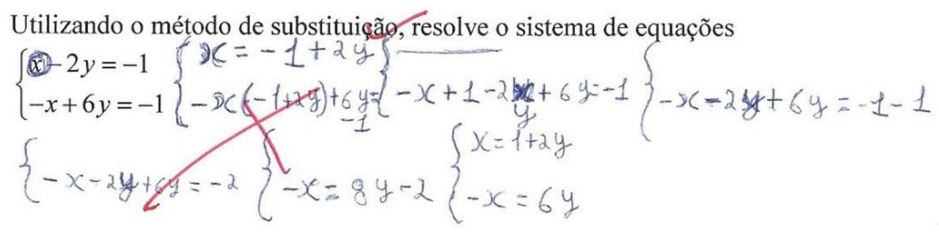


Figura 60 - Resposta de Luís

O erro mais frequente ocorreu quando os alunos tentavam resolver a equação obtida, como se vê na resposta de Elsa (figura 61).

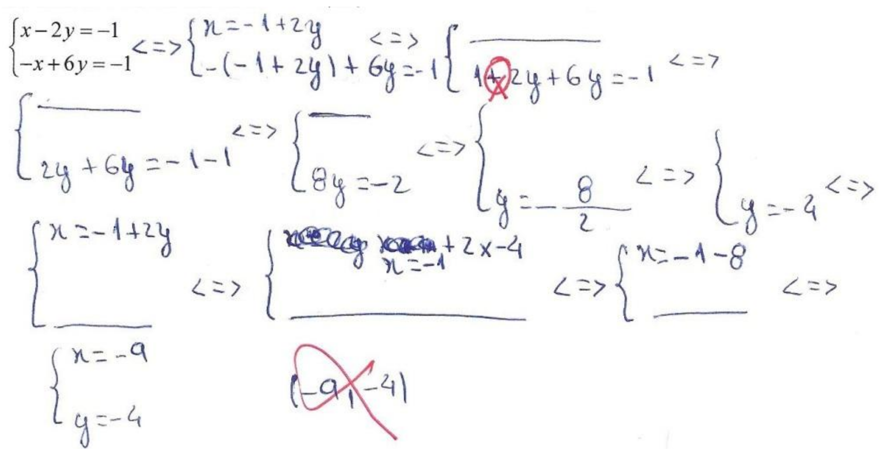


Figura 61 - Resposta de Elsa

Dez alunos erraram as regras de sinais quando desembaraçaram de parênteses. Contudo, depois de cometerem este erro, resolvem o sistema de equações corretamente. Dois alunos erraram na resolução da equação na quinta etapa, quando desembaraçaram de denominadores apenas um dos membros da equação, não respeitando deste modo o princípio de equivalência (figura 62).

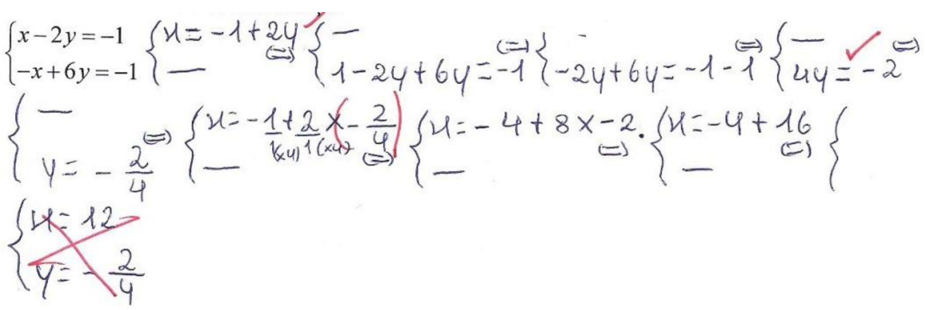


Figura 62 - Resposta de Francisco

Da análise desta questão conclui-se que a grande maioria dos alunos percebeu a resolução de sistemas de equações pelo método de substituição. No entanto, e tal como referi, falham por dificuldades quer na manipulação algébrica quer nas operações com números racionais.

Questão 2. Em relação à alínea a) da questão 2, pretendo verificar se os alunos conseguem interpretar e compreender o enunciado de um problema num determinado contexto, e escrevê-lo em linguagem natural. Aqui, pretendo verificar se os alunos conseguem associar x e y a número de alunos e 4 e 5 a números de turmas.

Nesta questão um aluno não respondeu e quatro alunos responderam corretamente (figura 63).

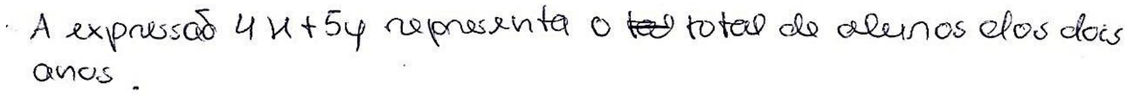


Figura 63 - Resposta de Francisco

Embora os alunos devessem ter escrito que a expressão representava todos os alunos da escola, uma vez que é referido no enunciado que a escola só tem turmas dos 5º e 6º anos, considerei esta resposta correta, pois referem que são todos os alunos dos dois anos.

Quinze alunos responderam mas deram uma resposta incorreta. Ao não associarem x e y a número de alunos e 4 e 5 a números de turmas não conseguiram responder que a expressão $4x+5y$ representava todos os alunos da escola. Todavia, demonstram, pelas respostas dadas, que compreendem que a expressão representa as turmas dos dois anos letivos, não conseguindo apenas alcançar a interpretação final isto é, não conseguiram perceber que a expressão se refere a todos os alunos da escola (figura 64).

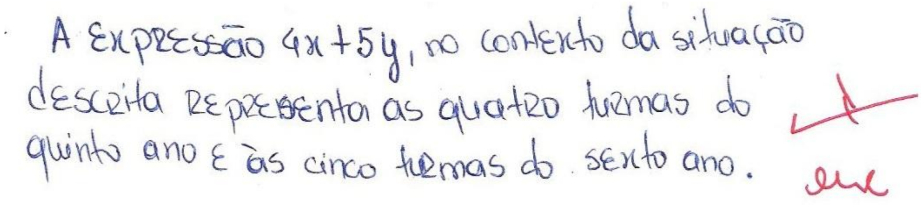


Figura 64 - Resposta de Elsa

O elevado número de alunos que não foi preciso não suas respostas não me surpreendeu. Ao logo da unidade de ensino não atribuíram grande importância a uma definição clara das incógnitas apesar das constantes chamadas de atenção, pois conseguiam de algum modo obter resultados que se aproximavam dos pretendidos. Assim, e embora pela imprecisão das respostas não considere os resultados desta questão bons, também não posso considerá-los maus. A maioria dos alunos percebeu de uma forma implícita o enunciado do problema e, na aula onde se realizou a correção, quando discutimos a resposta confirmei que tinham compreendido mas que, para eles, responder que são todos os alunos da escola ou responder que são quatro turmas do 5.º ano e 5 turmas do 6.º ano tem o mesmo significado

Na alínea b) os alunos são confrontados com um problema num contexto do seu dia-a-dia onde pretendo analisar o desembaraço que adquiriram na escrita de equações. Três alunos não responderam. Dois alunos escreveram uma equação correta e uma equação errada e quinze alunos responderam corretamente.

Os alunos que erraram, cometeram erros diferentes. Sofia ficou "presa" à alínea a) do problema e pensou que a tinha que utilizar, revelando pouca atenção à leitura do enunciado e pouco sentido crítico. Demonstrou ainda que não leu as equações depois de as escrever para as poder confrontar com o problema dado, tal como foi feito ao longo das aulas (figura 65).

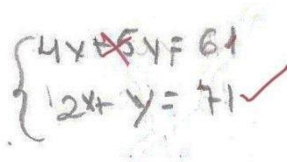


Figura 65 - Resposta de Sofia

O erro de Paulo resulta de uma leitura incorreta do enunciado uma vez que a primeira equação está correta e na segunda equação onde colocou uma turma do 5.º ano (x) deveria ter colocado duas turmas $(2x)$ (figura 66).

Figura 66 - Resposta de Paulo

Os restantes quinze alunos resolveram as equações corretamente, não demonstrando grandes dificuldades na sua escrita (figura 67).

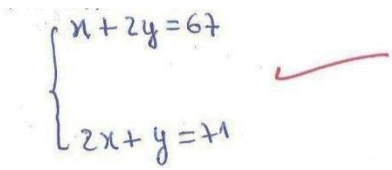


Figura 67 - Resposta de Gustavo

Da análise desta questão, é possível concluir que os alunos não sentiram grandes dificuldades na escrita destas equações. Este resultado surpreendeu-me pela positiva, pois ao longo da lecionação da unidade de ensino a escrita das equações foi uma das dificuldades mais sentidas pelos alunos.

A alínea c) desta questão tem por objetivo resolver o problema da alínea anterior. Nesta alínea é dada liberdade ao aluno para resolver o sistema de equações, utilizando a estratégia que preferir. Apesar disso, todos os alunos resolveram o sistema pelo método de substituição.

A resolução deste sistema de equações apresenta um grau de dificuldade superior ao problema 1 do teste o que resultou num menor sucesso da sua resolução. Também a realização desta questão está dividida em seis etapas Assim, sete alunos não responderam à questão. Dois alunos apenas resolveram a primeira etapa do exercício ou seja, resolveram corretamente a 1.ª equação (ou a 2.ª equação) em ordem a uma das incógnitas (x ou y), cinco alunos resolveram corretamente algumas das etapas. Seis alunos resolveram corretamente todo o sistema de equações (figura 68).

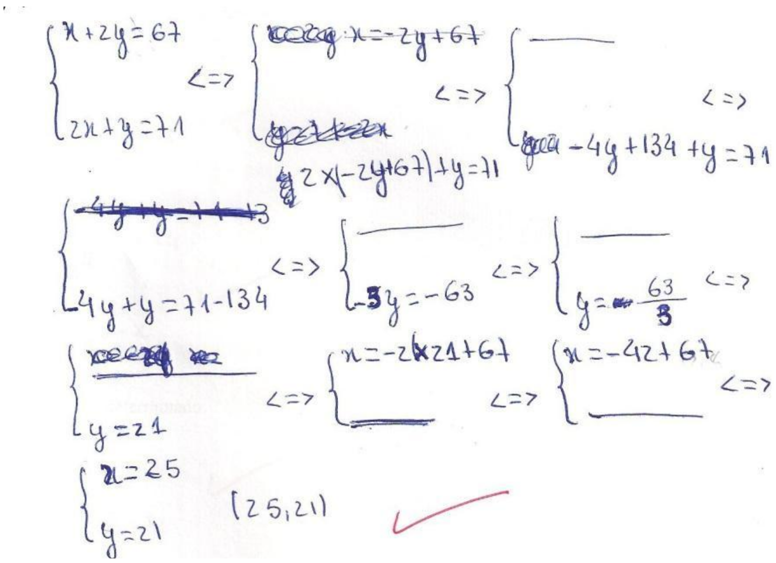


Figura 68 - Resposta de Elsa

Dos alunos que resolveram apenas a 1.ª equação em ordem a uma das incógnitas destaco a resolução de Ismael (figura 69).

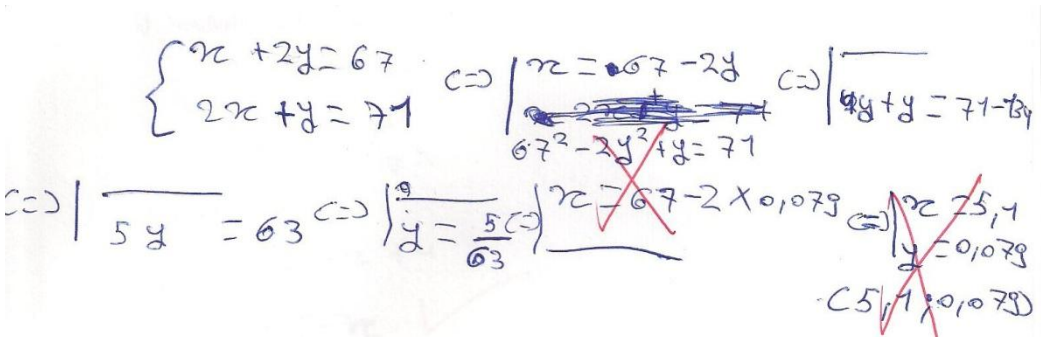


Figura 69 - Resposta de Ismael

Este aluno depois de resolver corretamente a equação em ordem a x confunde o dobro da expressão com o quadrado da mesma e obtém a expressão $67^2 - 2y^2 + y = 71$. Logo a seguir, considera $-2y^2 = 4y$ e $67^2 = 134$, obtendo deste modo a expressão $4y + y = 71 - 134$. Foi o único aluno a cometer este tipo de erros.

Um erro que alguns alunos cometeram, entre os quais Sofia, está representado na figura 70.

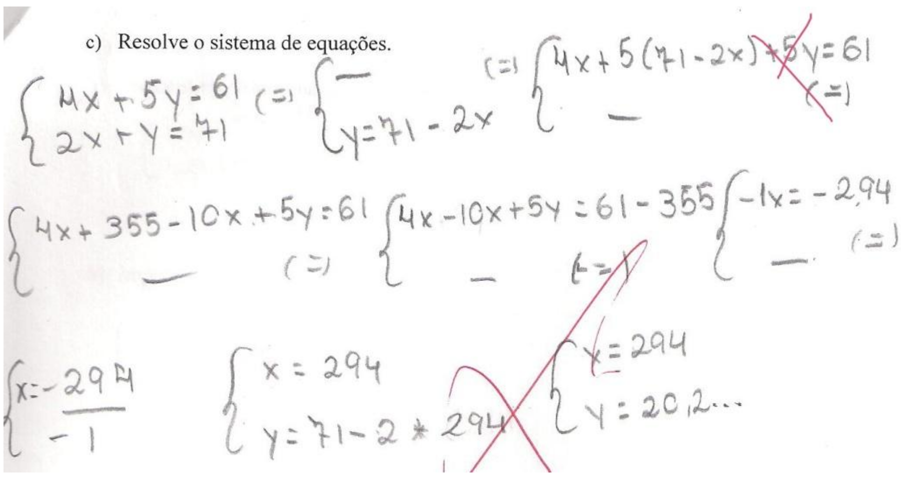


Figura 70 - Resposta de Sofia

Sofia, depois de resolver a equação em ordem a y, substitui corretamente essa incógnita pela expressão obtida, mas torna a escrever o monómio $5y$. Em seguida adiciona monómios que não são semelhantes obtendo $4x - 10x + 5y = -1x$. De acordo com Kieran (1992, 2007) e MacGregor & Stacey (1997) trata-se de uma necessidade de “fechamento”. Saliento que o sistema de equações que a aluna tenta resolver é diferente dos colegas porque o enunciado depende da questão anterior que errou.

Outro erro cometido na resolução da equação obtida. Os alunos, entre os quais Paula, multiplicam por dois o primeiro termo da equação mas depois esquecem-se de multiplicar o termo seguinte, errando na aplicação da propriedade distributiva (figura 71).

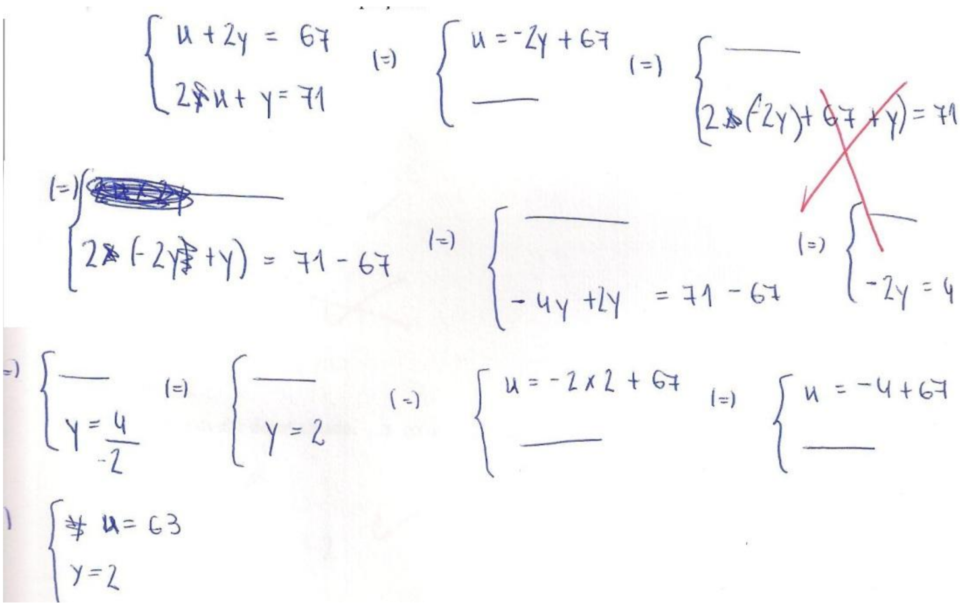


Figura 71 - Resposta de Paula

Esta foi uma questão em que os alunos sentiram bastantes dificuldades o que levou a que obtivessem resultados mais fracos. Contudo, e como já referi anteriormente, os alunos falham mais por dificuldades na manipulação algébrica e nas operações com racionais do que por não saberem resolver sistemas de equações.

Questão 3. Nesta questão pretendo que os alunos apliquem os seus conhecimentos relativamente à interpretação gráfica de um sistema de equações para escreverem um sistema de equações possível (determinado e indeterminado) e um impossível. Na alínea a) pretendo que os alunos escrevam e analisem o gráfico dado e selecionem duas equações que representem um sistema possível e indeterminado.

Três alunos não responderam, cinco alunos erraram, quatro alunos acertaram parcialmente a questão e oito alunos responderam corretamente (figura 72).

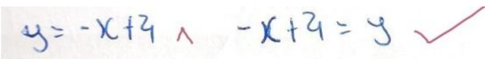


Figura 72 - Resposta de Paulo

Alguns alunos erraram parcialmente a questão porque interpretaram mal o enunciado. Assim, selecionaram uma equação e, em seguida, escreveram outra equação que embora não estivesse no gráfico apresentado também torna o sistema de equações possível e indeterminado. Penso que neste problema alguns alunos relembraram a tarefa de investigação que tinham realizado e responderam como tinham feito nessa aula. É o caso de Carlos (figura 73).

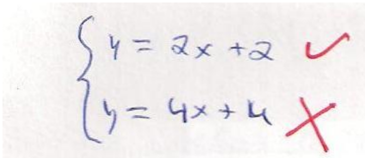


Figura 73 - Resposta de Carlos

Os alunos que erraram totalmente a questão revelam não ter compreendido qual a posição relativa das retas na representação gráfica de um sistema possível e indeterminado, pois embora estas duas retas se encontrem no gráfico do problema, elas são concorrentes. Um exemplo desta situação é-nos dado por Elisa (figura 74).

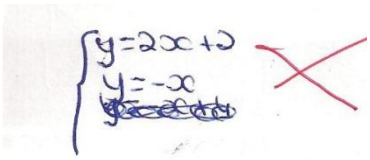


Figura 74 - Resposta de Elisa

A análise desta questão mostra que a maioria da turma percebeu qual a representação gráfica de um sistema de equações. Embora apenas oito alunos tenham respondido corretamente à questão existem mais quatro alunos que relacionam retas coincidentes com a representação gráfica de um sistema de equações possível e indeterminado. Assim, utilizam as estratégias de geração de sistemas de equações estudadas para encontrarem a equação pretendida.

Na alínea b) desta questão, pretendo que os alunos escolham duas retas que representem um sistema de equações impossível. Dez alunos responderam corretamente, oito alunos erraram e dois não responderam.

Nesta questão considero necessário separar os dois tipos de erros que analisei. Três dos alunos que erraram resolveram a questão como a tarefa que realizaram na sala de aula. Assim, e embora não tenham interpretado corretamente o enunciado do problema, respondem a esta questão retirando uma equação do gráfico dado e escrevendo outra que embora não se encontre no gráfico, torna o sistema de equações impossível. Ou seja, relembrando as estratégias de geração de sistemas de equações estudadas encontram uma equação paralela à que escolheram, como acontece com Renato (figura 75).

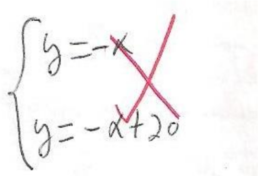


Figura 75 - Resposta de Renato

Os restantes alunos que erraram, como, por exemplo, Rui, revelam não ter compreendido qual a posição relativas das retas, na representação gráfica de um sistema impossível (figura 76).

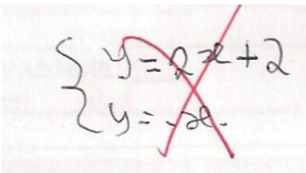


Figura 76 - Resposta de Rui

Os dez alunos que responderam corretamente escolheram as duas retas paralelas do gráfico e escreveram-nas (figura 77).

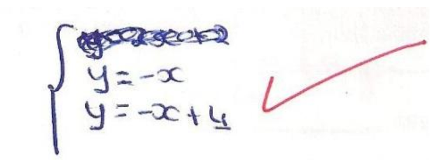


Figura 77 - Resposta de Elisa

Deste modo, verifica-se que a maioria dos alunos percebeu qual é a representação gráfica de um sistema de equações impossível.

Na última alínea desta questão pretendo que os alunos escolham duas retas que tornem o sistema de equações possível e determinado. Onze alunos responderam corretamente, cinco alunos erraram e quatro alunos não responderam.

Os alunos que responderam corretamente, como Gustavo, escolheram duas retas concorrentes do gráfico e escreveram-nas (figura 78).

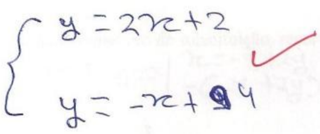


Figura 78 - Resposta de Gustavo

Dos cinco alunos que erraram, três escreveram apenas uma equação e os outros dois multiplicam uma das equações do enunciado por dois (figura 79).

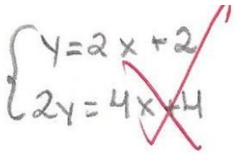


Figura 79 - Resposta de Sofia

Esperava melhores resultados nesta questão, tendo em conta que os sistemas possíveis e determinados foram bastante trabalhados na sala de aula. No entanto parece-me que os alunos continuam a sentir dificuldades na interpretação da solução gráfica de um sistema de equações possível e determinado, não percebendo ainda o significado do ponto de interseção das duas retas.

Globalmente, e tendo em conta que a turma é composta por alunos que na sua maioria não têm métodos nem hábitos de trabalho, que o seu trabalho se resume à atividade desenvolvida dentro da sala de aula e que muitos deles sentem grandes dificuldades na disciplina de Matemática, considero os resultados satisfatórios (com 50% de níveis positivos). Saliento ainda que, dos vinte alunos que compõem esta turma, quatro deles praticamente não participam nas atividades realizadas dentro e fora da sala de aula, apresentando uma atitude de total desinteresse pela vida escolar.

Capítulo 5

Conclusão

Neste capítulo começo por apresentar os resultados mais significativos deste trabalho. Termino com uma reflexão sobre o modo como decorreu a unidade de ensino, identificando os aspetos que considero importantes, pela sua pertinência relativamente ao processo de ensino-aprendizagem dos sistemas de equações.

5.1. Síntese das aulas e dificuldades registadas pelos alunos

Este trabalho teve como propósito melhorar a minha prática letiva e analisar as aprendizagens dos alunos. Optei por uma estratégia de ensino aprendizagem de cunho exploratório acompanhada por um conjunto de diferentes tipos de tarefa, por acreditar que esta é a melhor abordagem a utilizar dentro da sala de aula. Pretendia deste modo verificar e analisar a adequação da abordagem utilizada e o modo como esta se refletiria na aprendizagem dos alunos.

O trabalho que realizei centrou-se na análise das produções escritas de todos os alunos da turma, bem como nos resultados alcançados nas discussões que a referida análise gerou. A grande maioria dos alunos trabalhou bem, envolvendo-se na resolução das tarefas e na sua discussão. Mesmo os alunos que mais receio tinham de se exporem nas discussões em grande grupo, rapidamente se habituaram a estes momentos chegando mesmo a participar com entusiasmo. A tarefa 1 "O dinheiro da Salomé e da Inês" não foi fácil de concretizar, com o comportamento de alguns alunos da turma a revelar-se perturbador. Considero que a presença do gravador poderá ter contribuído para alguma instabilidade de alguns alunos pouco disciplinados e também como fator de inibição para outros alunos, levando-os a uma menor participação, a falarem muito baixo e mesmo a mostrarem algum nervosismo e ansiedade. Na segunda aula e já sem darem muita atenção à camara de vídeo e ao gravador, envolveram-se na realização das tarefas e participaram na discussão.

A tarefa 2 (“Pesos”) foi aquela em que todos os alunos demonstraram maior entusiasmo inicial, o que se pode atribuir ao carater mais desafiador da tarefa e ao facto desta não parecer necessitar de conhecimentos algébricos prévios, sendo assim apropriada para alunos com distintos níveis de competência matemática, tal como defendem Oliveira, Segurado, Ponte e Cunha (1999).

A tarefa 3 (“Classificar Sistemas”), embora extensa, permitiu aos alunos explorarem através da utilização do Geogebra a posição relativa de duas retas por forma a tornar os sistemas de equações possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis. Esta constatação, que foi realizada na aula através de tentativas e pressupostos parece-me ter sido eficaz para a compreensão da classificação dos sistemas de equações por parte dos alunos.

A tarefa 4 (“Formulando sistemas de equações”) surpreendeu-me pela positiva. Sendo a primeira tarefa de investigação que estes alunos fizeram na disciplina de Matemática, estava apreensiva com a sua reação. Contudo, o envolvimento da turma foi grande e alguns alunos conseguiram alcançar os resultados pretendidos ao encontrarem estratégias de geração de sistemas de equações. Os resultados conseguidos na discussão em grande grupo foram confirmados pelo desempenho dos alunos nesta questão na avaliação sumativa, que considero acima da média. Estou convencida que parte do sucesso desta tarefa se deve à utilização do Geogebra. Aliás a realização de aulas de Matemática na sala de Informática com a utilização de *software* de geometria dinâmica foi uma das “novidades “a que esta turma respondeu com grande entusiasmo.

A tarefa 5 (“Resolver sistemas”) revelou-se de difícil concretização. Envolvendo apenas a resolução de sistemas de equações, tornou-se para alguns alunos, repetitiva e monótona. As dificuldades na manipulação algébrica desmotivaram uma parte dos alunos, levando-os a desistirem antes de a terminar. Ainda assim, a maioria tentou perceber o que estava em causa e envolver-se na realização e discussão da tarefa.

A tarefa 6 (“Resolvendo problemas”) embora tenha suscitado bastantes dúvidas foi resolvida com empenho. De salientar a dificuldade que muitos alunos sentiram na identificação clara e inequívoca das incógnitas bem como a tendência que têm em resolver os problemas através de sistemas de equações, não procurando encontrar estratégias de resolução alternativas. Considero ainda que se revelou bastante eficaz a estratégia que os incentivei a utilizarem com o intuito de acertarem na escrita das equações e que consistiu em levá-los a ler, em linguagem corrente, as equações que escreveram e a confrontá-las com o enunciado. Deste modo, considero que esta tarefa se revelou profícua para os alunos, envolvendo-os na sua realização. Considero ainda que através da discussão realizada os alunos perceberam que existem diversas estratégias para resolver problemas.

Quanto às dificuldades sentidas, saliento a construção e interpretação de gráficos, onde alguns alunos mostram na tarefa 1 ("O dinheiro da Salomé e da Inês"), que não conseguem construir um gráfico nem interpretá-lo. Verifica-se mesmo que os alunos que sabem construir gráficos demonstram dificuldade em interpretar corretamente o resultado obtido, não fazendo distinção entre coordenadas de pontos e pontos.

No que se refere à resolução de equações do 1.º grau a maioria dos alunos mostra compreender a noção de equação e consegue intuitivamente reconhecer se um número é ou não solução de uma equação quando, por tentativas, descobre um valor que por substituição lhe permite obter uma proposição verdadeira. Contudo, os alunos manifestam dificuldades em passar do método empírico para um modelo mais formal. Deste modo muitos alunos não conseguiam resolver equações do tipo algébrico por não saberem a sua resolução formal e tentavam descobrir estratégias que lhes permitissem determinar a solução. Considero, no entanto, que os alunos progrediram na resolução de equações simples do 1.º grau e que entenderam a resolução de sistemas de equações pelo método de substituição com um grau de sucesso considerável. O mesmo já não acontece quando as equações são mais complexas, envolvendo parêntesis e denominadores, sendo então a prestação dos alunos prejudicada por cometerem erros na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e ao reduzirem todos os termos ao mesmo denominador.

Pelo menos um dos alunos revelou confundir conceitos como $-2y^2 = 4y$ e $67^2 = 134$.Também alguns alunos insistem na necessidade de fechamento, tratando expressões irredutíveis como redutíveis, obtendo assim $4x - 10x + 5y = -1x$ e demonstrando incompreensão do uso da linguagem algébrica nas tarefas matemáticas. Refira-se que a escrita das equações revelou-se ao longo de toda a unidade de ensino uma dificuldade. Na ficha de resolução de problemas esta dificuldade foi mesmo sentida de uma forma mais constante. Ainda assim, alguns dos alunos que não conseguiram escrever as equações, evidenciaram a capacidade de encontrar estratégias que lhes permitiram obter o resultado pretendido. De salientar que alguns alunos, por vezes, não conseguiram explicar o raciocínio que realizaram, tendo obtido a solução de uma forma intuitiva, descobrindo a solução e verificando os valores. Esta dificuldade não foi percetível na ficha de avaliação sumativa onde 75% dos alunos escreveram as equações corretamente. Já quanto à clara definição das incógnitas esta está longe do desejável.

5.2. Reflexão final

Depois de ter realizado este trabalho, procederia a algumas reformulações na minha metodologia de ensino desta unidade. Assim, antes de iniciar a unidade, realizaria uma tarefa de revisões onde a construção de gráficos e a sua interpretação fossem trabalhados. Além disso, reformularia a planificação da tarefa 3 ("Classificar sistemas") de duas para três aulas de 45 minutos, uma vez que a turma demonstrou grande dificuldade em terminá-la no tempo previsto. Apresentando-se ainda bastante inexperientes na resolução de sistemas pelo método de substituição, os alunos demoraram muito tempo a resolver a segunda parte da tarefa.

Relativamente ao modo como planifiquei as aulas não vejo necessidade de proceder a grandes alterações no futuro, para lá das já mencionadas, considerando positivo o balanço deste trabalho. A sequência com que as tarefas foram introduzidas bem como a sua diversidade conduziram a uma dinâmica de trabalho nos alunos que parece ter contribuído para uma melhoria da forma como encaram o estudo da Matemática.

A tarefa 5 ("Resolver sistemas") foi a que menos entusiasmou a turma. As dificuldades na manipulação algébrica parecem ter desmotivado os alunos. No entanto não me parece correto reformular ou retirar esta tarefa, pois considero importante a sua presença no estudo desta unidade. Será necessário definir uma estratégia de apresentação e abordagem da tarefa em causa que funcione de modo mais motivador para os alunos.

Globalmente, considero que a turma reagiu bem à estratégia de ensino-aprendizagem de cunho exploratório que utilizei não só nesta unidade de ensino mas ao longo de todo o ano letivo. É de ter em atenção que a turma que foi objeto deste trabalho tinha com fraco aproveitamento a todas as disciplinas e em especial em Matemática. Tratava-se de uma turma constituída por alunos com interesses divergentes à escola e com baixas perspetivas em relação ao futuro e em clara trajetória de afastamento escolar. A estratégia de ensino utilizada permitiu ir ao encontro das suas necessidades, criando expetativas positivas e envolvendo os alunos num processo ativo de aprendizagem que os levou a uma atitude menos passiva dentro da sala de aula.

Quando iniciei esta unidade de ensino os alunos já estavam familiarizados com este tipo de aulas pelo que a adaptação mais sentida refere-se à diversificação de tarefas. A aprendizagem dos sistemas de equações foi feita de forma aparentemente mais eficaz do que em muitos de outros tópicos, em parte devido a esta abordagem e também à grande motivação que se gerou nos alunos pelo fato de trabalharem na sala de computadores.

Verificou-se uma alternância entre tarefas realizadas na sala de aula com recurso a papel e lápis e tarefas de exploração e investigação realizadas com *software* de geometria dinâmica, todas elas acompanhadas por momentos de discussão. Discussão essa que também revelou um crescendo de participação e interesse por parte da turma. A conjugação desta alternância de tarefas com o crescente interesse revelado na discussão fazem-me acreditar que, de algum modo, contribuíram para (i) o enriquecimento da linguagem algébrica, (ii) o desenvolvimento de abordagens de trabalho diferentes, consoante o tipo de tarefas a resolver, (iii) uma melhor aprendizagem de sistemas de equações, (iv) o desenvolvimento da comunicação matemática e para (v) alterar a visão que os alunos tinham sobre o estudo da matemática, em especial o estudo da álgebra.

Optar por realizar um trabalho sobre a minha prática letiva foi para mim importante e influenciou de uma forma positiva a maneira como decorreu. O fato de estar a lecionar nesta escola há três anos facilitou os meus contactos com a direção que me proporcionou todos os meios que solicitei para a concretização deste trabalho. No entanto, não conhecia a turma com que trabalhei. Sendo uma turma com um desempenho global muito fraco na grande maioria das disciplinas e, em particular, a matemática, revelaram-se de grande importância os meses que antecederam a realização desta unidade de ensino, essenciais para conhecer os alunos, as suas dificuldades, os seus interesses e a forma como trabalhavam, para deste modo conseguir selecionar um conjunto de tarefas que considero adequadas às necessidades destes alunos.

Também os alunos se disponibilizaram, desde logo, para participarem neste estudo, que encararam de forma séria e responsável. A análise dos dados recolhidos não se revelou tarefa fácil. Conseguir retirar o mais importante dos registos áudio e vídeo, cruzá-los com os meus registos das aulas e selecionar o mais significativo tornou-se a certa altura um desafio difícil de superar mas que é inerente ao método de recolha de dados escolhido para este relatório.

O fato da turma ser constituída apenas por vinte alunos permitiu-me sempre um apoio muito direto e, sempre que necessário, mais individualizado, bem como uma observação próxima das atividades desenvolvidas pelos alunos.

No desenvolvimento deste relatório, tanto do ponto de vista do planeamento da unidade de ensino bem como da seleção da tarefas a realizar contei sempre com a colaboração do meu orientador e com a discussão de ideias com duas colegas sendo uma da escola onde realizei este trabalho, tendo assim tido a oportunidade de trabalhar em conjunto na lecionação do 8.º ano e outra com quem participei em dois projetos de investigação.

Com a realização deste trabalho pude refletir sobre a adequação da abordagem que utilizei na sala de aula e o modo como esta se refletiu na aprendizagem dos alunos verificando que existiu uma maior recetividade dos alunos pois esta abordagem revelou-se mais adequada às suas necessidades ajudando-os assim a melhorar o seu desempenho na disciplina de matemática.

Embora tenha utilizado mais aulas do que as recomendadas para a lecionação desta unidade de ensino, constatei que as questões que me levaram a escolher trabalhar sobre sistemas de equações foram tanto quanto possível respondidas. De fato, e embora as dificuldades na manipulação algébrica tivessem condicionado a obtenção das soluções corretas na resolução dos sistemas de equações, não me pareceu que a compreensão da noção de sistema de equações tivesse ficado comprometida por essa razão. Considero que os alunos compreenderam que, em determinadas situações, existe a necessidade de encontrar um par ordenado que satisfaça a conjunção de duas equações.

Relativamente às estratégias para obtenção da solução do sistema de equações, existiu uma grande tendência para utilização exclusiva do método de substituição. Apenas um grupo utilizou outras estratégias com resultado positivo. Das discussões realizadas em sala de aula parece, no entanto, ter resultado a convicção de que um número significativo de alunos percebeu que pode obter a solução de um sistema de equações utilizando diversas estratégias.

A interpretação gráfica de um sistema de equações foi amplamente trabalhada e compreendida. A utilização do Geogebra revelou-se mesmo um trunfo muito importante na interpretação gráfica pela facilidade de interpretação visual que permite e pela familiaridade de uma geração profundamente influenciada pela cultura da manipulação visual e gráfica.

Já as estratégias de geração de sistemas foram sendo encontradas pelos alunos e discutidas por todos, o que me leva a crer que também elas foram compreendidas. Dois dos grupos conseguiram mesmo encontrar todas as estratégias possíveis de resolução de sistemas de equações partilhando depois esta descoberta nas discussões em grande grupo.

Finamente, e no que diz respeito à interpretação correta da solução obtida num sistema de equações, considero que alguns alunos ainda revelam algumas dificuldades esporádicas na sua interpretação, pois ao longo da unidade de ensino, foram várias as vezes que surgiram dúvidas. Ainda assim, a participação nas discussões realizadas na sala, a consciência de que existem diversas estratégias de resolução, a ligação visual entre os sistemas de equações e a sua representação gráfica e ligação entre a linguagem natural e a matemática dotaram os alunos de ferramentas que podem constituir um elemento importante de apoio nesta interpretação.

Penso que seria importante aprofundar e desenvolver novos estudos científicos nesta área de modo a confirmar e aferir a importância da abordagem de cunho exploratório em conexão com a diversificação de tarefas. É uma área que está ainda pouco trabalhada tal como se pode depreender da reduzida literatura existente sobre o estudo e aprendizagem de sistemas de equações. Atenção especial poderia merecer o estudo da utilização de *software* de geometria dinâmica que parece ter motivado muito positivamente os alunos e cujos resultados e práticas de utilização mereceriam ampla discussão entre professores. É uma ferramenta de utilização prevista no programa mas cuja utilização generalizada está ainda longe de atingir o nível desejado.

6. Referências

Alves, M. T. (1947**).** Algumas deficiências em Matemática de alunos dos liceus. *Gazeta da Matemática*, 32, 14-16.

Associação de Professores de Matemática (1988). *A renovação do currículo da Matemática*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (2005). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM.

Associação de Professores de Matemática (2010). *O professor e o programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 5-24). Lisboa: SPCE.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15(1),* 35-49.

Caraça, B. J. (1942). Nota. *Gazeta da Matemática*, 12, 16.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Orgs.), *Perspective on mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel.

Cockcroft, W. H. (1982). Mathematics Counts. Londres:HMSO.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

Fortin, M. F.(2003). *O processo de investigação: Da concepção à realização*. Lisboa: Lusociência-Edições Técnicas e Científicas Limitada.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Gall, M. D., Gall, J. P. & Borg, W. R. (2003). *Educational research: An introduction*. New York: Longman Publishers, USA.

Goldenberg, E. P. (1999). Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49) Lisboa: Projecto MPT e APM.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM..

Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores de Matemática* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Guimarães, H. M. (2003). *Algumas dicotomias no ensino da Matemática*. In Miguéns (Ed.), O Ensino da Matemática: situação e perspectivas (pp. 89-100). Lisboa: CNE.

Guimarães, H. M. (2007). *Por uma Matemática nova nas escolas secundárias* In Matos & Valente. A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal (pp 21-45). S. Paulo: PMMPB.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillian.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age.

MacGregor, M.,& Stacy, K. (1997). Students’ understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1),1-19.

Merrian, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação (1991). Programa de Matemática – Oalno de Organização do Ensino-Aprendizagem – 3.º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: DGEBS.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: DEB.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

Moll, L. C. (1996). *Vygotsky e a educação: Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Morais, A.M. & Neves, I. P. (2003). Fazer investigação usando uma abordagem metodológica mista. *Revista Portuguesa de Educação*, 2007, 20(2), pp. 75-104.

NCTM (1985). *Agenda para a acção*. Lisboa: APM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM (publicado originalmente em inglês em 2000).

Oliveira, H., Segurado, I. Ponte, J.P. & Cunha, M. (1999). Investigações matemáticas na sala de aula: um projeto colaborativo. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca,& L. Abrunheira (Eds.). *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 121-131). Lisboa: APM.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de Avaliação das Aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas: Um aspecto novo do método matemático.* Lisboa: Gradiva (publicado originalmente em inglês em 1945).

Ponte, J. P.(2001) *Aprender Matemática investigando*. Documento de estudo do Círculo de Estudos

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e* investigar *sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2002). *O Ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* Comunicação apresentada no Seminário sobre “O ensino da Matemática: situação e perspectivas”, Lisboa.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavaro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte,J.P., A. Boavida, et al (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa, DES do ME

Ponte, J. p., Brocardo J. & Oliveira H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME - DGIDC.

Quivy, R. e Campenhoudt, L. (1998). *Manual de investigação em Ciências Sociais.* Lisboa: Gradiva

Rojano, T (1996). The role of problems and problem solving in the development of Álgebra. In N Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds), *Approaches to Álgebra: perspectives for research and teaching* (pp. 55-62). Dordrecht: Kluwer.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender Matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.

Shaffer, D. W. & Serlin, R. C. (2004). What good are statistics that don’t generalize? *Educational Researcher,* vol. 33, nº 9, pp. 14-25.

Schubring, G. (1987) The Cross-Cultural Transmission of Concepts – *the first international mathematics curricular reform around 1900, with an Appendix on the Biography of F. Klein*. Occasional paper, 92, Institut fur Didaktik der mathematic, Unversitat Bielefeld, Bielefeld.

Silva, J.S. (1947). Nota. Gazeta da Matemática, 32, 3-4.Bell, J. (1997). *Como realizar um projecto de investigação*. Lisboa: Gradiva.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. Bolema, *14*, 66-91.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). *Tarefas matemáticas como um quadro para reflexão: Da investigação à prática* [traduzido de Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268-275].

Sternberg, R. J. (1999). The nature of mathematical reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook)* (pp. 37-44). Reston, VA: NCTM.

Tashakkori, A. & Teddlie, C. (1998). *Mixed Methodology: Combining Qualitative and Quantitative Approaches:* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Varandas, J. M. (2000). *Avaliação de Investigações Matemáticas: Uma Experiência* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Yin, R. K. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

ANEXOS

Anexo 1 -Tarefa 1 – "O dinheiro da Salomé e da Inês"

a) Designando por x o dinheiro que a Salomé tem na carteira e por y o da Inês, traduz o que ambas dizem através de duas equações.

b) Representa as equações graficamente no mesmo referencial.

c) Há alguma solução comum às duas equações? O que representa essa solução?

d) Que dinheiro tem a Inês? E a Salomé?

Adaptado de "*Matematicamente Falando 8*", Areal Editores.

Anexo 2 -Tarefa 2 – “Pesos”

O Alberto disse à Berta: “A soma do teu peso com o dobro do meu é 150 kg”. Berta respondeu: “Em contrapartida, tu pesas o mesmo que eu”. Quanto pesa cada um?

.

Adaptado de “*Álgebra no Ensino Básico*”.

Anexo 3 -Tarefa 3 – "Classificar sistemas"

1. Representa no Geogebra cada um dos sistemas de equações

1.1. $\begin{cases} y-3x=0 \\ y-2x=-3 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 6x-3y=2 \\ -2x+y=1 \end{cases}$

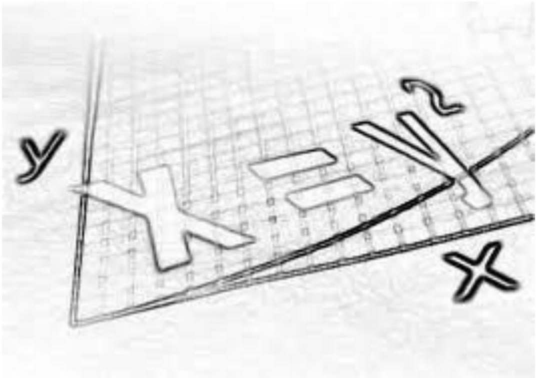
1.3. $\begin{cases} -2x-y=-1 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$

1.4. Quantas soluções tem cada sistema representado? Explica o teu raciocínio.

1.5.Resolve algebricamente os sistemas da alínea anterior e confirma as respostas dadas com as que obtiveste no Geogebra.

Adaptado de "*Matemática em ação 8*", Lisboa Editora

Anexo 4 -Tarefa 4 – "Formulando sistemas de equações"



Utilizando o programa Geogebra e justificando o teu raciocínio escreve uma equação que, em conjunto com a equação $4x - y = 6$, forme um sistema de duas equações:

a) Possível e indeterminado;
b) Impossível;

c) Possível e com a solução (2,2).

Adaptado de "*Álgebra no Ensino Básico*"

Anexo 5 -Tarefa 5 – “Resolver sistemas”

1. Por vezes a resolução de um sistema pode tornar-se mais simples. Procure resolver o sistema seguinte do modo mais prático possível. Repara que a segunda equação tem apenas uma incógnita.

$$\begin{cases} 5a - 3b = 1 \\ 3a + 2 = 8 \end{cases}$$

2. Averigua se o par ordenado (3,2) é ou não, solução do sistema.

$$\begin{cases} x - 2 = \dfrac{y}{2} \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$$

3. Determina a solução de cada um dos sistemas seguintes:

3.1. $\begin{cases} x = y + 10 \\ x + y = 20 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 4x - 3y = -11 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 5x - y = 17 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3(x + y) = 2 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2(x - 1) - y = 10 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$

Adaptado de DGIDC-Funções e Equações – 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas

Anexo 6 - Tarefa 6 – "Resolvendo problemas"

1. No parque de estacionamento de uma escola estão cinquenta veículos, entre bicicletas e automóveis. Tendo-se contado cento e quarenta rodas, quantos veículos há de cada tipo?

2. A diferença de dois números é 300. Se à metade do maior subtrairmos $\frac{2}{3}$ do outro, obteremos 100. Quais são esses números?

3. O perímetro de um triângulo isósceles é 60 cm. Se a medida do comprimento da base tiver mais 6 cm que o comprimento dos outros lados, quais são as dimensões do triângulo?

4. Sendo x e y o comprimento e a largura de um retângulo, redija o enunciado do problema correspondente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ x = \frac{3}{5}y \end{cases}$$

Adaptado de DGIDC-Funções e Equações – 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas

Anexo 7 - Tarefa 7 – "Resolução de problemas e sistemas de equações"

Ficha de avaliação sumativa

1- Utilizando o método de substituição, resolve o sistema de equações

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -x + 6y = -1 \end{cases}$$

2- Uma escola tem apenas turmas do 5.º ano e turmas do 6.º ano de escolaridade.

Sabe-se que:

- Todas as turmas do 5.º ano têm o mesmo número de alunos;
- Todas as turmas do 6.º ano têm o mesmo número de alunos.

Seja x o número de alunos de cada turma do 5.º ano e seja y o número de alunos de cada turma do 6.º ano.

Admite que a escola tem quatro turmas do 5.º ano e cinco turmas do 6.º ano.

a) O que representa a expressão $4x + 5y$, no contexto da situação descrita?

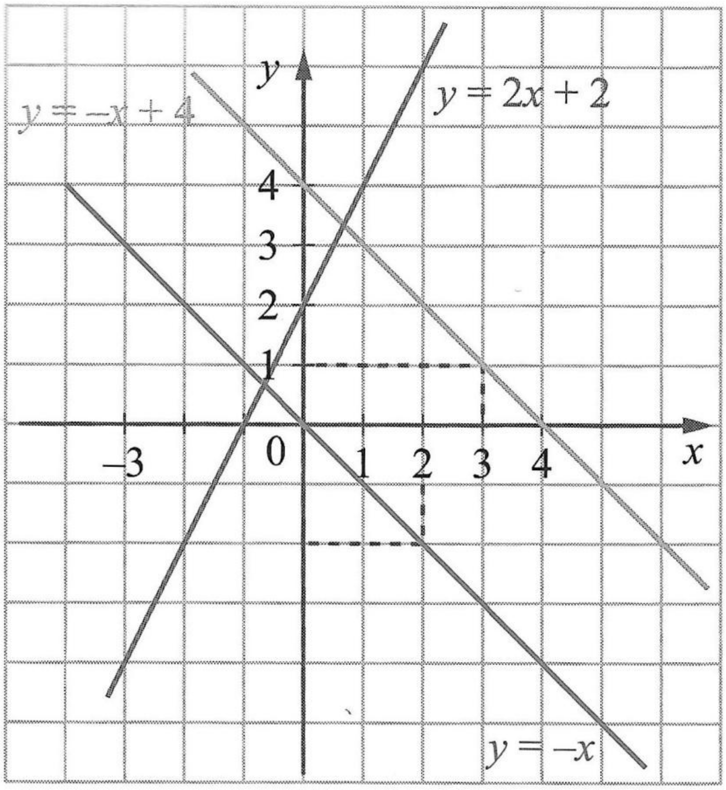
Sabe-se que uma visita de estudo que inclua todos os alunos de uma turma do 5.º ano e todos os alunos de duas turmas do 6.º ano terá a participação de 67 alunos e que uma visita de estudo que inclua todos os alunos de duas turmas do 5.º ano e todos os alunos de uma turma do 6.º ano terá a participação de 71 alunos.

b) Escreve um sistema de equações que permita determinar o número de alunos de cada turma do 5.º ano (valor de x) e o número de alunos de cada turma do 6.º ano (valor de y).

c) Resolve o sistema de equações.

(Adaptado do teste intermédio de Matemática 9ºano – Maio de 2011)

3- Observa a figura



Com base nos gráficos apresentados, escreve um sistema de duas equações do 1ºgrau a duas incógnitas que seja:

a) Possível e indeterminado;
b) Impossível;
c) Possível e determinado.

Adaptado de "*Matemática em ação 8*", Lisboa Editora

Anexo 8 –MATRIZ DA FICHA DE AVALIAÇÃO

Ano Letivo: 2011-2012

Questões	Alíneas	Conceitos e Procedimentos	Raciocínio e Resolução de Problemas	Comunicação Matemática	TOTAL DAS QUESTÕES
Questão 1.		**18**			**18**
Questão 2.	**a)**			**14**	**49**
	b)		**17**		
	c)	**18**			
Questão 3.	**a)**		**11**		**33**
	b)		**11**		
	c)		**11**		
TOTAL		**36**	**50**	**14**	**100%**

Anexo 9 Critérios de Correção da ficha de avaliação

1	……………………………………………………………………………………….	……..	18
	Responder corretamente………………………………………………	18	
	Resolver uma equação em ordem a uma incógnita……………	2	
	Substituir a expressão na outra equação…………………………	4	
	Resolver a equação……………………………………………………………	3	
	Substituir……………………………………………………………………………	4	
	Calcular…………………………………………………………………………….	3	
	Indicar a solução………………………………………………………………..	2	
2	……………………………………………………………………………………….	……..	49
a)	Responder corretamente…………………………………………….	14	
	Associar x e y a números de alunos e 4 e 5 a números de turmas e dar uma resposta incorreta……………………………	10	
	Dar outra resposta………………………………………………………………	0	
b)	Responder corretamente $\begin{cases} x+2y=67 \\ 2x+y=71 \end{cases}$ ou equivalente………	17	
	Apresentar apenas uma equação correta…………………………	9	
	Dar outra resposta……………………………………………………………..	0	
c)	Responder corretamente………………………………………………..	18	
	Resolver uma equação em ordem a uma incógnita……………..	2	
	Substituir a expressão na outra equação…………………………	4	
	Resolver a equação…………………………………………………………….	3	
	Substituir……………………………………………………………………………..	4	
	Calcular………………………………………………………………………………	3	
	Indicar a solução………………………………………………………………..	2	
3	……………………………………………………………………………………….	………	33
a)	Responder corretamente………………………………………………	11	
	Dar outra resposta……………………………………………………………..	0	
	Responder corretamente………………………………………………	11	
	Dar outra resposta……………………………………………………………….	0	
	Responder corretamente………………………………………………..	11	
	Dar outra resposta……………………………………………………………….	0	

Anexo 10 – Pedido de Autorização à escola

Exma. Sra.

Diretora do Agrupamento de Escolas

Eu, Rosa Maria de Oliveira Ferreira Pedro Dias, venho por este meio solicitar autorização para concretizar, na turma de 8.º ano desta escola, o projeto de investigação em educação "A aprendizagem de sistemas de duas equações a duas incógnitas no 8º. Ano de escolaridade".

Este projeto tem como objetivo compreender os processos usados por alunos do ensino básico em tarefas de diferente natureza (resolução de exercícios, resolução de problemas tarefas de exploração e tarefas de investigação), no estudo de sistemas de equações. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo com grande probabilidade resultar em benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos, nomeadamente no campo da Álgebra. Para a concretização do projeto serão utilizados alguns trabalhos, produzidos pelos alunos que forem autorizados a participar no estudo, como fichas de trabalho e relatórios bem como transcrições de algumas das discussões geradas pelos alunos e de entrevistas a alguns desses alunos, fora da sala de aula, e em horário previamente acordado com os alunos e respetivos encarregados de educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente para o objetivo desta investigação, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato.

Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste projeto de investigação e será salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Antecipadamente grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Monte-Abraão, 4 de outubro de 2011

Pede deferimento,

____

(Rosa Maria Dias)

Anexo 11 – Comunicação à diretora de turma

Exma. Sra.
Diretora de Turma do 8.º F

Eu, Rosa Maria de Oliveira Ferreira Pedro Dias, venho por este meio comunicar a minha intenção de concretizar, na turma F do 8.º ano desta escola, o projeto de investigação em educação "A aprendizagem de sistemas de duas equações a duas incógnitas no 8º. Ano de escolaridade".

Este projeto tem como objetivo compreender os processos usados por alunos do ensino básico em tarefas de diferente natureza (resolução de exercícios, resolução de problemas tarefas de exploração e tarefas de investigação), no estudo de sistemas de equações. Para a concretização do projeto serão utilizados alguns trabalhos, produzidos pelos alunos que forem autorizados a participar no estudo, como fichas de trabalho e relatórios bem como transcrições de algumas das discussões geradas pelos alunos e de entrevistas a alguns desses alunos, fora da sala de aula, e em horário previamente acordado com os alunos e respetivos encarregados de educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente para o objetivo desta investigação, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato.

Informo, ainda, que foi solicitada autorização à Diretora da escola e será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste projeto de investigação, sendo salvaguardado o anonimato (quer dos alunos, quer da escola).

Antecipadamente grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Monte-Abraão, 4 de outubro de 2011

Pede deferimento,

____

(Rosa Maria Dias)

Anexo 12 – Pedido de autorização aos encarregados de educação

Exmo. [a] Sr. (a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Rosa Maria de Oliveira Ferreira Pedro Dias, professora de Matemática da turma F do 8.º, venho por este meio solicitar autorização para a participação/colaboração do seu educando no projeto de investigação em educação intitulado "*A aprendizagem de sistemas de duas equações a duas incógnitas no 8.º Ano de escolaridade*" a realizar no segundo período.

Este projeto tem como objetivo compreender os processos usados por alunos do ensino básico em tarefas de diferente natureza (resolução de exercícios, resolução de problemas tarefas de exploração e tarefas de investigação), no estudo de sistemas de equações. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo com grande probabilidade resultar em benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos, nomeadamente no campo da Álgebra. Para a concretização do projeto serão utilizados alguns trabalhos, produzidos pelos alunos que forem autorizados a participar no estudo, como fichas de trabalho e relatórios bem como transcrições de algumas das discussões geradas pelos alunos e de entrevistas a alguns desses alunos, fora da sala de aula, e em horário previamente acordado com os alunos e respetivos encarregados de educação. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente para o objetivo desta investigação, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato.

Solicito o preenchimento da declaração em anexo.

Antecipadamente grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

Queluz, 10 de Fevereiro de 2012

A Professora de Matemática,

____

(Rosa Maria Dias)

AUTORIZAÇÃO

(Nome) ____,

encarregado de educação do aluno ____,

n.º ________ do 8.º ano, declaro que:

☐ Autorizo

☐ Não autorizo

(assinalar a opção correta com X)

O meu educando a participar no Projecto de Investigação "*A aprendizagem de sistemas de duas equações a duas incógnitas no 8.º Ano de escolaridade*" a realizar pela Professora Rosa Dias.

____/____/________
(data)

____
(assinatura)